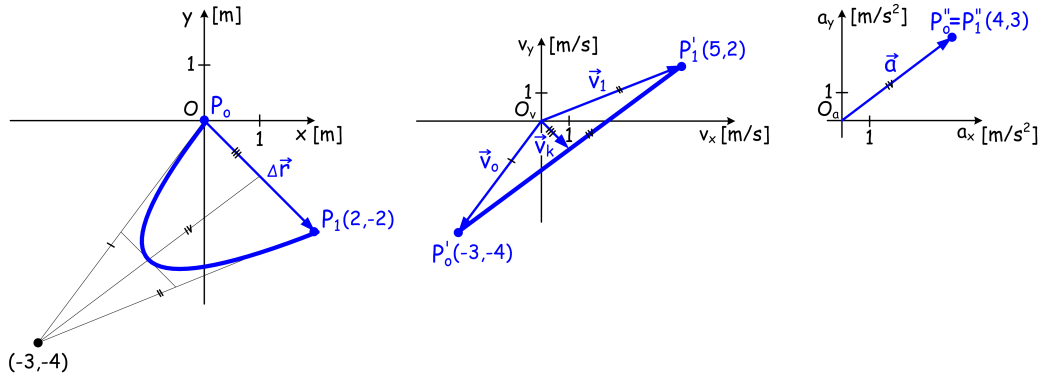


1 Ismert a $[0, t_1 = 2 \text{ s}]$ időintervallumban mozgó tömegpont (TP) $\vec{r} = \vec{b}t + \vec{c}t^2$ mozgástörvénye, melyben $\vec{b} = (-3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y) \text{ m/s}$ és $\vec{c} = (2\vec{e}_x + 1,5\vec{e}_y) \text{ m/s}^2$ adott.

a. Határozza meg a tömegpont időintervallum kezdetét jelölő időpillanatban elfoglalt (indítási) helyzetéből a t_1 idő múlva (intervallum végét jelölő időpillanatban) elért helyzetébe mutató $\Delta\vec{r}$ elmozdulásvektort!

b. Szerkessze meg az adott időintervallum alatt a tömegpont által leírt pályát, az ehhez tartozó sebességvektorok végpontjai által adott hodográfot, rajta a \vec{v}_k közepes sebességvektort, valamint a gyorsulásvektorokat tartalmazó ábrát!

Megoldás: $\Delta\vec{r} = (2\vec{e}_x - 2\vec{e}_y) \text{ m}$, $\vec{v}(t) = \vec{b} + 2\vec{c}t = (-3 + 4t)\vec{e}_x + (-4 + 3t)\vec{e}_y$, $\vec{a} = 2\vec{c} = (4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) \text{ m/s}^2$



2 Ismert a $[0, t_1 = \pi/2 \text{ s}]$ időintervallumban a mozgó tömegpont mozgástörvénye $\vec{r} = \vec{c}_1 \cos bt + \vec{c}_2 \sin bt$ alakban, ahol $b = 5 \text{ rad/s}$, $\vec{c}_1 = (3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) \text{ m}$ és $\vec{c}_2 = (\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) \text{ m}$.

a. Számítsa ki a mozgó tömegpont adott időintervallumbeli $\Delta\vec{r}$ elmozdulásvektorát és \vec{v}_k közepes sebességét!

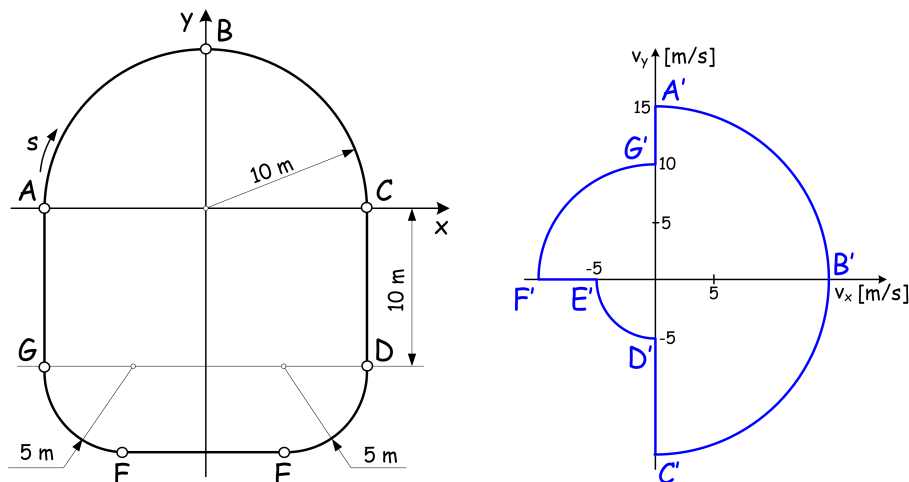
b. Határozza meg a tömegpont mozgástörvényéből $\vec{v}(t)$ és $\vec{a}(t)$ függvényeket!

c. Írja fel a vetületi mozgások egyenleteit!

Megoldás: $\Delta\vec{r} = (-3\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) \text{ m}$, $\vec{v}_k = (-\frac{6}{\pi}\vec{e}_x - \frac{6}{\pi}\vec{e}_y + \frac{4}{\pi}\vec{e}_z) \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\vec{v}(t) = -b\vec{c}_1 \sin bt + b\vec{c}_2 \cos bt$, $\vec{a}(t) = -b^2\vec{c}_1 \cos bt - b^2\vec{c}_2 \sin bt$ $x(t) = 3 \cos bt$, $y(t) = 4 \cos bt + \sin bt$, $z(t) = 2 \sin bt$

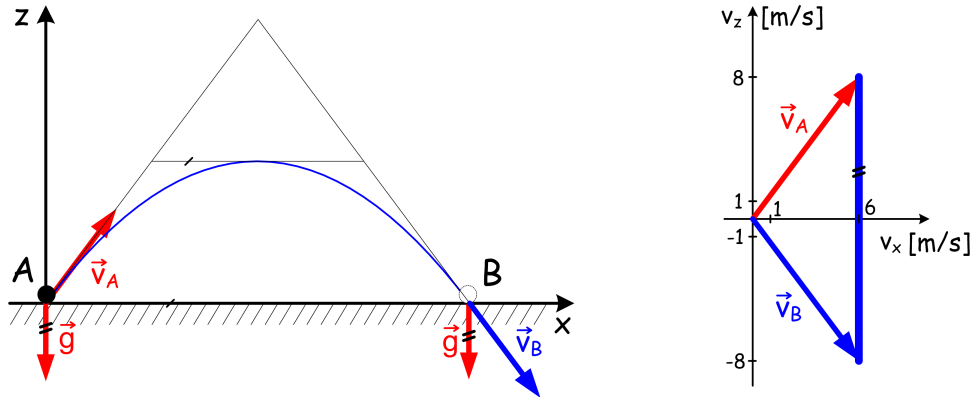
3 Egy tömegpont az ábrán vázolt pályán mozogva A pontból indulva a köríves szakaszokat állandó pályasebességgel, az egyenes szakaszokat állandó gyorsulással futja be. Ismertek az A, D és F pontban a $v_A = 15 \text{ m/s}$, $v_D = 5 \text{ m/s}$ és $v_F = 10 \text{ m/s}$ pillanatnyi sebességértékek. Rajzolja meg a hodográfot!

Megoldás:



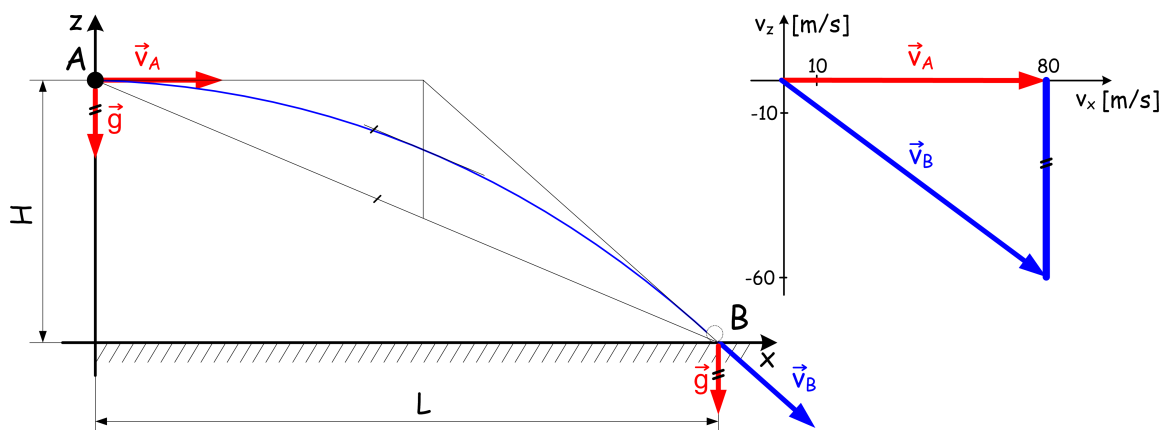
- 4 Vízszintes talajon vett A pontból $\vec{v}_A = (6\vec{e}_x + 8\vec{e}_z)$ m/s kezdősebességgel indított tömegpont a rá ható $\vec{g} = (-10\vec{e}_z)$ m/s² gravitációs gyorsulás hatására ismét talajt ér B jelű pontban.
- Számítsa ki a talajt érésig eltelt t_B időt!
 - Rajzolja meg a mozgás A és B pontok közötti pályáját és hodográfját!
 - Határozza meg az indítás és az ismételt talajt érés pillanatában a pálya ρ_A és ρ_B görbületi sugarát!

Megoldás: $\vec{v}_B = (6\vec{e}_x - 8\vec{e}_z)$ m/s, $t_B = 1,6$ s, $\rho_A = \rho_B = 16,6$ m



- 5 Vízszintes talaj felett H magasságban lévő A pontból vízszintes irányú, $v_A = 80$ m/s kezdősebességgel elhajított tömegpont $t_B = 6$ s múlva B pontban talajt ér miközben reá csak a $\vec{g} = (-10\vec{e}_z)$ m/s² gravitációs gyorsulás hat.
- Rajzolja meg a hodográfot, majd annak segítségével számítsa ki a kiindulási helyzet H magasságát, és a hajítás L távolságát (A és B pontok vízszintes távolságát) és szerkessze meg a leírt pályát!
 - Határozza meg a B pontban a pálya ρ_B görbületi sugarát!

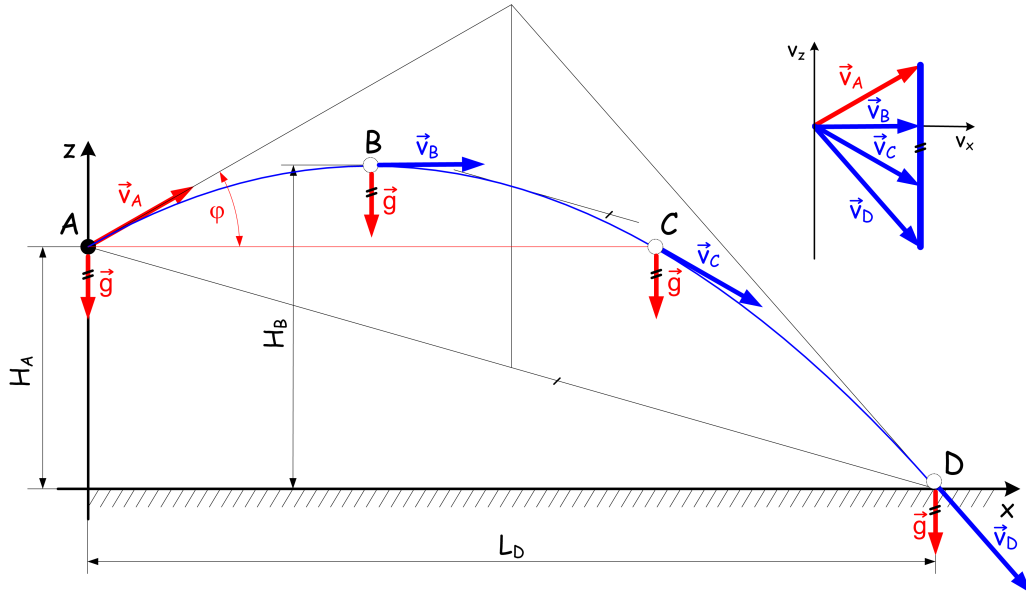
Megoldás: $\vec{v}_B = (80\vec{e}_x - 60\vec{e}_z)$ m/s, $H = 180$ m, $L = 480$ m, $\rho_B = 1250$ m



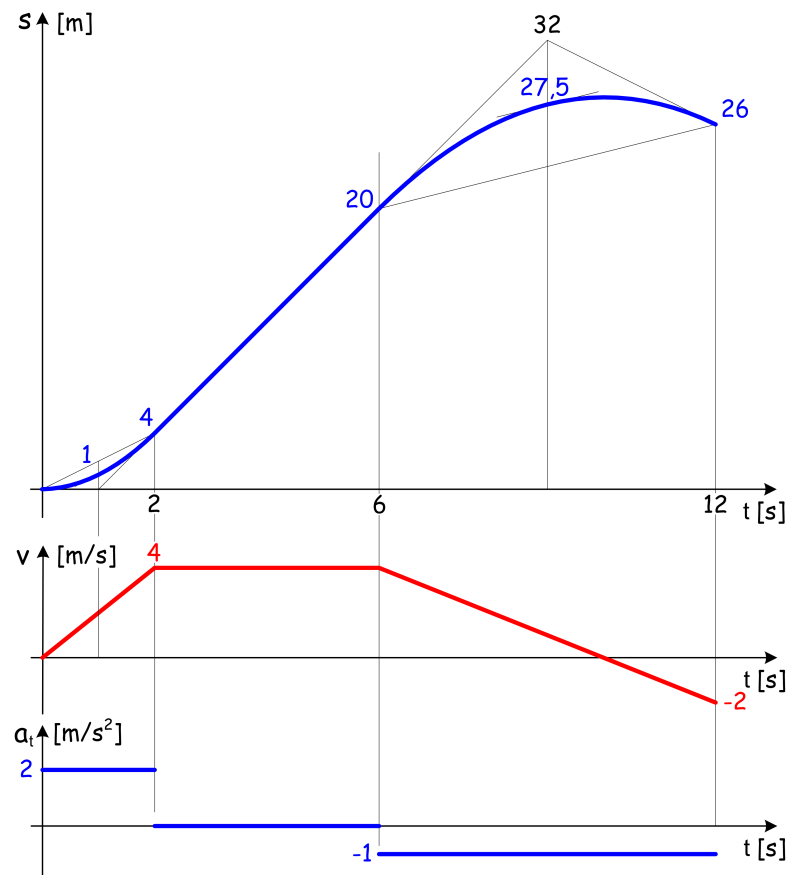
- 6 Vízszintes talaj felett $H_A = 100$ m magasságban lévő A pontból ferde hajítással ($\varphi = 30^\circ$) felfelé elindított $v_A = 80$ m/s kezdősebességű tömegpont állandó $g = 10$ m/s² gravitációs gyorsulás mellett mozog, míg végül D pontban talajt ér.
- Számítsa ki, hogy a TP mikor ér a pálya B deklópontjába ($t_B = ?$) és ekkor milyen H_B magasságba emelkedik!

- b. Határozza meg az A kiindulási ponttal egy magasságban lévő C pontban a TP pályának ρ_C görbületi sugarát!
- c. Számítsa ki, hogy a tömegpont mikor érkezik meg pályája C, illetve a földre érkezés D pontjába!
- d. Adja meg a hajtás vízszintes L_D vetületi távolságát!
- e. Szerkessze meg a ferde hajtás pályáját és hodográfját!

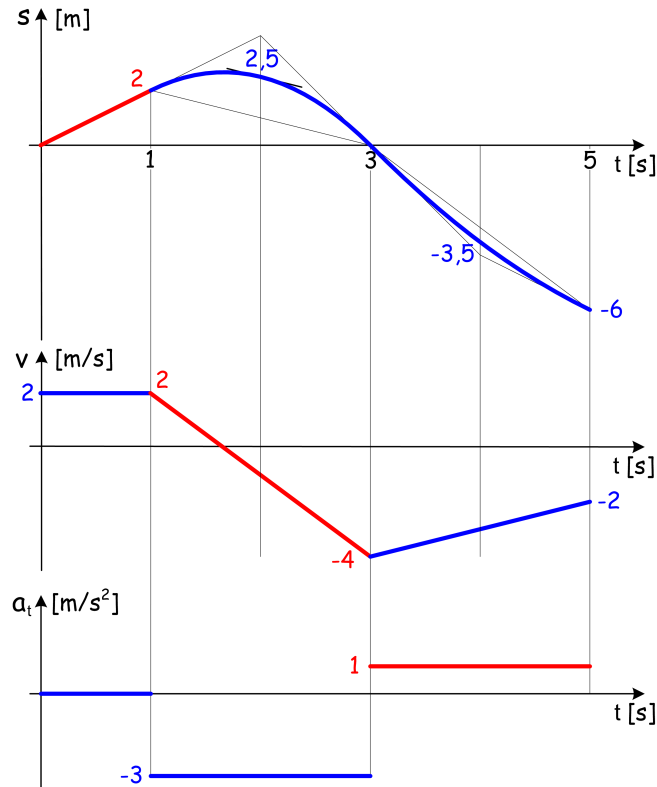
Megoldás: $t_B = 4\text{ s}$, $H_B = 180\text{ m}$, $\rho_C = 739,01\text{ m}$, $t_C = 8\text{ s}$, $t_D = 10\text{ s}$, $L_D = 692,82\text{ m}$



- 7 A tömegpont $[0, 12\text{ s}]$ intervallumon vizsgált mozgásának $v(t)$ sebesség-idő diagramja ismert. Rajzolja meg a hiányzó foronómiai görbéket, ha $s_0 = 0!$



- 8 A tömegpont $[0, 5 \text{ s}]$ intervallumon vizsgált mozgásának foronomiai görbéin a pirossal bejelölt részek ismertek. Rajzolja meg a hiányzó szakaszokat a jellemző metszések számértékeinek feltüntetésével!



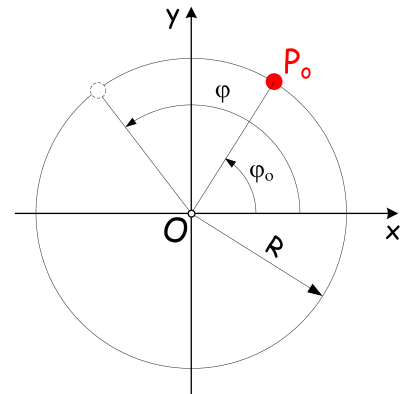
- 9 A $[0, t_1 = 2, 5 \text{ s}]$ időintervallumban vizsgált, $R = 5 \text{ m}$ sugarú körpályán mozgó TP a $\varphi = c_0 + c_1 t^2$ mozgástörvény szerint közlekedik, amelyben $c_0 = 1, 5 \text{ rad}$ és $c_1 = 4 \text{ rad/s}^2$.

a. Határozza meg adott időintervallumra a TP közepes sebességének v_k nagyságát!

b. Számítsa ki a t_1 időpillanatban a v_1 pályasebességet, az a_{1t} pályagyorsulást és az a_{1n} normális gyorsulást!

Megoldás:

$$v_k = 0,266 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_1 = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad a_{1t} = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad a_{1n} = 2000 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



- 10 Az $R = 2 \text{ m}$ sugarú körön egyenletesen gyorsuló körmozgást végző tömegpont B pontban $\vec{v}_B = (-4\vec{e}_y) \text{ m/s}$ sebességvektorral és $|\vec{a}_B| = 10 \text{ m/s}^2$ nagyságú gyorsulással bír.

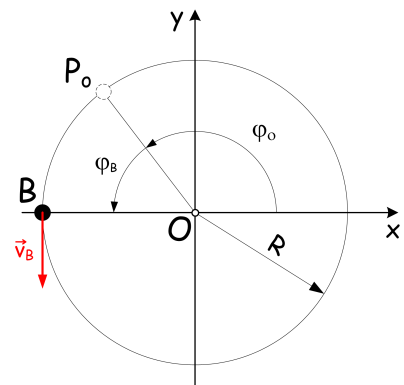
a. Határozza meg az \vec{a}_B gyorsulásvektort!

b. Számítsa ki mikor és honnan indul a TP!

c. Foronomiai görbék segítségével is határozza meg, hogy mikor és honnan indul a TP!

Megoldás:

$$\vec{a}_B = (8\vec{e}_x - 6\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad t_B = 0,6 \text{ s}, \quad s_B = 1,3 \text{ m}, \quad \varphi_B = 38,197^\circ$$

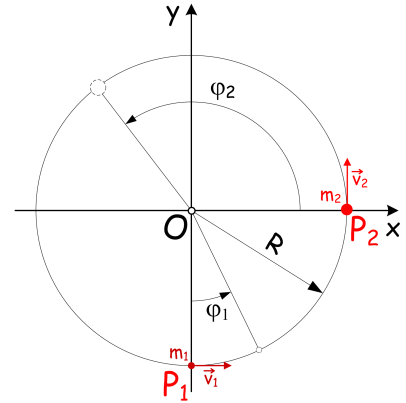


- 11 Az $R = 4$ m sugarú körön egyenletes körmozgást végző m_1 tömegpont P_1 pontból $v_1 = 1$ m/s sebességgel, a szintén egyenletes körmozgást végző m_2 tömegpont P_2 pontból $v_2 = 2$ m/s sebességgel indul.

a. Mekkora t idő múlva és s_1 , illetve s_2 út megtétele után éri utol m_2 tömegpont az m_1 tömegpontot?

Megoldás:

$$t = 6\pi, \quad s_1 = 6\pi = 18,849 \text{ m}, \quad s_2 = 12\pi = 37,699 \text{ m}$$

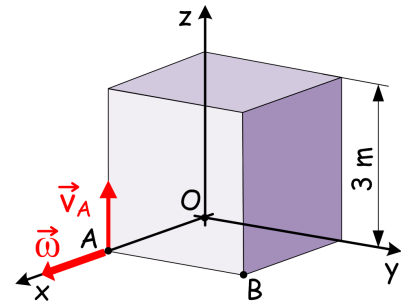


- 12 Ismeretes a merev test, az ábrán vázolt 3 m oldalhosszúságú kocka, A pontjának $\vec{v}_A = (2\vec{e}_z)$ m/s pillanatnyi sebessége, valamint a test pillanatnyi $\vec{\omega} = (4\vec{e}_x)$ rad/s szögsebessége.

a. Határozza meg adott időpillanatban a \vec{v}_B sebességvektort!

b. Milyen elemi mozgást végez a merev test?

Megoldás: $\vec{v}_B = (14\vec{e}_z) \frac{\text{m}}{\text{s}}$, elemi forgó mozgás (II.a)



- 13 Az $a = 0,5$ m élhosszúságú kocka pillanatnyi sebességállapota $\vec{\omega} = (2\vec{e}_y)$ rad/s szögsebességgel és az A pontnak $\vec{v}_A = (3\vec{e}_z)$ m/s sebességével adott.

a. Számítsa ki a B, C és D pontok sebességét!

b. Milyen elemi mozgást végez a merev test?

c. Határozza meg a pillanatnyi forgástengely O ponthoz legközelebbi P pontjának \vec{r}_P helyvektorát!

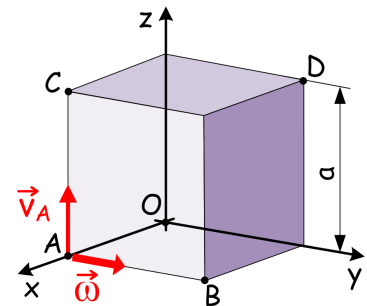
d. Határozza meg a mozgás pillanatnyi forgástengelyét!

Megoldás:

$$\vec{v}_B = (3\vec{e}_z) \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \vec{v}_C = (\vec{e}_x + 3\vec{e}_z) \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \vec{v}_D = (\vec{e}_x + 4\vec{e}_z) \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

elemi forgó mozgás (II.a), $\vec{r}_P = (2\vec{e}_x) \text{ m}$,

$$2\vec{e}_y \times \vec{r} + 4\vec{e}_z = \vec{0}$$



- 14 A rögzített időpillanatban ismeretes a merev test $\vec{r}_A = (4\vec{e}_x) \text{ m}$ helyvektorral kijelölt A pontjának $\vec{v}_A = (18\vec{e}_x + 9\vec{e}_y) \text{ m/s}$ sebessége, valamint a test pillanatnyi $\vec{\omega} = (1\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) \text{ rad/s}$ szögsebessége.

a. Milyen elemi mozgást végez a merev test?

b. Adja meg a vektorrendszer pillanatnyi forgástengelyének A ponthoz legközelebb eső D pontját kijelölő helyvektorát!

c. Határozza meg a pillanatnyi forgástengely egyenletét!

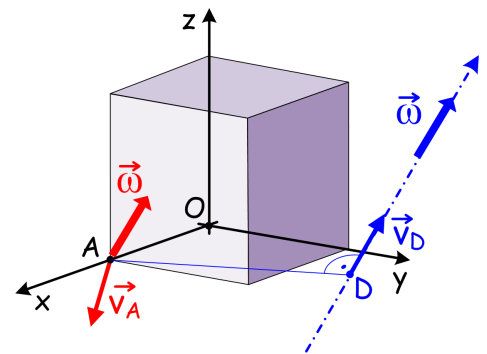
d. Számítsa ki a pillanatnyi sebességállapothoz tartozó forgástengely D pontjának sebességét!

Megoldás:

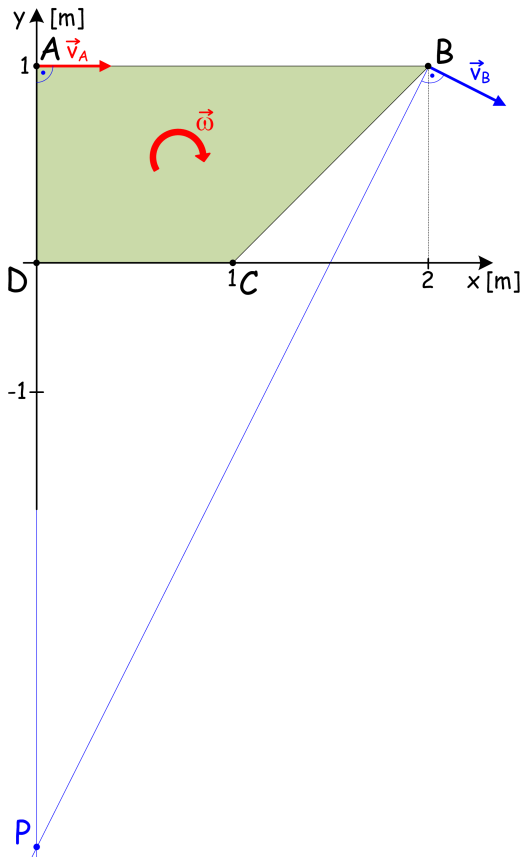
elemi csavarmozgás (II.b),

$$\vec{r}_{AD} = (-2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 3\vec{e}_z) \text{ m}, \quad \vec{r}_D = (2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 3\vec{e}_z) \text{ m},$$

$$(1\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) \times \vec{r} + 14\vec{e}_x - 7\vec{e}_y = \vec{0}, \quad \vec{v}_D = (4\vec{e}_x + 8\vec{e}_y + 8\vec{e}_z) \text{ m/s}$$



- 15 A síkmozgást végző merev test $\vec{\omega} = (-1\vec{e}_z)$ rad/s szögsebessége és A pontjának $\vec{v}_A = (4\vec{e}_x)$ m/s sebessége egy rögzített időpillanatban adott.



- Határozza meg számítással adott időpillanatban a merev test B pontjának \vec{v}_B sebességét!
- Szerkessze meg P sebességpólus helyét és olvassa le \vec{r}_P helyvektorát!
- Rajzolja meg a sebességábrát és adja meg \vec{v}_C és \vec{v}_D sebességvektorokat!

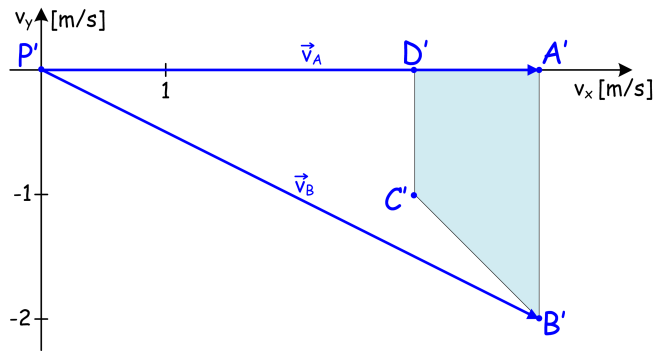
Megoldás:

$$\vec{v}_B = (4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\vec{r}_P = (-3\vec{e}_y) \text{ m},$$

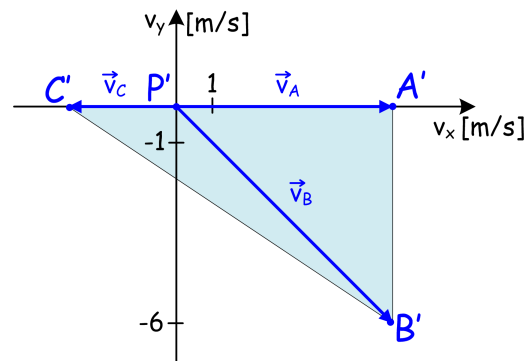
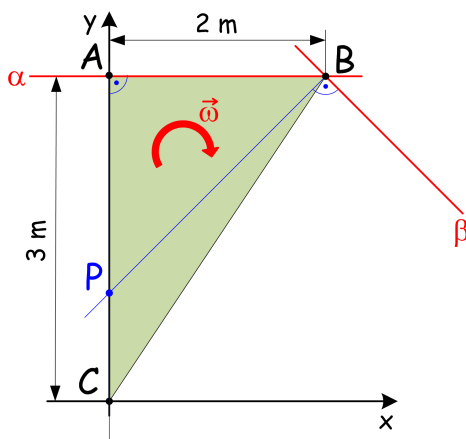
$$\vec{v}_C = (3\vec{e}_x - 1\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\vec{v}_D = (3\vec{e}_x) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



- 16 Egy rögzített időpillanatban adott a síkmozgást végző merev test $\vec{\omega} = (-3\vec{e}_z)$ rad/s szögsebessége, továbbá A pontjában a \vec{v}_A sebességvektor α jelű vízszintes és B pontjában a \vec{v}_B sebességvektor β jelű vízszintessel 45° -os szögű bezáró hatásvonala.

- Szerkessze meg P sebességpólus helyét a helyzetábrán és olvassa le \vec{r}_P helyvektorát!
- Rajzolja meg a sebességábrát és adja meg \vec{v}_A és \vec{v}_B és \vec{v}_C sebességvektorokat!



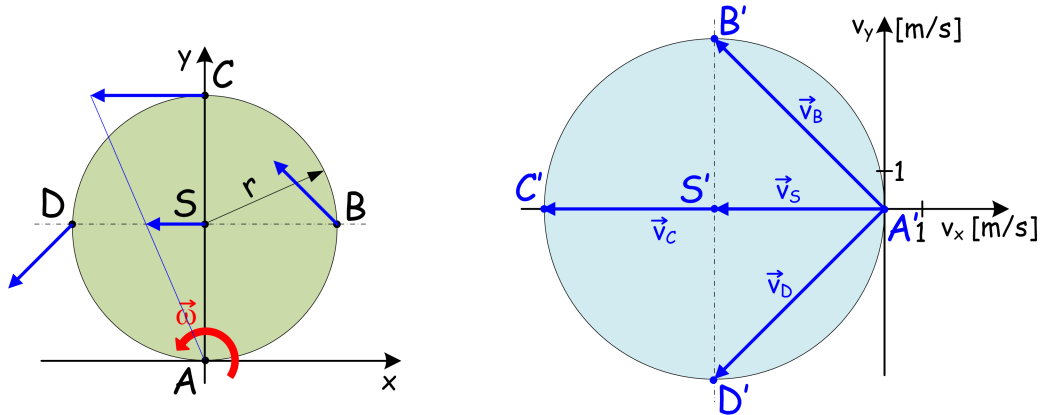
Megoldás: $\vec{r}_P = (1\vec{e}_y) \text{ m}$, $\vec{v}_A = (6\vec{e}_x) \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\vec{v}_B = (6\vec{e}_x - 6\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\vec{v}_C = (-3\vec{e}_x) \frac{\text{m}}{\text{s}}$

- 17 Egy rögzített időpillanatban az $r = 1,5 \text{ m}$ sugarú merev körlap síkmozgását az $\vec{\omega} = (3\vec{e}_z)$ rad/s szögsebességvektor és az A pontban adott $\vec{v}_A = \vec{0}$ sebességvektor definiálja.

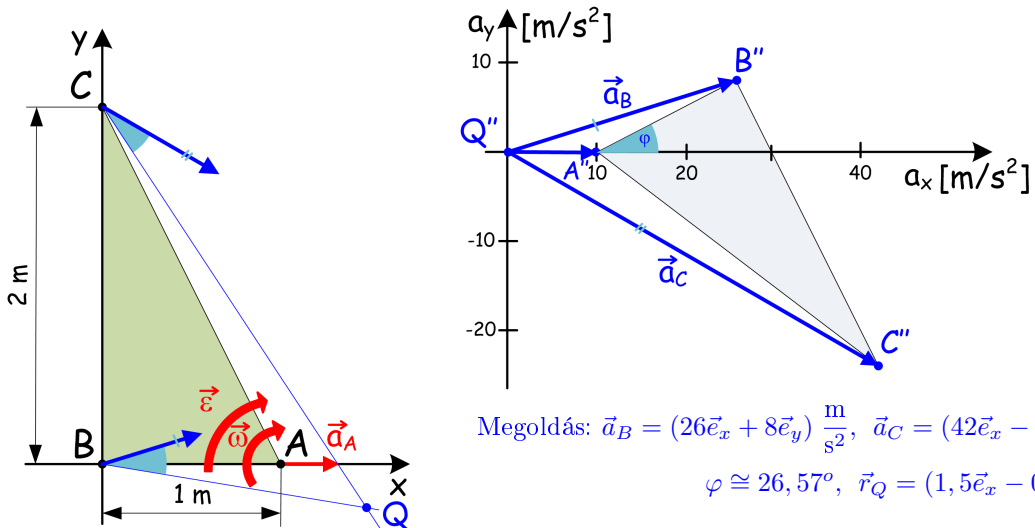
- a. Rajzolja meg a sebességábrát, adja meg a jelölt pontokban a sebességvektorokat és állapítsa meg a sebességpólus helyét!
b. Szemléltesse a sebességvektorokat a helyzetábrán is!

Megoldás:

$$P = A, \quad \vec{v}_B = (-4, 5\vec{e}_x + 4, 5\vec{e}_y) \frac{m}{s}, \quad \vec{v}_S = (-4, 5\vec{e}_x) \frac{m}{s}, \quad \vec{v}_C = 2\vec{v}_S = (-9\vec{e}_x) \frac{m}{s}, \quad \vec{v}_D = (-4, 5\vec{e}_x - 4, 5\vec{e}_y) \frac{m}{s}$$

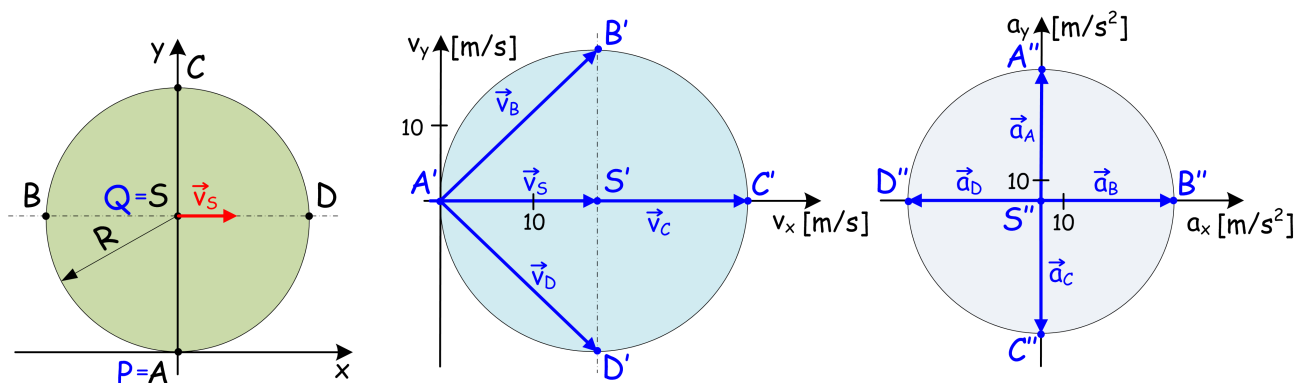


- 18 Egy rögzített időpillanatban a síkmozgást végző merev test pillanatnyi szögsebessége $\vec{\omega} = (-4\vec{e}_z)$ rad/s szöggyorsulása $\vec{\epsilon} = (-8\vec{e}_z)$ rad/s² és A pontbeli $\vec{a}_A = (10\vec{e}_x)$ m/s² gyorsulása ismert. Szerkessze meg a vonatkozó gyorsulásábrát, valamint a Q gyorsuláspólus helyét!



Megoldás: $\vec{a}_B = (26\vec{e}_x + 8\vec{e}_y) \frac{m}{s^2}$, $\vec{a}_C = (42\vec{e}_x - 24\vec{e}_y) \frac{m}{s^2}$,
 $\varphi \cong 26,57^\circ$, $\vec{r}_Q = (1,5\vec{e}_x - 0,25\vec{e}_y) m$

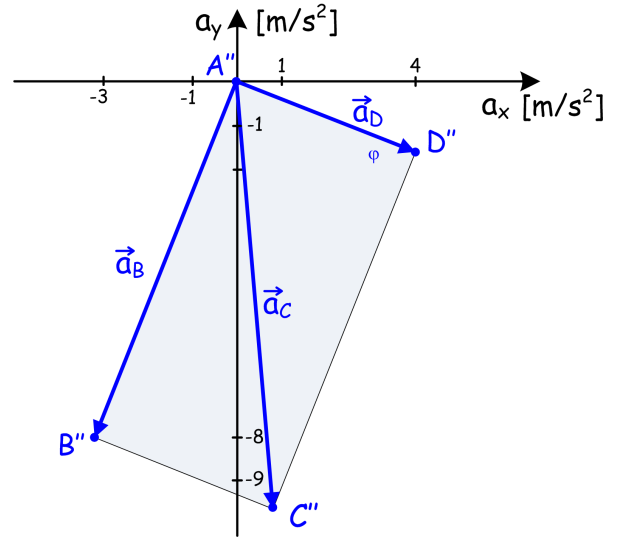
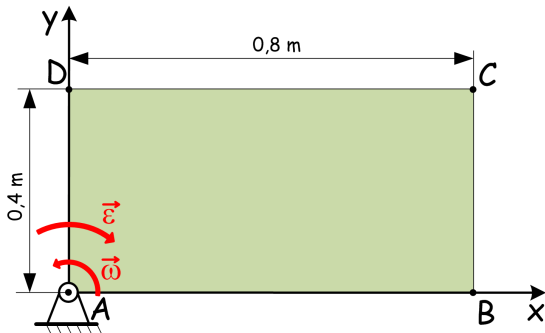
- 19 Az $R = 4 m$ sugarú korong vízszintes talajon gördül állandó $\vec{v}_S = (20\vec{e}_x)$ m/s súlyponti sebességgel. Rajzolja meg a sebességábrát, valamint a gyorsulásábrát és keresse meg a P sebességpólus és a Q gyorsuláspólus helyét!



$$\text{Megoldás: } \vec{v}_A = \vec{0}, \quad \vec{v}_B = (20\vec{e}_x + 20\vec{e}_y) \frac{m}{s}, \quad \vec{v}_C = (40\vec{e}_x) \frac{m}{s}, \quad \vec{v}_D = (20\vec{e}_x - 20\vec{e}_y) \frac{m}{s},$$

$$\vec{a}_A = (100\vec{e}_y) \frac{m}{s^2}, \quad \vec{a}_B = (100\vec{e}_x) \frac{m}{s^2}, \quad \vec{a}_C = (-100\vec{e}_y) \frac{m}{s^2}, \quad \vec{a}_D = (-100\vec{e}_x) \frac{m}{s^2}$$

- 20 A síkmozgást végző téglalap alakú merev test vázolt helyzetében a pillanatnyi $\vec{\omega} = (2\vec{e}_z)$ rad/s szögsebesség és az $\vec{\varepsilon} = (-10\vec{e}_z)$ rad/s² szöggyorsulás adott. Szerkessze meg a vonatkozó gyorsulásábrát!

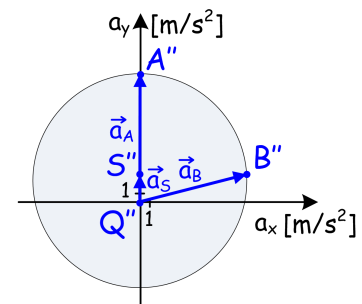
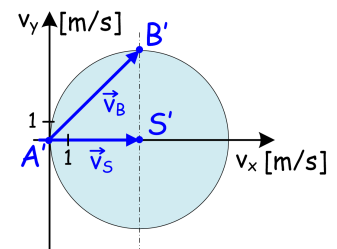
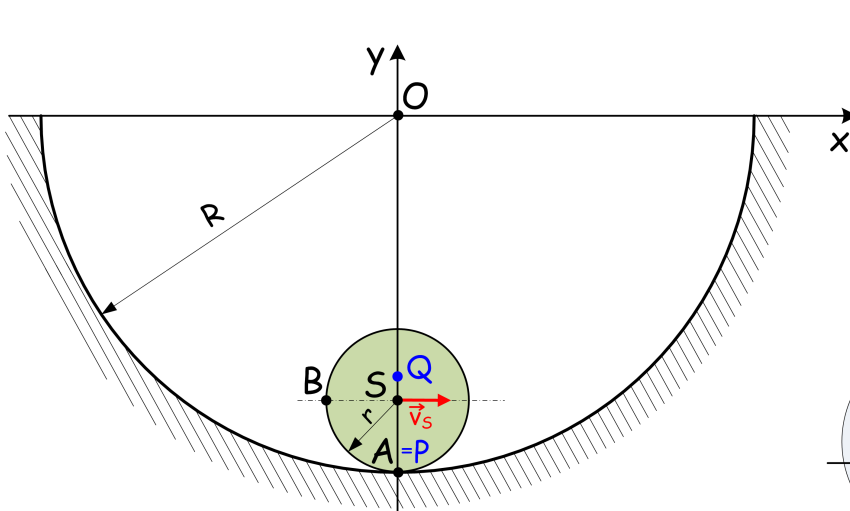


Megoldás:

$$\vec{a}_B = (-3, 2\vec{e}_x - 8\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{a}_C = (0, 8\vec{e}_x - 9, 6\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{a}_D = (4\vec{e}_x - 1, 6\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

- 21 Az $R = 5 \text{ m}$ sugarú íves belső felületén $r = 1 \text{ m}$ sugarú henger gördül miközben a vázolt helyzetben ismert az r sugarú henger S súlypontjának pillanatnyi $\vec{v}_S = (4\vec{e}_x)$ m/s sebessége és $a_{St} = 0$ a tangenciális gyorsulása.

- Számítsa ki az r sugarú henger pillanatnyi $\vec{\omega}$ szögsebességét és $\vec{\varepsilon}$ szöggyorsulását!
- Határozza meg vázolt helyzetben az r sugarú henger A pontjának \vec{v}_A és B pontjának \vec{v}_B pillanatnyi sebességét!
- Határozza meg vázolt helyzetben az r sugarú henger S súlypontjának \vec{a}_S és A pontjának \vec{a}_A és B pontjának \vec{a}_B pillanatnyi gyorsulását!
- Rajzolja meg a sebességábrát, valamint a gyorsulásábrát és keresse meg a P sebességpólus és a Q gyorsulás-pólus helyét!

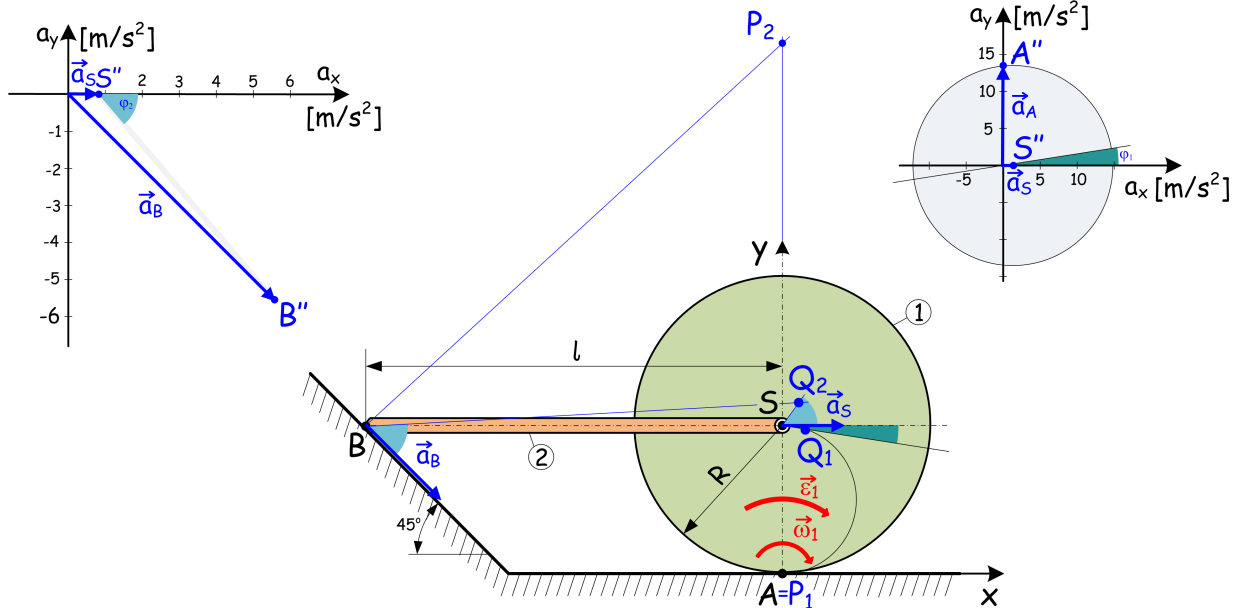


Megoldás:

$$\vec{\omega} = (-4\vec{e}_z) \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \vec{\varepsilon} = \vec{0}, \quad \vec{v}_A = \vec{0}, \quad \vec{v}_B = (4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\vec{a}_S = (4\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{a}_A = (20\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{a}_B = (16\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{r}_{SQ} = (0, 25\vec{e}_y) \text{ m}$$

- 22** Az $R = 0,4$ m sugarú korong vízszintes talajon gördül miközben S súlypontjához csuklóval kapcsolódó $l = 1,2$ m hosszúságú rúd B jelű másik vége 45° -os lejtőn súrlódásmentesen csúszik. A vázolt helyzetben ismert a korong pillanatnyi $\vec{\omega}_1 = (-6\vec{e}_z)$ rad/s szögsebessége és $\vec{\varepsilon}_1 = (-2\vec{e}_z)$ rad/s² szöggyorsulása.



- Határozza meg az 1 jelű korong P_1 sebességpólusát, a 2 jelű rúd P_2 sebességpólusát és a szerkezet S pontbeli \vec{v}_S és B pontbeli \vec{v}_B sebességét, valamint a rúd $\vec{\omega}_2$ pillanatnyi szögsebességét a vázolt helyzetben!
- Határozza meg a 2 jelű rúd S pontbeli \vec{a}_S és B pontbeli \vec{a}_B gyorsulását, valamint $\vec{\varepsilon}_2$ pillanatnyi szöggyorsulását a vázolt helyzetben!
- Rajzolja meg a gyorsulásábrákat és keresse meg a Q_1 és Q_2 gyorsuláspólusok helyét!

Megoldás:

$$P_1 = A, \quad \vec{r}_{P_2} = (1,6\vec{e}_y) \text{ m} \quad \vec{\omega}_2 = (2\vec{e}_z) \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \vec{v}_S = (2,4\vec{e}_x) \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \vec{v}_B = (2,4\vec{e}_x - 2,4\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \vec{a}_S = (0,8\vec{e}_x) \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$\vec{a}_A = (14,4\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{a}_B = (5,6\vec{e}_x - 5,6\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{\varepsilon}_2 = (4,6\vec{e}_z) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}, \quad \vec{r}_{AQ_1} = (0,022\vec{e}_x + 0,398\vec{e}_y) \text{ m},$$

$$\vec{r}_{AQ_2} = (0,085\vec{e}_x + 0,499\vec{e}_y) \text{ m}$$

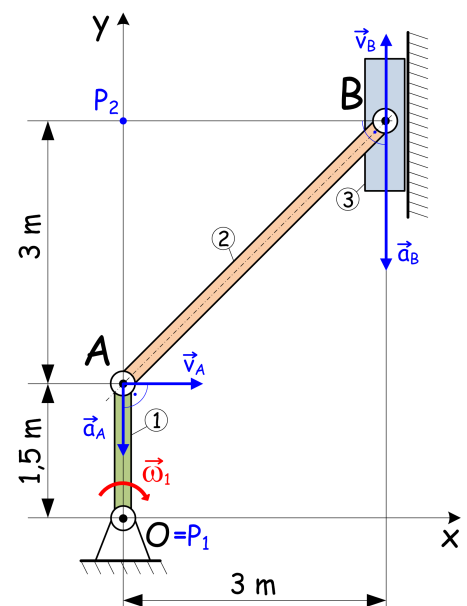
- 23** A vázolt forgattyús mechanizmus 1 jelű forgókarja állandó $\vec{\omega}_1 = (-2\vec{e}_z)$ rad/s szögsebességgel forog.

- Határozza meg a vázolt helyzetben a 2 jelű hajtórúd pillanatnyi P_2 sebességpólusát, $\vec{\omega}_2$ szögsebességét és B pontjának \vec{v}_B sebességét!
- Határozza meg a vázolt helyzetben a 2 jelű hajtórúd pillanatnyi Q_2 gyorsuláspólusát, $\vec{\varepsilon}_2$ szöggyorsulását és B pontjának \vec{a}_B gyorsulását!

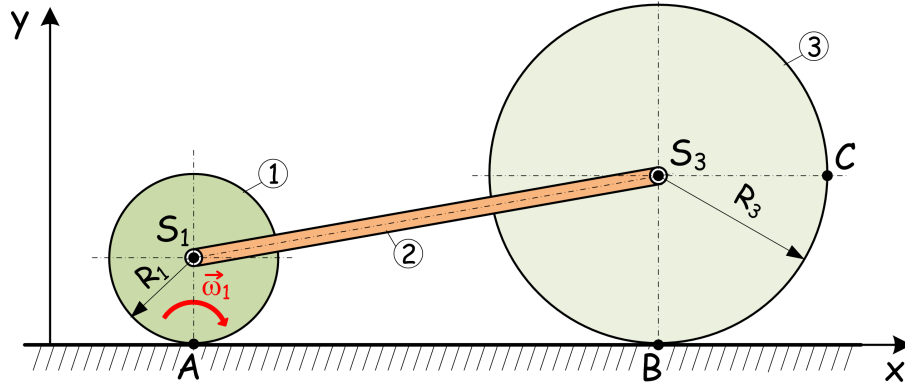
Megoldás:

$$\vec{r}_{P_2} = (4,5\vec{e}_y) \text{ m}, \quad \vec{v}_B = (3\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \vec{\omega}_2 = (\vec{e}_z) \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$\vec{r}_{Q_2} = (-3\vec{e}_x - 1,5\vec{e}_y) \text{ m}, \quad \vec{a}_B = (-12\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{\varepsilon}_2 = (-\vec{e}_z) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$



- 24** A vázolt tisztán gördülő jármű-dinamikai modell 1 jelű korongja állandó $\omega_1 = 5 \text{ rad/s}$ szögsebességgel forog. A modell 1 jelű, $R_1 = 2 \text{ m}$ sugarú korongja súlypontban elhelyezett csuklópontban merev rúdkapcsolattal bír a 3 jelű, $R_3 = 4 \text{ m}$ sugarú korong súlypontjában lévő csuklóponttal.



- a. Határozza meg a \vec{v}_A , \vec{v}_{S_1} , \vec{v}_B , \vec{v}_C és \vec{v}_{S_3} pillanatnyi sebességeket és \vec{a}_A , \vec{a}_{S_1} , \vec{a}_B , \vec{a}_C és \vec{a}_{S_3} pillanatnyi gyorsulásokat!
- b. Mekkora s távolságot tesz meg $t_1 = 30 \text{ s}$ alatt a szerkezet és ezalatt hányat fordul a két korong?

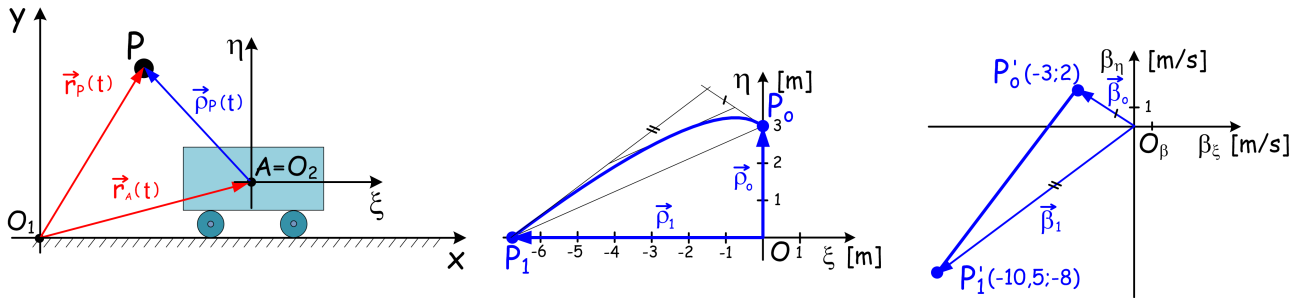
Megoldás:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{0}, \quad \vec{v}_C = (10\vec{e}_x - 10\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \vec{v}_{S_1} = \vec{v}_{S_3} = (10\vec{e}_x) \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \vec{a}_A = (50\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{a}_B = (25\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$\vec{a}_C = (-25\vec{e}_x) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{a}_{S_1} = \vec{a}_{S_3} = \vec{0}, \quad s = 300 \text{ m}, \quad n_1 = 23,87, \quad n_3 = 11,94$$

- 25** Ismeretes a mozgó jármű A pontjának $\vec{r}_A(t) = \vec{r}_{A_0} + \vec{b}t + \vec{c}t^2$ mozgástörvénye, valamint az m tömegpont $\vec{r}_P(t) = \vec{r}_{P_0} + \vec{b}t + \vec{c}t^2$ mozgástörvénye az xyz KR-ben. Legyen $\vec{r}_{A_0} = (3\vec{e}_x + \vec{e}_y) \text{ m}$; $\vec{r}_{P_0} = (3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) \text{ m}$; $\vec{b}_A = (4\vec{e}_x) \text{ m/s}$; $\vec{b} = (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \text{ m/s}$; $\vec{c}_A = (3,75\vec{e}_x) \text{ m/s}^2$; $\vec{c} = (-5\vec{e}_y) \text{ m/s}^2$!

- a. Határozza meg a $\xi\eta\zeta$ KR-ben a TP $\vec{\rho}_P(t)$ mozgástörvényét, valamint $t_0 = 0$ és $t_1 = 1 \text{ s}$ időpontokban a TP sebességét és gyorsulását!
- b. Szerkessze meg a TP mozgó járműhöz kötött $\xi\eta\zeta$ KR-beli $[t_0, t_1]$ időintervallumban leírt pályáját és hodo-gráfját!

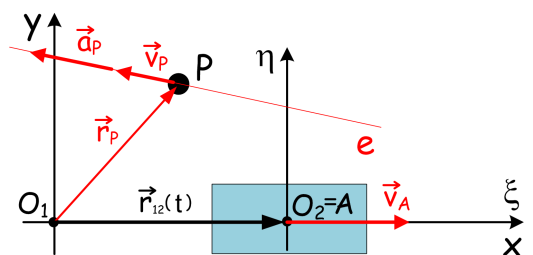


Megoldás: $\vec{\rho}_P(t) = [3\vec{e}_y + (-3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y)t + (-3,75\vec{e}_x - 5\vec{e}_y)t^2] \text{ m}$, $\vec{\beta}_0 = (-3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\vec{\beta}_1 = (-10,5\vec{e}_x - 8\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}}$,
 $\vec{\alpha}_0 = \vec{\alpha}_1 = (-7,5\vec{e}_x - 10\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{áll.}$

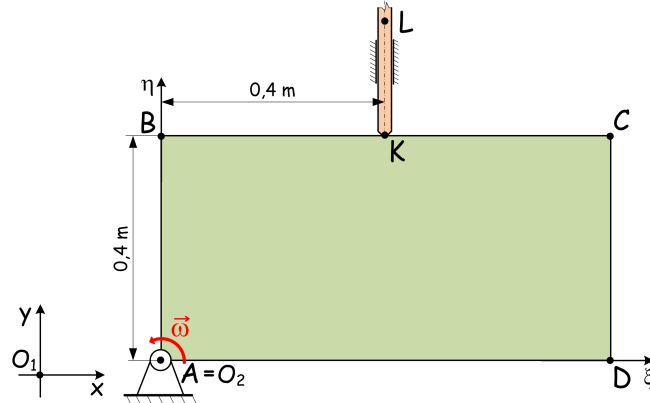
- 26** Az xyz KR x tengelye mentén állandó $\vec{v}_A = (6\vec{e}_x) \text{ m/s}$ sebességgel mozgó járműből figyeljük az egyenes pályán mozgó, adott időpillanatban az $\vec{r}_P = (6\vec{e}_x + 5\vec{e}_y) \text{ m}$ helyvektor által kijelölt helyen $\vec{v}_P = (-2\vec{e}_x + 1,5\vec{e}_y) \text{ m/s}$ sebességvektorral, és $\vec{a}_P = (-4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) \text{ m/s}^2$ gyorsulásvektorral rendelkező tömegpontot. Határozza meg a tömegpont $\xi\eta\zeta$ KR-ben észlelt $\vec{\beta}_P$ sebességét és $\vec{\alpha}_P$ gyorsulását!

Megoldás:

$$\vec{\beta}_P = (-8\vec{e}_x + 1,5\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \vec{\alpha}_P = (-4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



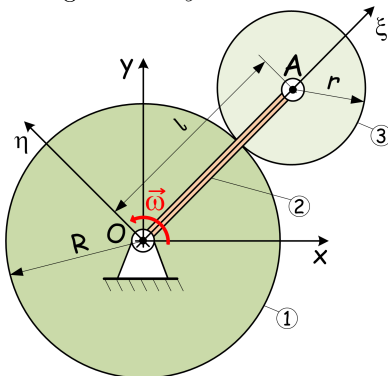
- 27** A hasáb alakú merev test a hozzákötött $\xi\eta\zeta$ KR-rel az A ponton átmenő z tengellyel párhuzamos tengely körül állandó $\vec{\omega} = (2\vec{e}_z)$ rad/s szögsebességgel forog, miközben az y tengellyel párhuzamosan vezetett KL rúd emeli, melynek K pontja a hasáb BC egyenesén csúszik.



- a. Határozza meg a vázolt helyzetben a rúd K pontjának \vec{v}_K pillanatnyi sebességét és \vec{a}_K pillanatnyi gyorsulását a xyz KR-ben!
- b. Határozza meg a vázolt helyzetben a rúd K pontjának $\vec{\beta}_K$ pillanatnyi sebességét és $\vec{\alpha}_K$ pillanatnyi gyorsulását a $\xi\eta\zeta$ KR-ben!

Megoldás: $\vec{v}_K = (0, 8\vec{e}_y) \frac{m}{s}$, $\vec{a}_K = (1, 6\vec{e}_y) \frac{m}{s^2}$, $\vec{\beta}_K = (0, 8\vec{e}_x) \frac{m}{s}$, $\vec{\alpha}_K = (1, 6\vec{e}_x) \frac{m}{s^2}$

- 28** Az $r = 0,3$ m sugarú körhengert az ábrán látható l hosszúságú kar segítségével legördítjük az $R = 0,6$ m sugarú álló körhengeren. A $\xi\eta\zeta$ KR-t az OA karhoz kötjük, amely állandó $\vec{\omega} = (10\vec{e}_z)$ rad/s szögsebességgel forog az álló xyz KR-ben.



- a. Számítsa ki az r sugarú körhenger szögsebességét a $\xi\eta\zeta$ és az xyz KR-ben!
- b. Mekkora az r sugarú körhenger szöggyorsulása az xyz KR-ben?

Megoldás:

$\vec{\omega}_{13} = (30\vec{e}_z) \frac{rad}{s}$, $\vec{\omega}_{23} = (20\vec{e}_z) \frac{rad}{s}$, $\vec{\epsilon}_{13} = \vec{0}$

- 29** Az $R = 0,5$ m sugarú korong a hozzákötött $\xi\eta\zeta$ KR-el együtt a ζ tengely körül állandó $\vec{\omega}_{12} = (5\vec{e}_z)$ rad/s szögsebességgel forog. Közben az $r = 0,1$ m sugarú henger a $\xi\eta\zeta$ KR-hez képest a b jelű tengely körül $\vec{\omega}_{23} = (2\vec{e}_\eta)$ rad/s pillanatnyi szögsebességgel és $\vec{\epsilon}_{23} = (3\vec{e}_\eta)$ rad/s² szöggyorsulással forog. $x_1 = 0,3$ m, $y_1 = 0,1$ m.

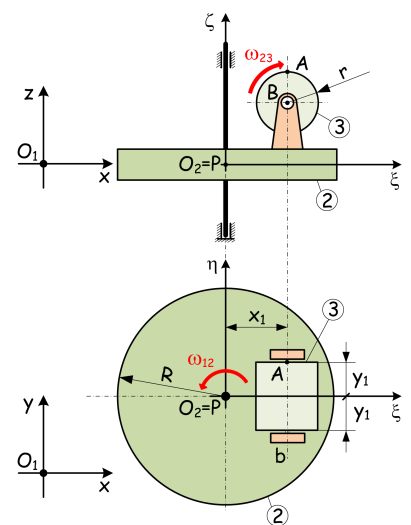
- a. Mekkora az r sugarú henger $\vec{\omega}_{13}$ szögsebessége és $\vec{\epsilon}_{13}$ szöggyorsulása a vizsgált időpillanatban az xyz KR-ben?
- b. Számítsa ki az r sugarú korongon lévő A pont pillanatnyi $\vec{\beta}_A$ sebességét és $\vec{\alpha}_A$ gyorsulását a $\xi\eta\zeta$ KR-ben!
- c. Határozza meg a \vec{v}_A sebességet és az \vec{a}_A gyorsulást az xyz KR-ben!

Megoldás:

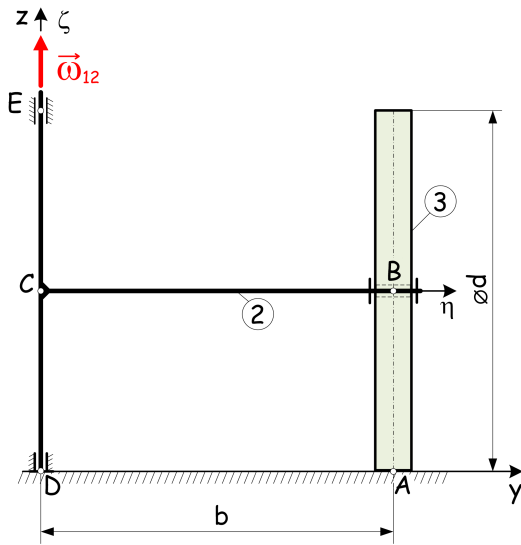
$\vec{\omega}_{13} = (2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z) \frac{rad}{s}$, $\vec{\epsilon}_{13} = (-10\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) \frac{rad}{s^2}$, $\vec{\beta}_A = (0, 2\vec{e}_x) \frac{m}{s}$,

$\vec{\alpha}_A = (0, 3\vec{e}_x - 0, 4\vec{e}_z) \frac{m}{s^2}$, $\vec{v}_A = (-0, 3\vec{e}_x + 1, 5\vec{e}_y) \frac{m}{s}$,

$\vec{a}_A = (-7, 2\vec{e}_x - 0, 5\vec{e}_y - 0, 4\vec{e}_z) \frac{m}{s^2}$



- 30** Adott időpillanatban vázolt szerkezet DE tengely körül, állandó $\vec{\omega}_{12} = (10\vec{e}_z)$ rad/s szögsebességgel forog az álló xyz KR-ben. A BC rúdon ($b = 2$ m) csapágyazott $d = 2$ m átmérőjű tárcsa pedig tisztán gördül a talajon. A $\xi\eta\zeta$ KR BC rúdhoz kötött.



- a. Számítsa ki a vázolt helyzetben a tárcsa szögsebességét a $\xi\eta\zeta$ és az xyz KR-ben!
b. Számítsa ki a vázolt helyzetben a tárcsa szöggyorsulását is a $\xi\eta\zeta$ és az xyz KR-ben!

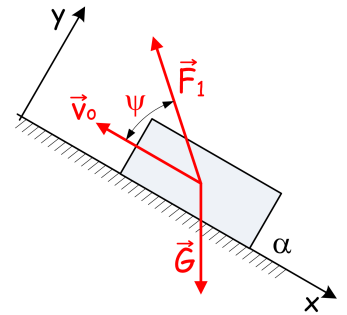
Megoldás:

$$\vec{\omega}_{13} = (-20\vec{e}_y + 10\vec{e}_z) \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \vec{\omega}_{23} = (-20\vec{e}_y) \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$\vec{\varepsilon}_{13} = (200\vec{e}_x) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}, \quad \vec{\varepsilon}_{23} = \vec{0}$$

- 31** Az α jelű kényszerpályán, lejtőn mozgó $\vec{G} = (60\vec{e}_x - 80\vec{e}_y)$ N súlyú TP kezdősebessége \vec{v}_o , a rá ható \vec{F}_1 erő pedig ψ szöget zár be a kényszerpályával. $\text{tg}\psi = 0,4$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ és a súrlódás elhanyagolható ($\mu = 0$)!

- a. Mekkora \vec{F}_1 erő esetén mozoghat állandó \vec{v}_o sebességgel a TP?
b. Számítsa ki a TP \vec{a} gyorsulását, valamint a fellépő \vec{F}_α kényszererőt adott $\vec{F}_1 = (-85\vec{e}_x + 34\vec{e}_y)$ N mellett!
c. Határozza meg, hogy mekkora \vec{F}_{1max} erő esetén mozoghat még a TP az α jelű kényszerpályán!



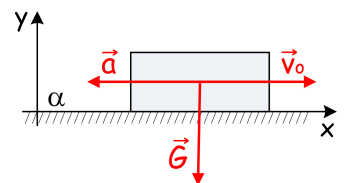
Megoldás: $\vec{F}_1 = (-60\vec{e}_x + 24\vec{e}_y)$ N, $\vec{a} = (-2, 5\vec{e}_x) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $\vec{F}_\alpha = (46\vec{e}_y)$ N,

$$\vec{F}_{1max} = (-200\vec{e}_x + 80\vec{e}_y)$$
 N

- 32** A vízszintes α jelű, érdes kényszerpályán $\vec{v}_o = (10\vec{e}_x)$ m/s kezdősebességgel indított $\vec{G} = (-800\vec{e}_y)$ N súlyú TP $\vec{a} = (-0, 4\vec{e}_x)$ m/s² gyorsulása állandó!

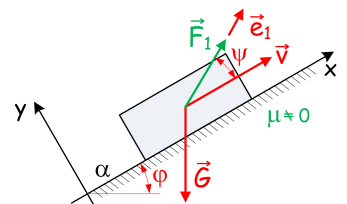
Számítsa ki a fellépő \vec{F}_α kényszererőt, valamint a mozgásbeli μ súrlódási tényezőt!

Megoldás: $\vec{F}_\alpha = (-32\vec{e}_x + 800\vec{e}_y)$ N, $\mu = 0,04$



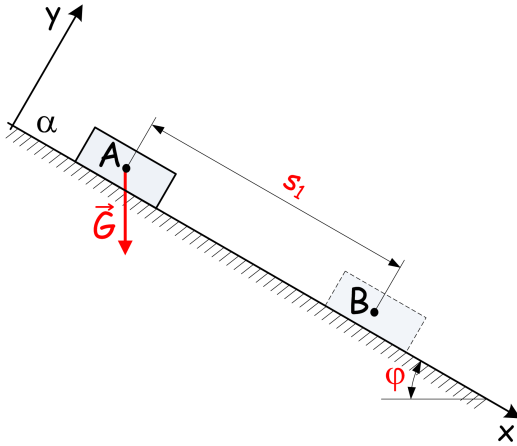
- 33** A vízszintessel $\varphi = 30^\circ$ -ot bezáró érdes lejtőn, az α jelű kényszerpályán pillanatnyi $\vec{v} = (8\vec{e}_x)$ m/s sebességgel mozog az $m = 10$ kg tömegű TP. A ráható \vec{F}_1 erő $\psi = 30^\circ$ szöget zár be a \vec{v} sebességvektorral, továbbá iránya is az ábrán látható $\vec{F}_1 = F_1\vec{e}_1$ módon rögzített. $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- a. Határozza meg, hogy a TP pillanatnyi a gyorsulása hogyan függ F_1 és μ paramétereiktől!
b. Határozza meg, hogy mekkora \vec{F}_{1max} erő esetén marad a TP az α jelű kényszerpályán!



Megoldás: $a = -10(\sin 30^\circ + \mu \cos 30^\circ) + \frac{F_1}{10}(\cos 30^\circ + \mu \sin 30^\circ)$, $F_1 \leq F_{1max} = 173,2$ N

- 34** A vízszintessel $\varphi = 30^\circ$ -os szöget bezáró, tökéletesen simának tekintett α jelű lejtőn álló helyzetből indulva csúszik le a $G = 600 \text{ N}$ súlyú TP. $g = 10 \text{ m/s}^2$.



- a. Mekkora a TP E_1 kinetikai energiája és v_1 sebessége $s_1 = 40 \text{ m}$ út megtétele után?
b. Határozza meg t_1 időt, amely alatt a TP megteszi a kijelölt s_1 utat!

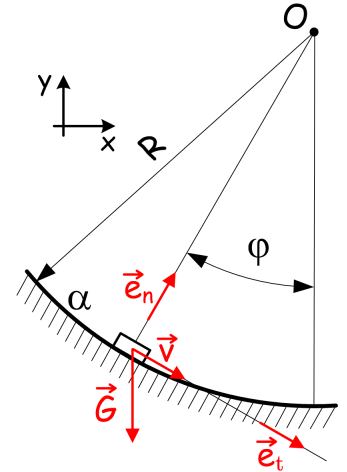
Megoldás:

$$E_1 = 12000 \text{ J}, \quad v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad t_1 = 4 \text{ s}$$

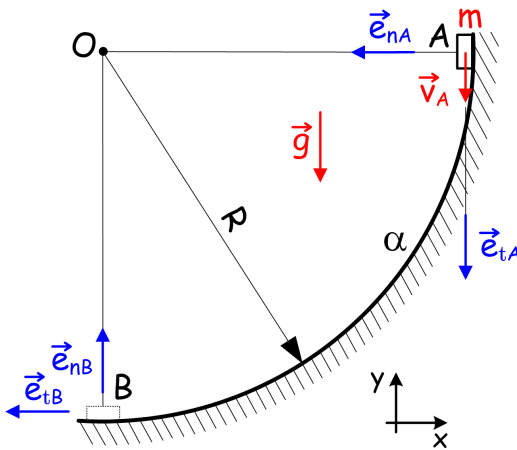
- 35** Az $R = 2 \text{ m}$ sugarú, körív alakú α jelű érdes ($\mu = 0,2$) kényszerpályán $G = 60 \text{ N}$ súlyú TP mozog $\vec{v} = (2\vec{e}_t) \text{ m/s}$ pillanatnyi sebességgel.
 $\vec{e}_t = 0,8\vec{e}_x - 0,6\vec{e}_y$; $\vec{e}_n = 0,6\vec{e}_x + 0,8\vec{e}_y$; $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Számítsa ki a TP \vec{a} gyorsulását, valamint a fellépő \vec{F}_α kényszererőt!

Megoldás: $\vec{a} = (4\vec{e}_t + 2\vec{e}_n) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $\vec{F}_\alpha = (-12\vec{e}_t + 60\vec{e}_n) \text{ N}$



- 36** Az $m = 4 \text{ kg}$ tömegű TP az $R = 0,8 \text{ m}$ sugarú köríves sima kényszerpályán mozog. TP A pontbeli $v_A = 3 \text{ m/s}$ sebessége ismert. $g = 10 \text{ m/s}^2$.



- a. Mekkora v_B sebességet ér el a TP a kényszerpálya B pontjában?
b. Számítsa ki az A és B pontokban fellépő $\vec{F}_{\alpha A}$ és $\vec{F}_{\alpha B}$ kényszererőket!

Megoldás:

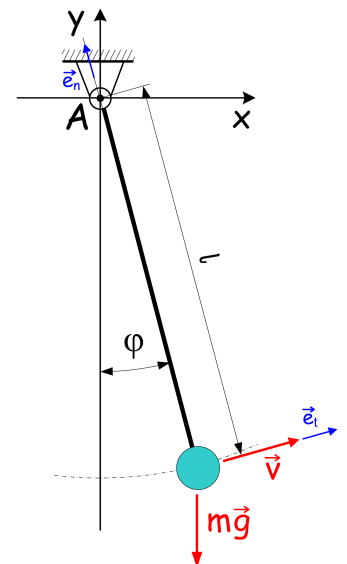
$$v_B = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \vec{F}_{\alpha A} = (45\vec{e}_{nA}) \text{ N}, \quad \vec{F}_{\alpha B} = (165\vec{e}_{nB}) \text{ N}$$

- 37** Az A pontban felfüggesztett, $l = 0,5 \text{ m}$ hosszúságú elhanyagolható tömegű nyújthatatlan fonál végére rögzített $m = 0,2 \text{ kg}$ tömegű TP pillanatnyi $v = 2 \text{ m/s}$ sebessége ismert: $\vec{v} = v\vec{e}_t$, $\varphi = 30^\circ$. $g = 10 \text{ m/s}^2$.

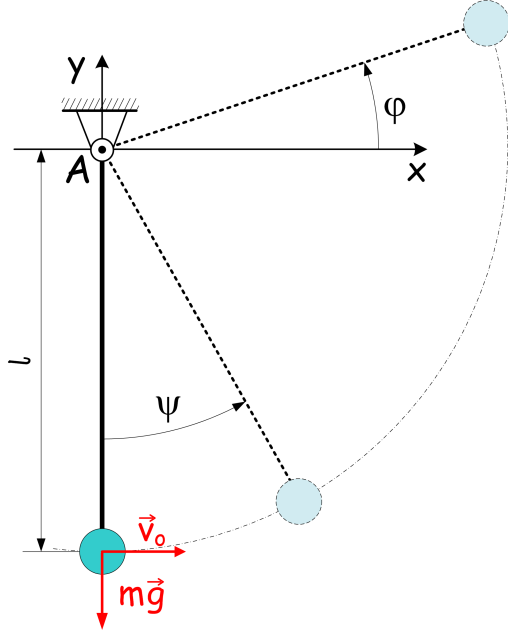
- a. Számítsa ki a TP pillanatnyi a_n normális és a_t pályagyorsulását!
b. Határozza meg \vec{F}_A fonálerőt!

Megoldás:

$$a_n = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad a_t = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{F}_A = (3,3\vec{e}_n) \text{ N}$$



- 38** Az A pontban felfüggesztett és $l = 1,4$ m hosszúságú elhanyagolható tömegű nyújthatatlan fonál végére rögzített $m = 3$ kg tömegű TP a pálya alsó helyzetéből $v_o = 7$ m/s kezdősebességgel indul. $g = 10$ m/s².



- Határozza meg $F_A = F_A(\psi)$ kapcsolatot, azaz hogyan függ a kényszererő (fonálerő) nagysága a ψ szögtől!
- Számítsa ki az F_A kényszererő nagyságát $\psi = 60^\circ$ esetben!
- Mekkora a fonál vízszintessel bezárt φ szöge a fonál meglazulásának kezdetekor?

Megoldás:

$$F_A = m\left(\frac{v_o^2}{l} - 2g + 3g \cos \psi\right),$$

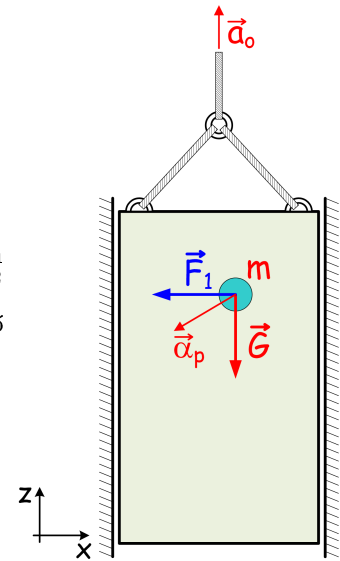
$$F_A = 90 \text{ N},$$

$$\varphi = 30^\circ (F_A = 0)$$

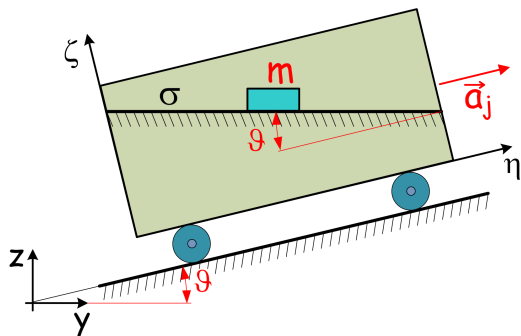
- 39** Az $\vec{a}_o = a_{oz}\vec{e}_z$ gyorsulással függőlegesen mozgó felvonóban a P pontban elhelyezkedő, $m = 2$ kg tömegű és a felvonóban $\vec{\alpha}_P = (-3\vec{e}_x - 2\vec{e}_z)$ m/s² gyorsulással mozgó TP-ra a $\vec{G} = m\vec{g}$ súlyerő mellett egy $\vec{F}_1 = -F_1\vec{e}_x$ erő is hat. $g = 10$ m/s².

- Adja meg a P anyagi pontra működő \vec{a}_{Psz} szállító gyorsulást! !
- Mekkora a felvonó \vec{a}_o gyorsulása?
- Határozza meg a TP-ra ható \vec{F}_1 erőt!

Megoldás: $\vec{a}_{Psz} = \vec{a}_o$, $\vec{a}_o = (-8\vec{e}_z) \frac{m}{s^2}$, $\vec{F}_1 = (-6\vec{e}_x) \text{ N}$



- 40** A vízszintessel ϑ szöget bezáró lejtőn ($\sin \vartheta = \frac{5}{13}$, $\cos \vartheta = \frac{12}{13}$) állandó $\vec{a}_j = (1, 2\vec{e}_y + 0, 5\vec{e}_z)$ m/s² gyorsulással haladó mozgást végző járműben ugyancsak ϑ szöggel jellemezhető σ jelű érdes kényszerpálya van kialakítva. Adott időpillanatban a jármű sebessége, valamint a járműben kialakított kényszerpályára helyezett, $m = 10$ kg tömegű TP járműhöz viszonyított sebessége is zérus.



- Számítsa ki a TP járműhöz viszonyított, relatív \vec{a} gyorsulását és \vec{F}_σ kényszererőt, ha σ kényszerpálya sima ($\mu_o = \mu = 0$)!
- Mekkora μ_o^{min} nyugvásbanél sűrűdési tényező mellett maradhat a TP relatív nyugalomban a σ jelű kényszerpályán?
- Számítsa ki a TP járműhöz viszonyított \vec{a} gyorsulását és \vec{F}_σ kényszererőt, ha $\mu_o = 0,11$ és $\mu = 0,1$!

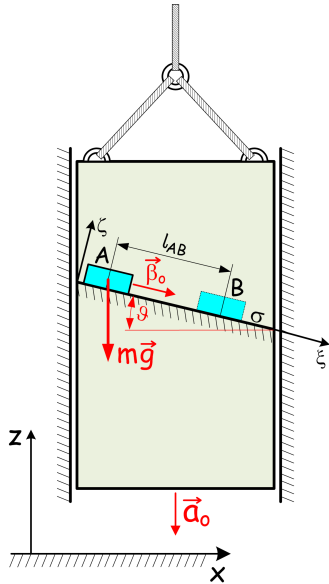
Megoldás:

$$\vec{a} = (-1, 2\vec{e}_y) \frac{m}{s^2}, \quad \vec{F}_\sigma = (105\vec{e}_z) \text{ N},$$

$$\mu_o^{min} = 0,11428,$$

$$\vec{a} = (-0,15\vec{e}_y) \frac{m}{s^2}, \quad \vec{F}_\sigma = (10,5\vec{e}_y + 105\vec{e}_z) \text{ N}$$

- 41 Az $\vec{a}_o = (-2\vec{e}_z) \text{ m/s}^2$ állandó gyorsulással süllyedő felvonóban a vízszintessel $\vartheta = 20^\circ$ szöget bezáró érdes lejtőn ($\mu = 0,1$), a σ jelű kényszerpályán mozgó $m = 4 \text{ kg}$ tömegű TP felvonóban észlelt kezdeti sebessége, az A helyzetbeli $\vec{\beta}_o = (0,8\vec{e}_\xi) \text{ m/s}$ sebesség ismert. A TP a σ kényszerpályán mozogva B jelű helyzetbe jut $l_{AB} = 1,2 \text{ m}$ út megtétele után.



- Számítsa ki A helyzetben a TP felvonóhoz viszonyított, relatív \vec{a} gyorsulását, az álló xyz KR-ben észlelt \vec{a} gyorsulást és az \vec{F}_σ kényszererőt!
- Mekkora t_1 idő múlva lesz a TP sebessége $\vec{\beta}_1 = (2,4\vec{e}_\xi) \text{ m/s}$?
- Számítsa ki az \vec{F}_σ kényszererő és \vec{F}_{sz} szállítóerő $\xi\eta\zeta$ KR-ben értelmezett W_σ és W_{sz} munkáját $l_{AB} = 1,2 \text{ m}$ távon!
- Számítsa ki B helyzetben észlelhető $\vec{\beta}_B$ relatív sebességet az $\xi\eta\zeta$ KR-ben!
- Mekkora \vec{a}_o^* gyorsulásnál válik el a TP a σ jelű kényszerpályától?

Megoldás:

$$\vec{\alpha} = (1,984\vec{e}_\xi) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{a} = (1,864\vec{e}_x - 2,679\vec{e}_z) \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

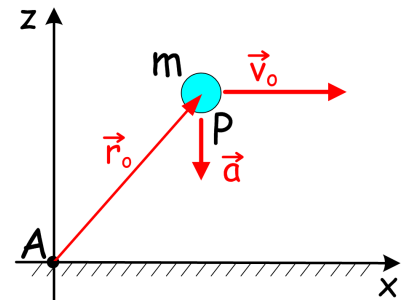
$$\vec{F}_\sigma = (-3,007\vec{e}_\xi + 30,07\vec{e}_\zeta) \text{ N},$$

$$t_1 = 0,806 \text{ s}, \quad W_\sigma = -3,608 \text{ Nm}, \quad W_{sz} = -3,283 \text{ Nm},$$

$$\vec{\beta}_B = (2,324\vec{e}_\xi) \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \text{elválás esete: } \vec{a}_o^* = \vec{g} \quad (F_{\sigma\zeta} = 0)$$

- 42 Az $m = 15 \text{ kg}$ tömegű TP állandó $\vec{a} = (-10\vec{e}_z) \text{ m/s}^2$ gyorsulással mozog, a $t_o = 0$ kezdeti időpillanatban az $\vec{r}_o = (6\vec{e}_x + 4\vec{e}_z) \text{ m}$ helykoordinátával adott helyen tartózkodik és $\vec{v}_o = (5\vec{e}_x) \text{ m/s}$ kezdősebességgel bír.

- Írja fel a tömegpont \vec{I} impulzusát és az xyz KR A kezdőpontjára vonatkozó $\vec{\Pi}_A$ perdületét az idő függvényében!
- Számítsa ki $t_1 = 2 \text{ s}$ időpillanatban a tömegpont \vec{I}_1 impulzusát és $\vec{\Pi}_{A1}$ perdületét!

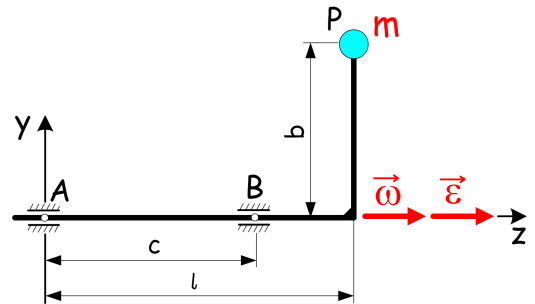


Megoldás:

$$\vec{I}(t) = 75\vec{e}_x - 150t\vec{e}_z, \quad \vec{\Pi}_A = (300 + 900t + 375t^2)\vec{e}_y, \quad \vec{I}_1 = (75\vec{e}_x - 300\vec{e}_z) \frac{\text{kgm}}{\text{s}}, \quad \vec{\Pi}_{A1} = (3600\vec{e}_y) \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$$

- 43 Az m tömegű TP egy csapágyakon forgó elhanyagolható tömegű rúdszerkezethez van rögzítve. A szerkezet pillanatnyi szögsebessége $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$, szöggyorsulása $\vec{\varepsilon} = \varepsilon\vec{e}_z$.

- Adja meg a szerkezet \vec{I} impulzusát és a koordinátatengelyekre számított Π_x , Π_y és Π_z impulzusnyomatékait adó képleteket, mint az m , ω és ε függvényeit!
- Határozza meg a \vec{K} kinetikai vektort és a koordinátatengelyekre számított D_x , D_y és D_z kinetikai nyomatékokat is!



Megoldás:

$$\vec{I} = -mb\omega\vec{e}_x, \quad \Pi_x = 0, \quad \Pi_y = -mbl\omega, \quad \Pi_z = mb^2\omega,$$

$$\vec{K} = -mb\varepsilon\vec{e}_x - mb\omega^2\vec{e}_y,$$

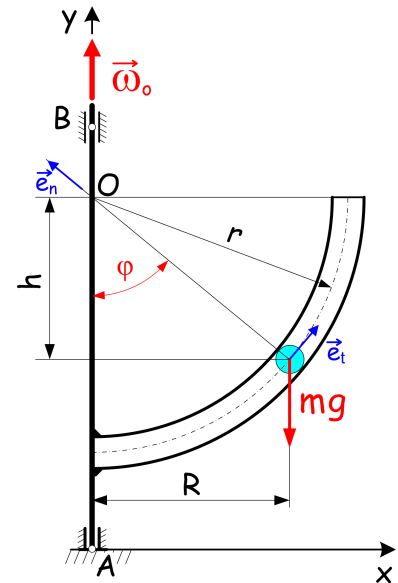
$$D_x = mbl\omega^2, \quad D_y = -mbl\varepsilon, \quad D_z = mb^2\varepsilon$$

44 Az y tengely körül állandó $\vec{\omega}_o = (5\vec{e}_y)$ rad/s szögsebességgel forgó $r = 0,5$ m sugarú körív középvonalú, sima csőben elhelyezkedő $m = 6$ kg tömegű TP a csőhöz képest pillanatnyi nyugalomban van. A TP kezdeti helyzetét az y tengelytől mért R sugárral is jellemezhetjük. $g = 10$ m/s².

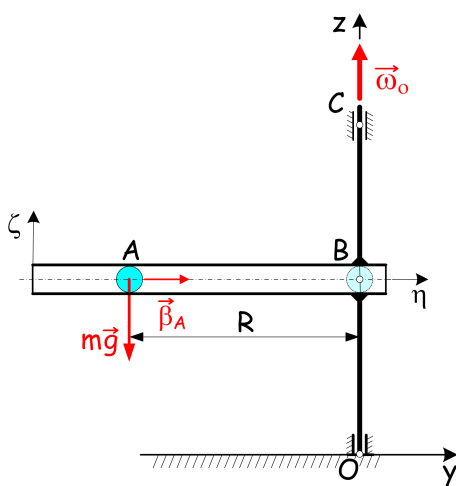
- Határozzuk meg, hogy mekkora $R = R_o$ sugár esetén maradhat a TP a csőhöz képest tartós nyugalomban!
- Mekkora a TP pillanatnyi $\vec{\alpha}$ gyorsulása, ha $R = 0,4$ m?

Megoldás:

$$R = 0,3 \text{ m, vagy } (R \equiv 0), \vec{\alpha} = (-2\vec{e}_t) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = (-1,2\vec{e}_x - 1,6\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



45 Az O és C pontokban csapágyazott, függőleges tengely körül állandó $\vec{\omega}_o = (8\vec{e}_z)$ rad/s szögsebességgel forgó sima belsejű csőben a beleillő $G = 50$ N súlyú TP mozog. A vázolt helyzetben, $R = 0,5$ m sugárnál a tömegpont csőhöz viszonyított sebessége $\vec{\beta}_A = (5\vec{e}_y)$ m/s.



- Határozza meg a vázolt helyzetben lévő csőről az A pontban tartózkodó TP-ra ható \vec{F}_A kényszererőt, és a TP $\vec{\alpha}_A$ gyorsulását!
- Mekkora lesz a B pontba jutó TP csőhöz viszonyított $\vec{\beta}_B$ sebessége?
- Számítsa ki azt a legkisebb $\vec{\beta}_A^{min}$ sebességet, mellyel a TP-ot indítva az már elmegy a B jelű pontig!

Megoldás:

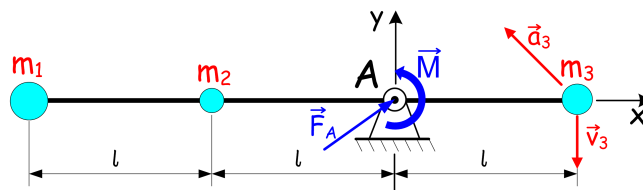
$$\vec{F}_A = (-400\vec{e}_x + 50\vec{e}_z) \text{ N, } \vec{\alpha}_A = (-32\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$\vec{\beta}_B = (3\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{\beta}_A^{min} = (4\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

46 A tömegpontrendszert (TPR) súlytalan rúdon elhelyezkedő és $m_1 = 16$ kg, $m_2 = 4$ kg és $m_3 = 8$ kg tömeggel bíró TP-ok alkotják ($l = 1,5$ m). Az m_3 tömegű TP vázolt helyzetben $\vec{v}_3 = (-3\vec{e}_y)$ m/s pillanatnyi sebességgel és $\vec{a}_3 = (-6\vec{e}_x + 6\vec{e}_y)$ m/s² pillanatnyi gyorsulással rendelkezik. $\vec{g} = (-10\vec{e}_y)$ m/s².

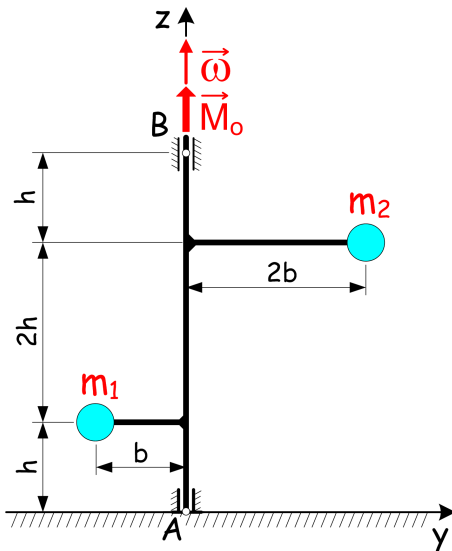
- Számítsa ki a TPR \vec{I} impulzusát és A pontra számított $\vec{\Pi}_A$ perdületét!
- Számítsa ki az \vec{F}_A csapágyerőt (támasztóerőt) és az \vec{M} hajtónyomatékot!



Megoldás:

$$\vec{I} = (84\vec{e}_y) \frac{\text{kgm}}{\text{s}}, \vec{\Pi}_A = (-342\vec{e}_z) \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}, \vec{F}_A = (168\vec{e}_x + 112\vec{e}_y) \text{ N, } \vec{M} = (264\vec{e}_z) \text{ Nm}$$

- 47) Az $m_1 = 5 \text{ kg}$ és $m_2 = 5 \text{ kg}$ tömegpontokból és elhanyagolható tömegű rudakból összerakott merev rendszer a z tengely körül, csapágyakon forog. A vázolt pillanatnyi helyzetben a tömegpontok az yz síkba esők, és $\vec{\omega} = (2\vec{e}_z) \text{ rad/s}$ a TPR pillanatnyi szögsebessége. A tengely felső végén az ismert $\vec{M}_0 = (0, 75\vec{e}_z) \text{ Nm}$ hajtónyomaték biztosítja a hajtást. Az ellenállásoktól eltekintünk. $h = b = 0,1 \text{ m}$ és $\vec{g} = (-10\vec{e}_z) \text{ m/s}^2$.



- Számítsa ki vázolt helyzetben a TPR $\vec{\epsilon}$ szöggyorsulását!
- Határozza meg a vázolt helyzetben az m_1 és m_2 tömegek \vec{a}_1 és \vec{a}_2 gyorsulásait!
- Számítsa ki vázolt helyzetben az \vec{F}_A és \vec{F}_B csapágyerőket!

Megoldás:

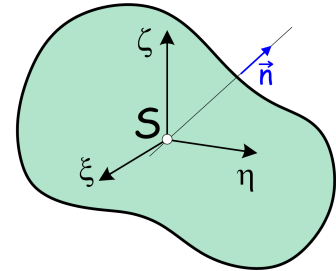
$$\vec{\epsilon} = (3\vec{e}_z) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2},$$

$$\vec{a}_1 = (0, 3\vec{e}_x + 0, 4\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{a}_2 = (-0, 6\vec{e}_x - 0, 8\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$\vec{F}_A = (0, 375\vec{e}_x + 13\vec{e}_y + 100\vec{e}_z) \text{ N}, \quad \vec{F}_B = (-1, 875\vec{e}_x - 15\vec{e}_y) \text{ N}$$

- 48) Ismeretes egy merev test ξ, η és ζ súlyponti tehetetlenségi főtengelyeire számított $J_\xi = 5 \text{ kgm}^2$, $J_\eta = 4 \text{ kgm}^2$ és $J_\zeta = 2 \text{ kgm}^2$ tehetetlenségi nyomaték, továbbá az $\vec{n} = -0,6\vec{e}_\xi + 0,8\vec{e}_\zeta$ egységvektor által kijelölt, S súlyponton átmenő n tengely.

- Írja fel az S súlypontra számított \underline{J}_S tehetetlenségi tenzor mátrixát!
- Adja meg a ξ tengelyhez tartozó \vec{J}_ξ tehetetlenségi nyomatékvektort, valamint a \underline{J}_S tenzor diadikus alakját!
- Számítsa ki az n tengelyre vonatkozó \vec{J}_n tehetetlenségi nyomatékvektort, és az n tengelyre számított J_n tehetetlenségi nyomatékot!



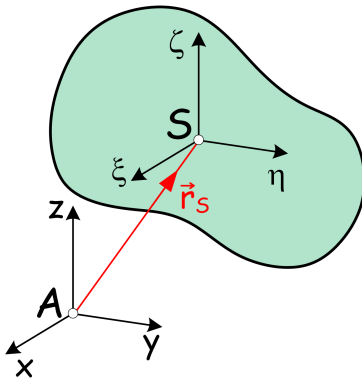
Megoldás:

$$[\underline{J}_S] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ kgm}^2, \quad \vec{J}_\xi = (5\vec{e}_\xi) \text{ kgm}^2, \quad \underline{J}_S = \vec{J}_\xi \circ \vec{e}_\xi + \vec{J}_\eta \circ \vec{e}_\eta + \vec{J}_\zeta \circ \vec{e}_\zeta$$

$$\vec{J}_n = (-3\vec{e}_\xi + 1, 6\vec{e}_\zeta) \text{ kgm}^2, \quad J_n = 3,08 \text{ kgm}^2$$

- 49) Adott a merev test súlypontra számított tehetetlenségi tenzorának $[\underline{J}_S] = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 30 \end{bmatrix} \text{ kgm}^2$ mátrixa,

S súlypont $\vec{r}_S = \vec{r}_{AS} = (0, 4\vec{e}_y + 0, 3\vec{e}_z) \text{ m}$ helyvektora, valamint a test $m = 1000 \text{ kg}$ tömege.



- Írja fel az η és az x tengelyekre vonatkozó J_η és J_x , továbbá az $\eta\zeta, \zeta\xi$ síkpárra vonatkozó $J_{\xi\eta}$, valamint az A pontra vonatkozó J_A tehetetlenségi nyomatékok értelmezését!

- Számítsa ki az A pontra vonatkozó \underline{J}_A tehetetlenségi tenzor mátrixát!

- Írja fel az y tengelyhez tartozó \vec{J}_y tehetetlenségi vektort, majd az A pontra vonatkozó \underline{J}_A tehetetlenségi tenzor diadikus alakját!

Megoldás:

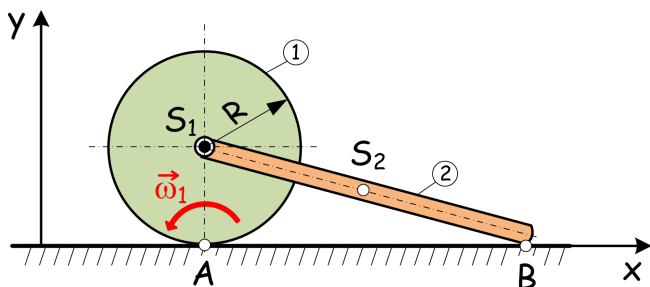
$$J_\eta = \int_{(m)} (\xi^2 + \zeta^2) dm, \quad J_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm, \quad J_{\xi\eta} = \int_{(m)} (\xi\eta) dm,$$

$$J_A = \int_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2) dm, \quad \vec{J}_y = (100\vec{e}_y - 120\vec{e}_z) \text{ kgm}^2,$$

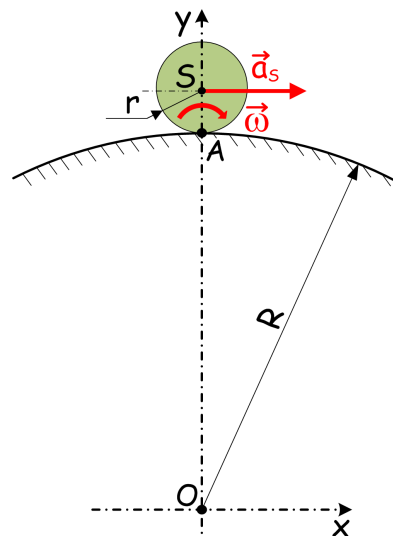
$$\underline{J}_A = [(270\vec{e}_x + 10\vec{e}_z) \circ \vec{e}_x +$$

$$+ (100\vec{e}_y - 120\vec{e}_z) \circ \vec{e}_y + (10\vec{e}_x - 120\vec{e}_y + 190\vec{e}_z) \circ \vec{e}_z] \text{ kgm}^2$$

- 50** Adott az ábrán vázolt, egymással kényszerkapcsolatban álló, merev testekből álló összetett szerkezet. Az 1 jelű henger ($R = 0,8 \text{ m}$, $m_1 = 2 \text{ kg}$, $J_{S_1} = 1,4 \text{ kgm}^2$) pillanatnyi $\omega_1 = 5 \text{ rad/s}$ szögsebességgel tisztán gördülve halad, miközben a súlypontjához csuklóval kapcsolt $m_2 = 0,5 \text{ kg}$ tömegű 2 jelű rudat vontatja. Határozza meg a szerkezet és egyes alkotó elemeinek mozgási energiáját!



Megoldás: $E = 37,5 \text{ J}$, $E_1 = 33,5 \text{ J}$, $E_2 = 4 \text{ J}$



- 51** Az ábrán látható $R = 1 \text{ m}$ sugarú hengerpaláston, mint kényszerpályán tisztán gördül az $r = 0,25 \text{ m}$ sugarú és $m = 20 \text{ kg}$ tömegű tömör henger, amely pillanatnyi mozgásállapotát $\vec{\omega} = (-4\vec{e}_z) \text{ rad/s}$ szögsebesség és $\vec{a}_{St} = (0,5\vec{e}_x) \text{ m/s}^2$ tangenciális gyorsulás ír le.

- Számítsa ki a henger \vec{I} impulzusát és $\dot{\vec{I}}$ impulzus deriváltját!
- Számítsa ki a henger S súlypontra vett $\vec{\Pi}_S$ és O origóra számított $\vec{\Pi}_O$ perdületét!
- Határozza meg a \vec{K} kinetikai vektort és az S súlypontra számított \vec{D}_S és O origóra számított \vec{D}_O kinetikai nyomatékokat is!

Megoldás:

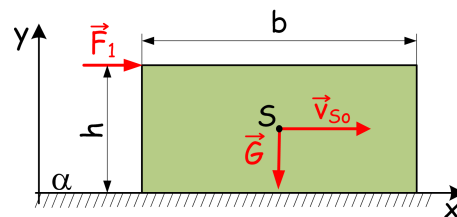
$$\vec{I} = (20\vec{e}_x) \frac{\text{kgm}}{\text{s}}, \quad \dot{\vec{I}} = (10\vec{e}_x - 16\vec{e}_y) \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}, \quad \vec{\Pi}_S = (-2,5\vec{e}_z) \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}, \quad \vec{\Pi}_O = (-27,5\vec{e}_z) \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}},$$

$$\vec{K} = (10\vec{e}_x - 16\vec{e}_y) \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}, \quad \vec{D}_S = (-1,25\vec{e}_z) \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}, \quad \vec{D}_O = (-13,75\vec{e}_z) \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$$

- 52** Az α jelű, vízszintes, sima ($\mu = 0$) kényszerpályán adott t_o időpontban $v_{So} = 3 \text{ m/s}$ sebességgel haladó mozgást végző hasábra ($h = 0,8 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$) a $G = 800 \text{ N}$ nagyságú súlyerő, valamint az xy síkban működő vízszintes irányú, ábrán adott helyen támadó $F_1 = 200 \text{ N}$ nagyságú erő hat. $\vec{g} = (-10\vec{e}_y) \text{ m/s}^2$.

- Határozza meg a hasáb S súlypontjának \vec{a}_S gyorsulását, és \vec{v}_S sebességét, mint az idő függvényét!

- Számítsa ki a támasztó ER \vec{F}_α eredőjét és határozza meg annak A jelű támadáspontját (centrális egyenesének a x tengelyre eső dőléspontját)!



- Határozza meg azt a legnagyobb F_1^{max} erőt, amelynél még nem következik be a test felbillenése!
- Válaszoljon az előző kérdésekre, ha $\mu = 0,2$, azaz érdes az α jelű kényszerpálya!

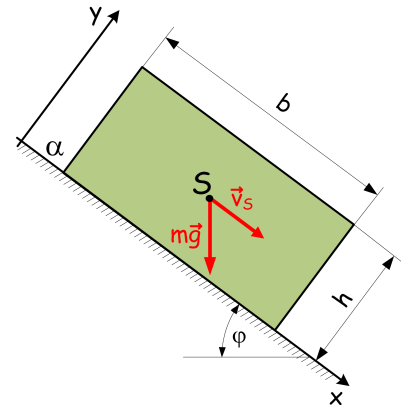
Megoldás:

$$\vec{a}_S = (2,5\vec{e}_x) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{v}_S = (3 + 2,5t)\vec{e}_x, \quad \vec{F}_\alpha = (800\vec{e}_y) \text{ N}, \quad x_{SA} = 0,1 \text{ m}, \quad F_1^{max} = (2000\vec{e}_x) \text{ N},$$

$$\vec{a}_S = (0,5\vec{e}_x) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{v}_S = (3 + 0,5t)\vec{e}_x, \quad \vec{F}_\alpha = (-160\vec{e}_x + 800\vec{e}_y) \text{ N}, \quad x_{SA} = 0,18 \text{ m}, \quad F_1^{max} = (1840\vec{e}_x) \text{ N},$$

53 Az $m = 200$ kg tömegű hasáb alakú ($h = 1$ m, $b = 1,6$ m) merev test az α jelű sima lejtőn a G súlyerő hatására lefelé csúszik. $g = 10$ m/s². A lejtő a vízszintessel φ szöget zár be. $\sin \varphi = 0,6$, $\cos \varphi = 0,8$.

- Számítsa ki a test S súlypontjának \vec{a}_S gyorsulását!
- Számítsa ki a támasztó ER \vec{F}_α eredőjét és határozza meg annak A jelű támaszpontját (centrális egyenesének a x tengelyre eső pontját)!
- Döntse el, hogy a lejtő φ hajlásszögének növelésével bekövetkezhet-e a test felbillenése! Ha igen akkor mekkora φ_b szög-nél?

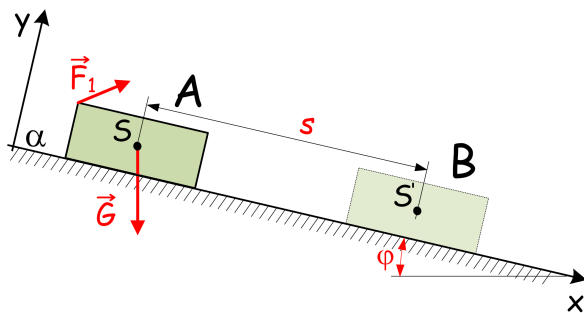


Megoldás:

$$\vec{a}_S = (6\vec{e}_x) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{F}_\alpha = (1600\vec{e}_y) \text{ N}, \quad x_{SA} = 0$$

Nem billenhet, de 90° felett elválnak a kényszerpályától.

54 Az $m = 12$ kg tömegű hasáb alakú merev test az α jelű érdes ($\mu = 0,15$) lejtőn mozog. A testre a G súlyerő, valamint az $\vec{F}_1 = (6\vec{e}_x + 8\vec{e}_y)$ N erő hat. $g = 10$ m/s². A lejtő a vízszintessel $\varphi = 20^\circ$ szöget zár be.



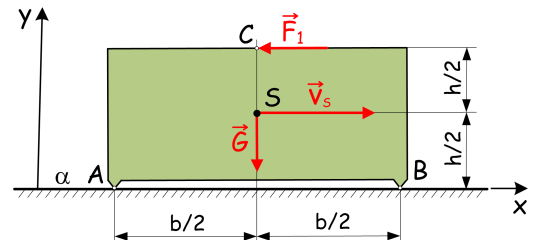
Határozza meg a testre ható erők munkáját, amelyet az A helyzetből $s = 3$ m utat megtéve B helyzetbe jutó testen végeznek!

Megoldás:

$$W_G = 123,127 \text{ J}, \quad W_{F_1} = 24 \text{ J}, \quad W_{F_\alpha} = -47,143 \text{ J}$$

55 Adott pillanatban $\vec{v}_S = (2,5\vec{e}_x)$ m/s sebességgel haladó, hasáb alakú ($h = 1$ m, $b = 2$ m) és $m = 800$ kg tömegű merev test alsó részének kialakítása olyan, hogy az α jelű vízszintes síkkal csak két z tengellyel párhuzamos alkotó mentén érintkezik. A súlyerőn kívül a C pontban ható $\vec{F}_1 = (-4\vec{e}_x)$ kN erő is támaszja.

- Számítsa ki a test S súlypontjának \vec{a}_S gyorsulását, valamint \vec{F}_A és \vec{F}_B kényszererőket, ha $\mu = 0$!
- Számítsa ki a test S súlypontjának \vec{a}_S gyorsulását, valamint \vec{F}_A és \vec{F}_B kényszererőket, ha $\mu = 0,5$!

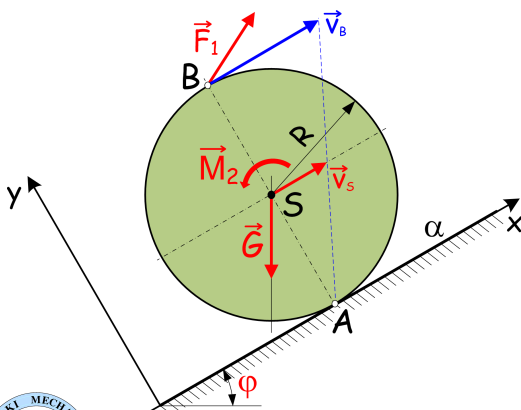


Megoldás:

$$\vec{a}_S = (-5\vec{e}_x) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{F}_A = (5000\vec{e}_y) \text{ N}, \quad \vec{F}_B = (3000\vec{e}_y) \text{ N},$$

$$\vec{a}_S = (-10\vec{e}_x) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{F}_A = (-2000\vec{e}_x + 4000\vec{e}_y) \text{ N}, \quad \vec{F}_B = (-2000\vec{e}_x + 4000\vec{e}_y) \text{ N}$$

56 A $G = 100$ N súlyú és $R = 0,5$ m sugarú, homogén tömör korong $\varphi = 30^\circ$ hajlásszögű lejtőn tisztán gördül. A pillanatnyi helyzetben súlypontjának $\vec{v}_S = (2\vec{e}_x)$ m/s sebessége, valamint a ráható $\vec{M}_2 = (20\vec{e}_z)$ Nm nyomaték és $\vec{F}_1 = (60\vec{e}_x + 20\vec{e}_y)$ N erő ismert.



a. Határozza meg a korong $\vec{\epsilon}$ pillanatnyi szöggyorsulását és az A pontban ébredő \vec{F}_A támasztóerőt!

b. Határozza meg a vázolt helyzetben a korongra ható nyomaték és erővektorok P_{M_2} , P_G , P_{F_1} és P_{F_A} teljesítményét!

Megoldás:

$$\vec{\epsilon} = (-4\vec{e}_z) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}, \quad \vec{F}_A = (10\vec{e}_x + 66,6\vec{e}_y) \text{ N},$$

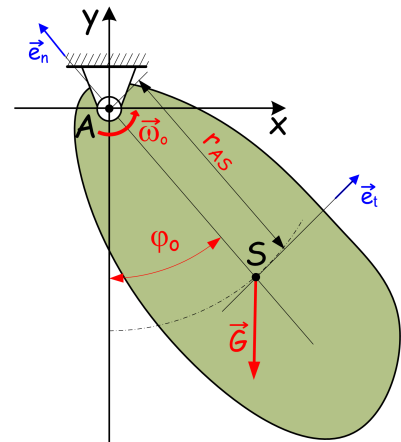
$$P_{M_2} = -80 \text{ W}, \quad P_G = -100 \text{ W}, \quad P_{F_1} = 240 \text{ W}, \quad P_{F_A} = 0$$

57 A $G = 100 \text{ N}$ súlyú merev test S jelű súlypontja $r_{AS} = 0,2 \text{ m}$ távolságra van az A ponton átmenő z tengelytől, mint fix forgástengelytől. A $\varphi_o = 60^\circ$ szöggel jellemzett helyzetben $\vec{\omega}_o = (4\vec{e}_z) \text{ rad/s}$ a test pillanatnyi szögsebessége. A merev test síkot merőlegesen az S ponton dőfő s tengelyre számított $J_s = 0,15 \text{ kgm}^2$ tehetetlenségi nyomatéka ismert. $\vec{g} = (-10\vec{e}_y) \text{ m/s}^2$.

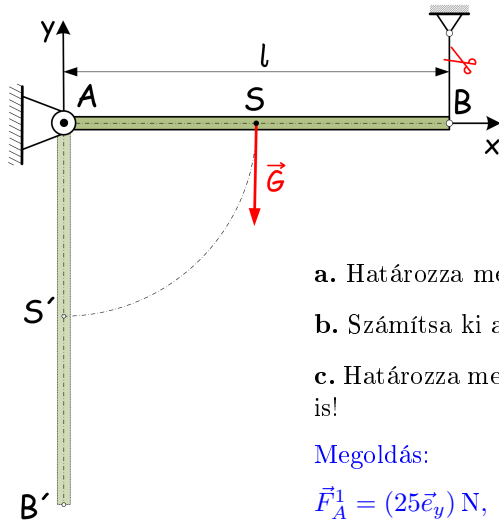
a. Számítsa ki a test S súlypontjának \vec{a}_S gyorsulását, valamint \vec{F}_A csapágyerőt!

Megoldás:

$$\vec{a}_S = (-6,3\vec{e}_t + 3,2\vec{e}_n) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{F}_A = (23,6\vec{e}_t + 82\vec{e}_n) \text{ N}$$



58 A $G = 50 \text{ N}$ súlyú, $l = 1,2 \text{ m}$ hosszúságú prizmatikus rudat az A végén sima csukló a B végén pedig egy fonál segítségével a vízszintes helyzetben rögzítünk, majd a fonalat elvágjuk. $\vec{g} = (-10\vec{e}_y) \text{ m/s}^2$.



a. Határozza meg az \vec{F}_A^1 csapágyerőt elvágás előtt!

b. Számítsa ki az \vec{F}_A^2 csapágyerőt közvetlen elvágás után!

c. Határozza meg az \vec{F}_A^3 csapágyerőt a rúd elvágás utáni függőleges helyzetében is!

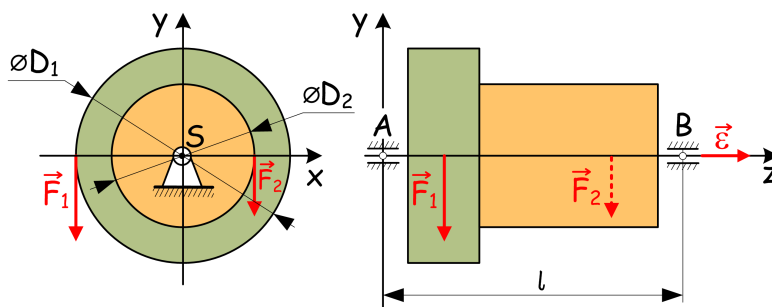
Megoldás:

$$\vec{F}_A^1 = (25\vec{e}_y) \text{ N}, \quad \vec{F}_A^2 = (12,5\vec{e}_y) \text{ N}, \quad \vec{F}_A^3 = (125\vec{e}_y) \text{ N}$$

59 Az ábrán látható két együtt forgó tömör hengerből ($D_1 = 0,4 \text{ m}$, $G_1 = 4 \text{ kN}$, $D_2 = 0,2 \text{ m}$, $G_2 = 3 \text{ kN}$) álló forgórészre ható $\vec{F}_2 = (-1,2\vec{e}_y) \text{ kN}$ erő ismert, míg \vec{F}_1 nagysága ismeretlen, iránya adott. $\vec{g} = (-10\vec{e}_y) \text{ m/s}^2$.

a. Mekkora F_1^ε erő esetén foroghat a merev forgórész $\vec{\varepsilon} = (5\vec{e}_z) \text{ rad/s}^2$ állandó szöggyorsulással?

b. Mekkora F_1^ω erő esetén foroghat a merev forgórész állandó szögsebességgel?



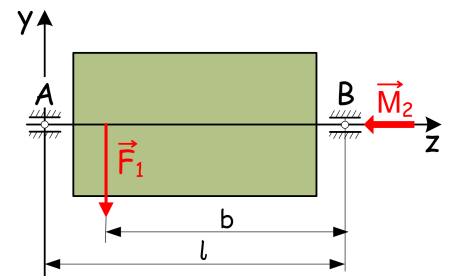
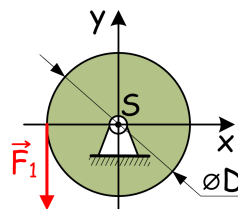
Megoldás:

$$F_1^\varepsilon = 837,5 \text{ N}, \quad F_1^\omega = 600 \text{ N}$$

60 Az ábrán látható, csapágyazott tömör hengert a ráható $\vec{F}_1 = (-4\vec{e}_y) \text{ kN}$ erő és $\vec{M}_2 = (-0,8\vec{e}_z) \text{ kNm}$ nyomaték z tengely körül forgatja. $J_z = 40 \text{ kgm}^2$, $D = 300 \text{ mm}$, $l = 560 \text{ mm}$, $b = 420 \text{ mm}$.

a. Határozza meg az $\vec{\varepsilon}$ pillanatnyi szöggyorsulást és az A pontban ébredő \vec{F}_A , valamint a B pontban ébredő \vec{F}_B csapágyerőket!

b. Mekkora t_1 idő alatt éri el a forgórész az $\omega_1 = 50 \text{ rad/s}$ szögsebességet álló helyzetből, ha \vec{F}_1 és \vec{M}_2 közben állandó marad?



$$\text{Megoldás: } \vec{\varepsilon} = (-5\vec{e}_z) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}, \quad \vec{F}_A = (20777,78\vec{e}_y) \text{ N}, \quad \vec{F}_B = (18777,78\vec{e}_y) \text{ N}, \quad t_1 = 10 \text{ s}$$

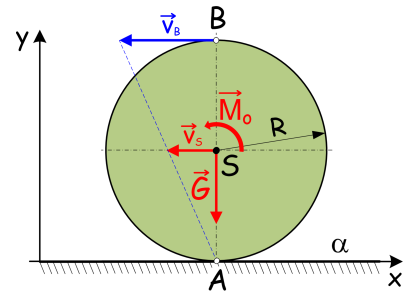
61 Az $R = 0,3$ m sugarú, $m = 20$ kg tömegű kerékre ismert $\vec{M}_o = (36\vec{e}_z)$ Nm nyomaték hat. A kerék tehetetlenségi nyomatéka a súlyponton átmenő, z tengellyel párhuzamos s tehetetlenségi főtengelyre $J_s = 1,2$ kgm². A kerék az α jelű érdes síkon \vec{v}_s irányába gördül, a $\mu_o = 0,4$ nyugvásbeli és a $\mu = 0,3$ mozgásbeli súrlódási tényező ismert.

a. Számítsa ki a kerék $\vec{\epsilon}$ pillanatnyi szöggyorsulását, valamint \vec{F}_A támasztóerőt!

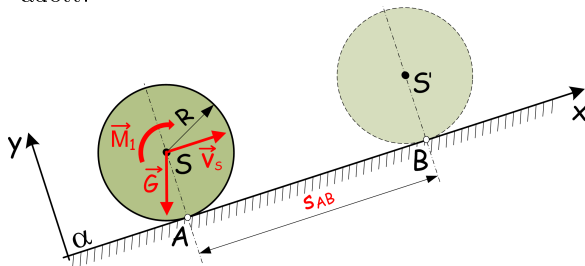
b. Mekkora lehet a nyomaték legnagyobb M_o^{\max} értéke, hogy a kerék még éppen ne csússzon meg?

Megoldás:

$$\vec{\epsilon} = (12\vec{e}_z) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}, \quad \vec{F}_A = (-72\vec{e}_x + 200\vec{e}_y) \text{ N}, \quad \vec{M}_o = (40\vec{e}_z) \text{ Nm}$$



62 Az $R = 0,5$ m sugarú, $\vec{G} = (-100\vec{e}_x - 240\vec{e}_y)$ N súlyú homogén körhenger a reá ható $M_1 = (-59\vec{e}_z)$ Nm nyomaték hatására az érdes α lejtőn felfelé gördül ($\mu_o = 0,5$, $\mu = 0,4$). A gördülő ellenáll $f = 5$ mm karja adott.



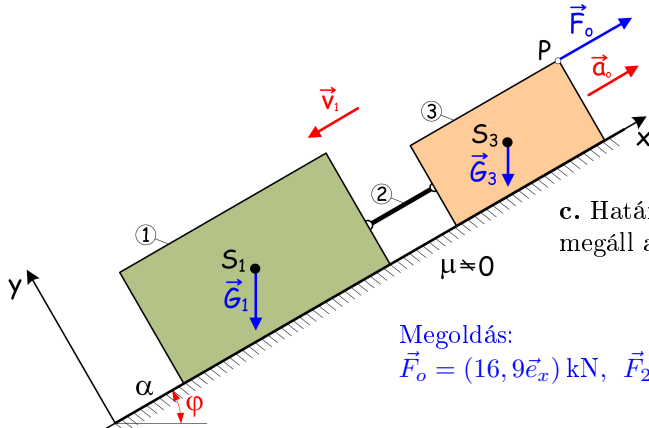
a. Számítsa ki a kerék $\vec{\epsilon}$ pillanatnyi szöggyorsulását, valamint az \vec{F}_A támasztóerőt!

b. Megcsúszik-e a kerék az adott M_1 nyomaték mellett?

c. Mekkora ω_A szögsebességgel kell indítani a kereket, ha $s_{AB} = 3,9$ m út megtétele után $\omega_B = 4,9$ rad/s a szögsebességet érje el?

Megoldás: $\vec{\epsilon} = (-0,8\vec{e}_z) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$, $\vec{F}_A = (110,4\vec{e}_x + 240\vec{e}_y) \text{ N}$, Nem csúszik meg. $\omega_A = 3,396 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

63 Az 1 jelű, $m_1 = 2000$ kg tömegű és 3 jelű, $m_3 = 1000$ kg tömegű hasábköbök és az azokat összekötő 2 jelű súlytalan rúdból álló rendszert állandó $\vec{a}_o = (1,5\vec{e}_x)$ m/s² gyorsulással fékeződik, miközben pillanatnyi $\vec{v}_1 = (-3\vec{e}_x)$ m/s sebességgel csúszik lefele az α jelű, $\varphi = 30^\circ$ dőlésszögű, érdes ($\mu = 0,1$) lejtőn.



a. Számítsa ki a gyorsulás biztosításához szükséges \vec{F}_o fékezőerőt!

b. Határozza meg az összetett szerkezetre működő összes külső és belső erőt!

c. Határozza meg a $\Delta\vec{r}$ elmozdulást, mely után a szerkezet megáll a lejtőn?

Megoldás:

$$\vec{F}_o = (16,9\vec{e}_x) \text{ kN}, \quad \vec{F}_{21} = (11,27\vec{e}_x) \text{ kN}, \quad \vec{F}_{\alpha 1} = (\sqrt{3}\vec{e}_x + 10\sqrt{3}\vec{e}_y) \text{ kN},$$

$$\vec{F}_{\alpha 3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + 5\sqrt{3}\vec{e}_y\right) \text{ kN}, \quad \Delta\vec{r} = (-3\vec{e}_x) \text{ m}$$

64 Az 1 jelű, $G_1 = 600$ N súlyú hasábköb, az $R_3 = 0,5$ m sugarú, $G_3 = 800$ N súlyú, 3 jelű gördülő korongból és a 2 jelű súlytalan összekötő rúdból álló összetett szerkezet az érdes ($\varphi = 30^\circ$, $\mu = 0,1$) α jelű lejtőn felfelé $\vec{F}_1 = (1600\vec{e}_x)$ N erővel vontatott.

a. Határozza meg az 1 jelű test S_1 súlypontjának \vec{a}_{S_1} pillanatnyi gyorsulását!

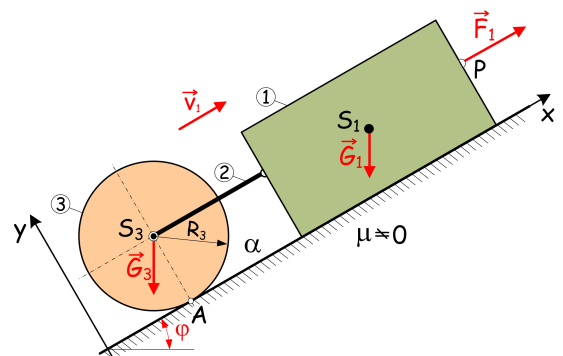
b. Határozza meg az összetett szerkezetre működő összes külső és belső erőt!

Megoldás:

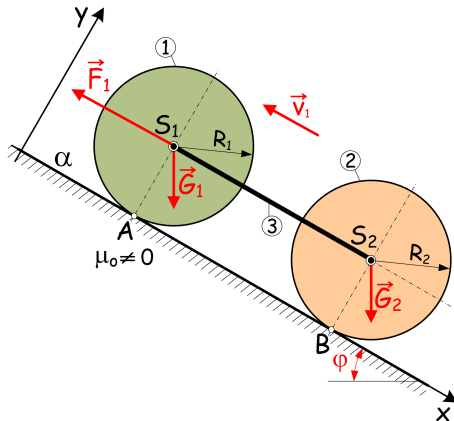
$$\vec{a}_{S_1} = (4,71\vec{e}_z) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{F}_{23} = (965,2\vec{e}_x) \text{ N},$$

$$\vec{F}_A = (-188,45\vec{e}_x + 692,8\vec{e}_y) \text{ N},$$

$$\vec{F}_{\alpha 1} = (-51,9\vec{e}_x + 519,6\vec{e}_y) \text{ N}$$



- 65** Az 1 jelű, $m_1 = 800$ kg tömegű és 2 jelű, $m_2 = 300$ kg tömegű azonos $R_1 = R_2 = 0,4$ m sugarú korongból és az összekötő 2 jelű súlytalan rúdból álló járműdinamikai modell $\vec{F}_1 = (-6\vec{e}_x)$ kN erővel lejtőn ($\varphi = 10^\circ$) felfele vontatott. Feltevés szerint az álló helyzetből induló korongok tisztán gördülnek.



- Számítsa ki a korongok \vec{v}_{S1} és \vec{v}_{S2} súlyponti sebességeit az indulástól számított $s = 30$ m út megtétele után!
- Határozza meg az összekötő rudat terhelő \vec{F}_{13} erőt!
- Számítsa ki a korongokra ható kényszererőket és a gördülésük biztosításához szükséges $\mu_{o\min}$ nyugvásbeli gördülési tényezőt!

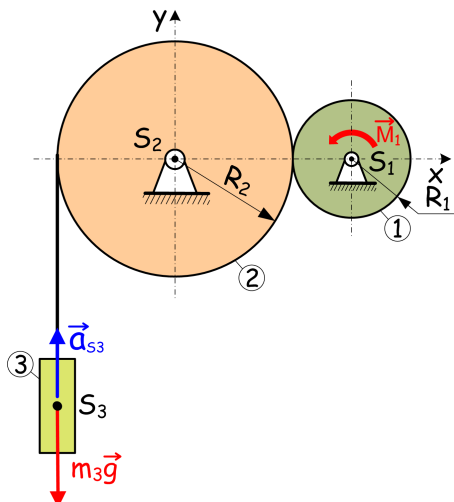
Megoldás:

$$\vec{v}_{S1} = \vec{v}_{S2} = (12,19\vec{e}_x) \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \vec{F}_{13} = (1636\vec{e}_x) \text{ N},$$

$$\vec{F}_A = (991,6\vec{e}_x + 7878,46\vec{e}_y) \text{ N}, \quad \vec{F}_B = (371,85\vec{e}_x + 2954,4\vec{e}_y) \text{ N}$$

- 66** Az 1 jelű, $m_1 = 200$ kg tömegű terhet a 3 jelű, $R_3 = 0,5$ m sugarú és $J_s = 200 \text{ kgm}^2$ súlyponti tehetetlenségi nyomatékkal bíró dobra feltekere-dő súlytalan, 2 jelű kötéllel emelik a dob tengelyén bevitt $M_o = 150$ Nm nagyságú nyomatékkal.

Határozza meg az ábrán vázolt pillanatnyi helyzetben $v_o = 4$ m/s sebességgel mozgó teher $t_1 = 2$ s idő elteltével elért v_1 sebességét!



Megoldás: $v_1 = 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

- 67** Az 1 jelű, $m_1 = 50$ kg tömegű és $R_1 = 0,5$ m sugarú hajtott forgórész csúszásmentes kapcsolata a 2 jelű, $m_2 = 100$ kg tömegű és $R_2 = 1$ m sugarú emelődobbal α kapcsolószöggel adott, azaz ismert a közöttük fellépő belső erő hatásvonalá-nak a függőlegessel bezárt szögére a $\tan \alpha = 0,4$ összefüggés. A 3 jelű, $m_3 = 30$ kg tömegű teher a 2 jelű dobhoz súlytalan, nyújthatatlan, tökéletesen hajlékony köté segítségével csatla-zodik. A teher pillanatnyi gyorsulása $a_{S3} = 2 \text{ m/s}^2$ elért.

- Határozza meg a teher előírt gyorsulását biztosító M_1 emelőnyomaték értékét!
- Álló helyzetből indulva mennyi t_3 idő és mekkora h_3 magasság után éri el a teher a $v_{S3} = 10$ m/s sebességet?
- Határozza meg az \vec{F}_{21} átadódó erőt!

Megoldás:

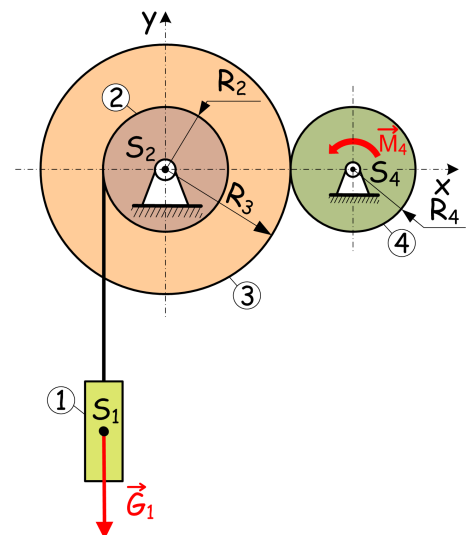
$$M_1 = 255 \text{ Nm}, \quad t_3 = 5 \text{ s}, \quad h_3 = 25 \text{ m},$$

$$\vec{F}_{21} = (184\vec{e}_x + 460\vec{e}_y) \text{ N}$$

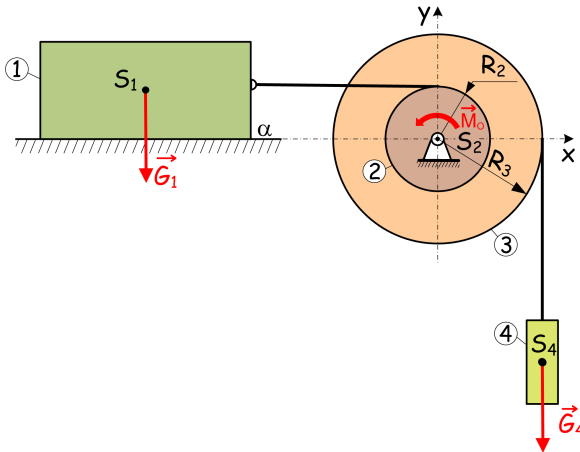
- 68** Az emelőszerkezet modelljében a 2 jelű, $m_2 = 500$ kg tömegű és $R_2 = 0,4$ m sugarú tárcsa azonos tengelyen együtt forog a 3 jelű, $m_3 = 1000$ kg tömegű és $R_3 = 0,8$ m sugarú tárcsával, amelyet a 4 jelű, $m_4 = 375$ kg tömegű és $R_4 = 0,4$ m sugarú tárcsa $M_4 = 2480$ Nm átadásával hajt. A 2 jelű tárcsához súlytalan, nyújthatatlan és tökéletesen hajlékony köté kapcsolja az 1 jelű, $m_1 = 1000$ kg tömegű terhet.

- Határozza meg a 2 jelű tárcsa $\vec{\varepsilon}_2$ szöggyorsulását!
- Számítsa ki a kötéleben fellépő kötélerő F_{21} nagyságát!

Megoldás: $\vec{\varepsilon}_2 = (-1,5\vec{e}_z) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}, \quad F_{21} = 10,6 \text{ kN}$



- 69** A szerkezet modelljét az 1 jelű, $m_1 = 200$ kg tömegű, csúszó ($\mu = 0,2$) hasáb alakú test, a 2 és 3 jelű közös tengely körül, együtt forgó tárcsák ($R_2 = 0,2$ m, $R_3 = 0,4$ m), valamint a 4 jelű, $m_4 = 200$ kg tömegű teher alkotja. Az 1 jelű testet a 2 jelű tárcsához, a 4 jelű testet a 3 jelű tárcsához nyújthatatlan és tökéletesen hajlékony, a tárcsákon meg nem csúszó kötelek kapcsolják. A két tárcsa együtt $J_{s_2} = 26$ kgm² tehetetlenségi nyomatékkal bír az s_2 jelű tengelyre.



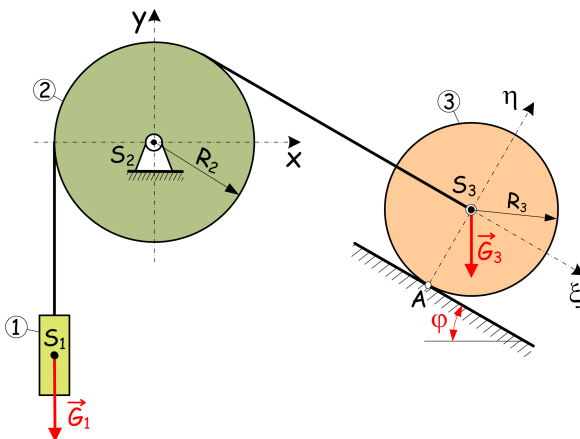
- a. Határozza meg mekkora \vec{M}_2 nyomaték szükséges a 4 jelű test állandó sebességű mozgásához!
- b. Az $\vec{M}_2 = (390\vec{e}_z)$ Nm esetében számítsa ki az \vec{a}_{S_4} gyorsulást, valamint az F_{21} és az F_{34} kötélterőket!

Megoldás:

$$\vec{M}_2 = (720\vec{e}_z) \text{ Nm},$$

$$\vec{a}_{S_4} = (-2\vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad F_{21} = 600 \text{ N}, \quad F_{34} = 1600 \text{ N}$$

- 70** Az $m_1 = 50$ kg tömegű terhet a 2 jelű, S_2 súlypontban csapágyazott homogén tárcsa ($m_2 = 200$ kg, $R_2 = 0,5$ m) kerületén átvett és rajta meg nem csúszó tökéletes kötéllel összekapcsoljuk a 3 jelű, lejtőn ($\varphi = 30^\circ$) tisztán gördülő, homogén korong ($m_3 = 200$ kg, $R_3 = 0,4$ m) S_3 jelű súlypontjával.



- a. Számítsa ki a teher S_1 jelű súlypontjának \vec{a}_{S_1} gyorsulását!

- b. Határozza meg az F_{21} kötélterőt!

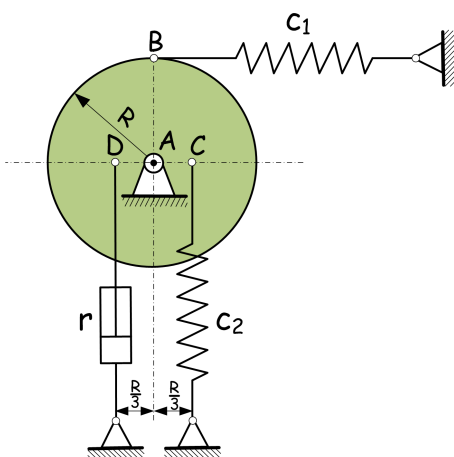
- c. Számítsa ki a 3 jelű gördülő korong $\vec{\epsilon}_3$ pillanatnyi szöggyorsulását, valamint az \vec{F}_A támasztóerőt!

Megoldás:

$$\vec{a}_{S_1} = (1, \vec{i}_{e_y}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$F_{21} = 555,5 \text{ N},$$

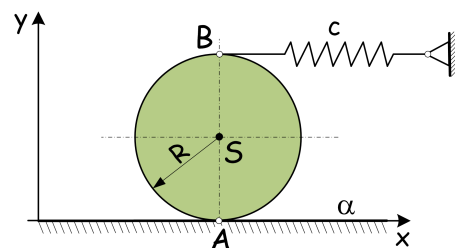
$$\vec{\epsilon}_3 = (-2,7\vec{e}_z) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}, \quad \vec{F}_A = (111,1\vec{e}_\xi + 1732,05\vec{e}_\eta) \text{ N}$$



- 71** A súlypontján átmenő tengelyen csapágyazott, m tömegű és R sugarú, homogén korong a hozzákapcsolt kapcsolt két rugóval és csillapítással egy rezgésre képes rendszert alkot. Írja fel a rendszer kis rezgéseinek mozgásegyenletét!

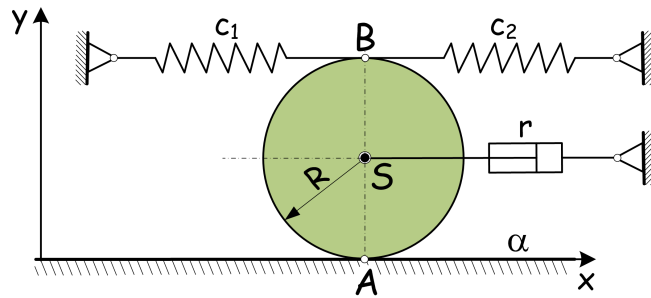
$$\text{Megoldás: } \ddot{\varphi} + \frac{rR^2}{9J_a} \dot{\varphi} + \left(\frac{R^2}{J_a c_1} + \frac{R^2}{9J_a c_2} \right) \varphi = 0$$

- 72** Az ábrán vázolt R sugarú, m tömegű, homogén korong az érdes síkon csúszás nélkül gördülhet, míg egy rugóval kötjük álló testhez. Írja fel a rendszer kis rezgéseinek mozgásegyenletét!



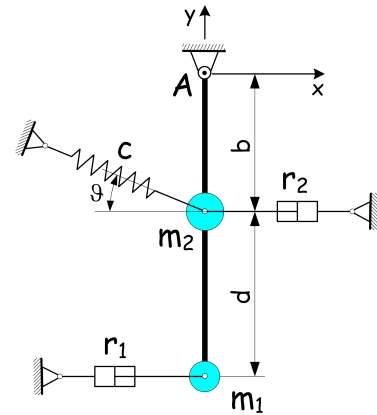
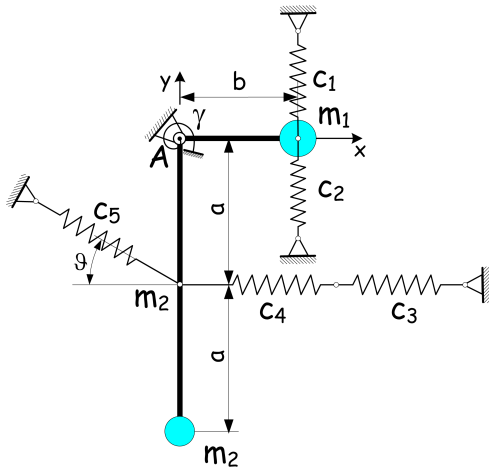
$$\text{Megoldás: } \ddot{x} + \frac{8}{3mc} x = 0, \quad \ddot{\varphi} + \frac{4R^2}{J_a c} \varphi = 0$$

- 73** Az ábrán vázolt R sugarú, m tömegű, homogén korong csúszás nélkül gördülhet. Írja fel a rendszer kis rezgéseinek mozgásegyenletét!



Megoldás: $\ddot{\varphi} + \frac{rR^2}{J_a} \dot{\varphi} + \frac{4R^2}{J_a} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \varphi = 0$

- 74** A b illetve a $2a$ hosszúságú, súlytalan, merev rudakból és m_1 , m_2 tömegpontokból álló szerkezet az A ponti csukló körül foroghat. Írja fel a rendszer kis rezgéseinek mozgásegyenletét!
- 75** Az ábrán vázolt $(b+d)$ hosszúságú súlytalan merev rúd az A ponti csukló körül foroghat. Írja fel a rendszer kis rezgéseinek mozgásegyenletét!



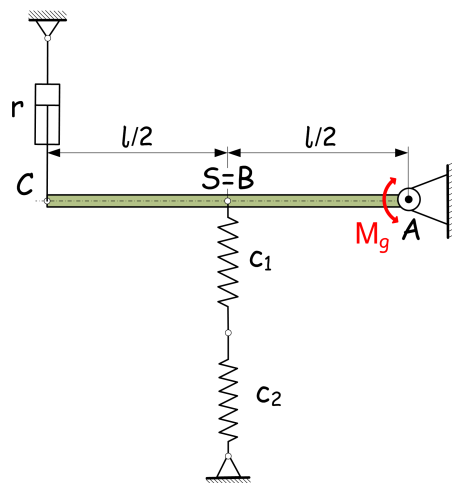
Megoldás:

$\ddot{\varphi} + \frac{1}{J_a} \left[\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) b^2 + \frac{1}{c_3 + c_4} a^2 + \frac{a^2 \cos^2 \vartheta}{c_5} + \frac{1}{\gamma} \right] \varphi = 0$

Megoldás:

$\ddot{\varphi} + \frac{1}{J_a} [r_1(b+d)^2 + r_2 b^2] \dot{\varphi} + \frac{b^2 \cos^2 \vartheta}{J_a c} \varphi = 0,$
 $J_a = m_1(b+d)^2 + m_2 b^2$

- 76** Az l hosszúságú, m tömegű, homogén, merev rúd az A ponti csukló körül foroghat. Írja fel a rendszer kis rezgéseinek mozgásegyenletét!



Megoldás: $\ddot{\varphi} + \frac{rl^2}{J_a} \dot{\varphi} + \frac{l^2}{4(c_1 + c_2)J_a} \varphi = \frac{M_g}{J_a}, J_a = \frac{1}{3} ml^2$