Rugalmas vonal számítása a fiktív terhelések módszerével

Előadásvázlat

Készítette: Kozák Imre egy kézzel írott vázlata alapján
Szeidl György
Szoboszlai Barnabás főiskolai hallgató közreműködésével

Miskolc, 2005

1. A statikai modell egyenletei

1.1. Jelölje $\mathbf{F}_S$ és $\mathbf{M}_S$ a rúd keresztmetszetének súlypontjához kötve a belső erőrendszer eredőjét és az S pontra számított nyomatékát. A rúd középvonala mentén s az ívkoordináta és $\mathbf{e}_s$ az ívkoordináta pozitív irányába mutató egységvektor. A rúd középvonala mentén megoszló erőrendszer (továbbiakban ER) sűrűségét $\mathbf{f}$, a rúd középvonala mentén megoszló erőpárrendszer sűrűségét pedig $\mathbf{m}$ jelöli. A bevezetett jelölésekkel felírva a

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_S}{\mathrm{d}s} + \mathbf{f} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{M}_S}{\mathrm{d}s} + \mathbf{e}_s \times \mathbf{F}_S + \mathbf{m} = 0 \tag{1}$$

egyenletek a rúd egyensúlyi egyenletei. Az 1. ábrán vázolt KR-ben (az $\mathbf{e}_s$ és a függőleges által bezárt szög ϑ)

$$\mathbf{f} = f_y \mathbf{e}_y + f_z \mathbf{e}_z \tag{2}$$

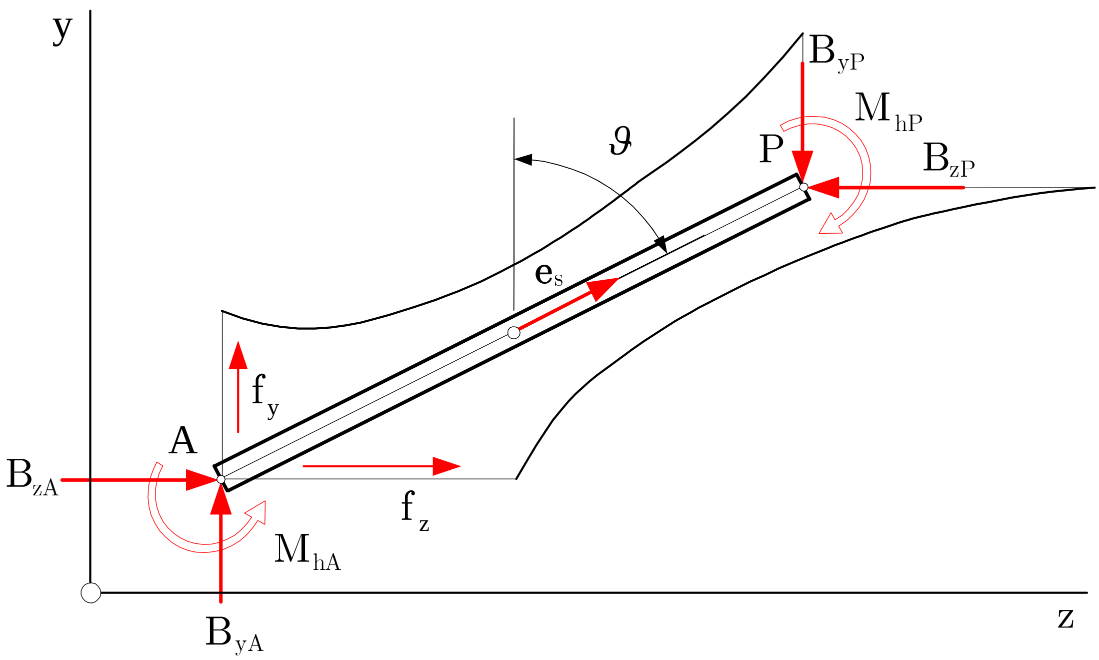
a rúd középvonalán megoszló ER sűrűsége,

$$\mathbf{F}_S = -\left(B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z\right) \tag{3}$$

a belső ER eredője a pozitív keresztmetszeten és

$$\mathbf{M}_S = M_h \mathbf{e}_x \tag{4}$$

jelöli a hajlítónyomatékot.



1. ábra. Belső erők előjelszabályának szemléltetése

Az 1. ábra a belső erők előjelszabályát szemlélteti. A (2,3) és (4) képletek helyettesítésével a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(B_y\mathbf{e}_y + B_z\mathbf{e}_z\right) = f_y\mathbf{e}_y + f_z\mathbf{e}_z\ , \tag{5a}$$

$$\frac{\mathrm{d}M_h}{\mathrm{d}s}\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_s \times \left(B_y\mathbf{e}_y + B_z\mathbf{e}_z\right)\ , \tag{5b}$$

vagy ami ugyanaz a

$$\frac{\mathrm{d}B_y}{\mathrm{d}s} = f_y\ , \qquad \frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}s} = f_z\ , \tag{6a}$$

$$\frac{\mathrm{d}M_h}{\mathrm{d}s} = -B_y \sin\vartheta + B_z\cos\vartheta = -T \tag{6b}$$

egyenleteket kapjuk a (1) egyensúlyi egyenletekből megjegyezve, hogy a továbbiakban feltételezzük, hogy nincs vonalon megoszló erőpárrendszer, azaz $\mathbf{m} = 0$.

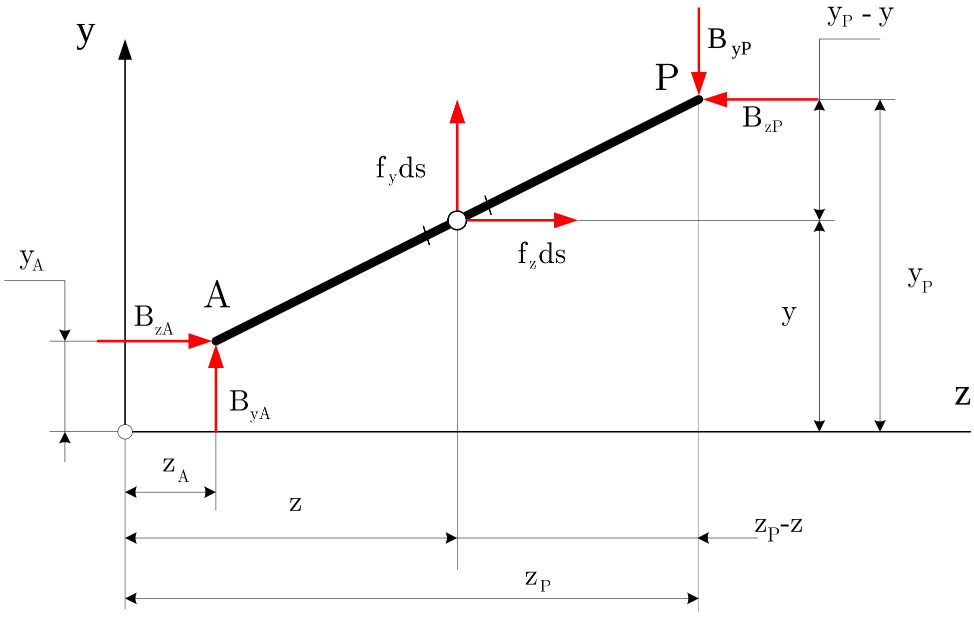
1.2. A fenti egyenletek integrálásával az

$$B_{yP} = B_{yA} + \int_A^P f_y \mathrm{d}s\ , \tag{7a}$$

$$B_{zP} = B_{zA} + \int_A^P f_z \mathrm{d}s\ , \tag{7b}$$

$$M_{hP} = M_{hA} + \int_A^P \left[-B_y\underbrace{\sin\upsilon\mathrm{d}s}_{\mathrm{d}z} + B_z\underbrace{\cos\upsilon\mathrm{d}s}_{\mathrm{d}y}\right] \tag{7c}$$

eredményre jutunk.



2. ábra. Segédábra az integrálok átalakításához

Ha kihasználjuk az egyszerűen belátható

$$\mathrm{d}z = -\mathrm{d}(z_P - z), \qquad \mathrm{d}y = -\mathrm{d}(y_P - y) \tag{8}$$

képleteket, akkor parciális integrálással a (7c)-ből az

$$(9)\qquad M_{hP}=M_{hA}+(z_P-z)B_y|_A^P-\int_A^P(z_P-z)\frac{\mathrm{d}B_y}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z-(y_p-y)B_z|_A^P+\int_A^P(y_P-y)\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y$$

egyenlet következik. Vegyük figyelembe, hogy

$$(10a)\qquad \frac{\mathrm{d}B_y}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}B_y}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=f_y\mathrm{d}s\ ,$$

$$(10b)\qquad \frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=f_z\mathrm{d}s\ .$$

Következésképp a (9) tovább alakítható:

$$M_{hP}=M_{hA}-(z_P-z_A)B_{yA}+(y_P-y_A)B_{zA}-\int_A^P(z_P-z)f_y\mathrm{d}s+\int_A^P(y_P-y)f_z\mathrm{d}s\ .$$

1.3. A későbbiek kedvéért egy csoportba gyűjtve megismételjük az egyensúlyi egyenletek integrábilis alakját:

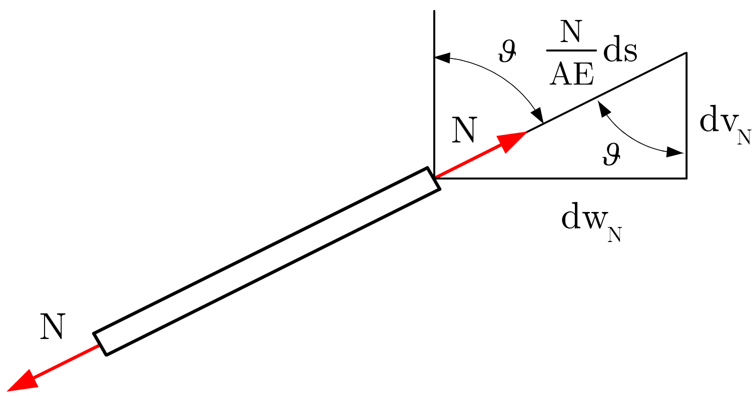
$$(11)\qquad \boxed{\begin{gathered}B_{yP}=B_{yA}+\int_A^P f_y\mathrm{d}s\ ,\qquad B_{zP}=B_{zA}+\int_A^P f_z\mathrm{d}s\ ,\\ M_{hP}=M_{hA}-(z_P-y_A)B_{yA}+(y_P-y_A)B_{zA}-\int_A^P(z_P-z)f_y\mathrm{d}s+\int_A^P(y_P-y)f_z\mathrm{d}s\,.\end{gathered}}$$

2. A szilárdságtani modell egyenletei

2.1. A 3. ábra azzal a feltevéssel szemlélteti a ds hosszúságú rúdelemet, hogy arra a tengelyirányú N erő működik. A rúd jobboldali végének a rúd baloldali végéhez viszonyított rudirányú

$$\frac{N}{AE}\mathrm{d}s$$

nagyságú elmozdulása felbontható függőleges és vizszintes összetevőkre. Ezeket rendre $\mathrm{d}v_N$ és

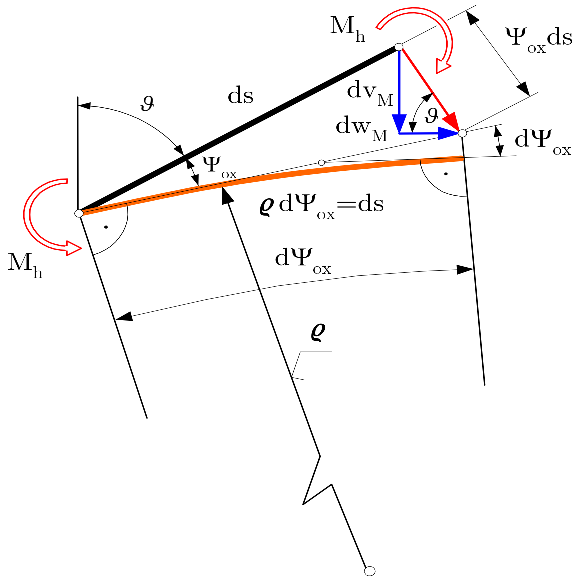


3. ábra. Rúdelemre működő tengelyirányú erő és hatása

$\mathrm{d}w_N$ jelöli. Leolvasható az ábráról, hogy

$$(12)\qquad \begin{aligned}\mathrm{d}v_N&=\cos\upsilon\frac{N}{AE}\mathrm{d}s\ ,\\ \mathrm{d}w_N&=\sin\upsilon\frac{N}{AE}\mathrm{d}s\ .\end{aligned}$$

2.2. A hajlítás hatására kialakuló elemi mozgások meghatározása során a 4. ábra jelöléseit és a rudelmélet klasszikus képleteit alkalmazzuk. A nyírás hatását figyelmen kívül hagyjuk. Az ábrán Ψ_{ox} jelöli a rudelem középvonalának elfordulását a kezdőpontban. A rudelem jobboldali végének szögelfordulása a rudelem baloldali végéhez képest pedig $d\Psi_{ox}$. Az ábra piros színnel szemlélteti a hajlításból adódó és a Ψ_{ox} szögelfordulás figyelembevételével számított elmozdulásvektort. Az elmozdulásvektor függőleges és vízszintes összetevőit, a korábbiaknak megfelelően $\mathrm{d}v_M$ és $\mathrm{d}w_M$



4. ábra. Rudelem jobboldali végének elmozdulása hajlítónyomaték hatására

jelöli. Legyen v_o, w_o és Ψ_{ox} rendre a súlypontvonal y és z irányú elmozdulása, illetve szögelfordulása. Az ábra adataival:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v_M &= -\sin\vartheta\,\Psi_{ox}\mathrm{d}s\;, \\ \mathrm{d}w_M &= \quad\cos\vartheta\,\Psi_{ox}\mathrm{d}s\;. \end{aligned} \tag{13}$$

Visszaidézve a szögelfordulás és hajlítónyomaték között fennálló összefüggést, majd kombinálva a (12) és (13) egyenleteket kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\Psi_{\mathrm{o}x}}{\mathrm{d}s} &= \frac{M_h}{I_xE}\;, \\ \frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{o}}}{\mathrm{d}s} &= -\Psi_{ox}\,\sin\vartheta + \cos\vartheta\frac{N}{AE}\;, \\ \frac{\mathrm{d}w_{\mathrm{o}}}{\mathrm{d}s} &= \Psi_{ox}\,\cos\vartheta + \sin\vartheta\frac{N}{AE}\;. \end{aligned} \tag{14}$$

A fenti egyenletek integrálásával a

$$\begin{aligned} \Psi_{oxP} &= \Psi_{oxA} + \int_A^P \frac{1}{I_xE}M_h\mathrm{d}s\;, \\ v_{oP} &= v_{oA} - \int_A^P \Psi_{ox}\sin\vartheta\mathrm{d}s + \int_A^P \frac{N}{AE}\cos\vartheta\mathrm{d}s\;, \\ w_{oP} &= w_{oA} + \int_A^P \Psi_{ox}\cos\vartheta\mathrm{d}s + \int_A^P \frac{N}{AE}\sin\vartheta\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{15}$$

összefüggéseket kapjuk ezek számítására. Tovább alakíthatók parciális integrálással a fenti képletek, ha elhanyagoljuk a rúderő hatását és figyelembe vesszük, kihasználva a 2. ábrát, hogy

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z &= \mathrm{d}s\sin\vartheta\ , \qquad & \mathrm{d}z &= -\mathrm{d}(z_P - z)\ , \\ \mathrm{d}y &= \mathrm{d}s\cos\vartheta\ , \qquad & \mathrm{d}y &= -\mathrm{d}(y_P - y)\ , \end{aligned} \tag{16}$$

amivel

$$\begin{aligned} \Psi_{oxP} &= \Psi_{oxA} + \int_A^P \frac{1}{I_x E} M_h \mathrm{d}s\ , \\ v_{oP} &= v_{oA} - \int_A^P \Psi_{ox}\mathrm{d}z = v_{oA} + (z_P - z)\Psi_{ox}\big|_A^P - \int_A^P (z_P - z)\frac{\mathrm{d}\Psi_{ox}}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\ , \\ w_{oP} &= w_{oA} + \int_A^P \Psi_{ox}\mathrm{d}y = w_{oA} - (y_P - y)\Psi_{ox}\big|_A^P + \int_A^P (y_P - y)\frac{\mathrm{d}\Psi_{ox}}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\ . \end{aligned} \tag{17}$$

Ha a továbbiakban még azt is felhasználjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\Psi_{ox}}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z &= \frac{\mathrm{d}\Psi_{ox}}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s = \frac{1}{I_x E}M_h \mathrm{d}s\ , \\ \frac{\mathrm{d}\Psi_{ox}}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y &= \frac{\mathrm{d}\Psi_{ox}}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s = \frac{1}{I_x E}M_h \mathrm{d}s\ . \end{aligned} \tag{18}$$

akkor (mind három egyenletet kiírva)

$$\begin{aligned} \Psi_{oxP} &= \Psi_{oxA} + \int_A^P \frac{1}{I_x E} M_h \mathrm{d}s\ , \\ v_{oP} &= v_{oA} - (z_P - z)\Psi_{oxA} - \int_A^P (z_P - z)\frac{1}{I_x E}M_h \mathrm{d}s\ , \\ w_{oP} &= w_{oA} + (y_P - y)\Psi_{oxA} + \int_A^P (y_P - y)\frac{1}{I_x E}M_h \mathrm{d}s\ . \end{aligned} \tag{19}$$

A későbbiek kedvéért új változókat vezetünk be annak érdekében, hogy formai analógiát találjunk a statikai és alakváltozási modellek között. Legyen

$$\bar{\Psi} = I_o E \Psi_{ox}\ , \qquad \bar{v} = I_o E v_o\ , \qquad \bar{w} = I_o E w_o\ , \qquad M = \frac{I_o}{I_x}M_h\ .$$

ahol I_o vonatkoztatási másodrendű nyomaték. Az új változókban az

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_P &= \bar{\Psi}_A + \int_A^P M \mathrm{d}s\ , \\ \bar{v}_P &= \bar{v}_A - (z_P - z_A)\bar{\Psi}_A - \int_A^P (z_P - z)M \mathrm{d}s\ , \\ \bar{w}_P &= \bar{w}_A + (y_P - y_A)\bar{\Psi}_A + \int_A^P (y_P - y)M \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{20}$$

alakban írhatók fel a (19) egyenletek.

3. Statikai, kinematikai analógia – a fiktív terhelések módszere

3.1. A lenti táblázat két oszlopban egymás mellé helyezve szemlélteti a statikai modell első két egyenletét, valamint az alakváltozási modell első egyenletét. Figyeljük meg, hogy azonnal

Statikai modell	Alakváltozási modell
$B_{yP} = B_{yA} + \int_A^P f_y \mathrm{d}s$	$\Psi_P = \Psi_A + \int_A^P M \mathrm{d}s$
$B_{zP} = B_{zA} + \int_A^P f_z \mathrm{d}s$	

I. táblázat

megkapható az alakváltozási modell első egyenlete a statikai modell egyenleteiből, ha

$$\begin{matrix} B_y \\ B_z \end{matrix} \quad \text{és} \quad \begin{matrix} f_y \\ f_z \end{matrix} \quad \text{helyére rendre} \quad \Psi \text{ és } M\text{-et írunk.}$$

3.2. A következő táblázat a statikai modell nyomatéki egyenleteit, valamint az alakváltozási modell $\bar{v}$ és $\bar{w}$ számításával kapcsolatos egyenleteit összegezi. Ismét érdemes felfigyelni formai

Statikai modell	Alakváltozási modell
Ha $f_y \neq 0$ de $f_z = 0$ és nincs z irányú koncentrált erő	$\bar{v}$ számítása
$M_{hP} = M_{hA} - (z_P - z_A)B_{yA} - \int_A^P (z_P - z) f_y \mathrm{d}s$	$\bar{v}_P = \bar{v}_A - (z_P - z_A)\bar{\Psi}_A - \int_A^P (z_P - z) M \mathrm{d}s$
Ha $f_z \neq 0$ de $f_y = 0$ és nincs y irányú koncentrált erő	$\bar{w}$ számítása
$M_{hP} = M_{hA} + (y_P - y_A)B_{zA} + \int_A^P (y_P - y) f_z \mathrm{d}s$	$\bar{w} = \bar{w}_A + (y_P - y_A)\bar{\Psi}_A + \int_A^P (y_P - y) M \mathrm{d}s$

II. táblázat

analógiákra, hasonlóságokra. Összehasonlítva a baloldali és a jobboldali oszlopban álló egyenleteket azt mondhatjuk, hogy az alakváltozási modell jobboldali oszlopban álló két egyenlete rendre megkapható a baloldali oszlopban álló két egyenletből, ha

$\bar{v}$ számítása
M_h, B_y-t és f_y helyére rendre $\bar{v}$-t, $\bar{\Psi} - t$ és M-et írunk
$\bar{w}$ számítása
M_h, B_z-t és f_z helyére rendre $\bar{w}$-t, $\bar{\Psi} - t$ és M-et írunk

3.3. Ha a fentiek alapján új változókat vezetünk be a $\bar{\Psi}$ szögelfordulás és a $\bar{v}$ elmozdulás számítása során az

$\bar{f}_y = M$	fiktív y irányú megoszló terhelés
$\bar{B}_y = \bar{\Psi}$	fiktív y irányú belső erő a fiktív y irányú megoszló terhelésből
$\bar{M}_h = \bar{v}$	fiktív hajlító nyomaték az y irányú fiktív megoszló terhelésből

módon, akkor a $\bar{\Psi}$ szögelfordulás, és a $\bar{v}$ elmozdulás számítására szolgáló egyenletek a

$$\bar{B}_{yP} = \bar{B}_{yA} + \int_A^P \bar{f}_y \mathrm{d}s \,, \tag{21a}$$

$$\bar{M}_{hP} = \bar{M}_{hA} - (z_P - z_A)\bar{B}_{yA} - \int_A^P (z_P - z)\bar{f}_y \mathrm{d}s \tag{21b}$$

az alakban írhatók fel. Szavakban is megfogalmazva a $\bar{\Psi}$ szögelfordulás az M nyomatékhoz mint fiktív y irányú $\bar{f}_y$ terheléshez tartozó fiktív y irányú $\bar{B}_{yA}$ belső erő, míg a $\bar{v}$ elmozdulás az M nyomatékhoz, mint fiktív y irányú $\bar{f}_y$ terheléshez tartozó fiktív $\bar{M}_{hP}$ hajlítónyomaték. Ez azt jelenti, hogy a nyomatéki ábra ismeretében statikai módszerekkel tudjuk a $\bar{\Psi}$ szögelfordulást és a $\bar{v}$ elmozdulást számítani.

3.4. Ugyanilyen módon, ha új változókat vezetünk be a $\bar{\Psi}$ szögelfordulás és a $\bar{w}$ z irányú elmozdulás számítására az

$\bar{f}_z = M$	fiktív z irányú megoszló terhelés
$\bar{B}_z = \bar{\Psi}$	fiktív z irányú belső erő a fiktív z irányú megoszló terhelésből
$\bar{M}_h = \bar{w}$	fiktív hajlító nyomaték a z irányú fiktív megoszló terhelésből

egyenletek megszabta módon, akkor a $\bar{\Psi}$ szögelfordulás, és a $\bar{w}$ z irányú elmozdulás számítására szolgáló egyenletek az

$$\bar{B}_{zP} = \bar{B}_{zA} + \int_A^P \bar{f}_z \mathrm{d}s \,, \tag{22a}$$

$$\bar{M}_{hP} = \bar{M}_{hA} + (y_P - y_A)\bar{B}_{zA} + \int_A^P (y_P - y)\bar{f}_z \mathrm{d}s \tag{22b}$$

alakban írhatók fel. Szavakban is megfogalmazva a $\bar{\Psi}$ szögelfordulás az M nyomatékhoz mint fiktív z irányú $\bar{f}_z$ terheléshez tartozó fiktív z irányú $\bar{B}_z$ belső erő, míg a $\bar{w}$ elmozdulás az M nyomatékhoz, mint fiktív z irányú $\bar{f}_z$ terheléshez tartozó fiktív $\bar{M}_h$ hajlítónyomaték. Ez azt jelenti, hogy a nyomatéki ábra ismeretében statikai módszerekkel tudjuk a $\bar{\Psi}$ szögelfordulást és a $\bar{w}$ elmozdulást számítani.

A szögelfordulásokat, valójában, csak egyszer kell számítani. Ez a számítás, vagy a $\bar{v}$, vagypedig a $\bar{w}$ elmozdulás számításához köthető.

3.5. A megoldás során figyelembe kell venni mind a statikai modell, mind pedig az alakváltozási modell peremfeltételeit. A lehetséges peremfeltételeket az alábbiakban összegezzük:

Statikai modell peremfeltétele	Támasz	Alakváltozási modell peremfeltétele
$M_A = 0$	Csukló az A kezdőpontban	$\bar{v}_A = 0\,, \quad \bar{w}_A = 0$
$M_B = 0$	Csukló a B végpontban	$\bar{v}_B = 0\,, \quad \bar{w}_B = 0$

4. Számpéldák

4.1. Statikailag határozott feladatok kézi számítással történő esetén külön lehet választani a statikai és alakváltozási modell számítását.

A *statikai modell* esetén első lépésben meghatározzuk a teljes erőjátékot, majd megszerkesztjük, a fiktív terhelés(ek) ábráit, azaz a nyomatéki ábrát.

Az *alakváltozási modell* esetén a II. táblázatba foglalt képleteket (vagy ami ugyanaz, a velük egyenértékű és a statikai-kinematikai analógiát szemléltető (21a,b) és (22a,b) összefüggéseket kell alkalmazni. Figyeljük meg, hogy az idézett képletekben megjelennek a kezdőponthoz –

ezt A-al jelöltük – tartózó értékek, nevezetesen a kezdőponti szögelfordulás és a kezdőponti elmozdulás. Ezeket az állandókat a feladat alakváltozási modellhez kötött peremfeltételeiből kell majd meghatározni.

4.2. Statikailag határozatlan szerkezetek esetén nem válik szét a statikai és alakváltozási modell. A vonatkozó egyenletek csatolt egyenletrendszert adnak és csak az együttes megoldás képzelhető el.

1. Példa. Az 5. ábrán vázolt szakaszonként állandó körkeresztmetszetű kéttámaszú tartó statikailag határozott szerkezet, melyre $D^4 = 2d^4$, következőleg lehetségesek a $I_o = D^4/64\pi$, $z \in [0, l/2)$ és a $I_x = d^4/64\pi$, $z \in (l/2, l]$ értékek. Az ábra szemlélteti a statikai feladat megoldását, és az alakváltozási modellben szerepet játszó

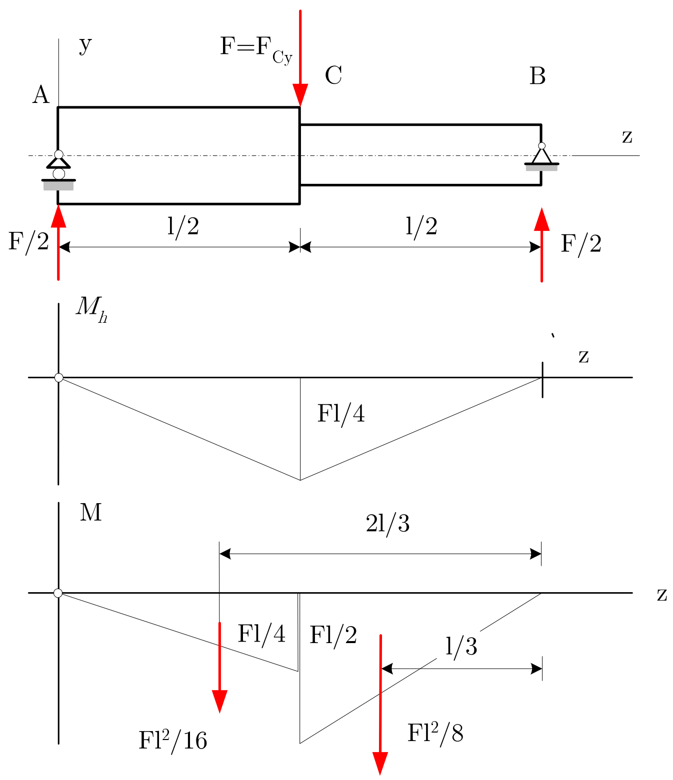
$$\bar{f}_y = M = \frac{I_o}{I_x} M_h$$

fiktív terhelést is. A fenti adatok birtokában elegendő mostmár az alakváltozási modellel kapcsolatos számítást részletezni. Vegyük észre, hogy:

1. a $\bar{w}$ elmozdulás zérusnak vehető, következőleg
2. csak két állandó marad a vonatkozó képletekben: $\bar{\Psi}_A$ és $\bar{v}_A$,
3. amelyek a

$$\bar{v}_A = 0 \ , \qquad \text{és} \qquad \bar{v}_B = 0$$

peremfeltételekből számíthatók (két egyenlet két ismeretlennel).



5. ábra. Szakaszonként állandó körkeresztmetszetű kéttámaszú tartó

Az első peremfeltételből azonnal következik, hogy zérus a $\bar{v}_A$ kezdeti érték. A második peremfeltétel szerint

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A - (z_B - z_A)\bar{\Psi}_A - \int_A^B (z_B - z)\bar{f}_y \mathrm{d}z = -l\bar{\Psi}_A - \underbrace{\int_A^C (z_B - z)\bar{f}_y}_{\text{Fiktív hajlítónyomaték } B\text{-ben}} \mathrm{d}z \ ,$$

azaz

$$0 = -l\bar{\Psi}_A + \frac{Fl^2}{16}\frac{2l}{3} + \frac{Fl^2}{8}\frac{l}{3} \quad \Longrightarrow \bar{\Psi}_A = Fl^2(\frac{1}{24} + \frac{1}{24}) = \frac{Fl^2}{12} \ ,$$

ahol a fiktív hajlítónyomatékot az ábra alapján fiktív erők hajlítónyomatékaként számoltuk. A $\bar{\Psi}_A$ birtokában

$$\bar{v} = -\frac{Fl^2}{12}z_P - \int_A^{Z_P}(z_P - z)\bar{f}_y \mathrm{d}z$$

az elmozdulásmező a z_P pontban. Ha elvégezzük az integrálást, akkor azt kapjuk, hogy

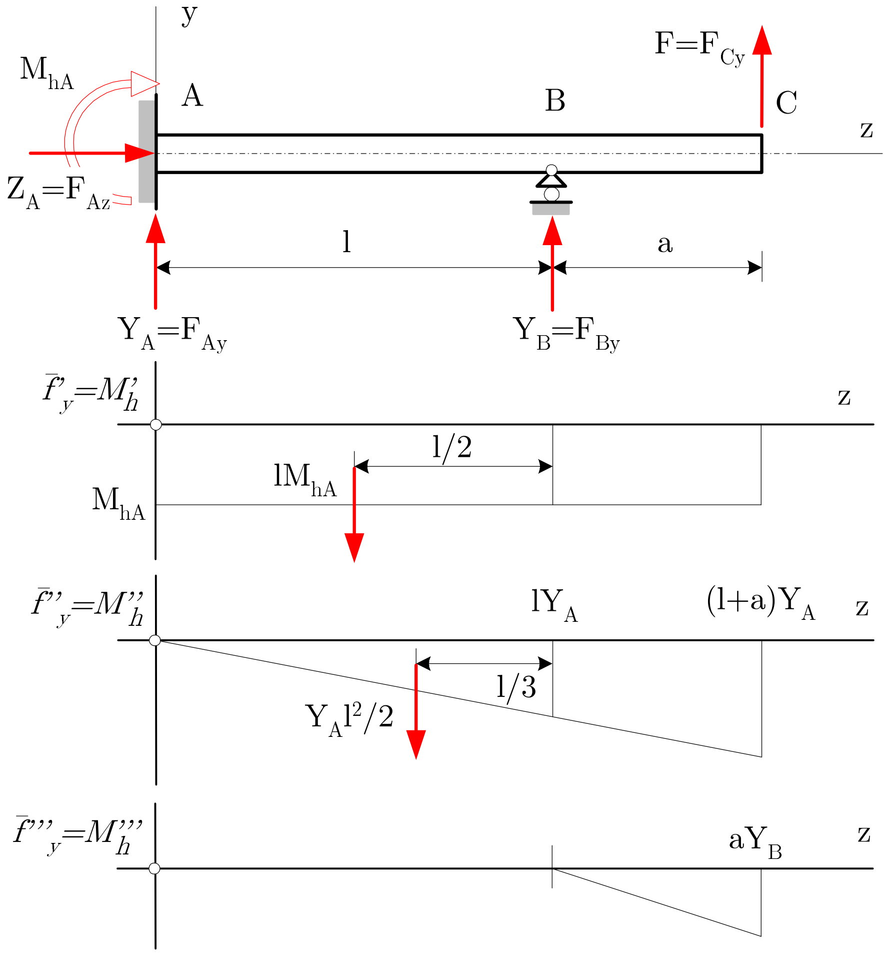
$$\bar{v} = -\frac{Fl^2}{12}z_P + \begin{cases} \frac{FZ_P^3}{12} & \text{ha } \ z_P \in [0, \frac{l}{2}) \\ F(\frac{Z_P^3}{6} - \frac{Z_P^2 l}{2} - \frac{3l^2 Z_P}{8} - \frac{7l^3}{12}) & \text{ha } \ z_P \in (\frac{l}{2}, l] \end{cases}$$

Ezzel megoldottuk a feladatot.

2. Példa. A jelen feladatban a 6. ábrán vázolt statikailag egyszeresen határozatlan állandó keresztmetszetű tartó teljes erőjátékának meghatározása a cél.

Az ábra feltünteti a tartót (rudat), az erőjátékban résztvevő terhelést és a teljes támasztóerőrendszert (támasztóerőket valamint a támasztónyomatékot), illetve a szuperpozícó elvet véve alapul az egyes külső erőkhöz tartozó nyomatéki ábrákat mint $\bar{f}'_y$, $\bar{f}''_y$, $\bar{f}'''_y$ fiktív terheléseket.

Mivel a kezdőpont befogott $\bar{v}_A = \bar{\Psi}_A = 0$ és így csak a Z_A, Y_A és Y_B támasztóerők illetve az M_{hA} támasztónyomaték az ismeretlen. Ezek meghatározására részint az egyensúlyi egyenletek, részint pedig az alakváltozási modell kielégítetlen peremfeltételei szolgálnak.



6. ábra. Statikailag egyszeresen határozatlan rúd erőjátéka

Ami a statikai modellt, azaz az egyensúlyi egyenleteket illeti a z irányban felírt

$$\sum Z = 0 = Z_A \Longrightarrow Z_A = 0$$

vetületi egyenlet szerint $Z_A = 0$. Ez egyben azt is jelenti hogy nincs z irányú elmozdulás. A hiányzó két egyensúlyi egyenlet az y irányú

$$\sum Y = F + Y_A + Y_B = 0 \tag{23a}$$

vetületi egyenlet, valamint a tartó C végpontjára felírt

$$\sum M_C = M_A + Y_A(l + a) + Y_B a = 0 \tag{23b}$$

nyomatéki egyenlet. Az A kezdőpontban, amint azt már feljebb is hangsúlyoztuk, $\bar{v}_A = \bar{\Psi}_A = 0$.

Kielégítetlen még az alakváltozási modell B pontra vonatkozó

$$\bar{v}_B = 0$$

peremfeltétele. A (20) képlet alapján a három fiktív terhelésből számítva a B pontbeli fiktív hajlítónyomatékot az

$$\bar{v}_B = \underbrace{\bar{v}_A}_{0} - \underbrace{\bar{\Psi}_A}_{0} l + M_A \frac{l}{2} + Y_A \frac{l^2}{2} \frac{l}{3} = 0 \ ,$$

vagy ami ugyanaz az

$$Y_A l + 3M_A = 0 \tag{23c}$$

alakban írható fel ez a peremfeltétel. Nem nehéz ellenőrizni, hogy a (23a,b,c) lineáris egyenletrendszernek

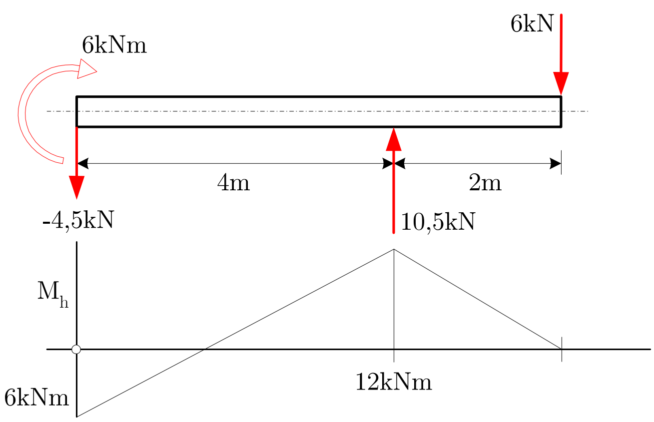
$$Y_A = \frac{3aF}{2l} \ ,$$
$$Y_B = -(1 + \frac{3a}{2l})F$$

és

$$M_A = -\frac{Fa}{2}$$

a megoldása.

Legyen $l = 4m$; $a = 2m$; $F = -6kN$. Erre a terhelési esetre



7. ábra. A statikailag határozatlan tartó erőjátéka és nyomatéki ábrája

a fenti ábra szemlélteti az erőjátékot és a nyomatéki ábrát.

Hivatkozások

1. Mutnyánszky Ádam: *Szilárdságtan*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
2. Kurutzné Kovács Márta: *Tartók statikája*. Műegyetemi kiadó, 2003.
3. Kozák Imre: *Szilárdságtan II*, Tankönyvkiadó Budapest, 1991.
4. Timoshenko, S.P., Gere, J.M.: *Mechanics of Materials*, Van Nostrand Reinhold Company, New York-Cincinati-Toronto-London-Melbourne 1972.
5. Ferdinand P. Beer, E. Russel Johnston, JR.: *Mechanics of Materials* (Si Mertric Edition). McGraw-Hill, 1987. (ISBN 0-07-100143-3)