

MŰSZAKI MECHANIKA II – SZILÁRDSÁGTAN

A legfontosabb fogalmak jegyzéke – a fogalmak felsorolása (2011/2012)

Műszaki Mechanika II	Pontszám
1. A másodrendű tenzor értelmezése	(2)
2. A másodrendű tenzor transzponáltjának értelmezése	(2)
3. Szimmetrikus és ferdeszimmetrikus tenzor értelmezése	(3)
4. A vektorinvariáns értelmezése	(3)
5. A felbontási tétel	(2)
6. Az alakváltozás fogalmának értelmezése általában	(2)
7. A rugalmas alakváltozás értelmezése	(1)
8. A képlékeny alakváltozás értelmezése	(1)
9. A kis elmozdulás definíciója	(1)
10. A kis alakváltozás definíciója	(1)
11. Két erőrendszer szilárdságtani egyenértékűségének értelmezése	(2)
12. A derivált tenzormező és az elmozdulási vektormező kapcsolata (az egyenlet tenzoriális alakja)	(1)
13. Elmozdulásmező linearizálása a szilárd test egy P pontjának környezetében a derivált tenzor felhasználásával	(4)
14. A derivált tenzor felbontása szimmetrikus és ferdeszimmetrikus részekre és a részek kinematikai tartalma	(2)
15. Az alakváltozási tenzormező és elmozdulási vektormező kapcsolata (az egyenlet tenzoriális alakja)	(3)
16. Az alakváltozási jellemzők (és előjelük jelentése)	(3)
17. Az alakváltozási tenzor megadása diádokkal és mátrixokkal derékszögű descartes-i koordináta rendszerben	(3)
18. Az alakváltozási tenzor szemléltetése az elemi triéderen	(2)
19. Fajlagos nyúlások, fajlagos szögtorzulások számítása az alakváltozási tenzorból	(2)
20. Alakváltozási főtengek, főnyúlások értelmezése	(2)
21. Alakváltozási jellemzők számítása az elmozdulásokból	(4)
22. A $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektor felbontása az $\mathbf{n}$ normálisú elemi felületen	(2)
23. A feszültségi tenzor szemléltetése az elemi kockán	(2)
24. Feszültségi főtengek, főfeszültségek értelmezése	(2)
25. Az egytengelyű feszültségi állapot fogalma	(2)
26. A két-, és háromtengelyű feszültségi állapot fogalma	(2)
27. A teljes feszültségi Mohr kör szerkesztése, ha egy főfeszültség ismert	(4)
28. Az energia tétel és alkalmazása rugalmas testek szilárdságtani feladataira	(4)
29. A prizmatikus rúd fogalma	(1)
30. A lineárisan rugalmas, homogén, izotróp test fogalma	(3)
31. Az egyszerű Hooke törvény húzásra (nyomásra)	(2)
32. A feszültségi tenzor és a normálfeszültség értéke húzott-nyomott rudak esetén	(2)
33. Az alakváltozási energia számítása húzott-nyomott rúd esetén	(2)
34. Az I_p poláris másodrendű nyomaték értelmezése és kiszámítása kör- és körgyűrű keresztmetszetre	(3)
35. Feszültségi tenzor kör- és körgyűrű keresztmetszetű rudak csavarására polárkoordináta rendszerben	(2)
36. A $\tau_{\varphi z} = \tau_{\varphi z}(R)$ feszültségeloszlás szemléltetése kör- és körgyűrű keresztmetszetű rudak csavarása esetén	(2)
37. Az alakváltozási energia számítása kör- és körgyűrű keresztmetszetű rudak csavarása esetén	(2)
38. Prizmatikus rúd tiszta hajlításának értelmezése	(1)
39. A Bernoulli hipotézis	(2)

40. Az (egyenes) [ferde] hajlítás értelmezése (2)
41. A feszültségi tenzor mátrixa prizmatikus rúd tiszta, egyenes hajlítása esetén (2)
42. A $\sigma_z = \sigma_z(y)$ feszültségeloszlás szemléltetése egyenes hajlítás esetén (2)
43. A görbület és hajlítónyomaték kapcsolata prizmatikus rúd tiszta hajlítására (2)
44. Az alakváltozási energia számítása prizmatikus rúd egyenes hajlítására a nyírás hatásának elhanyagolásával (2)
45. Tengelyre, tengelypárra és pontra számított másodrendű nyomaték értelmezése (3)
46. Az A keresztmetszet súlyponti tehetetlenségi tenzora és a tenzor elemei – értelmezések koordinátarendszerhez kötötten (4)
47. Az A keresztmetszet súlyponti tehetetlenségi tenzorának invariáns azaz KR független alakja (2)
48. A Steiner-tétel tenzoriális és skaláris egyenletei (3)
49. Cauchy tétele (feszültség számítása az $\mathbf{n}$ normálisú felületen) (2)
50. Az egyensúlyi egyenlet szilárd testre (vektoriális és skaláris alakok) (4)
51. Az általános Hooke-törvény izotróp testre (2)
52. Mennyi a független anyagállandók száma izotrop test esetén? (2)
53. A fajlagos alakváltozási energia értelmezése általános esetben (3)
54. A fajlagos alakváltozási energia felbontása torzítás és tiszta térfogatváltozási részekre. (3)
55. A Mohr szerinti redukált feszültség értelmezése (2)
56. A Huber-Mises-Hencky szerinti redukált feszültség értelmezése (2)
57. A redukált feszültségek számítása ha egy normálfeszültség és vele azonos síkon egy csúsztató feszültség nem zérus (2)
58. A zérusvonal értelmezése és egyenlete ferde hajlítás esetén (3)
59. A feszültségi tenzor mátrixa és a feszültségek számítása prizmatikus rudak tiszta, ferde hajlítása esetén (3)
60. A feszültségi tenzor mátrixa és a feszültségek számítása zömök rudak excentrikus húzása, nyomása esetén (3)
61. A zérusvonal egyenlete zömök rudak excentrikus húzása, nyomása esetén (3)
62. Hajlított és csavart kör és körgyűrű keresztmetszetű egyenes rudak ellenőrzése és méretezése feszültségcsúcsra (2)
63. A feszültségi tenzor mátrixa és a feszültségek számítása hajlított nyírt prizmatikus rúd esetén (4)
64. A nyírófeszültségek számítása téglalapkeresztmetszetű rúdra (2)
65. A nyírási középpont definíciója (2)
66. A Betti tétel (2)
67. A Castigliano tétel (2)
68. Mikor mondjuk, hogy a vizsgált szerkezet külsőleg statikailag határozatlan (2)
69. Mikor mondjuk, hogy a vizsgált szerkezet belsőleg statikailag határozatlan (2)
70. A törzstartó fogalma (2)
71. Az egyensúlyi alak stabilitása karcsú nyomott rúdra (2)
72. Mikor léphet fel kihajlás és miért jelent veszélyt (3)
73. A kihajlási határgörbe (kritikus feszültség) egyenlete (Euler hiperbola, Tetmajer egyenes) és ábrázolása (4)

MŰSZAKI MECHANIKA II – SZILÁRDSÁGTAN

A legfontosabb fogalmak jegyzéke – a fogalmak definíciója (2011/2012)

1. A másodrendű tenzoron (tág értelemben) a háromméretű tér egy önmagára történő homogén lineáris leképezését értjük. Kartéziuszi koordinátarendszerben az $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ vektorok $\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képei egyértelműen meghatározzák a leképezést (a tenzort).
2. A

$$\mathbf{W} = \mathbf{w}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y \circ \mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z \circ \mathbf{e}_z$$

másodrendű tenzor transzponáltját a

$$\mathbf{W}^T = \mathbf{e}_x \circ \mathbf{w}_x + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{w}_y + \mathbf{e}_z \circ \mathbf{w}_z$$

kifejezés értelmezi. A transzponált tenzor mátrixa a tenzor mátrixának transzponáltja.

3. Szimmetrikus az $\mathbf{W}$ tenzort, ha

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^T,$$

ferdeszimmetrikus az $\mathbf{W}$ tenzor, ha

$$\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T.$$

Szimmetrikus tenzor mátrixa szimmetrikus:

$$w_{kl} = w_{lk} \quad l, k = x, y, z;$$

ferdeszimmetrikus tenzor mátrixa pedig ferdeszimmetrikus:

$$w_{kl} = -w_{lk} \quad l, k = x, y, z .$$

4. A

$$\mathbf{W} = \mathbf{w}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y \circ \mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z \circ \mathbf{e}_z$$

másodrendű tenzor vektorinvariánsát a

$$\mathbf{w}_a = -\frac{1}{2} (\mathbf{w}_x \times \mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y \times \mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z \times \mathbf{e}_z)$$

összefüggés értelmezi. Ha a vektorinvariáns zérus, akkor a tenzor szimmetrikus.

5. Bármely $\mathbf{W}$ tenzor felbontható egy szimmetrikus és egy ferdeszimmetrikus tenzor összegére

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_{asz} + \mathbf{W}_{sz}$$

ahol

$$\mathbf{W}_{asz} = \frac{1}{2} (\mathbf{W} - \mathbf{W}^T) \quad \text{és} \quad \mathbf{W}_{sz} = \frac{1}{2} (\mathbf{W} + \mathbf{W}^T) .$$

Fennáll továbbá, hogy

$$\mathbf{W}_{asz} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{w}_a \times \mathbf{n} .$$

6. Terhelés hatására a vizsgálat tárgyát képező szilárd test pontjai egymáshoz képest elmozdulnak és a test anyagi, geometriai alakzatai (anyagi vonalak hosszai, anyagi vonalak által bezárt szögek, etc.) megváltoznak. Ezt a jelenséget alakváltozásnak nevezzük.
7. Rugalmas alakváltozásról beszélünk, ha a terhelés megszüntetése után a terhelés hatására alakváltozást szenvedő test maradéktalanul visszanyeri eredeti, terhelés előtti alakját.
8. Képlékeny alakváltozásról beszélünk, ha a terhelés megszüntetése után a terhelés hatására alakváltozott test nem nyeri vissza eredeti, terhelés előtti alakját.
9. Kis elmozdulások esetén a szilárd test pontjainak maximális elmozdulása is nagyságrendekkel kisebb mint a test legkisebb geometriai mérete.
10. Ha a test alakváltozására jellemző mennyiségek (fajlagos nyúlások, szögtorzulások) abszolút értékének maximuma nagyságrendekkel kisebb mint az egység, akkor az alakváltozások kicsik.

11. Két, ugyanazon testre ható egymással statikailag egyenértékű erőrendszert *szilárdságtanilag is egyenértékűnek* nevezünk, ha azok mindegyike – eltekintve az erőrendszerek gyakorlatilag egybeeső terhelési tartományától – lényegében ugyanazt az alakváltozási állapotot hozza létre.
12. A derivált tenzort a

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} \circ \nabla$$

módon számítjuk ha ismeretes az elmozdulási vektormező.

13. A P pont elemi környezetében

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_P + \mathbf{U}_P \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_P) + (\dots)$$

alakú az elmozdulásmező, ahol $\mathbf{u}_P$ a P pont eltolódása, $\mathbf{U}_P$ a derivált tenzor a P pontban, $|\Delta \mathbf{r}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_P|$ sokkal kisebb mint egy alkalmas hosszegység, az $\mathbf{r}$ a futópont, az $\mathbf{r}_P$ pedig a P pont helyvektora. A derivált tenzor $\mathbf{U}_P = \boldsymbol{\Psi}_P + \mathbf{A}_P$ alakú felbontásával

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{\Psi}_P \cdot \Delta \mathbf{r} + \mathbf{A}_P \cdot \Delta \mathbf{r}$$

ahol $\boldsymbol{\Psi}_P \cdot \Delta \mathbf{r}$ a merevtestszerű forgás hatására létrejövő mozgás, az $\mathbf{u}_P + \boldsymbol{\Psi}_P \cdot \Delta \mathbf{r}$ összeg pedig a P pont környezetének merevtestszerű mozgása (eltolódás + forgás).

14. Az $\mathbf{U}$ derivált tenzor az

$$\mathbf{U} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{U} - \mathbf{U}^T)}_{\boldsymbol{\Psi}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{U}^T)}_{\mathbf{A}}$$

módon bontható fel, ahol $\boldsymbol{\Psi}$ a forgató tenzor, az $\mathbf{A}$ pedig az alakváltozási tenzor. (T a transzponálás jele.)

15. Az alakváltozási tenzor az

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\nabla \circ \mathbf{u} + \mathbf{u} \circ \nabla)$$

módon számítható.

16. *Fajlagos nyúlás* az n irányban:

Jelölése: ϵ_n ; Előjelszabály: $\epsilon_n > 0$ megnyúlás; $\epsilon_n < 0$ rövidülés

Fajlagos szögtorzulás az egymásra merőleges n és m irányok között:

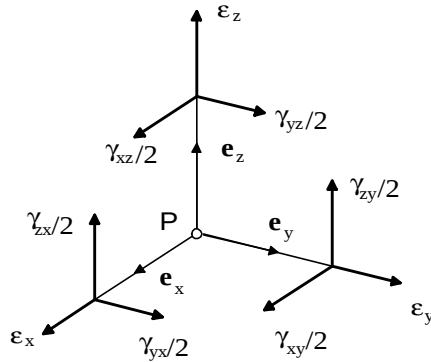
Jelölése: γ_{mn} ; Előjelszabály: $\{\gamma_{mn} > 0\}[\gamma_{mn} < 0]$ az eredetileg 90° -os szög {csökken} [növekszik].

17. A tenzor diádikus alakban és mátrixával is megadható:

$$\mathbf{A} = \alpha_x \circ \mathbf{e}_x + \alpha_y \circ \mathbf{e}_y + \alpha_z \circ \mathbf{e}_z ,$$

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} .$$

18. Az alakváltozási tenzort az elemi triéderen, az xyz koordinátarendszerben az ábra szemlélteti:



19. Legyen az $\mathbf{n}$ és $\mathbf{m}$ egységvektor és $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$ (azaz $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$). Ekkor

$$\epsilon_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}, \quad \gamma_{mn} = 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$$

a fajlagos nyúlás az n irányban, illetve a fajlagos szögtorzulás az m és n irányok között. (Az $n, m - n \neq m$ - rendre felveheti az x, y és z értéket. Ekkor $\mathbf{n}$ és $\mathbf{m}$ helyett értelemszerűen $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ áll.)

20. Az $\mathbf{n}$ és $\mathbf{m}$ egységvektor. Ha $\alpha_n = \epsilon_n \mathbf{n}$ azaz minden $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$ -re fennáll, hogy $\gamma_{nm} = 2\mathbf{m} \cdot \alpha_n = 0$, akkor az $\mathbf{n}$ irány alakváltozási főirány (az általa kijelölt n tengely pedig alakváltozási főtenget), míg ϵ_n a vonatkozó főnyúlás.

21. Az xyz kartéziuszi koordinátarendszerben

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z},$$

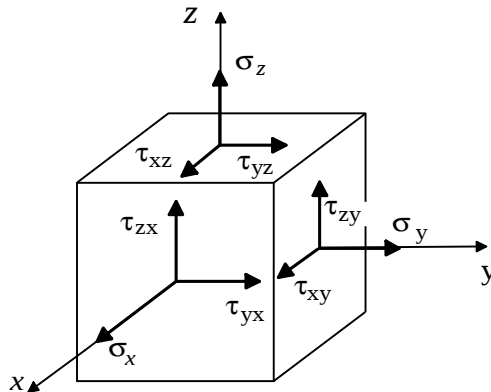
ahol ϵ_x, ϵ_y és ϵ_z fajlagos nyúlás, γ_{xy}, γ_{yz} és γ_{zx} pedig fajlagos szögtorzulás (u_x, u_y és u_z a három elmozduláskoordináta).

22. Az $\mathbf{n}$ normálisú lapon

$$\rho_n = \sigma_n \mathbf{n} + \tau_n$$

a feszültségvektor. Itt $\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \rho_n$ a normálfeszültség, míg $\tau_{mn} = \mathbf{m} \cdot \rho_n$ és $\tau_{ln} = \mathbf{l} \cdot \rho_n$ a τ_n csúsztatófeszültség két összetevője vagy koordinátája ($\mathbf{m} \perp \mathbf{n}, \mathbf{n} \perp \mathbf{l}$ és $\mathbf{l} \perp \mathbf{m}$; az $\mathbf{n}, \mathbf{m}$ és $\mathbf{l}$ egységvektorok).

23. A feszültségi tenzort az elemi kockán, az xyz kartéziuszi koordinátarendszerben az ábra szemlélteti:



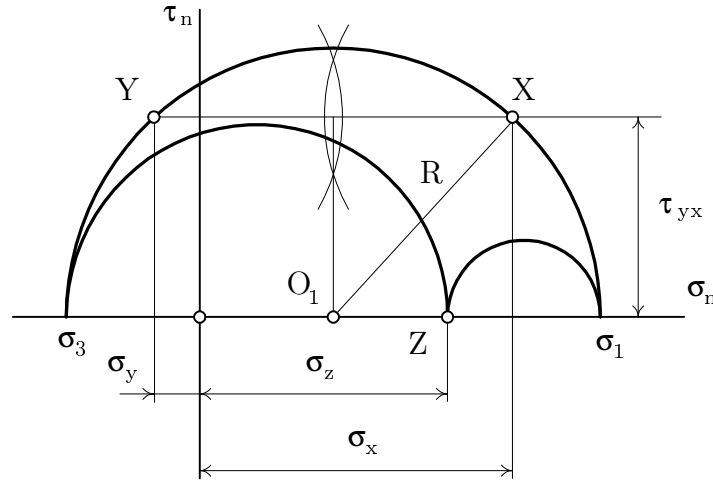
24. Az $\mathbf{n}$ és $\mathbf{m}$ egységvektor. Ha $\rho_n = \sigma_n \mathbf{n}$ azaz minden $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$ -re fennáll, hogy $\tau_{nm} = \mathbf{m} \cdot \rho_n = 0$, akkor az $\mathbf{n}$ irány feszültségi főirány (az általa kijelölt n tengely pedig feszültségi főtenget), míg σ_n a vonatkozó főfeszültség.

25. Egytengelyű feszültségi állapotról beszélünk, ha egy főfeszültség különbözik zérustól a másik kettő pedig zérus értékű.

26. Kéttengelyű a feszültségi állapot, ha két főfeszültség nem zérus a harmadik pedig zérus értékű. Háromtengelyű a feszültségi állapot, ha egy főfeszültség sem zérus.
27. A k, m, n irányok az x, y, z irányokkal egyeznek meg, de a sorrend azonos és eltérő is lehet. Feltevés, hogy a k irány ismert főirány. A

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \sigma_x > \sigma_z > 0 > \sigma_y;$$

esetben pl. $k = z$, $x = m$, $y = n$.



A szerkesztés lépéseit az alábbiak részletezik. (a) Megrajzoljuk a $K[\sigma_k; 0]$ (most $Z[\sigma_z; 0]$) pontot. (b) Megszerkesztjük az $M[\sigma_m; |\tau_{nm}|]$ (most $X[\sigma_x; |\tau_{yx}|]$) és az $N[\sigma_n; |\tau_{mn}|]$ (most $Y[\sigma_y; |\tau_{xy}|]$) pontokat. (c) Az MN szakasz (most XY szakasz) felező merőlegese kimetszi az egyik félkör középpontját (most az O_1 pontot). (d) A megszerkesztett középpont körül R sugarú kört rajzolunk. (e) Az R sugarú kör és a σ_n tengely metszéspontjai valamint a K (most Z) által meghatározott szakaszok mint átmérők fölé két félkört szerkesztünk.

28. Az energia tétel az

$$E_2 - E_1 = W_{12} = W_K + W_B$$

alakban írható fel ahol E a kinetikai energia, az 1 és 2 indexek a terhelés kezdetét és végét azonosítják, W_K a külső erők munkája, W_B pedig a belső erők munkája. *Szilárdságtanban* $E_1 = E_2 = 0$ mivel a vizsgált test (tartó) tartós nyugalomban van. Következésképp

$$W_{12} = W_K + W_B = 0,$$

azaz

$$W_K = -W_B = U + W_D,$$

ahol W_D a disszipált (elnyelt) alakváltozási energia, U pedig a belső energia. Rugalmas testre $W_D = 0$ és így

$$W_K = U.$$

29. A prizmatikus rúd tengelyvonala (súlyponti szála) egyenes, a keresztmetszete pedig állandó.
30. Lineárisan rugalmas, homogén, izotróp testről beszélünk, ha lineáris a $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{A})$ függvénykapcsolat (*lineárisan rugalmas az anyag*), az anyagjellemzők (anyagi tulajdonságok) minden pontban azonosak (*homogén a test*) és az anyagjellemzők (anyagi tulajdonságok) nem függenek iránytól (*izotróp az anyag*).
31. Húzásra (nyomásra)

$$\begin{aligned} \sigma_z &= E\epsilon_z, \\ \epsilon_k &= -\nu\epsilon_z \end{aligned}$$

az egyszerű Hooke törvény, ahol az E rugalmassági modulus és a ν Poisson szám anyagjellemzők.

32. Húzott (nyomott) rúdra

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \frac{N}{A}$$

a feszültségi tenzor és a normálfeszültség. N a ruderő, A a keresztmetszet területe.

33. Ha $N =$ állandó, akkor

$$U = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{AE}$$

a húzott (nyomott) rúdban tárolt rugalmas energia (N a ruderő, l a rúd hossza, E a rugalmassági modulus, A a rúdkeresztmetszet területe).

34. Kör- és körgyűrű keresztmetszetű rúdra a poláris másodrendű nyomaték

$$I_p = \int_{(A)} R^2 dA$$

képletéből kör keresztmetszetre az

$$I_p = \frac{d^4 \pi}{32},$$

körgyűrű keresztmetszetre pedig az

$$I_p = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{32}$$

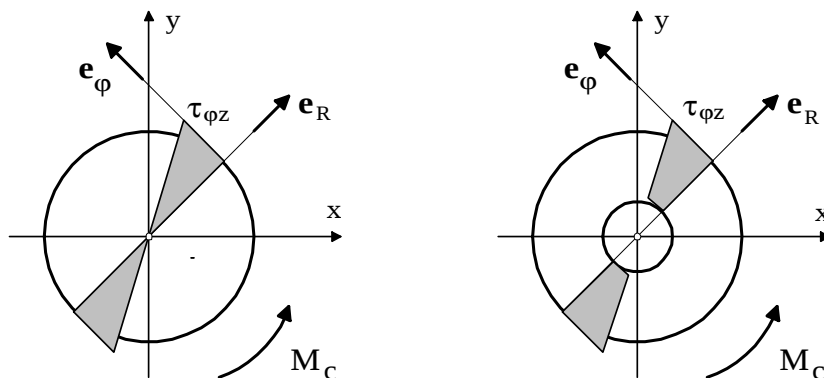
eredmény következik.

35. Kör- és körgyűrű keresztmetszetű prizmatikus rúd csavarásakor polárkoordináta rendszerben

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p} R$$

a feszültségi tenzor és a csúsztató feszültség. (M_c a csavarónyomaték, I_p a poláris másodrendű nyomaték, R a vizsgált ponthoz tartozó sugár).

36. Kör- és körgyűrű keresztmetszetű rúdra az alábbi két ábra szemlélteti a csúsztató feszültségek eloszlását polárkoordináta rendszerben:



37. Ha $M_c =$ állandó, akkor

$$U = \frac{1}{2} \frac{M_c^2 l}{I_p G}$$

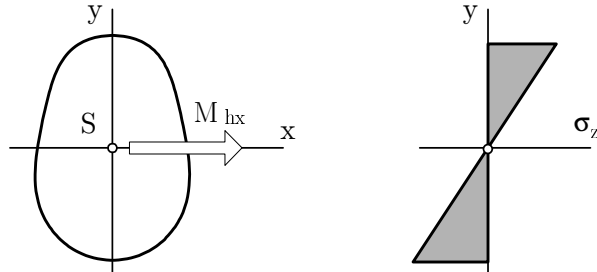
a csavart kör-, körgyűrű keresztmetszetű rúdban tárolt rugalmas energia (M_c a csavarónyomaték, l a rúd hossza, I_p a poláris másodrendű nyomaték, G a nyírási rugalmassági modulus).

38. Tiszta hajlításról beszélünk ha a vizsgált rúdszakaszon csak hajlítás az igénybevétel.
 39. A Bernoulli hipotézis szerint tiszta hajlítás esetén a rúd deformált keresztmetszetei síkok maradnak, a keresztmetszetek síkjában nincs szögtorzulás és a keresztmetszetek a deformáció után is merőlegesek a rúd deformált középvonalára (tengelyvonalára, súlyponti szálára).
 40. (Egyenes) [Ferde] hajlításról beszélünk, ha az $\mathbf{M}_S$ hajlítónyomaték vektor (párhuzamos) [nem párhuzamos] a keresztmetszet egy súlyponti tehetetlenségi főtengelyével [sem].
 41. Egyenes, tiszta hajlításra

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y$$

a feszültségi tenzor és a normál feszültség. (M_{hx} a hajlítónyomaték, I_x a súlyponti x tengelyre – a hajlítás tengelyére – vett másodrendű nyomaték, y a vizsgált pont koordinátája).

42. A vázolt rúdkeresztmetszetre az alábbi ábra szemlélteti a $\sigma_y(z)$ feszültségeloszlást



43. Egyenes, tiszta hajlításra

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M_{hx}}{I_x E}$$

a görbület (ρ a görbületi sugár, M_{hx} a hajlítónyomaték, I_x a súlyponti x tengelyre – a hajlítás tengelyére – vett másodrendű nyomaték, E a rugalmassági modulus).

44. Ha ismert az $M_{hx} = M_{hx}(z)$ hajlítónyomaték, akkor

$$U = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_{hx}^2}{I_x E} dz$$

a rúdban tárolt rugalmas energia, ha elhanyagoljuk a nyírásból adódó rugalmas energiárészt (M_{hx} a hajlítónyomaték, I_x a súlyponti x tengelyre – a hajlítás tengelyére – vett másodrendű nyomaték, E a rugalmassági modulus, l a rúd középvonalának mint egyméretű tartománynak a jelölése).

45. Legyen x és y az A keresztmetszet O pontjához kötött egymásra kölcsönösen merőleges tengelypár (Kartéziuszi koordináta-rendszer O origóval). Az x , y tengelyekre számított másodrendű nyomatékokat az

$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA \quad \text{és} \quad I_y = \int_{(A)} x^2 dA$$

képletek, az xy tengelypárra számított másodrendű nyomatékokat pedig az

$$I_{xy} = \int_{(A)} xy dA$$

összefüggés értelmezi. Az

$$I_0 = \int_{(A)} \mathbf{r}^2 dA = \int_{(A)} (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y$$

integrál az O pontra számított másodrendű nyomaték.

46. Legyen ξ és η az A keresztmetszet S súlypontjához kötött kartéziszi koordinátarendszer. A $\xi\eta$ koordinátarendszerben

$$\mathbf{I}_S = \begin{bmatrix} I_\xi & -I_{\xi\eta} \\ -I_{\eta\xi} & I_\eta \end{bmatrix}$$

a súlyponti tehetetlenségi tenzor mátrixa, ahol I_ξ , I_η és $I_{\eta\xi}$ a vonatkozó másodrendű nyomatékok:

$$I_\xi = \int_{(A)} \eta^2 dA, \quad I_\eta = \int_{(A)} \xi^2 dA, \quad I_{\xi\eta} = \int_{(A)} \xi\eta dA.$$

47. Legyen $\mathbf{R}$ a felületelem S súlypontra vonatkoztatott helyvektora és jelölje $\mathbf{E}$ az egység-tenzort. Az $\mathbf{I}_S$ tenzor invariáns alakját a

$$\mathbf{I}_S \cdot \mathbf{n} = \int_{(A)} \mathbf{R} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{R}) dA, \quad \mathbf{I}_S = \int_{(A)} [R^2 \mathbf{E} - \mathbf{R} \circ \mathbf{R}] dA$$

összefüggések értelmezik.

48. Legyen ξ és η az A keresztmetszet S súlypontjához kötött kartéziszi koordinátarendszer. Legyen továbbá x és y az A keresztmetszet O pontjához kötött kartéziszi koordinátarendszer. Feltételezzük, hogy $S \neq O$ és hogy a két koordinátarendszer megfelelő koordinátengelyei párhuzamosak. A két koordinátarendszerben rendre I_ξ , I_η és $I_{\eta\xi}$, illetve I_x , I_y és I_{xy} a másodrendű nyomatékok. A

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_y \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_O} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_\xi & -I_{\xi\eta} \\ -I_{\eta\xi} & I_\eta \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_S} + A \underbrace{\begin{bmatrix} y_{SO}^2 & -x_{SO} y_{SO} \\ -y_{SO} x_{SO} & x_{SO}^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_{OS}}$$

egyenlet a Steiner tétel mátrix alakja. Skaláris alakban:

$$I_x = I_\xi + Ay_{SO}^2, \quad I_y = I_\eta + Ax_{SO}^2, \quad I_{xy} = I_{\xi\eta} + Ax_{SO}y_{SO}.$$

49. Legyen $\mathbf{T}$ a feszültségi tenzor a szilárd test egy belső P pontjában. Legyen továbbá $\mathbf{n}$ egy a P pontra illeszkedő belső sík normálisa. A sík P pontjában a síkon ébredő $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektor Cauchy tétele szerint a

$$\boldsymbol{\rho}_n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$$

módon számítható.

50. Legyen $\mathbf{q}$ a térfogaton megoszló erőrendszer sűrűségvektora, $\mathbf{T}$ pedig a feszültségi tenzor. Az *erőegyensúlyt* vektoriális alakban a

$$\mathbf{T} \cdot \nabla + \mathbf{q} = 0$$

egyenlet fejezi ki. Az ekvivalens skaláregyenleteket az xyz kartéziszi koordinátarendszerben az alábbiak részletezik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z &= 0. \end{aligned}$$

Itt σ_x , σ_y , σ_z normálfeszültség, τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{zy} nyírófeszültség. A *nyomatéki egyensúlyt* a

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

egyenletek fejezik ki, azaz a feszültségi tenzor szimmetrikus.

51. Az általános Hooke törvény izotróp testre az

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2G} \left(\mathbf{T} - \frac{\nu}{1+\nu} T_I \mathbf{E} \right)$$

$$\mathbf{T} = 2G \left(\mathbf{A} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \mathbf{E} \right)$$

alakban írható fel, ahol $\mathbf{A}$ az alakváltozási tenzor, $\mathbf{T}$ a feszültségi tenzor, G a nyírási rugalmassági modulus, ν a Poisson szám, $\mathbf{E}$ az egységtenzor, T_I és A_I rendre a feszültségi és alakváltozási tenzor első skalárinvariánsa.

52. Homogén és izotrop test esetén a E rugalmassági modulus, a G nyírási rugalmassági modulus és a ν Poisson a három anyagállandó. Ezek közül bármelyik kettő független, a harmadik pedig kifejezhető a másik kettővel.

53. Az xyz kartéziuszi koordinátarendszerben a szokásos jelölésekkel

$$u = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\rho}_x \cdot \boldsymbol{\alpha}_x + \boldsymbol{\rho}_y \cdot \boldsymbol{\alpha}_y + \boldsymbol{\rho}_z \cdot \boldsymbol{\alpha}_z)$$

$$= \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

a fajlagos rugalmas energia (az egységnyi térfogatban tárolt rugalmas energia).

54. A fajlagos alakváltozási energiának

$$u_T = \frac{1}{12G} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] =$$

$$= \frac{1}{12G} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$

a torzítási és

$$u_V = \frac{1}{12G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2$$

a tiszta térfogatváltozási része.

55. A Mohr szerint redukált feszültséget a

$$\sigma_{\text{red Mohr}} = \sigma_1 - \sigma_3$$

képlet értelmezi (a $\sigma_1 - \sigma_3$ különbség a legnagyobb kör átmérője a teljes Mohr féle kördiagramon).

56. A Huber–Mises–Hencky féle redukált feszültséget a főtengek koordinátarendszerében a

$$\sigma_{\text{red HMH}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

összefüggés, az xyz koordinátarendszerben pedig a

$$\sigma_{\text{red HMH}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}$$

képlet értelmezi. (A képletek felírásánál a szokásos jelöléseket alkalmaztuk.)

57. Ha a keresztmetszeten a veszélyes pontban a normálfeszültség és csúsztatófeszültségnek nem zérus – ezeket rendre σ és τ jelöli –, akkor

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma^2 + \beta \tau^2} \quad \text{ahol} \quad \beta = \begin{cases} 4 & \text{ha a Mohr elmélet} \\ 3 & \text{ha a HMH elmélet} \end{cases} \quad \text{érvényes.}$$

58. A zérusvonal (ferde hajlítás) azon pontok mértani helye, ahol a σ_z normálfeszültség zérus, azaz

$$\sigma_z = 0 = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x$$

(M_{hx} és M_{hy} az x és y súlyponti főtengelekre vett hajlítónyomaték, I_x és I_y az x és y súlyponti tengelyekre számított másodrendű nyomaték, x és y pontkoordináták az A keresztmetszeten). Az értelmező egyenlet y -ra történő feloldásával

$$y = -\frac{M_{hy}}{M_{hx}} \frac{I_x}{I_y} x$$

a zérusvonal egyenlete.

59. Egyenes prizmatikus rúd tiszta ferde hajlítása esetén a szokásos xyz koordinátarendszerben

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x$$

a $\mathbf{T}$ feszültségi tenzor és a σ_z normálfeszültség (M_{hx} és M_{hy} az x és y irányú hajlítónyomaték, I_x és I_y az x és y súlyponti főtengelekre számított másodrendű nyomaték, x és y pontkoordináták az A keresztmetszeten).

60. Egyenes, zömök, prizmatikus rúd excentrikus húzása (nyomása) esetén a szokásos xyz koordinátarendszerben

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \frac{F}{A} + \frac{F\eta}{I_x} y + \frac{F\xi}{I_y} x$$

a $\mathbf{T}$ feszültségi tenzor és a σ_z normálfeszültség [F a húzó (> 0) illetve nyomóerő (< 0), η és ξ az erő támadáspontjának koordinátái, I_x és I_y az x és y súlyponti főtengelekre számított másodrendű nyomaték, x és y pontkoordináták az A keresztmetszeten].

61. A zérusvonal [egyenes, zömök, prizmatikus rúd excentrikus húzása (nyomása)] azon pontok mértani helye ahol a σ_z normálfeszültség zérus. Az előző kérdésre adott válasz alapján az

$$\sigma_z = \frac{F}{A} + \frac{F\eta}{I_x} y + \frac{F\xi}{I_y} x = 0$$

egyenlet értelmezi a zérusvonalat. Az F/A hányadossal való átosztás után az

$$i_x^2 = I_x/A \quad \text{és} \quad i_y^2 = I_y/A$$

jelölések bevezetésével a fenti értelmező egyenletből két lépésben kapjuk meg a zérusvonal egyenletét:

$$0 = 1 + \frac{\eta y}{i_x^2} + \frac{\xi x}{i_y^2},$$

$$y = -\frac{i_x^2}{i_y^2} \frac{\xi}{\eta} x - \frac{i_x^2}{\eta}.$$

62. A vizsgált kör, vagy körgyűrű keresztmetszetű rúd hajlítás és csavarás az igénybevétele. Az összetevőket M_{hx} , M_{hy} és M_c jelöli. A redukált nyomatékot az

$$M_{red} = \sqrt{M_{hx}^2 + M_{hy}^2 + \beta^* M_c^2} \quad \beta^* = \begin{cases} 1 & \text{Mohr elmélete szerint} \\ \frac{3}{4} & \text{a HMH elmélet szerint} \end{cases}$$

képlet értelmezi. A hajlítás azonban egyenes és $M_h = \sqrt{M_{hx}^2 + M_{hy}^2}$ a vonatkozó hajlítónyomaték.

63. A veszélyes keresztmetszetben ismert az M_{red} – ennek értelmezését illetően az előző válasszra utalunk – és adott a σ_{meg} . Ha a rúd megfelel akkor fennáll a

$$\frac{M_{red}}{K_x} \leq \sigma_{meg}$$

reláció ahol K_x a keresztmetszeti tényező. Tervezéskor K_x az ismeretlen és a reláció egyenlőség. Ellenőrzéskor K_x is ismert és a reláció fennállását vizsgáljuk.

64. Hajlított, nyírt prizmatikus rúd esetén

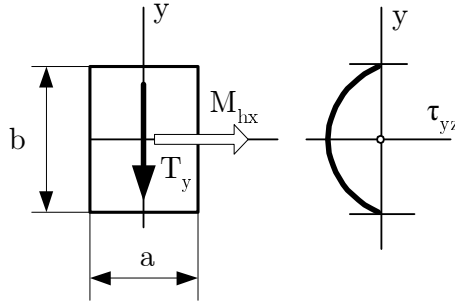
$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

a feszültségi tenzor mátrixa az xyz koordináta-rendszerben, ahol a σ_z normál-feszültség az egyenes hajlításra vonatkozó képletből, a τ_{yz} pedig a nyírófeszültséget adó képletből számítható:

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y, \quad \tau_{yz} = -\frac{T_y}{I_x} \frac{S_x(y)}{a(y)}.$$

Itt M_{hx} és T_y a hajlítónyomaték és nyíróerő, az y pontkoordináta illetve a jelzővonal ordinátája, $S_x(y)$ a jelzővonal feletti ($y > 0$) [jelzővonal alatti ($y < 0$)] keresztmetszetrész statikai nyomatéka az x tengelyre, $a(y)$ pedig a keresztmetszet vastagsága a jelzővonalon. A τ_{xz} pedig a τ_z feszültségvektor irányával kapcsolatos feltételből számítható.

65. Az



ábra jelöléseit is felhasználva

$$\tau_{yz} = \frac{3}{2} \tau_{\text{köz}} \left[1 - \left(\frac{y}{\frac{b}{2}} \right)^2 \right] \quad \tau_{\text{köz}} = -\frac{T_y}{ab}$$

a nyírófeszültség értéke.

66. A vizsgált szerkezeten két erőrendszer működik, elnevezés szerint az egyes és kettes erőrendszer. Jelölje W_{12} az egyes erőrendszer munkáját a kettes erőrendszer okozta elmozdulásokon és forgásokon. A bevezetett jelöléssel összhangban W_{21} a kettes erőrendszer munkája az egyes erőrendszer okozta elmozdulásokon és forgásokon. Betti tétele szerint

$$W_{12} = W_{21}.$$

67. A vizsgált szerkezetet a P_i támadáspontú

$$\mathbf{F}_i = F_i \mathbf{e}_i; \quad F_i > 0, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1, \quad i = 1, \dots, n_f$$

erők és a P_j támadáspontú

$$\mathbf{M}_j = M_j \mathbf{e}_j; \quad M_j > 0, \quad \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j = 1, \quad j = 1, \dots, n_m$$

erőpárok terhelik. Legyen $\mathbf{u}_i$ és ψ_j rendre a P_i illetve a P_j pont elmozdulása és szögelfordulása. Az alakváltozási energiát U jelöli. Castigliano tétele szerint

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{e}_i = u_i \quad \text{és} \quad \frac{\partial U}{\partial M_j} = \psi_j \cdot \mathbf{e}_j = \psi_j.$$

68. Ismeretesek a szerkezetre ható terhelések. Ha az ismeretlen külső erők (támasztóerők és nyomatékok) nem határozhatók meg statikai módszerekkel (egyensúlyi egyenletek segítségével), akkor a vizsgált rúdszerkezetet statikailag külsőleg határozatlannak nevezzük.

69. Ismeretesek a szerkezetre ható külső erők. Ha a belső erők nem határozhatók meg statikai módszerekkel (egyensúlyi egyenletek segítségével) akkor a vizsgált rúdszerkezetet statikailag belsőleg határozatlannak nevezzük.

70. A törzstartó egy statikailag határozottá tett eredetileg statikailag határozatlan tartó. A határozottá tétel során annyi támaszt hagyunk el, hogy a törzstartó mind statikailag mind pedig kinematikailag határozott legyen (azaz egyensúlyi módszerekkel tisztázható az erőjáték és maga a tartó mozgásképtelen).
71. Stablis a karcsú nyomott rúd tekintett egyensúlyi helyzete ha az egyensúlyi helyzet megzavarását követően (a zavarás megszűnése után) a rúd visszatér a zavarás előtti egyensúlyi helyzetébe.
72. Kihajlás léphet fel, ha a karcsú rúdra működő F nyomóerő nagyobb vagy egyenlő, mint az első (a legkisebb) kritikus erő az F_{krit} . Ekkor az egyenes alak ugyan egyensúlyi, de nem stablis (vagyis a rúd a legkisebb megzavarás hatására is elveszti egyenes egyensúlyi alakját és kihajlás lép fel).
A kihajlás azért veszélyes mivel a kihajlás során fellépő hajlítás tetemesen megnöveli a normálfeszültségek abszolút értékének maximumát. (Nyomás helyett hajlítás plusz nyomás az igénybevétel.)
73. Karcsú, nyomott prizmatikus rúd esetén

$$\sigma_{kr} = \begin{cases} \sigma_F - \frac{\sigma_F - \sigma_E}{\lambda_E} \lambda & \text{ha } 0 \leq \lambda \leq \lambda_E \text{ (Tetmajer egyenes)} \\ \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} & \text{ha } \lambda_E \leq \lambda \text{ (Euler hiperbola)} \end{cases}$$

a kritikus feszültség. Itt σ_F a folyáshatár, σ_E az arányossági határ, λ a rúd karcsúsági tényezője, λ_E a határkarcsúsági tényező.

A $\sigma_{kr}(\lambda)$ függvényt az ábra szemlélteti.

