Szilárdságtan III.

gyakorlati anyagok

Összeállíotta:

Baksa Attila

2007.

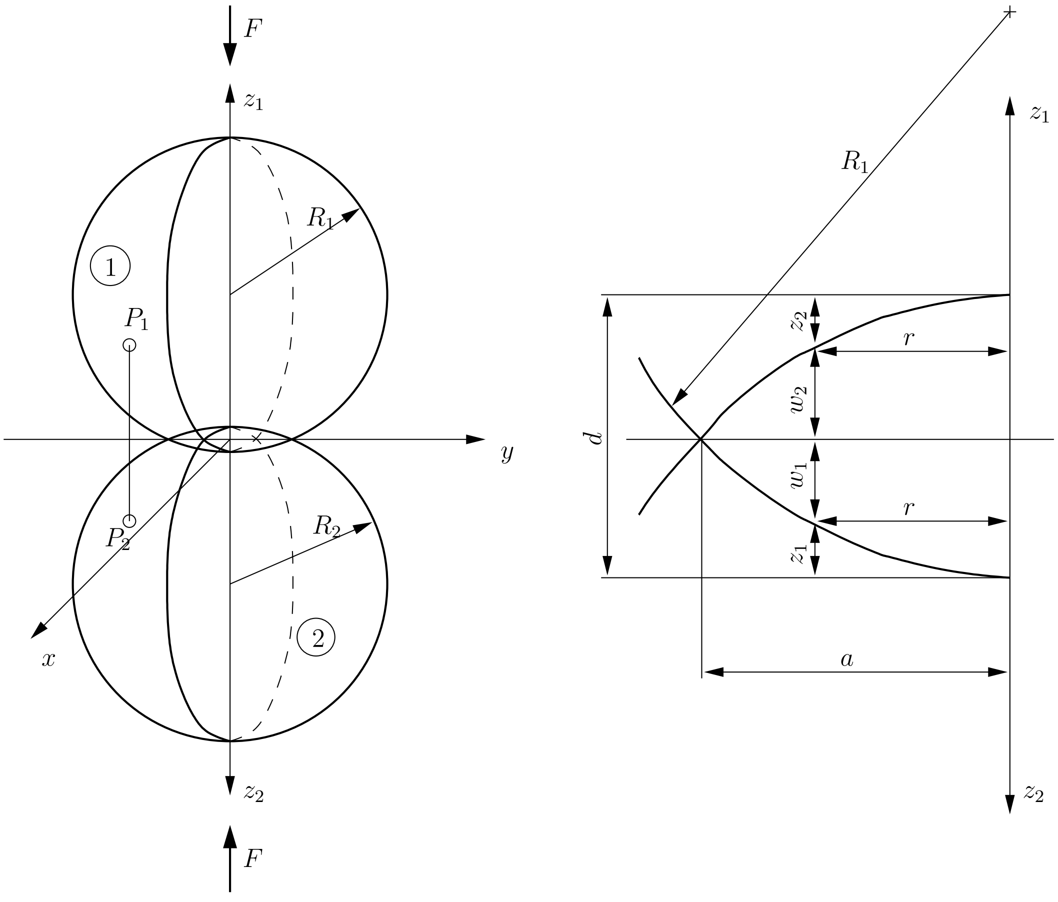
1. gyakorlat

Érintkezési feladat vizsgálata – Hertz-féle elmélet alapján

Keressük

- a-t, a kialakuló érintkezési felület jellemző mérete (sugara).
- d-t, a P_1 és P_2 pontok közeledése

$$d = (z_1 + w_1) + (z_2 + w_2)$$



1.1. ábra. Két rugalmas gömb érintkezése

Azon pontok érintkeznek, melyekre

$$z_1 + z_2 = d - (w_1 + w_2).$$

Az 1.1. ábrából

$$R_1^2 - r^2 = (R_1 - z_1)^2 = R_1^2 - 2R_1 z_1 + z_1^2 \quad \Rightarrow \quad z_1 = \frac{r^2}{2R_1}, \quad z_2 = \frac{r^2}{2R_2}$$

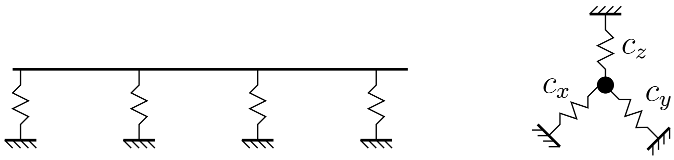
$\vdots$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[3]{\frac{3}{4}\, F\, k\, \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}\,, \\ d &= \sqrt[3]{\frac{9}{16}\, (F\, k)^2\, \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

2. gyakorlat

Rugalmas ágyazású tartó

A közeg: egymástól független lineáris rugókból modellezhető.



2.1. ábra. Rugalmas ágyazási modell

Az ébredő erő:

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & c_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{u}.$$

Fajlagos alakváltozási energia:

$$e = \frac{1}{2}\underline{f}^T \cdot \underline{u} = \frac{1}{2}\underline{u}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{u}.$$

Egy elemben felhalmozott belső energia:

$$U^e_{rug} = \frac{1}{2} \int\limits_{A^e_{rug}} \underline{u}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{u} \, dA.$$

Az elmozdulás közelítése:

$$\underline{u}^e = \underline{\underline{N}}^e \cdot \underline{q}^e + \underline{\underline{\breve{N}}}^e \cdot \underline{\breve{a}}^e,$$

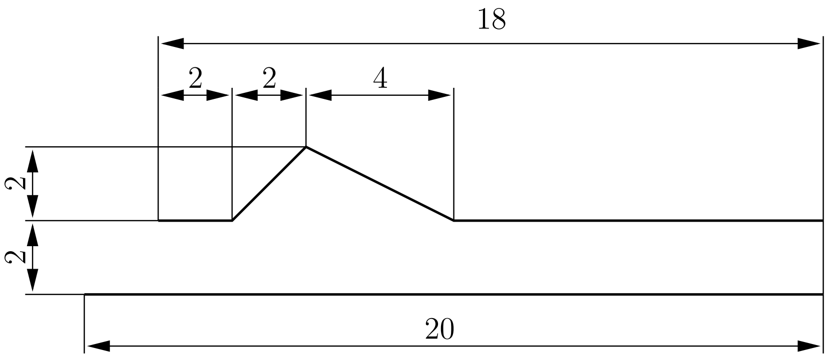
mellyel

$$U^e_{rug} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{q}^T & \underline{\breve{a}}^T \end{bmatrix}^e \int\limits_{A^e_{rug}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{N}}^T \\ \underline{\underline{\breve{N}}}^T \end{bmatrix}^e \underline{\underline{C}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{N}} & \underline{\underline{\breve{N}}} \end{bmatrix}^e dA \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{\breve{a}} \end{bmatrix}^e == \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{q}^T & \underline{\breve{a}}^T \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{qq} & \underline{\underline{K}}_{qa} \\ \underline{\underline{K}}_{aq} & \underline{\underline{K}}_{aa} \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{\breve{a}} \end{bmatrix}^e$$

Síkbeli esetben $\underline{\underline{C}}$-t módosítani kell, úgy hogy valamelyik c_x, c_y, c_z nulla legyen és ezzel az energiával kell módosítani a rugalmas közeg nélküli elem potenciális energiáját!

3. gyakorlat

I-DEAS használata érintkezési feladat megoldására



3.1. ábra. Kapcsoló modellje (szélessége: $2\,mm$, lemezvastagság: $0.15\,mm$))

A feladat végrehajtásához használatos főbb parancsok:

Simulation → Master Modeller
`Options` → `Units` mm[Newton]
`Workplane Appearance` $B(2,3)$ `Grid, Snap`
`Polylines` $A(2,1)$ kontúr rajzolása
`Dimension` $A(4,1)$ méretezés
`Modify Entity` $B(2,1)$ méretek
– Mentés `Ctrl-S`
`Extrude` $A(5,1)$
`Name Parts...` $B(4,2)$
– Mentés `Ctrl-S`
Simulation → Boundary Conditions
`Create FE Model...` $B(4,2)$ *Geometry based*
`Define Contact Set` $A(5,1)$
 -*Global search off*
 -*Regions*, *Add to Region, Create* (2x)
 -*Pairs*, *Search distance:* $3\,mm$

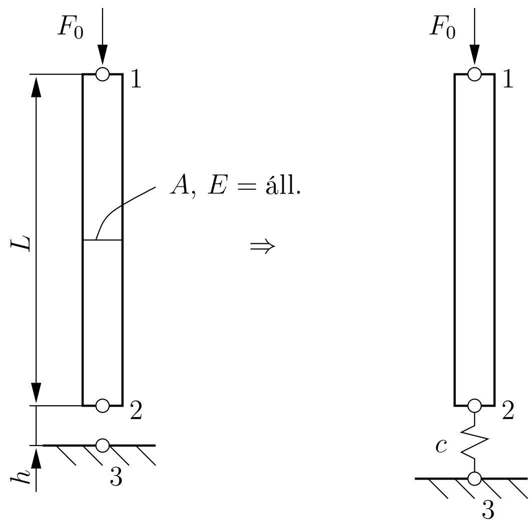
Simulation → Meshing

`Physical Property` $A(5,2)$ lemezvastagság ($0.15\,mm$)
`Materials` $A(5,1)$ anyagjellemzők
`Define Shell Mesh` $A(1,1)$ háló generálás ($1\,mm$)
– Mentés `Ctrl-S`
Simulation → Boundary Conditions
`Displacement Restraint` $A(4,2)$ KPF (*megfogás*)
`Displacement Restraint` $A(4,1)$ KPF (*előírt elm.*)
`Define Contact Set` $A(5,1)$ Preview (Contact elements?!)
`Boundary Condition Set` $A(6,1)$
Simulation → Model Solution
`Solution Set...` $A(1,2)$
`Model Solution` $A(2,1)$
 -*Output selection: Reaction, Constraint Forces*
 -*Options: Contact Control...*
`Visualiser` $A(6,2)$
 -*Scale Factor: 1*
 -*Contact Stresses*, *Top/Bottom!*
 -*Reaction Forces*

4. gyakorlat

Érintkezési feladat megoldása büntetőparaméteres technikával

Nyomott rúd érintkezése merev felülettel. Keressük a rúd 1-es és 2-es csomópontjának elmozdulását.



4.1. ábra. Nyomott rúd érintkezési feladata (c: büntetőparaméter)

A vizsgált funkcionál:

$$B = \Pi(u) + \frac{1}{2}c(h - u_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{AE}{L}(u_2 - u_1)^2 - F_0 u_1 + \frac{1}{2}c(h - u_2)^2$$

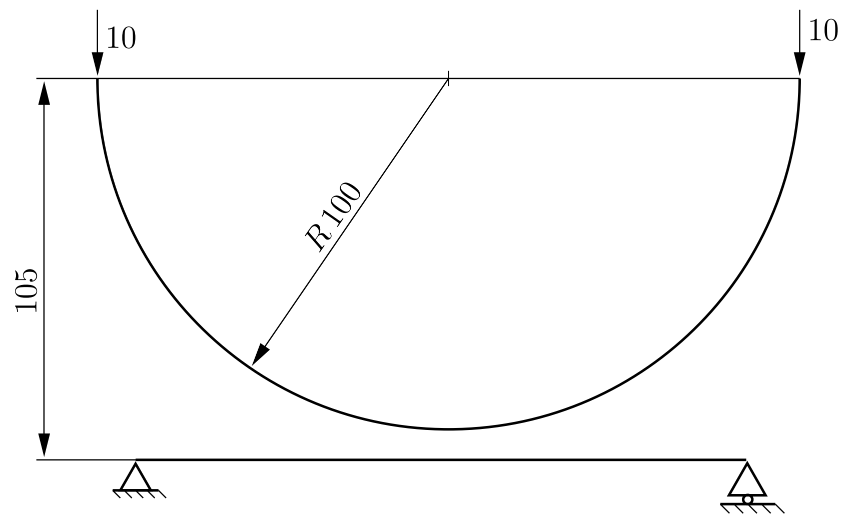
$\delta B = 0:$

$$\delta B|_{u_1} = -\frac{AE}{L}(u_2 - u_1) - F_0 = 0$$
$$\delta B|_{u_2} = \frac{AE}{L}(u_2 - u_1) + cu_2 - ch = 0$$

melyből

$$u_1 = \frac{F_0}{c}\frac{L}{AE}\left(c + \frac{AE}{L}\right) + h, \quad u_2 = \frac{F_0}{c} + h.$$

Ha $c \to \infty$ akkor $\Rightarrow u_2 \to h$, mely az egzakt megoldás.
A feladat végrehajtásához használatos főbb parancsok:



4.2. ábra. Rugalmas lemezek érintkezése(szélessége: $2 \times 10\,mm$, vastagság: $0.5\,mm$))

Simulation → Master Modeller
`Options` → `Units` mm[Newton]
`Lines` $A(2,1)$ `Grid, Snap`
`Center Start, End` $A(2,2)$
`Dimension` $A(4,1)$ méretezés
`Modify Entity` $B(2,1)$ méretek
– Mentés `Ctrl-S`
`Extrude` $A(5,1)$ $2 \times 10\,mm$
`Name Parts...` $B(4,2)$
– Mentés `Ctrl-S`

Simulation → Boundary Conditions
`Create FE model` $B(4,2)$
  -*Geometry Based Analysis Only*
`Define Contact Set` $A(5,1)$
  -*Global search on*
  -*Regions*, *Add to Region, Create* (2x)
  -*Pairs*, *Search distance:* $8\,mm$

Simulation → Meshing
`Physical Property` $A(5,2)$
  -*Thickness:* ($0.15\,mm$)
`Materials` $A(5,1)$ anyagjellemzők
`Define Shell Mesh` $A(1,1)$ háló generálás ($10\,mm$)
– Mentés `Ctrl-S`

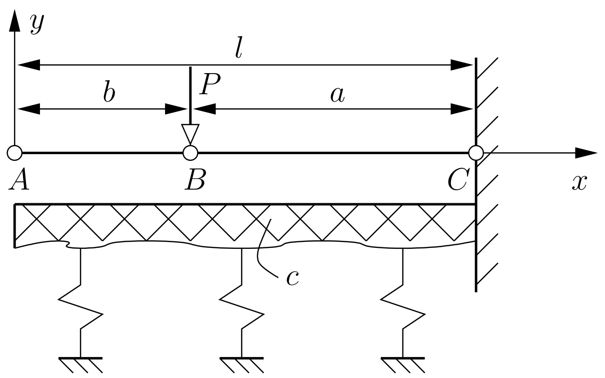
Simulation → Boundary Conditions
`Displacement Restraint` $A(4,2)$ KPF (*megfogás*)
`Displacement Restraint` $A(4,1)$ KPF (*előírt elm.*)
`Define Contact Set` $A(5,1)$ Preview (Contact elements?!)
`Boundary Condition Set` $A(6,1)$

Simulation → Model Solution
`Solution Set...` $A(1,2)$
`Model Solution` $A(2,1)$
  -*Output selection: Reaction, Constraint Forces*
  -*Options: Contact Control...*
`Visualiser` $A(6,2)$
  -*Scale Factor: 1*
  -*Contact Stresses*, *Top/Bottom!*
  -*Reaction Forces*

5. gyakorlat

Egy hatásmátrix és egy matematikai programozási feladat felírása

Feladat: Befalazott tartó és rugalmas ágyazás érintkezési feladata kapcsán állítsuk össze tartóra vonatkozó hatásmátrixot, majd a rugalmas ágyazás figyelembevételével írjuk fel a megoldáshoz vezető matematikai programozási feladatot!



5.1. ábra. Befalazott tartó és rugalmas ágyazás

B-beli terhelés hatására az y irányú elmozdulás változása (táblázatból)

$(A \rightarrow B)$ szakaszon: $v(x) = -\frac{1}{6}\frac{P}{I_z E}\left(-a^3 + 3a^2 l - 3a^2 x\right)$

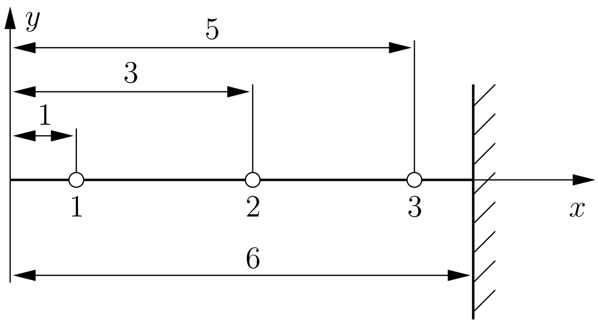
$(B \rightarrow C)$ szakaszon: $v(x) = -\frac{1}{6}\frac{P}{I_z E}\left[(x-b)^3 - 3a^2(x-b) + 2a^3\right]$

(adott: E, $I_z =$ áll.)

Konkrét felosztás a felső testre

- P_1 erő az 1. csomópontban azaz ($a = 5$, $b = 1$)

$$\begin{aligned}
v^1(1,1)\big|_{x=1} &= -\frac{1}{6}\frac{P_1}{I_z E}\left[(1-1)^3 - 3\cdot 5^2(1-1) + 2\cdot 5^3\right] = -\frac{250}{6I_zE}\cdot P_1 \\
v^1(2,1)\big|_{x=3} &= -\frac{1}{6}\frac{P_1}{I_z E}\left[(3-1)^3 - 3\cdot 5^2(3-1) + 2\cdot 5^3\right] = -\frac{108}{6I_zE}\cdot P_1 \\
v^1(3,1)\big|_{x=5} &= -\frac{1}{6}\frac{P_1}{I_z E}\left[(5-1)^3 - 3\cdot 5^2(5-1) + 2\cdot 5^3\right] = -\frac{14}{6I_zE}\cdot P_1
\end{aligned} \tag{5.1}$$



5.2. ábra. Felső test felosztása

- P_2 erő az 2. csomópontban azaz ($a = 3$, $b = 3$)

$$\begin{aligned}
v^1(1,2)\big|_{x=1} &= -\frac{1}{6}\frac{P_2}{I_zE}\left[-3^3 + 3\cdot 3^2\cdot 6 - 3\cdot 3^2\cdot 1\right] = -\frac{108}{6I_zE}\cdot P_2\\
v^1(2,2)\big|_{x=3} &= -\frac{1}{6}\frac{P_2}{I_zE}\left[(3-3)^3 - 3\cdot 3^2(3-3) + 2\cdot 3^3\right] = -\frac{54}{6I_zE}\cdot P_2\\
v^1(3,2)\big|_{x=5} &= -\frac{1}{6}\frac{P_2}{I_zE}\left[(5-3)^3 - 3\cdot 3^2(5-3) + 2\cdot 3^3\right] = -\frac{8}{6I_zE}\cdot P_2
\end{aligned} \tag{5.2}$$

- P_3 erő az 3. csomópontban azaz ($a = 1$, $b = 5$)

$$\begin{aligned}
v^1(1,3)\big|_{x=1} &= -\frac{1}{6}\frac{P_3}{I_zE}\left[-1^3 + 3\cdot 1^2\cdot 6 - 3\cdot 1^2\cdot 1\right] = -\frac{14}{6I_zE}\cdot P_3\\
v^1(2,3)\big|_{x=3} &= -\frac{1}{6}\frac{P_3}{I_zE}\left[-1^3 + 3\cdot 1^2\cdot 6 - 3\cdot 1^2\cdot 3\right] = -\frac{8}{6I_zE}\cdot P_3\\
v^1(3,3)\big|_{x=5} &= -\frac{1}{6}\frac{P_3}{I_zE}\left[-1^3 + 3\cdot 1^2\cdot 6 - 3\cdot 1^2\cdot 5\right] = -\frac{2}{6I_zE}\cdot P_3
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Ezen mennyiségeket vektorokba, illetve mátrixba rendezve kapjuk

$$\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3 \end{bmatrix}^1 = \underbrace{-\frac{1}{6I_zE}\begin{bmatrix} 250 & 108 & 14\\ 108 & 54 & 8\\ 14 & 8 & 2 \end{bmatrix}^1}_{\underline{\underline{H}}^1(x,s)} \begin{bmatrix} P_1\\ P_2\\ P_3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{v}^1 = \underline{\underline{H}}^1\cdot\underline{p} + \underline{u}_0 \tag{5.4}$$

ahol u_0 a merevtestszerű elmozdulás.

Másik test (rugalmas ágyazás)

c ágyazási tényezővel

$$\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} c & 0 & 0\\ 0 & c & 0\\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^1 \begin{bmatrix} P_1\\ P_2\\ P_3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{v}^2 = \underline{\underline{H}}^2\cdot\underline{p} \tag{5.5}$$

Az eddigiek alapján, összeadva a két testre kapott mennyiségeket

$$\underline{d} = \underline{v}^2 - \underline{v}^1 + \underline{h} = \begin{bmatrix} (\frac{250}{6I_zE} + c) & \frac{108}{6I_zE} & \frac{14}{6I_zE} \\ \frac{108}{6I_zE} & (\frac{54}{6I_zE} + c) & \frac{8}{6I_zE} \\ \frac{14}{6I_zE} & \frac{8}{6I_zE} & (\frac{2}{6I_zE} + c) \end{bmatrix}^1 \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{5.6}$$

A megoldandó matematikai programozási feladat

$$\min \left\{ \underline{p}^T \cdot \underline{d} \,\middle|\, \underline{p}^T \geq 0,\ \underline{d} = \underline{\underline{H}} \cdot \underline{p} + \underline{h} - \underline{u}_0 \geq 0 \right\} \tag{5.7}$$

6. GYAKORLAT

Példák folyási feltételek alkalmazására I.

Példa 1.: Adott a $\underline{\underline{T}}$ feszültségi tenzor:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 60 & 20 & 50 \\ 20 & -40 & 0 \\ 50 & 0 & 130 \end{bmatrix} MPa.$$

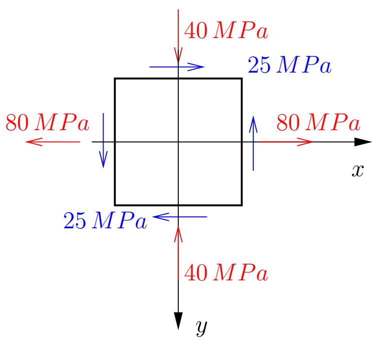
Kérdések:

a.) Írjuk fel az $\underline{\underline{S}}$ feszültségi deviátor mátrixát!

b.) Számítsuk ki a T_I, S_I és S_{II} skalár invariánsok értékét!

c.) Megfolyik-e az adott esetben az anyag, ha $\tau_F = 130\,MPa$? (Mises-féle folyási feltétel alapján!)

Példa 2.: Egy acéltartó egyik pontjának síkbeli feszültségi állapotát az ábrán látható feszültségek jellemzik.



6.1. ábra. Síkbeli feszültségi állapot

Kérdések: Mekkora a képlékeny állapot bekövetkezésének szerkezeti biztonsága

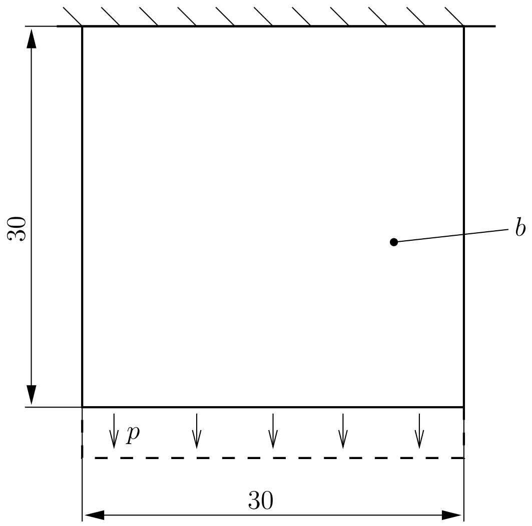
- Mises ($n_M =$?)
- Tresca ($n_T =$?)

szerint, ha $\sigma_F = 250\,MPa$?

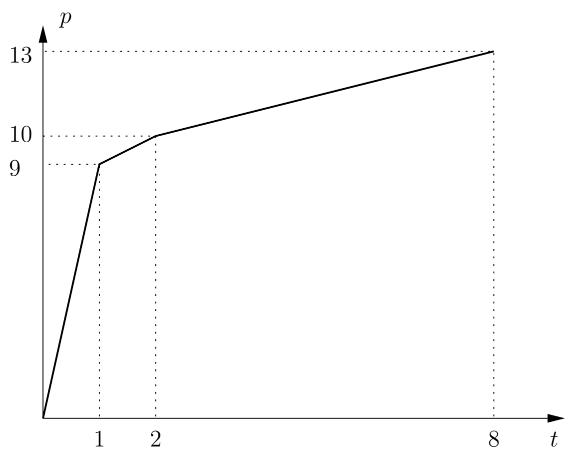
7. gyakorlat

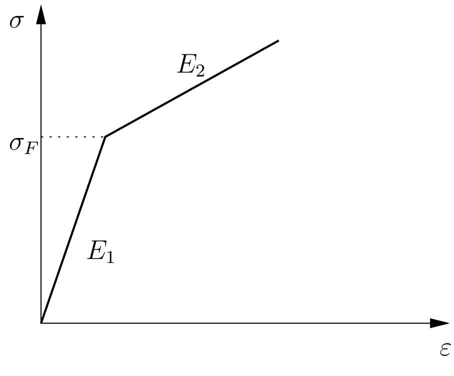
I-DEAS használata rugalmas-képlékeny feladat megoldására

Vizsgáljuk meg az ábrán vázolt befogott lemez rugalmas képlékeny alakváltozását!



7.1. ábra. A vizsgált lemez geometriája





7.2. ábra. Terhelés – idő diagramm; Feszültség – nyúlás diagramm

$$E_1 = 21000\,MPa \quad E_2 = 15000\,MPa \quad \sigma_F = 10\,MPa \quad \nu = 0.3 \quad b = 1\,mm$$

A feladat végrehajtásához használatos főbb parancsok:

Simulation → Master Modeller
`Options` → `Units` mm[Newton]
`Rectangle by ...` $A(2,1)$ `Grid, Snap`
`Modify Entity` $B(2,1)$ méretek
`Surface by Boundary` $A(5,1)$ felület def.
`Name Parts` $B(2,4)$
– Mentés `Ctrl-S`

Simulation → Meshing
`Create FE model` $B(4,2)$
`Materials` $A(5,1)$ anyagjellemzők
- *Nonlinear material*
- *E–ε, σ–ε* megadása

`Physical Property` $A(5,2)$
- *Plastic Yield & Hardening*
- *Thickness:* ($1\,mm$)

`Define Shell Mesh` $A(1,1)$ elemek: 10×10
– Mentés `Ctrl-S`

Simulation → Boundary Conditions
`Nonlinear Statics` $A(1,1)$
`Displacement Restraint` $A(4,2)$ KPF (*megfogás*)
`Forces` $A(2,1)$
- *Time function*
- *Graph* idő–erő diagramm

`Boundary Condition Set` $A(6,1)$
- *Nonlinear Statics*
- *Restraint Set, Load Set*

Simulation → Model Solution
`Solution Set...` $A(1,2)$
- *Material nonlinear*
- *Output selection: Plastic strain*
- *Subincrements*

– Mentés `Ctrl-S`
`Model Solution` $A(2,1)$
`Visualiser` $A(6,2)$