

KONTINUUMMECHNAIKAI FELADATOK

Összeállította Szeidl György

2009

A jelen dokumentum 40 kontinuummechanikai feladatot tartalmaz. A megoldásokat is közöljük. A jelen (folyamatosan bővülő) feladatgyűjtemény kiegészíti Kozák Imre Kontinuummechanika című doktórandsz hallgatók részére írt jegyzetét. A feladatgyűjtemény heti bontásban közöl feladatokat. A szöveg végleges formátumában témakörök szerint lesz rendezve.

1. hét:

1. Igazolja, hogy fennáll a

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{v}_2^* \times \mathbf{v}_3^*}{v^*}$$

összefüggés, ahol $v^* = 1/v$. Érvényes marad az igazolás gondolatmenete $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ esetére? (4 pont)

Megoldás:

Helyettesítsük $\mathbf{v}_3^*$ értékét, és használjuk ki a kifejtési tételt. Kapjuk, hogy

$$\frac{\mathbf{v}_2^* \times \mathbf{v}_3^*}{v^*} = \frac{(\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1) \times \mathbf{v}_3^*}{v v^*} = \frac{1}{v v^*} [(\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3^*) \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3^*) \mathbf{v}_3]$$

ahol $v v^* = 1$, $\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3^* = 1$ és $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3^* = 0$. Következésképp

$$\frac{\mathbf{v}_2^* \times \mathbf{v}_3^*}{v^*} = \mathbf{v}_1 .$$

Ezt kellett igazolni. Ez a gondolatmenet a másik két esetre is érvényes.

2. Igazolja a lineárisan független $\mathbf{v}_i$ ($i = 1, 2, 3$) vektorokhoz tartozó $\mathbf{v}_i^*$ reciprok vektorokat is felhasználva hogy az

$$\mathbf{I} = \mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_1^* + \mathbf{v}_2 \circ \mathbf{v}_2^* + \mathbf{v}_3 \circ \mathbf{v}_3^*$$

tenzor az egységtenzor. (4 pont)

Megoldás:

Idézzük vissza, hogy

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 , \quad c_i = \mathbf{v}_i^* \cdot \mathbf{v}$$

A fenti képletet is figyelembevéve

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \cdot \mathbf{v} &= (\mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_1^*) \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v}_2 \circ \mathbf{v}_2^*) \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v}_3 \circ \mathbf{v}_3^*) \cdot \mathbf{v} = \\ &= \mathbf{v}_1 \underbrace{(\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{v})}_{c_1} + \mathbf{v}_2 \underbrace{(\mathbf{v}_2^* \cdot \mathbf{v})}_{c_2} + \mathbf{v}_3 \underbrace{(\mathbf{v}_3^* \cdot \mathbf{v})}_{c_3} = \\ &= c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{v} , \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy önmagára képezi le az $\mathbf{I}$ tenzor a $\mathbf{v}$ vektort. Vagyis ez a tenzor az egységtenzor.

3. Igazolja az (xyz) KR-ben dolgozva, hogy bármely $\mathbf{c}$ -re

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{w}_a \times \mathbf{c} ,$$

ha

$$\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T \quad \text{és} \quad \mathbf{w}_a = -\frac{1}{2} (\mathbf{w}_x \times \mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y \times \mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z \times \mathbf{e}_z) .$$

(6 pont)

Megoldás:

Mivel a tenzor ferdeszimmetrikus írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{W} \cdot \mathbf{c} &= \frac{1}{2} (\mathbf{W} - \mathbf{W}^T) \cdot \mathbf{c} = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{w}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y \circ \mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z \circ \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{c} - \frac{1}{2} (\mathbf{e}_x \circ \mathbf{w}_x + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{w}_y + \mathbf{e}_z \circ \mathbf{w}_z) \cdot \mathbf{c} = \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{w}_x (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{e}_x (\mathbf{w}_x \cdot \mathbf{c})]}_{-(\mathbf{w}_x \times \mathbf{e}_x) \times \mathbf{c}} + \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{w}_y (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{e}_y (\mathbf{w}_y \cdot \mathbf{c})]}_{-(\mathbf{w}_y \times \mathbf{e}_y) \times \mathbf{c}} + \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{w}_z (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{e}_z (\mathbf{w}_z \cdot \mathbf{c})]}_{-(\mathbf{w}_z \times \mathbf{e}_z) \times \mathbf{c}} = \\ &= -\frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{w}_x \times \mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y \times \mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z \times \mathbf{e}_z]}_{\mathbf{w}_a} \times \mathbf{c} = \mathbf{w}_a \times \mathbf{c} . \end{aligned}$$

Ezt kellett igazolni.

4. Mutassa meg az (xyz) KR-ben dolgozva, hogy a fenti feladatban

$$\underline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 0 & -w_{az} & w_{ay} \\ w_{az} & 0 & -w_{ax} \\ -w_{ay} & w_{ax} & 0 \end{bmatrix}$$

(6 pont)

Megoldás:

Mivel a tenzor ferdeszimmetrikus fennállnak a

$$w_{xx} = w_{yy} = w_{zz} = 0, \quad w_{xy} = -w_{yx}, \quad w_{zx} = -w_{xz}, \quad w_{yz} = -w_{zy},$$

vagy ami ugyanaz a

$$\underline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} w_{xx} & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w_{yx} & w_{xz} \\ w_{yx} & 0 & -w_{zy} \\ -w_{xz} & w_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

egyenletek. Ennek alapján elegendő igazolni a

$$w_{ax} = w_{zy}, \quad w_{ay} = w_{xz}, \quad w_{az} = w_{yx}$$

skaláregyenleteket. Az első tekintve írható, hogy

$$\begin{aligned} w_{ax} = \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{e}_x &= -\frac{1}{2} [(\mathbf{w}_x \times \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{e}_x + (\mathbf{w}_y \times \mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{e}_x + (\mathbf{w}_z \times \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}_x] = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\mathbf{0} + \mathbf{w}_y \cdot \underbrace{(\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x)}_{-\mathbf{e}_z} + \mathbf{w}_z \cdot \underbrace{(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x)}_{\mathbf{e}_y} \right] = -\frac{1}{2} [-w_{zy} + w_{yz}] = w_{zy} \end{aligned}$$

A másik két esetben ugyanígy történhet az igazolás.

2. hét:

1. Adott a $\mathbf{w}_a$ vektorinvariáns. Igazolja, hogy

$$\mathbf{I} \times \mathbf{w}_a = \mathbf{w}_a \times \mathbf{I} = \underline{\mathbf{W}}$$

az a ferdeszimmetrikus tenzor, amelynek $\mathbf{w}_a$ a vektorinvariánsa. (6 pont)

Megoldás:

Az

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \times \mathbf{w}_a &= (\mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_z) \times (w_{ax}\mathbf{e}_x + w_{ay}\mathbf{e}_y + w_{az}\mathbf{e}_z) = \\ &= \mathbf{e}_x \circ (w_{ay}\mathbf{e}_z - w_{az}\mathbf{e}_y) + \mathbf{e}_y \circ (w_{az}\mathbf{e}_x - w_{ax}\mathbf{e}_z) + \mathbf{e}_z \circ (w_{ax}\mathbf{e}_y - w_{ay}\mathbf{e}_x) = \\ &= \underbrace{(w_{az}\mathbf{e}_y - w_{ay}\mathbf{e}_z)}_{\mathbf{w}_x} \circ \mathbf{e}_x + \underbrace{(-w_{az}\mathbf{e}_x + w_{ay}\mathbf{e}_z)}_{\mathbf{w}_y} \circ \mathbf{e}_y + \underbrace{(w_{ax}\mathbf{e}_y - w_{ay}\mathbf{e}_x)}_{\mathbf{w}_z} \circ \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

átalakítás eredményei szerint

$$\underline{\mathbf{W}} = [\mathbf{w}_x \mid \mathbf{w}_y \mid \mathbf{w}_z] = \begin{bmatrix} 0 & -w_{az} & w_{ay} \\ w_{az} & 0 & -w_{ax} \\ -w_{ay} & w_{ax} & 0 \end{bmatrix}$$

ami egyben az állításunk igazolását is jelenti.

A $\mathbf{w}_a \times \mathbf{I}$ szorzat esetén ugyanígy kell eljárni.

2. Kölcsönösen egyértelmű a

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}^o; t) = \mathbf{r}(x^o, y^o, z^o; t)$$

leképezés (azaz létezik a $\mathbf{r}^o = \mathbf{r}^o(\mathbf{r}; t) = \mathbf{r}(x, y, z; t)$ inverz mozgásfüggvény), ha

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^o} & \frac{\partial x}{\partial y^o} & \frac{\partial x}{\partial z^o} \\ \frac{\partial y}{\partial x^o} & \frac{\partial y}{\partial y^o} & \frac{\partial y}{\partial z^o} \\ \frac{\partial z}{\partial x^o} & \frac{\partial z}{\partial y^o} & \frac{\partial z}{\partial z^o} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Igazolja a fenti állítás helyességét. (4 pont)

Megoldás:

Lineáris közelítésben fennállnak a

$$\begin{aligned} dx &\simeq \frac{\partial x}{\partial x^o} dx^o + \frac{\partial x}{\partial y^o} dy^o + \frac{\partial x}{\partial z^o} dz^o \\ dy &\simeq \frac{\partial y}{\partial x^o} dx^o + \frac{\partial y}{\partial y^o} dy^o + \frac{\partial y}{\partial z^o} dz^o \\ dz &\simeq \frac{\partial z}{\partial x^o} dx^o + \frac{\partial z}{\partial y^o} dy^o + \frac{\partial z}{\partial z^o} dz^o \end{aligned}$$

egyenletek. Ha kölcsönösen egyértelmű a fenti leképezés, akkor a fenti egyenletrendszernek ismeretlenek tekintve rendre a dx^o , dy^o és dz^o értékeket megoldhatónak kell lennie a vizsgált tartomány minden egyes pontjában. Ennek a fenti determináns zérustól különböző volta a feltétele.

3. Igazolja a

$$(\mathbf{I} \times \mathbf{n})^T = -\mathbf{n} \times \mathbf{I}$$

egyenlet helyességét. (4 pont)

Megoldás:

A 2. hét első feladatának megoldása szerint ferdeszimmetrikus a

$$\mathbf{W} = \mathbf{I} \times \mathbf{n} = \mathbf{n} \times \mathbf{I}$$

tenzor, azaz fennáll a

$$\mathbf{W}^T = -\mathbf{W}$$

egyenlet, amelyből azonnal kapjuk először $\mathbf{I} \times \mathbf{n}$ -et, másodszor $\mathbf{n} \times \mathbf{I}$ -t írva a $\mathbf{W}$ helyére az igazolni kívánt egyenlőséget.

3. hét:

1. Igazolja, hogy az

$$\mathbf{R} = \cos \psi \mathbf{I} + (1 - \cos \psi) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \sin \psi \mathbf{I} \times \mathbf{n}, \quad |\mathbf{n}| = 1$$

forgástenzor ¹ eleget tesz a

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$$

egyenletnek (ortogonális tenzor). (15 pont)

Megoldás:

A megoldás során azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek mellett ortogonális az $\mathbf{R}$ forgástenzor általánosításának tekinthető

$$\mathbf{Q} = \cos \psi \mathbf{I} + (Q_{III} - \cos \psi) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \sin \psi \mathbf{I} \times \mathbf{n},$$

tenzor, ahol a Q_{III} egyelőre ismeretlen paraméter.

A kérdés tisztázása a $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T$ szorzat vizsgálatát igényli.

Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{Q}^* = \cos \psi \mathbf{I} + (Q_{III} - \cos \psi) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{Q}^* = (\mathbf{Q}^*)^T$$

a $\mathbf{Q}$ szimmetrikus része. Vegyük azt is észre, visszahivatkozva a második hét utolsó feladatára, hogy a $\mathbf{I} \times \mathbf{n} = \mathbf{n} \times \mathbf{I}$ tenzor ferdeszimmetrikus, amelyre nézve fennáll a

$$(\mathbf{I} \times \mathbf{n})^T = -\mathbf{n} \times \mathbf{I}.$$

egyenlet. Következőleg

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^* + \sin \psi \mathbf{I} \times \mathbf{n} \quad \text{és} \quad \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^* - \sin \psi \mathbf{n} \times \mathbf{I},$$

¹Az $\mathbf{R}$ forgástenzorral kapcsolatos ismereteket a kézzel írt előadásvázlat 9-12 oldalai tartalmazzák.

amivel

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T &= \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{Q}^* + \\ &+ \sin \psi [(\mathbf{I} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{Q}^* - \mathbf{Q}^* \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{I})] - \sin^2 \psi (\mathbf{I} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{I}) . \end{aligned}$$

A végső eredmény előállításához szükség lesz a fenti összefüggés részeinek átalakításával kapcsolatos és a következőkben magyarázattal részletezett képletekre:

(a) A $\mathbf{Q}^*$ -ot értelmező fenti összefüggést is felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{Q}^* &= \mathbf{I} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{Q}^*) = \mathbf{n} \times \mathbf{Q}^* = \\ &= \mathbf{n} \times [\cos \psi \mathbf{I} + (Q_{III} - \cos \psi) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] = \mathbf{n} \times \mathbf{I} \cos \psi . \end{aligned}$$

(b) Ugyanígy módon adódik, hogy:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^* \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{I}) &= (\mathbf{Q}^* \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{I} = \mathbf{Q}^* \times \mathbf{n} = \\ &= [\cos \psi \mathbf{I} + (Q_{III} - \cos \psi) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] \times \mathbf{n} = \mathbf{I} \times \mathbf{n} \cos \psi . \end{aligned}$$

(c) További részeredmény kapható az alábbi átalakítással:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{I}) &= \\ &= [(n_z \mathbf{e}_y - n_y \mathbf{e}_z) \otimes \mathbf{e}_x + (-n_z \mathbf{e}_x + n_x \mathbf{e}_z) \otimes \mathbf{e}_y + (n_y \mathbf{e}_x - n_x \mathbf{e}_y) \otimes \mathbf{e}_z] \cdot \\ &[(n_z \mathbf{e}_y - n_y \mathbf{e}_z) \otimes \mathbf{e}_x + (-n_z \mathbf{e}_x + n_x \mathbf{e}_z) \otimes \mathbf{e}_y + (n_y \mathbf{e}_x - n_x \mathbf{e}_y) \otimes \mathbf{e}_z] = \\ &= -(-n_z^2 \mathbf{e}_y + n_y n_z \mathbf{e}_z) \otimes \mathbf{e}_y + (n_y n_z \mathbf{e}_y - n_y^2 \mathbf{e}_z) \otimes \mathbf{e}_z + (-n_z^2 \mathbf{e}_x + n_x n_z \mathbf{e}_z) \otimes \mathbf{e}_x + \\ &+ (n_x n_z \mathbf{e}_x - n_x^2 \mathbf{e}_z) \otimes \mathbf{e}_z + (-n_y^2 \mathbf{e}_x + n_x n_y \mathbf{e}_y) \otimes \mathbf{e}_x + (n_x n_y \mathbf{e}_x - n_x^2 \mathbf{e}_y) \otimes \mathbf{e}_y = \\ &= [n_x n_x \mathbf{e}_x + n_x n_z \mathbf{e}_y + n_x n_z \mathbf{e}_z] \otimes \mathbf{e}_x + [n_y n_x \mathbf{e}_x + n_y^2 \mathbf{e}_y + n_y n_z \mathbf{e}_z] \otimes \mathbf{e}_y + \\ &+ [n_z n_x \mathbf{e}_x + n_z n_y \mathbf{e}_y + n_z^2 \mathbf{e}_z] \otimes \mathbf{e}_y - (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x - (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y - \\ &- (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{I} . \end{aligned}$$

(e) A $\mathbf{Q}^*$ szimmetrikus tenzort adó képlet alapján:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^* \cdot (\mathbf{Q}^*)^T &= \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{Q}^* = \\ &= \cos^2 \psi \mathbf{I} + 2 \cos \psi (Q_{III} - \cos \psi) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + (Q_{III} - \cos \psi)^2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \\ &= \cos^2 \psi \mathbf{I} + (Q_{III}^2 - \cos^2 \psi) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} . \end{aligned}$$

Felhasználva, illetve helyettesítve mostmár a fenti részeredményeket a $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T$ szorzatot adó és a kitűzött feladat általánosításként felírt képletbe a

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T &= \cos^2 \psi \mathbf{I} + (Q_{III}^2 - \cos^2 \psi) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \sin^2 \psi \mathbf{I} - \sin^2 \psi \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \\ &= \mathbf{I} + (Q_{III}^2 - 1) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \end{aligned}$$

eredményt kapjuk. Akkor ortogonális a $\mathbf{Q}$ tenzor, ha egységtenzort ad a $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T$ szorzat. Azonnal látszik az utóbbi összefüggés alapján, hogy ennek a

$$Q_{III}^2 = 1 , \quad \text{azaz a} \quad Q_{III} = \pm 1$$

reláció fennállása a feltétele.

A továbbiakban tisztázzuk a Q_{III} jelentését. Tegyük fel, hogy

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_x .$$

Ez esetben

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T) &= \det(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T) = \det(\mathbf{I} + (Q_{III}^2 - 1) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \\ &= \begin{vmatrix} 1 + Q_{III}^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = Q_{III}^2 . \end{aligned}$$

A kapott képlet szerint Q_{III} a $\mathbf{Q}$ tenzor harmadik skalárinvariánsának vehető.

Összegezve a szakasz eredményeit igazoltuk, hogy ortogonális a kitűzött feladat általánosításaként vett $\mathbf{Q}$ tenzor, ha $Q_{III} = \pm 1$, ahol Q_{III} a tenzor harmadik skalárinvariánsa. $Q_{III} = 1$ -re $\mathbf{Q}$ tenzor előállítása megegyezik a véges forgatás $\mathbf{R}$ tenzorával. Következésképp ortogonális

az $\mathbf{R}$ tenzor.

2. Igazolja, hogy fennáll az

$$\det(\mathbf{R}) = 1$$

egyenlet is. (6 pont)

Megoldás:

Az előző feladat megoldásában áll az alábbi szöveg: $Q_{III} = 1$ -re $\mathbf{Q}$ tenzor előállítás meg-
egyezik a véges forgatás $\mathbf{R}$ tenzorával. Következésképp ortogonális az $\mathbf{R}$ tenzor. Ez egyben
azt is jelenti hogy az $\mathbf{R}$ tenzor determinánsa megegyezik a Q_{III} -al, azaz 1.

Az igazolás formálisan is elvégezhető. Érdemes speciálisan választani az $\mathbf{n}$ vektort, pl. $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$,
mivel ez nem sérti az általánosságot.

3. Tegyük fel, hogy

$$x = e^t x^o - e^{-t} y^o, \quad y = e^t x^o + e^{-t} y^o, \quad z = z^o$$

a mozgásfüggvény. Írja fel a sebességmezőt (és a gyorsulásmezőt) Lagrange illetve Euler féle
leírasmódban. (6 pont)

Megoldás:

Idő szerinti deriválásokkal kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} v_x^o &= e^t x^o + e^{-t} y^o, & v_y^o &= e^t x^o - e^{-t} y^o, & v_z^o &= 0, \\ a_x^o &= e^t x^o - e^{-t} y^o, & a_y^o &= e^t x^o + e^{-t} y^o, & a_z^o &= 0. \end{aligned}$$

Euler féle leírasmódra térve át

$$\begin{aligned} v_x &= y, & v_y &= x, & v_z &= 0, \\ a_x &= x, & a_y &= y, & a_z &= 0. \end{aligned}$$

az eredmény.

4. Legyen ferdeszimmetrikus a $\mathbf{W}$ tenzor. Legyen továbbá az $\mathbf{n}$ tetszőleges vektor. Mutassa
meg, hogy ekkor

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

(4 pont)

Megoldás:

Jelölje $\mathbf{w}_a$ a tenzor vektorinvariánsát. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{W} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{w}_a \times \mathbf{n}$. Következésképp

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{w}_a \times \mathbf{n}) = (\mathbf{w}_a \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{w}_a \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{n}) = 0,$$

hiszen két párhuzamos vektornak zérus a vektoriszorzata.

5. Igazolja az előadásvázlat vonatkozó bizonyítását felhasználva a

$$(\mathbf{dA})' = -(\mathbf{D} - D_I \mathbf{I}) \cdot \mathbf{dA} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{dA}$$

összefüggés helyességét. (A $\mathbf{dr}_1 = \mathbf{e}_x dx$, $\mathbf{dr}_2 = \mathbf{e}_y dy$ választást alkalmazza. Legyen továbbá
 $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$.) (8 pont)

Megoldás:

Az átalakítások utolsó lépésében felhasználjuk, majd, hogy

$$\mathbf{dA} = \mathbf{dr}_1 \times \mathbf{dr}_2 = dx dy \mathbf{e}_z.$$

Az alábbiak a szükséges átalakításokat részletezik:

$$\begin{aligned}
 (d\mathbf{A})^\cdot &= (d\mathbf{r}_1)^\cdot \times d\mathbf{r}_2 + d\mathbf{r}_1 \times (d\mathbf{r}_2)^\cdot = -d\mathbf{r}_2 \times (d\mathbf{r}_1)^\cdot + d\mathbf{r}_1 \times (d\mathbf{r}_2)^\cdot = \\
 &= dx dy (-\mathbf{e}_y \times \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_x \times \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_y) = dx dy \mathbf{I} \cdot (-\mathbf{e}_y \times \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_x \times \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_y) = \\
 &= dx dy (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) \cdot (-\mathbf{e}_y \times \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_x \times \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_y) = \\
 &= dx dy \left[-(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{e}_y \times \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_x - \underbrace{(\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{e}_y \times \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_x}_{=0} - (\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}_y \times \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_x + \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{e}_x \times \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_y}_{=0} + (\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{e}_x \times \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_y + (\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}_x \times \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_y \right] = \\
 &= dx dy \left[-\mathbf{e}_x (\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z (\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y (\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z (\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_y \right] = \\
 &= dx dy \left[-(\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{L} \cdot (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x) - (\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{L} \cdot (\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_y \right] = \\
 &= dx dy \left[\mathbf{e}_z \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_z - \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{L} \cdot (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x) - \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{L} \cdot (\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) - \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{L} \cdot (\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) \right] = \\
 &= d\mathbf{A} (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_z) - d\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} \cdot [\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z] = \\
 &= d\mathbf{A} D_I - d\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = -(\mathbf{D} - D_I \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{A} + \mathbf{W} \cdot d\mathbf{A}
 \end{aligned}$$

4. hét:

1. Mutassa meg az előadás jelöléseivel, hogy az $\mathbf{L}$ tenzor első skalárinvariánsa a

$$L_I = \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3^* \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_3$$

módon számítható, ahol az $\mathbf{e}_i^*$ az $\mathbf{e}_i$ -hez tartozó reciprok bázisvektor. (6 pont)
[Legyen a

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x \otimes \mathbf{e}'_x + \mathbf{a}_y \otimes \mathbf{e}'_y + \mathbf{a}_z \otimes \mathbf{e}'_z \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \mathbf{b}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{b}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{b}_z \otimes \mathbf{e}_z$$

két másodrendű tenzor – $\mathbf{e}'_m = \mathbf{e}_m$ $m = x, y, z$. Ezek energia típusú szorzatát a

$$\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{b}_x) (\mathbf{e}'_x \cdot \mathbf{e}_x) + (\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{b}_y) (\mathbf{e}'_y \cdot \mathbf{e}_y) + (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{b}_z) (\mathbf{e}'_z \cdot \mathbf{e}_z)$$

kifejezés értelmezi. Valamely, mondjuk a $\mathbf{B}$ tenzor első skalárinvariánsa a fenti szorzattal a

$$B_I = \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{I}$$

alakban írható fel. Az igazolás során a fentiekből induljon ki.]

Megoldás:

Legyenek az $\mathbf{e}_i$ és $\mathbf{e}_i^*$ ($i = 1, 2, 3$) vektorok egymás reciprokai. Ezeket felhasználva az $\mathbf{L}$ sebesség gradiens az

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \otimes \mathbf{e}_1^* + \mathbf{L}_2 \otimes \mathbf{e}_2^* + \mathbf{L}_3 \otimes \mathbf{e}_3^*$$

alakban is felírható, ahol $\mathbf{L}_i$ rendre az $\mathbf{e}_i$ vektorok képe: $\mathbf{L}_i = \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_i$. Mivel maga az egység-tenzor

$$\mathbf{I} = \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3^* \otimes \mathbf{e}_3$$

alakú fennáll a fentiek szerint, hogy

$$\begin{aligned}
 L_I &= (\mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{L}_1) \underbrace{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1^*)}_{=1} + (\mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{L}_2) \underbrace{(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2^*)}_{=1} + (\mathbf{e}_3^* \cdot \mathbf{L}_3) \underbrace{(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3^*)}_{=1} = \\
 &= \mathbf{e}_1^* \cdot \underbrace{\mathbf{L}_1}_{=\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_1} + \mathbf{e}_2^* \cdot \underbrace{\mathbf{L}_2}_{=\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_2} + \mathbf{e}_3^* \cdot \underbrace{\mathbf{L}_3}_{=\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_3} = \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3^* \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_3.
 \end{aligned}$$

Ezt kellett bizonyítani.

2. Legyen a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ két másodrendű tenzor. Igazolja, hogy

$$\det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = \det(\mathbf{B}) \det(\mathbf{C})$$

(Ez a determinánsok szorzástétele.) (6 pont)

Megoldás:

A jobb áttekinthetőség kedvéért élünk majd az $x \iff 1$, $y \iff 2$ és $z \iff 3$ megfeleltetésekkel

(számokat gondolunk az indexként szereplő x , y és z helyére). Abban is megállapodunk összhangban az előző megállapodással, hogy az indexként használt latin betűk az 1,2, vagy 3 számok bármelyikét jelenthetik. Bevezetjük továbbá a permutációs szimbólum fogalmát:

$$e_{pqr} = \begin{cases} 1 & \text{ha a } pqr \text{ számhármast permutációja az 1,2,3 természetes számoknak,} \\ 0 & \text{ha a } pqr \text{ számhármast nem permutációja az 1,2,3-nak (vannak ismétlődő számok).} \end{cases}$$

A fentiekkel összhangban az összegező szimbólum kiírásakor csak az összegező indexeket tüntetjük fel, de az összegezési határokat nem írjuk ki, hiszen azok csak 1 és 3 lehetnek.

A permutációs szimbólum értékészletét figyelembevéve nem nehéz ellenőrizni, hogy az $\mathbf{A}$ tenzor

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

mátrixának

$$\det(\underline{\mathbf{A}}) = \sum_{p,q,r} e_{pqr} a_{1p} a_{2q} a_{3r}$$

a determinánsa. Legyen az uvw számhármast az 1,2 és 3 számokból összeállított tetszőleges de kiválasztása után rögzített számhármast. Vegyük észre, hogy az

$$\sum_{p,q,r} e_{pqr} c_{up} c_{vq} c_{wr}$$

összeg értéke az uvw számhármastól függ: $\det(\underline{\mathbf{C}})$, ha a számhármast páros permutációja az 1,2 és 3-nak, $-\det(\underline{\mathbf{C}})$, ha a számhármast páratlan permutációja az 1,2 és 3-nak és végül zérus ha a számhármast nem permutációja az 1,2 és 3-nak (vannak ismétlődő számok). Ez azt jelenti, hogy

$$\sum_{p,q,r} e_{pqr} c_{up} c_{vq} c_{wr} = e_{uvw} \det(\underline{\mathbf{C}}).$$

A fentiek felhasználásával írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \det(\underline{\mathbf{A}}) &= \sum_{p,q,r} e_{pqr} a_{1p} a_{2q} a_{3r} = \det(\underline{\mathbf{A}}) = \sum_{p,q,r} e_{pqr} \sum_u b_{1u} c_{up} \sum_v b_{2v} c_{vq} \sum_w b_{3w} c_{wr} = \\ &= \sum_{u,v,w} \left(\sum_{p,q,r} e_{pqr} c_{up} c_{vq} c_{wr} \right) b_{1u} b_{2v} b_{3w} = \det(\underline{\mathbf{C}}) \sum_{u,v,w} e_{uvw} b_{1u} b_{2v} b_{3w} = \det(\underline{\mathbf{B}}) \det(\underline{\mathbf{C}}) \end{aligned}$$

ami az igazolni kívánt eredmény.

Megjegyezzük, hogy ugyanez az eredmény a vonatkozó determinánsok részletes kiírásával, sokkal munkaigényesebben is megkapható.

3. Igazolja, hogy a

$$\mathbf{C}^o = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$$

tenzor pozitív definit szimmetrikus tenzor. (4 pont)

Megoldás:

Nyilvánvaló, hogy

$$(\mathbf{C}^o)^T = (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^T = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{C}^o,$$

azaz szimmetrikus a tenzor. Másrészt a

$$d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}^o$$

képlet szerint

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{r}^o \cdot d\mathbf{r}^o = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}^o) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}^o) = \\ &= d\mathbf{r}^o \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}^o = d\mathbf{r}^o \cdot \mathbf{C}^o \cdot d\mathbf{r}^o \geq 0, \quad |d\mathbf{r}^o| > 0 \end{aligned}$$

bármilyen $d\mathbf{r}^o$ esetén. A tenzor tehát pozitív szemidefinit – a $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}^o = \mathbf{0}$ esetet ugyanis még nem zártuk ki. Az utóbbi egyenlet azonban homogén lineáris egyenletrendszer a $d\mathbf{r}^o$ -ra

nézve. Ennek a $\det \mathbf{F} = J > 0$ reláció teljesülése miatt csak triviális megoldása van a $d\mathbf{r}^o$ -ra. Következésképp $ds^2 = d\mathbf{r}^o \cdot \mathbf{C}^o \cdot d\mathbf{r}^o = 0$ csak $|d\mathbf{r}^o| = 0$ esetén lehetséges. A $\mathbf{C}^o$ tehát valóban pozitív definit.

5. hét:

1. Igazolja, hogy

$$\nabla = \nabla^o \cdot \mathbf{F}^{-1}.$$

(6 pont)

Megoldás:

Az alábbi átalakítás vezet célhoz:

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^o} \frac{\partial x^o}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y^o} \frac{\partial y^o}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z^o} \frac{\partial z^o}{\partial x} \right) \mathbf{e}_x + \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x^o} \frac{\partial x^o}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y^o} \frac{\partial y^o}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z^o} \frac{\partial z^o}{\partial y} \right) \mathbf{e}_y + \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x^o} \frac{\partial x^o}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y^o} \frac{\partial y^o}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z^o} \frac{\partial z^o}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^o} \mathbf{e}_x^o \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y^o} \mathbf{e}_y^o \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z^o} \mathbf{e}_z^o \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial x} \right) \mathbf{e}_x + \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x^o} \mathbf{e}_x^o \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y^o} \mathbf{e}_y^o \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z^o} \mathbf{e}_z^o \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial y} \right) \mathbf{e}_y + \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x^o} \mathbf{e}_x^o \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y^o} \mathbf{e}_y^o \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z^o} \mathbf{e}_z^o \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z = \\ &= \nabla^o \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial x} \otimes \mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial y} \otimes \mathbf{e}_y + \frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial z} \otimes \mathbf{e}_z \right)}_{\mathbf{F}^{-1}} = \nabla^o \cdot \mathbf{F}^{-1}. \end{aligned}$$

Ezt kellett bizonyítani.

Nyilvánvaló a fentiek alapján, hogy

$$\nabla^o = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

reláció is fennáll.

2. Legyen $\Phi(\mathbf{r})$, $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ és $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ a kontinuum valamilyen állapotát a pillanatnyi konfigurációban leíró skalár-, vektor- és tenzormező. Igazolja, hogy fennállnak a következő összefüggések:

$$\begin{aligned} \Phi \nabla &= \Phi \nabla^o \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{u} \otimes \nabla = \mathbf{u} \otimes \nabla^o \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{E} \otimes \nabla = \mathbf{E} \otimes \nabla^o \cdot \mathbf{F}^{-1}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{F}^{-T} \nabla^o \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{E} \cdot \nabla = \overset{\downarrow}{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-T} \nabla^o. \end{aligned}$$

(4 pont)

Megoldás:

Az előző feladat állításának felhasználásával azonnal adódik a megoldás.

3. Igazolja a Green-Lagrange és a jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzorok invariánsaival kapcsolatos

$$E_I^o = \frac{1}{2} (C_I^o - 3), \quad E_{II}^o = \frac{1}{4} (C_{II}^o - 2C_I^o + 3), \quad E_{III}^o = \frac{1}{8} (C_{III}^o - C_{II}^o + C_I^o - 1)$$

összefüggéseket. (4 pont)

Megoldás:

A főtengetyvek koordinátarendszerében

$$\mathbf{C}^o = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{n}_i^o \otimes \mathbf{n}_i^o, \quad \underline{\mathbf{C}}^o = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

a jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor és mátrixa.

A formális számításokat értelemszerűen a főtengetyvek KR-ében végezzük.

Figyelembe véve, hogy

$$\mathbf{E}^o = \frac{1}{2} (\mathbf{C}^o - \mathbf{I}) , \quad \underline{\mathbf{E}}^o = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 - 1 \end{bmatrix}$$

és kihasználva a skaláris invariánsok definíciója alapján adódó

$$\begin{aligned} C_I^o &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ C_{II}^o &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2, \\ C_{III}^o &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned}$$

összefüggéseket írhatjuk, hogy

$$E_I^o = \frac{1}{2} [(\lambda_1^2 - 1) + (\lambda_2^2 - 1) + (\lambda_3^2 - 1)] = \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) = \frac{1}{2} (C_I^o - 3)$$

és

$$\begin{aligned} E_{II}^o &= \frac{1}{4} [(\lambda_1^2 - 1)(\lambda_2^2 - 1) + (\lambda_1^2 - 1)(\lambda_3^2 - 1) + (\lambda_2^2 - 1)(\lambda_3^2 - 1)] = \\ &= \frac{1}{2} [\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 - 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) + 3] = \frac{1}{4} (C_{II}^o - 2C_I^o + 3) \end{aligned}$$

továbbá, hogy

$$\begin{aligned} E_{III}^o &= \frac{1}{8} (\lambda_1^2 - 1)(\lambda_2^2 - 1)(\lambda_3^2 - 1) = \\ &= \frac{1}{8} [\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 - (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2) + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 1] = \\ &= \frac{1}{8} (C_{III}^o - C_{II}^o + C_I^o - 1) . \end{aligned}$$

4. Igazolja az Euler-Almansi és a Cauchy-féle alakváltozási tenzorok invariánsaival kapcsolatos

$$E_I = \frac{1}{2} (3 - B_I^{-1}) , \quad E_{II} = \frac{1}{4} (3 - 2B_I^{-1} + B_{II}^{-1}) , \quad E_{III} = \frac{1}{8} (1 - B_I^{-1} + B_{II}^{-1} - B_{III}^{-1})$$

összefüggéseket. (4 pont)

Megoldás:

A főtengetyvek koordinátarendszerében

$$\mathbf{B}^{-1} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i^2} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i , \quad \underline{\mathbf{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3^2} \end{bmatrix}$$

a Cauchy-féle alakváltozási tenzor és mátrixa.

A formális számításokat a főtengetyvek KR-ében végezzük.

Figyelembe véve, hogy

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) , \quad \underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{\lambda_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\lambda_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{\lambda_3^2} \end{bmatrix}$$

és kihasználva a skaláris invariánsok definíciója alapján adódó

$$\begin{aligned} B_I^{-1} &= \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2}, \\ B_{II}^{-1} &= \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_3^2} + \frac{1}{\lambda_2^2 \lambda_3^2}, \\ B_{III}^{-1} &= \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2} \end{aligned}$$

összefüggéseket írhatjuk, hogy

$$E_I = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{\lambda_2^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{\lambda_3^2}\right) \right] = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_3^2}\right) = \frac{1}{2} (3 - B_I^{-1})$$

és

$$\begin{aligned} E_{II} &= \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2}\right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_2^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2}\right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_3^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{\lambda_2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_3^2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[3 - 2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} \right) + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_3^2} + \frac{1}{\lambda_2^2 \lambda_3^2} \right] = \frac{1}{4} (3 - 2B_I^{-1} + B_{II}^{-1}) \end{aligned}$$

továbbá, hogy

$$\begin{aligned} E_{III} &= \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2}\right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_3^2}\right) = \\ &= \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} \right) + \left(\frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_3^2} + \frac{1}{\lambda_2^2 \lambda_3^2} \right) - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2} \right] = \\ &= \frac{1}{8} (1 - B_I^{-1} + B_{II}^{-1} - B_{III}^{-1}). \end{aligned}$$

6. hét:

1. Mutassa meg, hogy a Green-Lagrange és Euler-Almansi alakváltozási tenzorokban valóban nincs benne a merevtestszerű forgás hatása, azaz csak az alakváltozásokat tartalmazzák. (4 pont)

Megoldás:

A poláris felbontási tétel szerint $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^o$. Ezt helyettesítve a jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzorba kapjuk, hogy

$$\mathbf{C}^o = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^{oT} \cdot \underbrace{\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{U}^o = \mathbf{U}^{oT} \cdot \mathbf{U}^o = (\mathbf{U}^o)^2.$$

Ez azt jelenti, hogy független a $\mathbf{C}^o$ jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor a merevtestszerű forgás hatását megjelenítő $\mathbf{R}$ tenzortól. Figyelembe véve ezek után, hogy az egysegitenzor minden vektort önmagára képez le, azaz ehhez a leképezéshez sem tartozik forgás, a Green-Lagrange alakváltozási tenzor

$$\mathbf{E}^o = \frac{1}{2} (\mathbf{C}^o - \mathbf{I})$$

képletéből azonnal következik az állítás Green-Lagrange alakváltozási tenzorra vonatkozó része.

Az állítás második részének igazolásához vegyük figyelembe hogy $\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$, amivel

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{R})^T = \mathbf{V} \cdot \underbrace{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{V}^T = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T = \mathbf{V}^2.$$

Ez azt jelenti, hogy a baloldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor is független a merevtestszerű forgástól (az $\mathbf{R}$ tenzortól). Ezt figyelembevéve azonnal következik az igazolni kívánt eredmény az

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1})$$

Euler-Almansi alakváltozási tenzorra nézve is.

2. Mutassa meg a poláris felbontással kapcsolatos eredmények felhasználásával, hogy a $\mathbf{V}$ tenzor $\mathbf{n}_i$ ($|\mathbf{n}_i| = 1$, $i = 1, 2, 3$) főirányai az $\mathbf{n}_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}_i^o$ ($\mathbf{n}_i^o$ az $\mathbf{U}^o$ sajátvektora, $|\mathbf{n}_i^o| = 1$) módon számíthatók. Mi az utóbbi képlet jelentősége? (6 pont)

Megoldás:

A poláris felbontási tétel szerint $\mathbf{V} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^o \cdot \mathbf{R}^T$. Következésképp

$$\mathbf{V} \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}_i^o) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^o \cdot \mathbf{R}^T \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}_i^o) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^o \cdot \underbrace{\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}}_I \cdot \mathbf{n}_i^o = \mathbf{R} \cdot \underbrace{\mathbf{U}^o \cdot \mathbf{n}_i^o}_{\lambda_i \mathbf{n}_i^o}$$

azaz

$$\mathbf{V} \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}_i^o) = \lambda_i \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}_i^o.$$

Mivel az $\mathbf{U}^o$ és $\mathbf{V}$ tenzornak azonosak a sajátértékei az utóbbi egyenlet szerint a kapcsos zárójelben álló kifejezés a $\mathbf{V}$ tenzor sajátvektora kell, hogy legyen. Ez azt jelenti, hogy

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}_i^o = \mathbf{n}_i.$$

(A forgatás nem változtatja meg a vektor hosszát: $\mathbf{n}_i$ is egységvektor.)

A kapott eredmény szerint a főtengek által alkotott triéder a pillanatnyi konfigurációban úgy kapható meg kezdeti konfigurációbeli főtengek alkotta triéderből, hogy az utóbbit áthelyezzük a pillanatnyi konfigurációba, majd elforgatjuk az $\mathbf{R}$ tenzor megszabta módon.

3. Igazolja, hogy

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i^o.$$

az alakváltozási gradiens alakja, ha a főtengek KR-eit használjuk. (4 pont)

Megoldás:

A poláris felbontási tétel szerint

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^o = \mathbf{R} \cdot \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i^o \otimes \mathbf{n}_i^o = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \underbrace{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}_i^o}_{\lambda_i \mathbf{n}_i} \otimes \mathbf{n}_i^o = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i^o.$$

4. Igazolja, hogy

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i^o.$$

a forgató tenzor, ha a főtengek KR-eit használjuk. (4 pont)

Megoldás:

Azonos átalakításokkal kapjuk az igazolni kívánt eredményt:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{R} \cdot \sum_{i=1}^3 \mathbf{n}_i^o \otimes \mathbf{n}_i^o = \sum_{i=1}^3 \underbrace{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}_i^o}_{\lambda_i \mathbf{n}_i} \otimes \mathbf{n}_i^o = \sum_{i=1}^3 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i^o.$$

5. Valamely $\mathbf{F}$ ($\det(\mathbf{F}) > 0$) tenzor $\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$ baloldali poláris felbontásában a

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T$$

módon értelmezzük a $\mathbf{V}$ tenzort, ahol az $\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ szorzat az $\mathbf{F}$ jobboldali poláris felbontása. Igazolja, hogy

- (a) a $\mathbf{V}$ tenzor szimmetrikus és pozitív definit,
- (b) $\mathbf{V} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{F}$,
- (c) $\mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$.

(8 pont)

Megoldás:

A megoldást részproblémák sorrendjében tekintjük át.

- (a) A $\mathbf{V}$ tenzor valóban szimmetrikus mivel

$$\mathbf{V}^T = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T)^T = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U})^T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{V}.$$

A tenzor pozitív definit voltának belátásához vegyük figyelembe, hogy $\mathbf{U}$ pozitív definit volta miatt

$$\det(\mathbf{V}) = \underbrace{\det(\mathbf{R})}_1 \det(\mathbf{U}) \underbrace{\det(\mathbf{R}^T)}_1 = \det(\mathbf{U}) > 0.$$

Legyen $\mathbf{w}$ tetszőleges nem zérus vektor. A $\mathbf{w}$ felhasználásával írható, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{w} &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{U}} \cdot \sqrt{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{w} = \\ &= \left(\sqrt{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{w} \right) \cdot \sqrt{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{w} = \left(\sqrt{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{w} \right)^2 > 0, \end{aligned}$$

ahol a

$$\sqrt{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{w}$$

szorzat a feladat feltételei mellett sosem lehet zérus, ha $|\mathbf{w}| \neq 0$, mivel

$$\det \left(\sqrt{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{R}^T \right) = \det \left(\sqrt{\mathbf{U}} \right) = \sqrt{\det(\mathbf{U})} > 0,$$

ami azt jelenti, hogy a $\sqrt{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}$ homogén egyenlet rendszernek csak triviális megoldása van a $\mathbf{w}$ -re.

Következésképp a $\mathbf{V}$ tenzor valóban szimmetrikus és pozitív definit.

- (b) A $\mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$ szorzat tekintetében az értelmező egyenlet alapján írhatjuk, hogy

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \underbrace{\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}}_I = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}.$$

- (c) Hasonlóan kapjuk $\mathbf{V}^2$ értékét:

$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \underbrace{\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}}_I \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T = \underbrace{\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}}_F \cdot \underbrace{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^T)}_F = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T.$$

7. hét:

1. Igazolja a részletszámítások aprólékos bemutatásával, hogy

$$\frac{dV}{dV^o} = J$$

a térfogatelemarány. (4 pont)

Megoldás:

A dV értelmezése alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} dV &= (d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{r}_3 = \\ &= \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} dx_1^o + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dy_1^o + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} dz_1^o \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} dx_2^o + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dy_2^o + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} dz_2^o \right) \right] \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} dx_3^o + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dy_3^o + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} dz_3^o \right) = \\ &= \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) (dx_1^o dy_2^o - dy_1^o dx_2^o) + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right) (dy_1^o dz_2^o - dy_2^o dz_1^o) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \right) (dz_1^o dx_2^o - dz_2^o dx_1^o) \right] \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} dx_3^o + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dy_3^o + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} dz_3^o \right) = \\ &= \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right] [(dy_1^o dz_2^o - dy_2^o dz_1^o) dx_3^o + dy_3^o (dz_1^o dx_2^o - dz_2^o dx_1^o) + (dx_1^o dy_2^o - dy_1^o dx_2^o) dz_3^o] = \\ &= \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right] [(d\mathbf{r}_1^o \times d\mathbf{r}_2^o) \cdot d\mathbf{r}_3^o] = J dV^o \end{aligned}$$

ahonnan azonnal adódik az igazolni kívánt összefüggés.

2. Igazolja a $dV = d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_3$ és a $dV^o = d\mathbf{A}^o \cdot d\mathbf{r}_3^o$ képletek felhasználásával indulva ki az előző feladat állításából, hogy

$$d\mathbf{A} = J \mathbf{F}^{-T} \cdot d\mathbf{A}^o.$$

Itt $\mathbf{F}^{-T} = (\mathbf{F}^{-1})^T$. (5 pont)

Megoldás:

A

$$dV = JdV^o$$

képletből azonnal következik, hogy

$$d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_3 = J d\mathbf{A}^o \cdot d\mathbf{r}_3^o$$

Mivel itt $d\mathbf{r}_3 = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_3^o$ kapjuk hogy

$$(d\mathbf{A} \cdot \mathbf{F} - J d\mathbf{A}^o) \cdot d\mathbf{r}_3^o = 0$$

bármilyen is legyen a $d\mathbf{r}_3^o$. Következésképp

$$d\mathbf{A} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{A} = J d\mathbf{A}^o.$$

Innen az $\mathbf{F}^{-T}$ -vel balról történő szorzás után azonnal adódik a bizonyítani kívánt

$$d\mathbf{A} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\mathbf{A}^o$$

egyenlőség.

3. Igazolja, ez esetben a

$$d\mathbf{A} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\mathbf{A}^o$$

összefüggésből indulva ki, hogy

$$dV = JdV^o.$$

(5 pont)

Megoldás:

Visszaidézve, hogy $dV = d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_3$, valamint kihasználva a kiindulásul választott összefüggést írhatjuk, hogy

$$dV = Jd\mathbf{A}^o \cdot \underbrace{\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{r}_3}_{d\mathbf{r}_3^o} = J \underbrace{d\mathbf{A}^o \cdot d\mathbf{r}_3^o}_{dV^o} = JdV^o.$$

Ezt kellett igazolni.

4. Tételezzük fel, hogy Euler féle leírásmódban

$$u_x = x - \frac{1}{4}y, \quad u_y = x + 2y, \quad u_z = -3z$$

az elmozdulásmező. Határozza meg az inverz alakváltozási gradiens és az alakváltozási gradiens mátrixait. Mutassa meg, hogy a fenti elmozdulásmezővel leírt deformáció esetén zérus a térfogatváltozás. (5 pont)

Megoldás:

Visszaidézve, hogy

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{u} \otimes \nabla$$

kapjuk, hogy

$$\underline{\mathbf{F}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{x,x} & u_{x,y} & u_{x,z} \\ u_{y,x} & u_{y,y} & u_{y,z} \\ u_{z,x} & u_{z,y} & u_{z,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

ahonnan az inverz meghatározásával következik, hogy

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad J = \det(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = 1.$$

A fenti eredménnyel

$$dV = JdV^o = dV^o,$$

ami azt jelenti, hogy állandó az elemi térfogat, azaz nincs térfogatváltozás.

5. Homogén deformációról beszélünk, ha állandó az alakváltozási gradiens. Tekintsük a

$$x = ax^o, \quad y = -(by^o + cz^o), \quad z = cy^o - bz^o$$

alakú homogén deformációt, ahol állandóak az a , b és c paraméterek.

- (α) Határozza meg a $\underline{\mathbf{C}}^o$ jobboldali Cauchy-Green, az $\underline{\mathbf{E}}^o$ Green-Lagrange, a $\underline{\mathbf{B}}$ baloldali Cauchy-Green, valamint az $\underline{\mathbf{E}}$ Euler-Almansi alakváltozási tenzorok mátrixait.
- (β) Tegyük fel, hogy $b = -\cos \vartheta$ és $c = -\sin \vartheta$. Mutassa meg, hogy nincs ez esetben alakváltozás, ha $a = 1$. Magyarázza el, hogy az utóbbi esetben az x tengely körüli forgatás a szilárd test mozgása.

(6 pont)

Megoldás:

Elemi számítással adódik, hogy

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^o} & \frac{\partial x}{\partial y^o} & \frac{\partial x}{\partial z^o} \\ \frac{\partial y}{\partial x^o} & \frac{\partial y}{\partial y^o} & \frac{\partial y}{\partial z^o} \\ \frac{\partial z}{\partial x^o} & \frac{\partial z}{\partial y^o} & \frac{\partial z}{\partial z^o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & -c \\ 0 & c & -b \end{bmatrix},$$

amivel rendre kapjuk az (α) kérdés megválaszolásához szükséges eredményeket:

$$\underline{\mathbf{C}}^o = \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & c \\ 0 & -c & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & -c \\ 0 & c & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + c^2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{E}}^o = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{C}}^o - \underline{\mathbf{I}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 + c^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + c^2 - 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{F}}^T = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & -c \\ 0 & c & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & c \\ 0 & -c & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + c^2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2 + c^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b^2 + c^2} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{E}}^o = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{B}}^{-1}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{b^2 + c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{b^2 + c^2} \end{bmatrix}.$$

Ami a (β) kérdést illeti vegyük figyelembe, hogy ez esetben

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & -c \\ 0 & c & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

az alakváltozási gradiens mátrixa. A mátrix alakjából következik azonnal, hogy a

$$d\mathbf{r} = \underline{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{r}^o$$

leképezés az x tengely körüli véges forgatás. Ez egyben azt is jelenti, hogy nincs alakváltozás. Ha formálisan számolunk, akkor pedig az $a = 1$ és $b^2 + c^2 = 1$ képletekre tekintettel azonnal adódik, hogy

$$\underline{\mathbf{E}}^o = \underline{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vagyis valóban zérus az alakváltozás.

8. hét:

1. Határozza meg a Jacobi féle függvénydetermináns materiális idő szerint vett deriváltját. (4 pont)

Megoldás:

Vegyük figyelembe, hogy

$$dV = J dV^o$$

ahonnan

$$\dot{J} = \frac{d\dot{V}}{dV^o} = \frac{dV}{dV^o} D_I = J D_I .$$

2. Igazolja, hogy

$$(\mathbf{dA})^\cdot = -(\mathbf{D} - D_I \mathbf{I}) \cdot \mathbf{dA} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{dA}$$

(A bizonyítás során eltérően a 3. hét 5. jelű feladatától a

$$\mathbf{dA} = J \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{dA}^o$$

képletből induljon ki.) (4 pont)

Megoldás:

A fenti képlet idő szerinti deriváltját véve kapjuk, hogy

$$(\mathbf{dA})^\cdot = \dot{J} \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{dA}^o + J \dot{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \mathbf{dA}^o$$

ahol

$$\dot{\mathbf{F}}^{-T} = -(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{L})^T = -\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

és így

$$\begin{aligned} (\mathbf{dA})^\cdot &= \dot{J} \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{dA}^o - J \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{dA}^o = (\mathbf{D}_I \mathbf{I} - \mathbf{L}^T) \cdot J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{dA}^o = \\ &= (\mathbf{D}_I \mathbf{I} - \mathbf{L}^T) \cdot \mathbf{dA} = [\mathbf{D}_I \mathbf{I} - (\mathbf{D} - \mathbf{W})] \cdot \mathbf{dA} = -(\mathbf{D} - D_I \mathbf{I}) \cdot \mathbf{dA} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{dA} . \end{aligned}$$

Ezt kellett igazolni.

3. Állapodjunk meg abban, hogy valamely $\mathbf{C}$ a tenzor első invariánsát az alábbi módokon jelöljük:

$$C_I = (\mathbf{C})_I = \text{tr}(\mathbf{C}) .$$

Legyen az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két másodrendű tenzor. Igazolja, hogy

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B})_I = \text{tr}(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{A}$$

(4 pont)

Megoldás:

Az (x, y, z) KR-ben

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{a}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{a}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{a}_z \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \mathbf{b}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{b}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{b}_z \otimes \mathbf{e}_z$$

amivel

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{b}_x) \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + (\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{b}_y) \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{b}_z) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$$

és így

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B})_I = \text{tr}(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{b}_x) + (\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{b}_y) + (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{b}_z) .$$

Másrésről pedig

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} &= (\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{b}_x) \underbrace{(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x)}_{=1} + (\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{b}_y) \underbrace{(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y)}_{=1} + (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{b}_z) \underbrace{(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z)}_{=1} = \\ &= (\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{b}_x) + (\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{b}_y) + (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{b}_z) = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B})_I = \text{tr}(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}) . \end{aligned}$$

Végezetül megjegyezzük, hogy az $\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B}$ energia típusú kommutatív, azaz $\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{A}$.

4. A $\Psi(\mathbf{A})$ skalár esetén a

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}}$$

derivált egy olyan másodrendű tenzor, amely mátrixának

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{A})}{\partial a_{mn}}, \quad m, n = x, y, z$$

az elemei. Igazolja, hogy

$$\frac{\partial \det(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \det(\mathbf{A}) \mathbf{A}^{-T}.$$

(Vegye figyelembe, hogy $\det(\mathbf{A} + d\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \cdot d\mathbf{A})$ és hogy $\det(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \cdot d\mathbf{A}) \cong 1 + (\mathbf{A}^{-1} \cdot d\mathbf{A})_I$ (miért?). (12 pont, egy héttel hosszabb határidő) (4 pont)

Megoldás:

A determinánsok szorzástételét kihasználva írhatjuk, hogy

$$\det(\mathbf{A} + d\mathbf{A}) = \det[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \cdot d\mathbf{A})] = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \cdot d\mathbf{A}),$$

Legyen a $\mathbf{W}$ valamilyen másodrendű tenzor. Visszaidézve, hogy

$$\det(\mathbf{W} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 + W_I \lambda^2 - W_{II} \lambda - W_{III}$$

tegyük fel, hogy a jelen esetben $\mathbf{W} = \mathbf{A}^{-1} \cdot d\mathbf{A}$ és $\lambda = -1$, amivel a lineáris tagokat őrizve meg kapjuk, hogy

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \cdot d\mathbf{A}) \cong 1 + (\mathbf{A}^{-1} \cdot d\mathbf{A})_I.$$

Ennek alapján fennáll, hogy

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} + d\mathbf{A}) &\cong \det(\mathbf{A}) [1 + (\mathbf{A}^{-1} \cdot d\mathbf{A})_I] = \\ &= \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{A}) (\mathbf{A}^{-1} \cdot d\mathbf{A})_I = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{A}) \mathbf{A}^{-T} \cdot d\mathbf{A}. \end{aligned}$$

Mivel a $\det(\mathbf{A})$ egy skálár az is fennáll, hogy

$$\det(\mathbf{A} + d\mathbf{A}) \cong \det(\mathbf{A}) + \frac{\partial \det(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} \cdot d\mathbf{A}.$$

Az utóbbi két egyenlet egybevetéséből

$$\frac{\partial \det(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} \cdot d\mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \mathbf{A}^{-T} \cdot d\mathbf{A}$$

bármilyen is legyen a $d\mathbf{A}$. Következésképp kapjuk a bizonyítani kívánt összefüggést:

$$\frac{\partial \det(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \det(\mathbf{A}) \mathbf{A}^{-T}.$$

9. hét:

1. Igazolja az

$$\boldsymbol{\eta} = -\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla$$

egyenlet felhasználásával, hogy

$$\eta_{xx} = \varepsilon_{y,zz} + \varepsilon_{z,xx} - \gamma_{yz,yz}$$

...

$$\eta_{xy} = \frac{1}{2} (\gamma_{xz,y} + \gamma_{yz,x} - \gamma_{xy,z})_{,z} - \varepsilon_{z,xy}$$

...

(6 pont)

Megoldás:

Megállapodás szerint

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\alpha}_x \otimes \mathbf{e}_x + \boldsymbol{\alpha}_y \otimes \mathbf{e}_y + \boldsymbol{\alpha}_z \otimes \mathbf{e}_z, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_x & \boldsymbol{\alpha}_y & \boldsymbol{\alpha}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

Visszaidézve, hogy

$$\eta_{xx} = \mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{e}_x$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\eta_{xx} &= -\mathbf{e}_x \cdot \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla \cdot \mathbf{e}_x = (-\mathbf{e}_x \times \nabla) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\nabla \times \mathbf{e}_x) = \\ &= \left(-\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_z + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_y \right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_z + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_y \right) = \left(-\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_z + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_y \right) \cdot \left(-\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_z}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_y}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \mathbf{e}_y \cdot \boldsymbol{\alpha}_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\alpha}_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\alpha}_y + \mathbf{e}_y \cdot \boldsymbol{\alpha}_z) = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}.\end{aligned}$$

Az előző gondolatmenetet ismételve

$$\begin{aligned}\eta_{xy} &= -\mathbf{e}_x \cdot \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla \cdot \mathbf{e}_y = (-\mathbf{e}_x \times \nabla) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\nabla \times \mathbf{e}_y) = \\ &= \left(-\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_z + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_y \right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_z - \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_x \right) = \left(-\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_z + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_y \right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_z}{\partial x} - \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_x}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathbf{e}_y \cdot \boldsymbol{\alpha}_z}{\partial x} + \frac{\partial^2 \mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\alpha}_x}{\partial y} - \frac{\partial^2 \mathbf{e}_y \cdot \boldsymbol{\alpha}_x}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\alpha}_z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.\end{aligned}$$

2. Legyen a $\mathbf{W}$ ferdeszimmetrikus: $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$. Igazolja, hogy a

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}, \quad |\mathbf{n}| = 1$$

sajátértékfeladatnak egyetlen valós megoldása van a λ -ra, ez a $\lambda = 0$ érték, a vonatkozó sajátvektor pedig párhuzamos a vektorinvariánssal. (4 pont)

Megoldás:

Mivel a tenzor ferdeszimmetrikus a fenti egyenlet a

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{w}_a \times \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}$$

alakban is felírható, ahonnan következik, hogy a baloldal zérus, ha $\mathbf{w}_a \parallel \mathbf{n}$. A jobboldal ez esetben csak akkor lehet zérus, ha λ is zérus. Ezt kellett igazolni.

10. hét:

1. Igazolja a

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^T) \cdot \mathbf{B} =$$

azonosságokat. (6 pont)

Megoldás:

Azonos átalakításokkal kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = \text{tr} \left[(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})^T \cdot \mathbf{A} \right] = \\ &= \text{tr} \left[\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} \right] = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C}.\end{aligned}$$

Hasonló módon adódik, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}^T) = \\ &= \text{tr} \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}^T \right) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^T) \cdot \mathbf{B}^T = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^T) \cdot \mathbf{B}.\end{aligned}$$

2. Igazolja, hogy a $\Phi_M = \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}$ feszültségteljesítmény a

$$\Phi_M = \frac{1}{J} \dot{\mathbf{E}}^o \cdot \mathbf{T}^o$$

módon is számítható. (6 pont)

Megoldás:

Vegyük figyelembe, hogy

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}}^o \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

amivel

$$\begin{aligned}
 \Phi_M = \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} &= \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}}^o \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}}^o \cdot \mathbf{F}^{-1} = \\
 &= \text{tr} \left[\left(\mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \right) \cdot \left(\dot{\mathbf{E}}^o \cdot \mathbf{F}^{-1} \right) \right] = \text{tr} \left[\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}}^o \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \right] = \\
 &= \left(\dot{\mathbf{E}}^o \cdot \mathbf{F}^{-1} \right) \cdot \left(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \right) = \left(\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}}^o \right) \cdot \left(\mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \right) = \\
 &= \text{tr} \left(\dot{\mathbf{E}}^o \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \right) = \dot{\mathbf{E}}^o \cdot \left(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \right) = \\
 &= \left(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \right) \cdot \dot{\mathbf{E}}^o,
 \end{aligned}$$

ha kihasználjuk a

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{tr} \left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} \right) \quad \text{és} \quad \text{tr} \left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} \right) = \text{tr} \left(\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} \right)$$

szabályokat. Visszaidezve, hogy értelmezése szerint

$$\mathbf{T}^o = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}$$

a második Piola-Kirchoff-féle feszültségi tenzor azonnal adódik az igazolni kívánt képlet. Az állítás az 1. feladat azonosságait felhasználva is igazolható.

3. Legyen a pillanatnyi konfiguráció P pontjában $\mathbf{n}$ és $\hat{\mathbf{n}}$ két egymástól különböző felületelem normálisa. A vonatkozó feszültségvektorokat rendre $\boldsymbol{\rho}_n$ és $\boldsymbol{\rho}_{\hat{n}}$ jelöli. Igazolja, hogy akkor és csak akkor áll fenn a

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\rho}_{\hat{n}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\rho}_n$$

egyenlőség, ha szimmetrikus a feszültségi tenzor. (4 pont)

Megoldás:

A feszültséget adó képletek helyettesítésével az

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^T \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$$

eredményt kapjuk. Nyilvánvaló, hogy a különbség csak akkor tűnhet el tetszőleges $\mathbf{n}$ és $\hat{\mathbf{n}}$ -re, ha $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$. Ezt kellett igazolni.

11. hét:

1. Legyen

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 5yz & 3y^2 & 0 \\ 3y^2 & 0 & -x \\ 0 & -x & 0 \end{bmatrix}$$

a Cauchy-féle feszültségi tenzor mátrixa a pillanatnyi konfigurációban. Határozza meg a $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektort az $x^2 + y^2 + z = 0$ felület $P = (1/2, \sqrt{3}/2, -1)$ pontjában. Mekkora a térfogati terhelés sűrűsége? (5 pont)

Megoldás:

Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y - (x^2 + y^2)\mathbf{e}_z$$

a felület egyenlete és

$$d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} dx \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dy = (\mathbf{e}_x - 2x\mathbf{e}_z) \times (\mathbf{e}_y - 2y\mathbf{e}_z) dx dy = (2x\mathbf{e}_x + 2y\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) dx dy$$

a vektoriális felületelem, amivel

$$\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{A}}{dA} = \frac{2x\mathbf{e}_x + 2y\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} = \frac{2x\mathbf{e}_x + 2y\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 - 4z}}$$

a felületi normális. A kérdéses pontban

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_x + \sqrt{3}\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z}{\sqrt{5}} \quad \text{és} \quad \underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} -5\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{9}{4} & 0 \\ \frac{9}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

és így

$$\underline{\rho}_n = \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -5\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{9}{4} & 0 \\ \frac{9}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \frac{-10\sqrt{15}+9\sqrt{3}}{4\sqrt{5}} \\ \frac{7}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} -1.157 \\ 0.7826 \\ -0.17320 \end{bmatrix}.$$

2. Ismeretes a Cauchy féle feszültségi tenzor mátrixa

$$\underline{\mathbf{T}}(x, y, z; t) = \begin{bmatrix} 5x^2 & \alpha y z^2 & 0 \\ \alpha y z^2 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta x^3 \end{bmatrix}$$

ahol az α és β állandók, míg $x = x^o e^t - y^o e^{-t}$, $y = x^o e^t + y^o e^{-t}$ és $z = z^o$. Határozza meg a térfogati terhelés sűrűségét, feltéve hogy teljesül a kontinuitási egyenlet. (6 pont)

Megoldás:

Nyilvánvaló, hogy

$$\rho = \rho^o / J$$

és hogy

$$\mathbf{T} \cdot \nabla = (2x + \alpha z^2) \mathbf{e}_x + 2y \mathbf{e}_y.$$

Nem nehéz ellenőrizni, hogy emellett

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^o} & \frac{\partial x}{\partial y^o} & \frac{\partial x}{\partial z^o} \\ \frac{\partial y}{\partial x^o} & \frac{\partial y}{\partial y^o} & \frac{\partial y}{\partial z^o} \\ \frac{\partial z}{\partial x^o} & \frac{\partial z}{\partial y^o} & \frac{\partial z}{\partial z^o} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & -e^{-t} & 0 \\ e^t & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

és

$$a_x = \dot{v}_x = x, \quad a_y = \dot{v}_y = y, \quad a_z = \dot{v}_z = 0.$$

A fenti mennyiségek felhasználásával

$$\mathbf{q} = \rho \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{T} \cdot \nabla = \frac{\rho^o}{2} (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y) - (2x + \alpha z^2) \mathbf{e}_x - 2y \mathbf{e}_y.$$

a térfogati terhelés sűrűsége.