

DINAMIKA

A minimum teszt kérdései a gépészmérnöki szak hallgatói részére (2004/2005 tavaszi félév)

Dinamika	Pontszám
1. A mechanikai mozgás fogalma	(1)
2. Az anyagi pont pályája	(1)
3. A mozgástörvény fogalma	(1)
4. A pálya kísérő triédere	(2)
5. Elmozdulásvektor és közepes sebesség értelmezése	(2)
6. A sebességvektor értelmezése	(1)
7. A gyorsulásvektor értelmezése	(1)
8. A pályasebesség és pályagyorsulás értelmezése	(2)
9. A gyorsulásvektor felbontása érintőirányú és normálirányú összetevőkre	(2)
10. Az egyenletes mozgás fogalma	(2)
11. Az egyenletesen gyorsuló mozgás fogalma	(2)
12. A szabadságfok fogalma. Anyagi pont és merev test szabad mozgásának szabadságfoka	(2)
13. Merev test sebességállapotának definíciója	(2)
14. Merev test B pontjának sebessége az A pont sebességével és a merev test szögsebességével kifejezve	(2)
15. Elemi mozgások osztályozása	(4)
16. Merev test gyorsulásállapotának definíciója	(2)
17. Merev test B pontjának gyorsulása az A pont gyorsulásával, illetve a merev test szögsebességével és szöggyorsulásával kifejezve	(2)
18. A szállítósebesség illetve a szállítógyorsulás fogalma	(2)
19. A Coriolis gyorsulás értelmezése	(2)
20. Az anyagi pont abszolút sebessége a relatív KR mozgásának, valamint az anyagi pont relatív mozgásának ismeretében	(2)
21. Az anyagi pont abszolút gyorsulása a relatív KR mozgásának, valamint az anyagi pont relatív mozgásának ismeretében	(2)
22. Merev test abszolút szögsebessége a relatív KR mozgásának és a merev test relatív szögsebességének ismeretében	(2)
23. Merev test abszolút szöggyorsulása a relatív KR mozgásának és a merev test relatív szögsebességének és szöggyorsulásának ismeretében	(2)
24. Az impulzus vektorrendszer T tömegközéppontba redukált vektorkettőse anyagi pontrendszerre	(3)
25. Az impulzus vektorrendszer T tömegközéppontba redukált vektorkettőse merev testre	(3)
26. A merev test T tömegközépponthez kötött tehetetlenségi tenzorának értelmezése (a tenzor invariáns alakja)	(3)
27. A merev test T tömegközépponthez kötött tehetetlenségi tenzorának mátrixa	(3)
28. Steiner tétele a merev test T tömegközépponthez és az $A \neq T$ ponthoz kötött tehetetlenségi tenzoraira	(3)
29. Tehetetlenségi főtengelek, főtehetetlenségi nyomatékok értelmezése	(2)
30. A kinetikai vektorrendszer T tömegközéppontba redukált vektorkettőse anyagi pontrendszer esetére	(3)
31. A kinetikai vektorrendszer T tömegközéppontba redukált vektorkettőse merev testre	(3)
32. Az impulzus és kinetikai vektorrendszer kapcsolata	(3)
33. Newton első törvénye	(2)
34. Newton második törvénye	(2)
35. A Newton féle második törvény relatív KR-ben érvényes matematikai alakja	(2)
36. Newton harmadik törvénye	(1)
37. Az inerciarendszer értelmezése	(2)

38. A dinamika alaptétele, impulzus- és perdülettétel merev testre	(3)
39. Anyagi pontra ható erők teljesítménye	(1)
40. Anyagi pontrendszerre ható külső és belső erők teljesítménye	(2)
41. Merev test belső erőinek teljesítménye	(1)
42. Merev testre ható külső erők teljesítménye	(3)
43. A mechanikai munka értelmezése	(1)
44. Anyagi pontra ható erő munkája	(2)
45. A konzervatív erőter fogalma	(2)
46. Anyagi pont kinetikai energiája	(2)
47. Anyagi pontrendszer kinetikai energiája	(2)
48. Merev test kinetikai energiája általános esetben	(3)
49. Merev test kinetikai energiája síkmozgás esetén	(3)
50. A munkatétel	(2)
51. Mikor van a csapágyakban forgó merev test statikailag kiegyensúlyozva	(2)
52. Mikor van a csapágyakban forgó merev test dinamikusán kiegyensúlyozva	(2)
53. A közepes szögsebesség értelmezése	(2)
54. Az egyenlőtlenségi fok értelmezése	(2)
55. Az általános koordináták értelmezése	(1)
56. Hogyan értelmezzük a β_{ij} vektort	(2)
57. A q_i általános koordinátához tartozó általános erő értelmezése	(2)
58. Hogyan számítjuk a q_i általános koordinátához tartozó általános erőt, ha ismeretes a külső ER teljesítménye	(2)
59. A Lagrange féle másodfajú mozgásegyenletek matematikai alakja	(2)
60. A $\mathbf{b}_{ij}$ vektor értelmezése	(2)
61. A q_j általános koordinátához tartozó általános erő merev testekből álló dinamikai rendszerre	(3)
62. Az egyszabadságfokú rezgések mozgásegyenletének általános alakja	(2)
63. Az általános csillapító erő számítása egyszabadságfokú rezgő rendszerre	(2)
64. Az általános visszatérítő erő számítása egyszabadságfokú rezgő rendszerre	(2)
65. Az általános gerjesztő erő számítása egyszabadságfokú rezgő rendszerre	(2)

DINAMIKA

A minimum teszt dinamika kérdéseinek megoldása

1. A mechanikai mozgás testek egymáshoz viszonyított helyváltoztatása. Hallgatólagos feltevés, hogy van olyan test amelyhez a mozgást viszonyítjuk. Az utóbbi testet vonatkoztatási rendszerként szokás tekinteni.
2. Az anyagi pont pályája az anyagi pont által mozgása során leírt tér- vagy síkgörbe – a görbe speciális esetben egyenes is lehet.
3. A mozgástörvény az anyagi pont helyzetét megadó helyvektor mint az idő függvénye (a pálya egyenlete az idő mint paraméter függvényében):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) .$$

4. A kísérő triédert a pálya adott pontbeli $\mathbf{t}$ érintő egységvektora, az ugyanitt vett $\mathbf{n}$ normális egységvektor és a

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

binormális egységvektor határozza meg. A $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ vektorok jobbsodratú vektorhármast alkotnak.

5. Legyen $\Delta t = t_2 - t_1$, ahol $t_2 > t_1$. A $\Delta \mathbf{r}$ elmozdulásvektort és $\mathbf{v}_k$ közepes sebességet a

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1) \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_k = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

képletek értelmezik. Szűkebb értelemben vett egyenletesen gyorsuló mozgásra

$$\mathbf{v}_k = \frac{\mathbf{v}(t_2) + \mathbf{v}(t_1)}{2} .$$

6. A sebességvektor:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} .$$

7. A gyorsulásvektor:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} .$$

8. Ha adott az s ívkoordináta mint a t függvénye, akkor

$$v = \dot{s} = \frac{ds}{dt} \quad \text{és} \quad a_t = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

a pályasebesség és pályagyorsulás.

9. A gyorsulásvektor felbontható érintőirányú és normális irányú összetevőkre:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n ,$$

$$\mathbf{a}_t = \dot{v}\mathbf{t} , \quad \mathbf{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n} .$$

Itt $\mathbf{a}_t$ és $\mathbf{a}_n$ az $\mathbf{a}$ gyorsulásvektor érintő- és normális irányú összetevője, v a pályasebesség, ρ pedig a pálya görbületi sugara.

10. Egyenletes mozgásról beszélünk

szűkebb értelemben, ha $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = \text{állandó}$, vagyis $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t$;

tágabb értelemben, ha $v = v_0 = \text{állandó}$, vagyis $a_t = 0$ és $s = s_0 + v_0 t$.

11. Egyenletesen gyorsuló mozgásról beszélünk

szűkebb értelemben, ha $\mathbf{a} = \text{állandó}$, vagyis $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$ és $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{a} \frac{t^2}{2}$;

tágabb értelemben, ha $a_t = \text{állandó}$, vagyis $v = v_0 + a_t t$ és $s = s_0 + v_0 t + a_t \frac{t^2}{2}$.

12. A szabadságfok a mozgás leírásához szükséges független koordináták száma. Anyagi pont és merev test szabad mozgásának rendre 3 és 6 a szabadságfoka.

13. Merev test sebességállapota a testet alkotó pontok sebességeinek térbeli megoszlása adott időpillanatban.

14. A merev test A és B pontjának sebességei között a

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$$

összefüggés áll fenn, ahol $\boldsymbol{\omega}$ a szögsebesség vektor.

15. Elemi mozgások osztályozása a szögsebesség vektorrendszer redukált vektorkettőse alapján:

1.a.	$\boldsymbol{\omega} = 0$	$\mathbf{v}_A = 0$	Elemi nyugalom
1.b.	$\boldsymbol{\omega} = 0$	$\mathbf{v}_A \neq 0$	Elemi haladó mozgás
2.a.	$\boldsymbol{\omega} \neq 0$	$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_A = 0$	Elemi forgó mozgás
2.b.	$\boldsymbol{\omega} \neq 0$	$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_A \neq 0$	Elemi csavarmozgás

16. Merev test gyorsulásállapota a testet alkotó pontok gyorsulásainak térbeli megoszlása adott időpillanatban.

17. A merev test A és B pontjának gyorsulásai között az

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB})$$

összefüggés áll fenn, ahol $\boldsymbol{\epsilon}$ a szöggyorsulás, $\boldsymbol{\omega}$ pedig a szögsebesség. Síkmozgásra a képlet egyszerűsödik:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_{AB} - \omega^2 \mathbf{r}_{AB}.$$

18. A $\mathbf{v}_{sz}$ szállítósebesség, illetve az $\mathbf{a}_{sz}$ szállítógyorsulás a merev testnek tekintett mozgó relatív $\xi\eta\zeta$ KR azon pontjának sebessége, illetve gyorsulása, ahol a vizsgált anyagi pont tartózkodik:

$$\mathbf{v}_{sz} = \mathbf{v}_{12} + \boldsymbol{\omega}_{12} \times \boldsymbol{\rho},$$

$$\mathbf{a}_{sz} = \mathbf{a}_{12} + \boldsymbol{\epsilon}_{12} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}_{12} \times (\boldsymbol{\omega}_{12} \times \boldsymbol{\rho}).$$

Itt $\mathbf{v}_{12}$ és $\mathbf{a}_{12}$ a $\xi\eta\zeta$ KR origójának sebessége és gyorsulása, $\boldsymbol{\omega}_{12}$ és $\boldsymbol{\epsilon}_{12}$ a relatív $\xi\eta\zeta$ KR szögsebessége és szöggyorsulása, $\boldsymbol{\rho}$ pedig az anyagi pont helyvektora a relatív $\xi\eta\zeta$ KR-ben.

19. A Coriolis gyorsulást az

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}_{12} \times \boldsymbol{\beta}$$

összefüggés értelmezi, ahol $\boldsymbol{\omega}_{12}$ a relatív $\xi\eta\zeta$ KR szögsebessége, $\boldsymbol{\beta} = \dot{\boldsymbol{\rho}}$ pedig a relatív sebesség.

20. Az anyagi pont $\mathbf{v}$ abszolút sebességét a

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{sz} + \boldsymbol{\beta}$$

képlet adja meg, ahol $\mathbf{v}_{sz}$ a szállítósebesség, $\boldsymbol{\beta} = \dot{\boldsymbol{\rho}}$ pedig a relatív $\xi\eta\zeta$ KR-ben megfigyelt (mért) relatív sebesség.

21. Az anyagi pont $\mathbf{a}$ abszolút gyorsulását az

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{sz} + \mathbf{a}_c + \boldsymbol{\alpha}$$

összefüggés adja meg. A képletben $\mathbf{a}_{sz}$ a szállítógyorsulás, $\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}_{12} \times \boldsymbol{\beta}$ a Coriolis gyorsulás, $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\beta}}$ pedig a relatív $\xi\eta\zeta$ KR-ben megfigyelt (mért) relatív gyorsulás.

22. A merev test $\boldsymbol{\omega}_{13}$ abszolút szögsebességét az

$$\boldsymbol{\omega}_{13} = \boldsymbol{\omega}_{12} + \boldsymbol{\omega}_{23}$$

képlet adja meg, ahol $\boldsymbol{\omega}_{12}$ a relatív $\xi\eta\zeta$ KR szögsebessége (szállító szögsebesség), $\boldsymbol{\omega}_{23}$ pedig a merev test $\xi\eta\zeta$ KR-ben megfigyelt (mért) relatív szögsebessége.

23. A merev test $\boldsymbol{\epsilon}_{13}$ abszolút szöggyorsulását az

$$\boldsymbol{\epsilon}_{13} = \boldsymbol{\epsilon}_{12} + \boldsymbol{\omega}_{12} \times \boldsymbol{\omega}_{23} + \boldsymbol{\epsilon}_{23}$$

képlet adja meg, ahol $\boldsymbol{\epsilon}_{12}$ a relatív $\xi\eta\zeta$ KR szöggyorsulása, $\boldsymbol{\omega}_{12}$ a relatív $\xi\eta\zeta$ KR szögsebessége (szállító szögsebesség), $\boldsymbol{\epsilon}_{23}$ pedig a merev test $\xi\eta\zeta$ KR-ben megfigyelt (mért) relatív szöggyorsulása.

24. Anyagi pontrendszerre az ábra jelöléseivel

az

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_T \quad \text{és} \quad \mathbf{\Pi}_T = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{I}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i)$$

összefüggések adják az impulzus vektorrendszer $\mathbf{I}$ eredőjét és a T tömegközéppontra vett $\mathbf{\Pi}_T$ nyomatékát, azaz a perdületet. A képletekben n az anyagi pontok száma, $m = \sum_{i=1}^n m_i$ a teljes tömeg, $\mathbf{v}_T = \dot{\mathbf{r}}_T$ az $\mathbf{r}_T = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i / m$ tömegközéppont sebessége.

25. Merev testre az ábra jelöléseivel

az

$$\mathbf{I} = \int_{(m)} \mathbf{v} dm = m \mathbf{v}_T \quad \text{és} \quad \mathbf{\Pi}_T = \int_{(m)} \rho \times \mathbf{v} dm = \mathbf{J}_T \cdot \omega$$

összefüggések adják az impulzus vektorrendszer $\mathbf{I}$ eredőjét és a T tömegközéppontra vett $\mathbf{\Pi}_T$ nyomatékát. A képletekben m a test tömege, $\mathbf{J}_T$ a T tömegközéppontban vett tehetetlenségi tenzor, $\mathbf{v}_T = \dot{\mathbf{r}}_T$ a tömegközéppont sebessége.

26. A merev test T tömegközépponthez kötött $\mathbf{J}_T$ tehetetlenségi tenzorának

$$\mathbf{J}_T = \int_{(m)} [R^2 \mathbf{I} - \mathbf{R} \circ \mathbf{R}] dm$$

az invariáns (KR független) alakja. Itt $\mathbf{R}$ a dm tömegelem T tömegközéppontra vonatkoztatott helyvektora, R az $\mathbf{R}$ vektor abszolút értéke, míg $\mathbf{I}$ az egységtenzor. Az értelmezésből következik, hogy a $\mathbf{J}_T$ tenzor szimmetrikus.

27. A T tömegközépponttal egybeeső kezdőpontú $\xi\eta\zeta$ kartéziuszi koordinátarendszerben

$$[\mathbf{J}_T] = \begin{bmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\eta\xi} & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\zeta\xi} & -J_{\zeta\eta} & J_\zeta \end{bmatrix}$$

a merev test tömegközéppontjához kötött $\mathbf{J}_T$ tehetetlenségi tenzorának mátrixa, ahol a J_ξ , J_η , J_ζ tengelyre és a $J_{\xi\eta} = J_{\eta\xi}$, $J_{\xi\zeta} = J_{\zeta\xi}$, $J_{\eta\zeta} = J_{\zeta\eta}$ síkpárra számított másodrendű nyomatékokat az alábbi képletek adják:

$$\begin{aligned} J_\xi &= \int_{(m)} (\eta^2 + \zeta^2) dm, & J_\eta &= \int_{(m)} (\xi^2 + \zeta^2) dm, & J_\zeta &= \int_{(m)} (\xi^2 + \eta^2) dm, \\ J_{\xi\eta} &= \int_{(m)} \xi\eta dm, & J_{\eta\zeta} &= \int_{(m)} \eta\zeta dm, & J_{\zeta\xi} &= \int_{(m)} \zeta\xi dm. \end{aligned}$$

28. Legyen $\xi\eta\zeta$ az m tömegű merev test T tömegközéppontjához kötött kartéziuszi koordinátarendszer. Legyen továbbá xyz a merev test $A \neq T$ pontjához kötött kartéziuszi koordinátarendszer. A két KR megfelelő tengelyei párhuzamosak. Legyenek J_ξ , J_η , J_ζ , $J_{\xi\eta}$, $J_{\eta\zeta}$, $J_{\zeta\xi}$ illetve J_x , J_y , J_z , J_{xy} , J_{yz} , J_{zy} a vonatkozó másodrendű nyomatékok. A

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}}_{[\mathbf{J}_A]} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\eta\xi} & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\zeta\xi} & -J_{\zeta\eta} & J_\zeta \end{bmatrix}}_{[\mathbf{J}_T]} + m \underbrace{\begin{bmatrix} y_{TA}^2 + z_{TA}^2 & -x_{TA} y_{SA} & -x_{TA} z_{TA} \\ -y_{TA} x_{TA} & x_{TA}^2 + z_{TA}^2 & -y_{TA} z_{TA} \\ -z_{TA} x_{SA} & -z_{TA} y_{SA} & x_{TA}^2 + y_{TA}^2 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{J}_{AT}]}$$

egyenlet a Steiner tétel mátrix alakja.

29. Legyen $\mathbf{J}_A$ a merev test A pontjában vett tehetetlenségi tenzor. Legyen továbbá az $\mathbf{n}$ és $\mathbf{m}$ egységvektor irányvektor az A pontban. Ha $\mathbf{J}_n = \mathbf{J}_A \cdot \mathbf{n} = J_n \mathbf{n}$ azaz minden $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$ -re fennáll, hogy $-J_{mn} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{J}_n = 0$, akkor az $\mathbf{n}$ irány tehetetlenségi főirány, az általa kijelölt n tengely tehetetlenségi főtengety, J_n pedig a vonatkozó főtehetetlenségi nyomaték.

30. Anyagi pontrendszerre – az ábra jelöléseivel –

a

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i = m \mathbf{a}_T, \quad \mathbf{D}_T = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{K}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{a}_i)$$

összefüggések adják a kinetikai vektorrendszer $\mathbf{K}$ eredőjét és a T tömegközéppontra vett $\mathbf{D}_T$ nyomatékát. A képletekben n az anyagi pontok száma, $m = \sum_{i=1}^n m_i$ a teljes tömeg, $\mathbf{a}_T = \dot{\mathbf{v}}_T = \ddot{\mathbf{r}}_T$ az $\mathbf{r}_T = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i / m$ tömegközéppont gyorsulása. Az egyéb jelölések a szokásosak.

31. Merev testre – az ábra jelöléseivel –

az

$$\mathbf{K} = \int_{(m)} \mathbf{a} dm = m\mathbf{a}_T, \quad \mathbf{D}_T = \int_{(m)} \rho \times \mathbf{a} dm = \mathbf{J}_T \cdot \varepsilon + \omega \times \mathbf{\Pi}_T$$

összefüggések adják a kinetikai vektorrendszer $\mathbf{K}$ eredőjét és a T tömegközéppontra vett $\mathbf{D}_T$ nyomatékát. A képletekben m a test teljes tömege, $\mathbf{J}_T$ a T tömegközéppontban vett tehetetlenségi tenzor, $\mathbf{\Pi}_T$ a tömegközéppontra vett perdület.

32. Jelölje $\mathbf{K}$ a kinetikai vektorrendszer eredőjét, és legyen $\mathbf{D}_T$ illetve $\mathbf{D}_A$ a T tömegközéppontra és az A pontra vett nyomaték. Az impulzus vektorrendszerre nézve $\mathbf{I}$ az eredő illetve $\mathbf{\Pi}_T$ és $\mathbf{\Pi}_A$ a vonatkozó nyomaték. Legyen m a merev test tömege, és jelölje $\mathbf{v}_A$ illetve $\mathbf{v}_T$ az A és T pontok sebességét. A test tömegközéppontjában vett vektorkettősökre az

$$\mathbf{K} = \dot{\mathbf{I}}, \quad \mathbf{D}_T = \dot{\mathbf{\Pi}}_T$$

összefüggések, a test $A \neq T$ pontjában pedig a

$$\mathbf{K} = \dot{\mathbf{I}}, \quad \mathbf{D}_A = \dot{\mathbf{\Pi}}_A + m\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_T$$

összefüggések állnak fenn.

33. Minden anyagi pont (test) megtartja nyugalmi állapotát, vagy egyenletes egyenesvonalú mozgását, amíg egy másik anyagi pont (test) ennek megváltoztatására nem kényszeríti. A törvény csak inerciarendszerekben érvényes. (A test szó a newtoni megfogalmazást tükrözi.)
34. Az anyagi pont gyorsulása egyenesen arányos az anyagi pontra ható erők eredőjével, azaz

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}.$$

Itt m az anyagi pont tömege, $\mathbf{a}$ az anyagi pont gyorsulása, míg $\mathbf{F}$ az anyagi pontra ható erők eredője. Az $\mathbf{I} = m\mathbf{v}$ impulzusvektorral

$$m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\mathbf{I} = \frac{d}{dt}m\mathbf{v} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

a második törvény baloldala, a külső erők eredőjét pedig az

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i.$$

összeg adja, ahol $\mathbf{F}_i$ az anyagi pontra ható i -ik erő. A törvény csak inerciarendszerben érvényes ha az $\mathbf{F}_i$ -k kölcsönhatásból származó erők. A törvény magában foglalja az első törvényt hiszen $\mathbf{F} = 0$ esetén a $\mathbf{v} =$ állandó (egyenletes egyenesvonalú mozgás) és a $\mathbf{v} = 0$ (nyugalmi állapot) egyaránt megoldása az $m\mathbf{a} = 0$ egyenletnek.

35. A $\xi\eta\zeta$ relatív koordináta-rendszerben

$$m\alpha = \mathbf{F}_I + \mathbf{F}_{sz} + \mathbf{F}_c$$

a Newton féle második törvény matematikai alakja, ahol m az anyagi pont tömege, α az anyagi pont $\xi\eta\zeta$ KR-ben megfigyelt (mért) relatív gyorsulása, $\mathbf{F}_I$ az anyagi pontra ható erők eredője az xyz abszolút KR-ben, míg $\mathbf{F}_{sz}$ és $\mathbf{F}_c$ rendre a szállítóerő és a Coriolis erő. Az utóbbi két erőt járulékos (nem kölcsönhatásból származó) erőnek nevezik:

$$\mathbf{F}_{sz} = -m\mathbf{a}_{sz}, \quad \mathbf{F}_c = -m\mathbf{a}_c.$$

Itt $\mathbf{a}_{sz}$ és $\mathbf{a}_c$ a szállító- és Coriolis gyorsulás.

36. A hatásnak ellenhatás felel meg. Két anyagi pont esetén jelölje $\mathbf{F}_{21}$ az első anyagi ponton a második által kifejtett erőt és legyen $\mathbf{F}_{12}$ a második anyagi ponton az első által kifejtett erőt. A törvény szerint a két anyagi pontot összekötő egyenes a két erő közös hatásvonala és

$$\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} = 0.$$

37. Az inerciarendszer olyan koordináta-rendszer amelyben nincsenek járulékos erők a mozgást okozó erők között, vagyis érvényes a tehetetlenségi törvény.
38. A merev test kinetikai vektorrendszere egyenértékű a testre ható külső erőrendszerrel. Az első kritérium alapján a merev test T tömegközéppontjában az alábbi összefüggések állnak fenn:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{F}, & \text{azaz} & & m\mathbf{a}_T &= \mathbf{F} & (\text{impulzustétel}); \\ \mathbf{D}_T &= \mathbf{M}_T, & \text{azaz} & & \mathbf{J}_T \varepsilon + \omega \times \mathbf{\Pi}_T &= \mathbf{M}_T & (\text{perdülettel}). \end{aligned}$$

Itt a szokásos jelöléseket alkalmaztuk: m a test tömege, $\mathbf{J}_T$ a tehetetlenségi tenzor a T pontban, $[\mathbf{K}, \mathbf{D}_T]$ és $[\mathbf{F}, \mathbf{M}_T]$ rendre a kinetikai vektorrendszer és a testre ható külső erőrendszer redukált vektorkettőse a T pontban, ω a merev test szögsebessége, $\mathbf{a}_T$ a T pont gyorsulása, ε a merev test szöggyorsulása és $\mathbf{\Pi}_T$ a T pontra vett perdület.

39. Jelölje $\mathbf{F}$ az anyagi pontra ható erők eredőjét és legyen $\mathbf{v}$ az anyagi pont sebessége. Az anyagi pontra ható erők teljesítményét a

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

összefüggés értelmezi.

40. Jelölje $\mathbf{F}_i$ az i -ik m_i anyagi pontra ($i = 1, \dots, n$; n az anyagi pontok száma) ható külső erők eredőjét, és legyen $\mathbf{F}_{ji}$ a j -ik anyagi pont által ($j = 1, \dots, n$) az i -ik anyagi ponton kifejtett ún. belső erő ($\mathbf{F}_{ii} = 0$). Legyen továbbá $\mathbf{v}_i$ az i -ik anyagi pont sebessége. Az anyagi pontrendszerre ható külső és belső erők teljesítményét a

$$P = \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i}_{P_k} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ji} \right) \cdot \mathbf{v}_i}_{P_b}$$

képlet adja. Itt P_k és P_b rendre a külső és belső erők teljesítménye.

41. A merev test belső erőinek zérus a teljesítménye:

$$P_b = 0.$$

42. Legyen ω és $\mathbf{v}_A$ a merev test szögsebessége és A pontjának sebessége. Legyen továbbá $\mathbf{F}$ a merev testen működő külső erők eredője, és jelölje $\mathbf{M}_A$ a külső erők A pontra vett nyomatékát. A bevezetett jelölésekkel

$$P = P_k = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_A + \omega \cdot \mathbf{M}_A$$

a merev testen működő külső erők teljesítménye.

43. A W_{12} mechanikai munka a külső és belső erők (ha vannak belső erők) teljesítményének idő szerinti integrálja a t_1, t_2 időintervallumban:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} (P_k + P_b) dt.$$

44. Az m tömegű anyagi pont az $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$; $t \in [t_1, t_2]$ erő hatására mozog, a mozgástörvény $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, a sebesség $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$. Az $\mathbf{F}$ erő munkáját a

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \underbrace{\mathbf{v} dt}_{d\mathbf{r}} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

összefüggés adja. Ha az erő állandó, akkor innen

$$W_{12} = \mathbf{F} \cdot \underbrace{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}_{\Delta \mathbf{r}} = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}.$$

Szavakban: állandó erő munkája az erő és támadáspontja elmozdulásvektorának skaláris szorzata.

45. Konzervatív az erőter, ha az erőter által valamely anyagi pontra kifejtett erő munkája független az anyagi pont pályájától. Ez esetben létezik egy olyan $U(\mathbf{r})$ skalárfüggvény (más elnevezés szerint potenciálfüggvény vagy röviden potenciál), hogy az anyagi pontra kifejtett $\mathbf{F}$ erőre nézve fennáll az

$$\mathbf{F} = -\nabla U$$

összefüggés. A pálya egy szakaszának A kezdő és B végpontja között pedig

$$W_{AB} = U_A - U_B$$

a végzett munka.

46. Legyen $\mathbf{v}$ az m tömegű anyagi pont sebessége. Ekkor

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$$

az anyagi pont kinetikai (mozgási) energiája.

47. Legyen $\mathbf{v}_i$ az n tömegből álló anyagi pontrendszer i -ik ($i = 1, \dots, n$) m_i jelű anyagi pontjának a sebessége. Ekkor

$$E = \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2$$

az anyagi pontrendszer kinetikai energiája.

48. Legyen $[\omega; \mathbf{v}_A]$ a merev test szögsebesség vektorrendszerének és $[\mathbf{I}, \mathbf{\Pi}_A]$ a merev test impulzus vektorrendszerének a test A pontjába redukált vektorkettőse. Ezekkel a mennyiségekkel

$$E = \frac{1}{2} [\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{I} + \omega \cdot \mathbf{\Pi}_A]$$

a merev test kinetikai energiája. Ha $A = T$, akkor

$$E = \frac{1}{2} [m \mathbf{v}_T^2 + \omega \cdot \mathbf{J}_T \cdot \omega] = \frac{1}{2} [m \mathbf{v}_T^2 + J_e \omega^2]$$

a kinetikai energia, ahol m a test tömege, $\mathbf{v}_T$ a T tömegközéppont sebessége, $\mathbf{J}_T$ a tehetetlenségi tenzor a T pontban, $\omega = \omega \mathbf{e}$, $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1$ és $J_e = \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}_T \cdot \mathbf{e}$.

49. Legyen $\omega = \omega(t) \mathbf{e}_\zeta$ az m tömegű, síkmozgást végző merev test szögsebessége – az xy síkkal egybeeső $\xi\eta$ sík a mozgás síkja. Legyen továbbá J_ζ a T tömegközépponton átmenő ζ tengelyre, és J_z a P póluson átmenő és a ζ -vel párhuzamos z tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték. A T pont sebessége $\mathbf{v}_T$. A bevezetett jelölésekkel

$$E = \frac{1}{2} [m \mathbf{v}_T^2 + J_\zeta \omega^2] = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \quad (J_z = J_\zeta + m \mathbf{r}_{TP}^2)$$

a kinetikai energia, ahol $\mathbf{r}_{TP}$ a P pólus T pontra vonatkoztatott helyvektora.

50. A munkatétel szerint [az anyagi pont]{a merev test} E kinetikai energiájának megváltozása a $[t_1, t_2]$; $t_2 > t_1$ időintervallumban megegyezik [az anyagi pontra ható külső erők]{a merev testre ható külső erőrendszer} által végzett W_{12} munkával:

$$E_2 - E_1 = W_{12}.$$

51. A csapágyakban forgó merev test akkor van statikailag kiegyensúlyozva, ha zérus a testre ható külső erők eredője. Ennek az a feltétele, hogy a tömegközéppont a forgástengelyen legyen, ekkor ui. $\mathbf{K} = m\mathbf{a}_T = 0$, következésképp zérus a külső erők összege.
52. A csapágyakban forgó merev test akkor van dinamikusán kiegyensúlyozva, ha statikailag ki van egyensúlyozva és emellett a testre ható külső erőrendszer nyomatéka – ha nem zérus – párhuzamos a forgástengellyel. Az utóbbi feltétel akkor teljesül, ha a forgástengely a $\mathbf{J}_T$ tenzor tehetetlenségi főtengele.
53. Jelölje rendre $\omega_{\max}$ és $\omega_{\min}$ a forgó gép szögsebességének maximumát és minimumát. A közepes szögsebességet az

$$\omega_k = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}$$

összefüggés értelmezi.

54. Jelölje rendre $\omega_{\max}$ és $\omega_{\min}$ a forgó gép szögsebességének maximumát és minimumát, ω_k pedig a közepes szögsebességet. A járás egyenlőtlenségi fokát a

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_k}$$

összefüggés értelmezi.

55. A $q_1, \dots, q_s$ ún. általános koordináták – s a vizsgált dinamikai rendszer szabadságfoka – a mozgás leírásához szükséges koordináták. Az általános szó mint jelző arra utal, hogy ezek a koordináták nem szükségképpen hosszkoordináták.
56. Legyen a vizsgált dinamikai rendszer i -ik pontjának $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_s)$ a helyvektora ($i = 1, \dots, N$), ahol $q_1, \dots, q_s$ általános koordináták, s a szabadságfok. Értelmezés szerint

$$\beta_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Kimutatható, hogy

$$\beta_{ij} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Az utóbbi egyenlet alapján β_{ij} -t egységnyi koordinátasebességhez tartozó sebességnek nevezik.

57. Legyen s a vizsgált dinamikai rendszer szabadságfoka, és jelölje $q_1, \dots, q_s$ a vonatkozó általános koordinátákat. A dinamikai rendszerre ható külső erőket rendre $\mathbf{F}_i$ jelöli, $i = 1, \dots, N$. Ha nincs a rendszeren nyomatéki teher – például anyagi pontrendszer esetén – akkor

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \beta_{ij}$$

a q_j általános koordináta-hoz tartozó Q_j általános erő értelmezése, ahol β_{ij} az egységnyi koordinátasebességhez tartozó sebesség

58. Legyen s a vizsgált dinamikai rendszer szabadságfoka és jelölje $q_1, \dots, q_s$ a vonatkozó általános koordinátákat. Legyen továbbá $P(q_1, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$ a külső erők teljesítménye. A q_j általános koordináta-hoz tartozó Q_j általános erő a

$$Q_j = \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j}; \quad j = 1, 2, \dots, s$$

képletből számítható.

59. Legyen E a vizsgált dinamikai rendszer mozgási energiája, s a szabadságfok, és jelölje $q_1, \dots, q_s$ a vonatkozó általános koordinátákat. Legyen továbbá Q_j a q_j általános koordináta-hoz tartozó általános erő. Ezekkel a jelölésekkel

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_j} = Q_j; \quad j = 1, 2, \dots, s$$

a Lagrange féle másodfajú mozgásegyenletek.

60. Tegyük fel, hogy a vizsgált dinamikai rendszer N merev testből áll, s a szabadságfok, $q_1, \dots, q_s$ a vonatkozó általános koordináták, ω_i ($i = 1, \dots, N$) az i -ik merev test szögsebessége. A $\mathbf{b}_{ij}$ vektort a

$$\mathbf{b}_{ij} = \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}_j} ; \quad j = 1, 2, \dots, s$$

összefüggés adja. Ennek megfelelően $\mathbf{b}_{ij}$ az egységnyi koordinátasebességhez tartozó szögsebességnek nevezhető.

61. Tegyük fel, hogy a vizsgált dinamikai rendszer N merev testből áll, s a szabadságfok, $q_1, \dots, q_s$ a vonatkozó általános koordináták, $\mathbf{v}_{Ti}$ az i -ik merev test tömegközéppontjának sebessége, $\beta_{Tij} = \frac{\partial \mathbf{v}_{Ti}}{\partial \dot{q}_j}$, ω_i az i -ik merev test szögsebessége, $\mathbf{b}_{ij} = \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}_j}$. Az i -ik merev testre ható külső erők eredőjét $\mathbf{F}_i$, a T_i tömegközéppontra vett nyomatékát pedig $\mathbf{M}_{Ti}$ jelöli. Ezekkel a jelölésekkel

$$Q_j = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i \cdot \beta_{Tij} + \mathbf{M}_{Ti} \cdot \mathbf{b}_{ij}) ; \quad j = 1, 2, \dots, s$$

a q_j általános koordináta-hoz tartozó általános erő.

62. Egyszabadságfokú rezgő rendszer esetén

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q_r + Q_c + Q_g$$

a mozgásegyenlet, ahol E a mozgási energia, q és $\dot{q}$ rendre az általános koordináta és az általános koordináta sebesség, Q_r az általános csillapító erő, Q_c az általános visszatérítő erő és Q_g az általános gerjesztő erő.

63. Egyszabadságfokú rezgő rendszer esetén

$$Q_c = -\frac{\partial U}{\partial q}$$

az általános visszatérítő erő, ahol U a vonatkozó potenciál (például rugóenergia).

64. Legyen az $\mathbf{F}_r$ csillapító erő. Egyszabadságfokú rezgő rendszer esetén

$$Q_r = -r(\beta \cdot \mathbf{e})^2 \dot{q}$$

a vonatkozó általános csillapító erő, ahol r a csillapítási tényező, $\mathbf{e}$ a csillapító erő irányát adó egységvektor $\beta = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}}$, $\mathbf{v}$ a csillapító erő támadáspontjának sebessége, $\dot{q}$ pedig az általános koordináta sebesség.

65. Legyen $\mathbf{F}_g$ gerjesztőerő. A vonatkozó általános erőt egyszabadságfokú rezgő rendszer esetén a

$$Q_g = \mathbf{F}_g \cdot \beta$$

képlet adja, ahol $\beta = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}}$, $\mathbf{v}$ a gerjesztőerő támadáspontjának sebessége, $\dot{q}$ pedig az általános koordináta sebesség. Legyen továbbá $\mathbf{M}_g$ gerjesztő nyomaték. A vonatkozó általános erőt egyszabadságfokú rezgő rendszer esetén a

$$Q_g = \mathbf{M}_g \cdot \mathbf{b}$$

képlet adja, ahol $\mathbf{b} = \frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}}$, ω pedig azon merev test szögsebessége, amelyre a gerjesztés működik.