

Páczelt István Szabó Tamás Baksa Attila

A végeselem-módszer alapjai



Magyarország célba ér



VEM alapjai

Tartalom | Tárgymutató

 $\iff \triangleleft 2 \triangleright$

Készült a HEFOP 3.3.1-P.-2004-09-0102/1.0 pályázat támogatásával

Szerzők: Dr. Páczelt István Dr. Szabó Tamás Dr. Baksa Attila

Lektor: Dr. Nándori Frigyes

© Prof. Dr. Páczelt István, 2007

Tartalomjegyzék

1.	Beve	ezetés	7
	1.1.	A végeselem-módszer kialakulása	9
	1.2.	A tantárgy célja	13
	1.3.	Hivatkozások az 1. fejezethez	14
2.	Alar	pvető fogalmak	16
	2.1.	Néhány alapvető matematikai fogalom	16
		2.1.1. Vektor-, tenzorszámítás alapjai	16
		2.1.2. Mátrixalgebra alapjai	20
		2.1.3. Kezdeti peremérték feladat	23
		2.1.4. Integrálátalakítási összefüggések	25
		2.1.5. Funkcionál	26
		2.1.6. Variálás	27
		2.1.7. Peremértékfeladat gyenge megoldásának felépítése .	29
	2.2.	Rugalmasságtani összefoglaló	31
		2.2.1. Alapvető fogalmak [1,4,6,7]	31
		2.2.2. Variációs elvek	36
	2.3.	Potenciális energia minimum elv	48
	2.4.	Hivatkozások a 2. fejezethez	51
3.	A vé	égeselem-módszer elemmodelljének felépítése	53
	3.1.	Alapfogalmak	53
	3.2.	Egyváltozós feladatok	60
		3.2.1. Síkbeli rúdszerkezetek	60
	3.3.	Kompatibilis elmozdulási elemmodell	72
		3.3.1. Az elmozdulásmező közelítésének felépítése, csomó-	
		ponti elmozdulás vektor	72
		3.3.2. Alakváltozás-, feszültségi vektor, terhelési vektorok .	73
		3.3.3. Az elem potenciális energiája	74
	3.4.	Elemek illesztése	75
	3.5.	Kétváltozós feladatok	88
		3.5.1. Feladattípusok	88
		3.5.2. Síkbeli elemek	93
		3.5.3. Az elem mechanikai jellemzői	99
	3.6.	Lemezelemek felépítése	110

VEM alapjai Tartalom Tárgymutató		apjai TARTALOMJEGYZÉI
		$(T \acute{argymutat} \acute{o} \Leftrightarrow \triangleleft 4 D)$
		3.6.1. Geometriai és feszültségi hipotézis Reissner-Mindlin
		féle lemezmodellnél
		3.6.2. Felületi feszültségek és feszültségpárok (élerők és
		élnyomatékok)
		3.6.3. Reissner-Mindlin-féle lemez teljes potenciális energiája11
		3.6.4. Kirchhoff-féle hipotézis, technikai lemezelmélet 11
		3.6.5. Izoparametrikus elem
	3.7.	Térbeli elemek
	3.8.	Atmeneti elemek
	3.9.	Hivatkozások a 3. fejezethez
4.	Hib	aanalízis 12
	4.1.	Hivatkozások az 4. fejezethez
=	Mo	dellezáci kárdásek 12
5.	5 1	Alszerkezettechnika 12
	5.1.	Adott elmozdulások figyelembevétele
	5.2.	Szakadás figyelembevétele
	5.4	Ferdehatásvonalú támasz figyelembevétele
	5.5	Periódikus szerkezet 13
	5.6.	Hivatkozások az 5. fejezethez
6	Por	cástani foladatok vizsgálata 12
0.	Kez	Alapfogalmak 12
	6.2	Rubnov-Caliorkin félo variácás alv alkalmazása
	6.3	Vágosolomos modollozós
	6.4	Vegeselenies nouellezes
	65	Rezgések osztályozása 15
	6.6	Csillapítások 15
	0.0.	6.6.1 Csillapítóerők 15
		6.6.2. Hiszterézis
		6.6.3. Az anyag belső csillapításának figyelembevétele 16
	6.7.	Csillapítás nélküli rezgések
		6.7.1. Sajátrezgések, rezgésképek
		6.7.2. Fő koordináták
	6.8.	Sajátrezgések meghatározása
		6.8.1. Rayleigh- féle hányadosra alapozott iteráció 17
		6.8.2. Vektoriteráció
		6.8.3. Alsó (inverz) iteráció

VEM alapjai

TARTALOMJEGYZÉK

Tartalom | Tárgymutató

		6.8.4.	Felső iteráció	74
		6.8.5.	Alsó (inverz) iteráció eltolással	76
		6.8.6.	Sajátérték probléma megoldása Jacobi-féle módszerrel1	79
	6.9.	Csillap	vítás nélküli gerjesztett rezgő rendszerek 1	82
		6.9.1.	Harmonikusan gerjesztett rendszerek 1	82
		6.9.2.	Nem harmonikusan gerjesztett rendszerek vizsgálata	
			a sajátvektorok ismeretében	86
		6.9.3.	Csillapított gerjesztett rendszerek vizsgálata 1	88
		6.9.4.	Arányos csillapítás	89
	6.10.	A moz	gásegyenlet közvetlen integrálása 1	92
		6.10.1.	Differencia módszer	93
		6.10.2.	Newmark-féle módszer	96
		6.10.3.	Az eljárások stabilitása	96
	6.11.	Tömeg	mátrixok előállítása	99
		6.11.1.	Síkbeli tartó esete	.00
		6.11.2.	Néhány síkbeli elem tömegmátrixa 2	01
	6.12.	Intelli	gens szerkezetek	01
		6.12.1.	Rezgőrendszer vezérlése visszacsatolással 2	.03
		6.12.2.	Modálanalízis felhasználása	06
				.00
		6.12.3.	Piezoelektromos hatások figyelembevétele, az álla-	.00
		6.12.3.	Piezoelektromos hatások figyelembevétele, az álla- potegyenlet származtatása végeselem-módszer esetén 2	207
		6.12.3.6.12.4.	Piezoelektromos hatások figyelembevétele, az álla- potegyenlet származtatása végeselem-módszer esetén 2 Piezoelektromos hatások egyszerű esetekben 2	.00 207 209
	6.13.	6.12.3. 6.12.4. Hivatk	Piezoelektromos hatások figyelembevétele, az álla- potegyenlet származtatása végeselem-módszer esetén 2 Piezoelektromos hatások egyszerű esetekben 2 tozások az 6. fejezethez	207 209 211
7.	6.13. I-DH	6.12.3. 6.12.4. Hivatk	Piezoelektromos hatások figyelembevétele, az álla- potegyenlet származtatása végeselem-módszer esetén 2 Piezoelektromos hatások egyszerű esetekben 2 cozások az 6. fejezethez	207 209 211
7.	6.13. I-DH 7.1.	6.12.3. 6.12.4. Hivatk EAS pro A szof	Piezoelektromos hatások figyelembevétele, az állapotegyenlet származtatása végeselem-módszer esetén 2 Piezoelektromos hatások egyszerű esetekben 2 cozások az 6. fejezethez	207 209 211 213 214
7.	6.13. I-DH 7.1. 7.2.	6.12.3. 6.12.4. Hivatk EAS pro A szof Kapcse	Piezoelektromos hatások figyelembevétele, az állapotegyenlet származtatása végeselem-módszer esetén 2 Piezoelektromos hatások egyszerű esetekben 2 cozások az 6. fejezethez	207 209 211 213 214 214
7.	6.13. I-DH 7.1. 7.2.	6.12.3. 6.12.4. Hivatk EAS pro A szof Kapcse 7.2.1.	Piezoelektromos hatások figyelembevétele, az állapotegyenlet származtatása végeselem-módszer esetén 2 Piezoelektromos hatások egyszerű esetekben 2 cozások az 6. fejezethez	207 209 211 213 214 214 214
7.	6.13. I-DH 7.1. 7.2.	6.12.3. 6.12.4. Hivatk EAS pro A szof Kapcso 7.2.1. 7.2.2.	Piezoelektromos hatások figyelembevétele, az állapotegyenlet származtatása végeselem-módszer esetén 2 Piezoelektromos hatások egyszerű esetekben 2 cozások az 6. fejezethez	207 209 211 13 14 14 14 14
7.	6.13. I-DH 7.1. 7.2.	6.12.3. 6.12.4. Hivatk A szof Kapcso 7.2.1. 7.2.2. 7.2.3.	Piezoelektromos hatások figyelembevétele, az állapotegyenlet származtatása végeselem-módszer esetén 2 Piezoelektromos hatások egyszerű esetekben 2 cozások az 6. fejezethez	207 209 211 13 14 14 14 14 15 15
7.	6.13. I-DH 7.1. 7.2. 7.3.	6.12.3. 6.12.4. Hivatk EAS pro A szof Kapcso 7.2.1. 7.2.2. 7.2.3. Új rajz	Piezoelektromos hatások figyelembevétele, az állapotegyenlet származtatása végeselem-módszer esetén 2 Piezoelektromos hatások egyszerű esetekben 2 cozások az 6. fejezethez	207 209 211 13 14 14 14 14 15 15 16
7.	6.13. I-DH 7.1. 7.2. 7.3.	6.12.3. 6.12.4. Hivatk A szof Kapcso 7.2.1. 7.2.2. 7.2.3. Új rajz 7.3.1.	Piezoelektromos hatások figyelembevétele, az állapotegyenlet származtatása végeselem-módszer esetén 2 Piezoelektromos hatások egyszerű esetekben 2 cozások az 6. fejezethez	207 209 211 213 214 214 214 214 214 215 215 216 217
7.	6.13. I-DH 7.1. 7.2. 7.3.	6.12.3. 6.12.4. Hivatk EAS pro A szof Kapcso 7.2.1. 7.2.2. 7.2.3. Új rajz 7.3.1. 7.3.2.	Piezoelektromos hatások figyelembevétele, az álla- potegyenlet származtatása végeselem-módszer esetén 2 Piezoelektromos hatások egyszerű esetekben 2 tozások az 6. fejezethez	207 209 211 313 314 414 414 414 415 515 516 217
7.	6.13. I-DH 7.1. 7.2. 7.3.	6.12.3. 6.12.4. Hivatk EAS pro A szof Kapcso 7.2.1. 7.2.2. 7.2.3. Új rajz 7.3.1. 7.3.2. 7.3.3.	Piezoelektromos hatások figyelembevétele, az álla- potegyenlet származtatása végeselem-módszer esetén 2 Piezoelektromos hatások egyszerű esetekben 2 cozások az 6. fejezethez	207 209 211 13 14 14 14 15 15 15 16 217 217
7.	 6.13. I-DH 7.1. 7.2. 7.3. 7.4. 	6.12.3. 6.12.4. Hivatk EAS pro A szof Kapcso 7.2.1. 7.2.2. 7.2.3. Új rajz 7.3.1. 7.3.2. 7.3.3. Végeso	Piezoelektromos hatások figyelembevétele, az álla- potegyenlet származtatása végeselem-módszer esetén 2 Piezoelektromos hatások egyszerű esetekben 2 tozások az 6. fejezethez	207 209 211 213 214 214 214 215 215 217 219 221
7.	 6.13. I-DH 7.1. 7.2. 7.3. 7.4. 	6.12.3. 6.12.4. Hivatk EAS pro A szof Kapcso 7.2.1. 7.2.2. 7.2.3. Új rajz 7.3.1. 7.3.2. 7.3.3. Végeso 7.4.1.	Piezoelektromos hatások figyelembevétele, az álla- potegyenlet származtatása végeselem-módszer esetén 2 Piezoelektromos hatások egyszerű esetekben 2 sozások az 6. fejezethez	207 209 211 213 214 214 214 215 217 217 219 221 222
7.	 6.13. I-DH 7.1. 7.2. 7.3. 7.4. 	6.12.3. 6.12.4. Hivatk EAS pro A szof Kapcso 7.2.1. 7.2.2. 7.2.3. Új rajz 7.3.1. 7.3.2. 7.3.3. Végeso 7.4.1. 7.4.2.	Piezoelektromos hatások figyelembevétele, az álla- potegyenlet származtatása végeselem-módszer esetén 2 Piezoelektromos hatások egyszerű esetekben 2 cozások az 6. fejezethez	207 209 211 313 314 314 314 315 315 316 317 317 317 317 317 317 317 317 317 317

VEM alapjai Tartalom | Tárgymutató

TARTALOMJEGYZÉK

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 6 \triangleright$

	7.4.4.	Eredmények megjelenítése	223
7.5.	Egy eg	yyszerű példa	224
	7.5.1.	Modell előkészítése, a pre-processing fázis	225
	7.5.2.	A végeselemes modell megoldása	228
	7.5.3.	A számítási eredmények megtekintése	229
7.6.	Simula	ation alkalmazás	230
	7.6.1.	A Simulation alkalmazáshoz tartozó programrészek	230
7.7.	VEM e	egyedi alkalmazásokban	234
7.8.	A mod	lell megoldása	236
7.9.	Az ere	dmények értelmezése	237
7.10	. A súgo	ó rendszerről	239

1. Bevezetés

A jegyzet a műszaki alapképzés keretén belül a műszaki mechanika szilárdságtani és dinamikai (rezgéstani) problémáinak közelítő megoldásával, annak számítógépes megvalósításával kíván foglakozni, építve a Statika, Szilárdságtan és Dinamika című tantárgyakban tanult ismeretekre. A megoldás az ún. végeselem-módszer alkalmazásával történik.

A tananyag elsajátítása megköveteli a vektor és tenzorszámítás alapismereteit és a mátrix algebra biztos ismeretét.

Ennek megfelelően a jegyzet rövid összefoglalóra építve áttekintést ad a módszer általános kérdéseiről, majd sorra veszi a mérnöki gyakorlatban leginkább elterjedt végeselemes eljárásokat, egyváltozós (rúd) feladatokat, kétváltozós (síkbeli, forgásszimmetrikus, illetve hajlított lemez) feladatokat és térbeli feladatokat. A módszer tárgyalása során külön hangsúlyt kapnak az izoparametrikus elemcsalád alkalmazása, illetve a modellezés speciális problémái (alszerkezettechnika, ferde görgő, elmozdulás-mezőbeli szakadás stb.). Dinamikai feladatoknál az alapegyenlet származtatása, a csillapítás nélküli és csillapítással rendelkező szabad és gerjesztett rendszerek vizsgálatát követően a szabadrezgések sajátfrekvenciáinak hatékony megoldásai, a tetszőleges időbeli terhelés, a számítás stabilitásának problémái szerepelnek a programban, továbbá betekintünk az intelligens szerkezetek kérdéseibe is. Végül bemutatjuk az I-DEAS programrendszer végeselemes alkalmazását néhány alapfeladat megoldásán keresztül.

Az utóbbi évtizedek egyik leglátványosabban terjedő, nagy hatékonyságú számítástechnikai módszere az ún. végeselem-módszer. A mérnöki tervező munkában hatékonyságára való tekintettel kitüntetett szerepet vívott ki. Természetes tehát, hogy a mérnöki pályára való felkészítésében is kellő súllyal kell, hogy szerepeljen.

A számítástechnikában beálló gyors fejlődés, a számítógépek kapacitásának, sebességének nagymértékű növekedése, a grafikai műveletek megszervezhetősége, az ember-gép kapcsolatának humanizálódása, a fizikai jelenségek korábbi években még nem látott bonyolultságú modellezésére, gyors kiszámításokra, az eredmények sokoldalú analizálására adnak módot.

Ismeretes, hogy egy és ugyanazon valóságos szerkezethez – elhanyagolva annak lényegtelen jegyeit – különféle számítási modelleket rendelhetünk hozzá annak függvényében, hogy a valóságos szerkezetben lejátszódó folyamatok melyik oldala érdekes számunkra, azt milyen pontossággal szeretnénk elérni. Talán nem érdektelen hangsúlyozni, hogy ha egy adott valóságos szerkezethez többféle számítási modell is rendelhető, akkor megfordítva, egyazon számítási modellhez nemcsak egy valóságos szerkezet tartozhat. Vagyis bizonyos modelleket vizsgálva, a valóságos szerkezetek egész nagy osztályának megoldását kaphatjuk meg. Itt elegendő utalni a rúd-, síkbeli-, lemez-, héj-modellekre, amelyek számos gyakorlati kérdés kellő pontosságú megválaszolására adnak módot.

A számítási modell megalkotását két, ellentétes kívánalom teljesítése befolyásolja:

- a modell minél jobban helyettesítse a valóságos testet és annak körülményeit;
- 2. a mechanikai jellemzők lehetőleg kevés időráfordítással jó közelítéssel meghatározhatók legyenek.

A modellezés során nagyon sok mindent kell mérlegelni: a környezeti hatásokat (a terhelés térbeli megoszlását, időbeli lefolyását, a hőhatást, az elektromágneses hatást), a testek kölcsönhatását (az érintkezést, a szilárdtest és folyadék által alkotott rendszerek együttes vizsgálatának lehetőségét), az anyag szerkezetét, (anyagegyenletet: rugalmas, nem-rugalmas, homogénitást, izotrópitást), a kialakuló alakváltozást, elmozdulást (kicsiny, nagy), a geometriai alakot, (helyettesíthető-e a térbeli test rúddal, lemezzel stb.), a megfogásokat stb.

A vizsgálandó problémához a modellezés során mechanikai modellt rendelünk, ami matematikai formában kezdeti peremérték feladatként jelenik meg. Az eredeti probléma bonyolultságától függően előfordulhat, hogy a matematikai megformálás egyszerűsítésére kerül sor. Ekkor a valóság helyett egy idealizált - már hibákat hordozó modellt állítunk elő. A matematikai kezdeti-peremértékfeladat számítógépes megoldása, további, ún. számítási hibát okoz, amit röviden diszkretizálási hibának szokás nevezni.

A számítógéppel segített mérnöki tevékenység (Computer Aided Engeneering: CAE) fejlődését figyelve a következő szakaszok különböztethetők meg.

Amíg

- 1965-75 között a számítógépes géprajzi szerkesztés és a végeselem módszerre alapozott számítások különállóan folytak, illetve
- 1975-85 között a lineáris szerkezetanalízisre alkalmas végeselemprogrammal integrált tervező rendszerek jöttek létre,

addig a legutóbbi évekre a nemlineáris végeselemmel integrált rendszerek létrehozása, a gyártási folyamatok szimulálása, prototípusok szimulációs tesztelése, különféle szakértői rendszerek létrehozása a jellemző. A vektor és a több processzoros számítógépek megjelenése pedig új fejezetet nyit a nemlineáris feladatok számítógépes vizsgálatában.

A tervezés folyamatában a mechanika szerepe nem hanyagolható el. Általában a tervezendő objektummal szemben szilárdsági, élettartami, illetve üzemeltetési követelmények fogalmazódnak meg. A gépészeti modellt két fő oldalról vizsgálják. Egyik oldal a funkcionális vizsgálathoz kapcsolódó kinematikai és dinamikai analízis, a másik erőtani oldalról elemzi a testben kialakuló feszültségállapotot. A funkcionálás vizsgálatnál megjelenő üzemeltetési paraméterek nagymértékben befolyásolják a gép pontosságát, kopását, a hajtás veszteségeit, a rezgésekből keletkező káros zajokat. Nyilvánvalóan a feszültségállapot is befolyásolással bír az előbbiekre, ugyanakkor élettartami kritériumok alapján feleletet lehet adni a különféle kifáradási tartalékokra, illetve a szilárdsági kritériumok szerint a tönkremenetelre. Az elvégzett kísérletek, a korábbi üzemeltetési tapasztalatok, a működési hibák elemzése, a számítási-szimulációs-eredmények összevetése világossá teszik a számítási kritériumok és az egész modell megalapozottságát, illetve a pontosítások szükségességét. Ez utóbbi esetben újabb számításokkal élve juthatunk el a kívánt pontosságú modellhez. Mindebből következik, hogy hű modell felállítása csak sok-sok tapasztalat alapján lehetséges.

A végeselem-módszer alapjai, mint tantárgy ismeretanyaga az előzőekben leírt sokrétű mérnöki modellezési folyamatban előállított kész mechanikai modell elmozdulási-, feszültségállapotának és dinamikai viselkedésének meghatározásával foglalkozik. Tehát csak kész, bizonyos feladatosztályokra alkalmas általános érvényű modellek vizsgálata szerepel a tananyagban, mellőzve a konkrét mérnöki szerkezetek, gépek és technológiai folyamatok teljes körű vizsgálatát.

1.1. A végeselem-módszer kialakulása

A mérnöki gyakorlatban jelentkező szerkezetek nagy része rugalmas anyagból készül, s a terhelés bizonyos intervallumában lineárisan viselkedik. A klasszikus rugalmasságtan számos módszert dolgozott ki a homogén, izotróp anyagok viselkedésének számítására. A rugalmas kontinuum (a test térfogata folytonosan anyaggal kitöltött) viselkedését leíró parciális differenciál-egyenletrendszer megoldását a vizsgált testekhez tartozó peremfeltételek különbözősége nagymértékben megnehezíti. Nem sikerült –

 $\iff \ \ \, \triangleleft \ \, 10 \ \, \triangleright$

és nem is sikerülhetett – általános, bármilyen feladat megoldására alkalmas, pontos (egzakt) megoldást adó módszert kidolgozni. Sok esetben a mérnöki gyakorlat is megelégedett a közelítő megoldásokkal. A századunk elején kidolgozott variációs elvek (*Rayleigh, Ritz, Timoshenko, Bubnov-Galjorkin*), majd a későbbiekben kifejlesztett más (*Kantorovics, Reissner stb.*) elvek már lehetővé tették az olyan feladatok közelítő megoldását is - a mérnöki gyakorlatot kielégítő pontossággal – amelyek korábban nem voltak elérhetők, megoldhatók.

A digitális számítógépek megjelenése (1946 Los Alamos, *Neumann János*; 1949 JONIAC; 1951 IBM; 1960-as évek időosztásos gépei), majd az 1964-ben megszülető BASIC programozási nyelv, stb. gyökeresen megváltoztatták és kiszélesítették a feladatok megoldhatóságának körét.

A módszer kialakulását a Courant [1] által a csavarási feladat közelítő megoldásánál használatos szakaszonkénti (háromszögletű tartományok feletti) csavarási feszültségfüggvény approximációja jelentette 1943-ban. 1956-ban Turner és társai [2] síkrugalmasságtani feladatot oldották meg az elmozdulásmező négyszögletű altartományok feletti közelítésével, a hagyományos Ritz-féle módszer lokális közelítő függvényeken keresztüli al-kalmazásával. Clough 1960-ban ennek az eljárásnak a végeselem-módszer nevet adta.

Az elmúlt ötven évben a módszer látványos fejlődésének vagyunk szemtanúi. A 60-as évekre a rugalmasságtani feladatainak megoldását szolgáló elemcsaládok kifejlesztése, sokoldalú modellezési lehetőséget nyújtó végeselem-programok (ASKA, NASTRAN, SAP) megjelenése a jellemző [3]. A 70-es években elkezdődik a számítási hibák analízisének kutatása Babuska cikkének megjelenésével. Elindul 1973-ben Szabó Barna javaslatára, az ún. p-verziójú számítás a hozzátartozó elemek kidolgozásával [4]. Sorra kerülnek a nemlineáris feladatok vizsgálatára alkalmas módszerek kidolgozása, számítógépi programok alkalmazásba vétele (NONSAP, ABAQUS, ADINA, ANSYS, COSMOS/M, FEAP, MARC, SYSTUS stb.). Megjelennek a p-verziójú elemeket hordozó programok, PROBE, StressCheck, RASNA. A CAD rendszerekkel összekapcsolt végeselemes rendszerek alakulnak ki az 1980-as években, amelyeknek a fejlődése mind a mai napig tart (CA-TIA, I-DEAS, MSC/NASTRAN, Patran, Pro/Engineer, SolidWorks, stb.). A kapcsolt feladatok (szilárdságtani, hőtani, áramlástani, villamosságtani stb.) megoldására szolgáló programok nyernek kidolgozást 1990-es évek óta (FLUENT, ProCast, SysWeld, DEFORM stb.). Számos könyv jelenik meg a végeselem-módszer elméleti és gyakorlati kérdéseinek vizsgálatával kapcsolatban, pl. [5-10].

A széleskörű kutatások eredményeképpen a végeselem-módszer már ma is hatékony eszközként áll a mérnökök rendelkezésére, amennyiben mechanikai ismereteire alapozva képesek az eredményeket helyesen értékelni. A közeljövőben pedig az adaptációs rendszerek kifejlesztésével olyan sokrétű rendszerek jönnek majd létre, amelyekkel a mechanikai modell megalkotása után, a számítógépi program felügyelete mellett, megbízhatónak tekinthető eredményeket lehet nyerni. Ilyen rendszerekkel már találkozhatunk a gyakorlati életben.

Az 1.1. ábrán a fizikai jelenségből kiindulva a modellezésnél tett anyagra, terhelésre, alakra és megfogásra tett megfontolások alapján a külső hatásokból származó alakváltozások mértékén keresztül jutunk el a mechanikai modellhez, ami általában differenciálegyenlet-egyenlőtlenégi vagy integrálegyenlet-egyenlőtlenségi rendszer alakjában fogalmazható meg peremfeltételek, továbbá időben változó esetben, kezdeti feltételek mellett. Az anyagi és alakváltozási nemlineáris viselkedés esetén a feladat már nemlineáris, aminek megoldása jelentős mértékben megnehezül. A mechanikai-matematikai modell exakt (pontos) megoldása általában nem ismert. Ekkor közelítő úton kell megoldani. Ezen megoldások egy része közvetlenül a differenciálegyenlet (rendszer) felett munkálkodik (differencia módszer, kollokációs módszer ...,) míg másik részük azt kikerülve energetikai módszerekre, variációs elvekre építi fel azt.

Mindegyik esetben a keresendő mezőket, azok deriváltjait véges számú függvények lineáris kombinációjával, paramétereken, vagy az ismeretlen mezők diszkrét pontbeli értékein keresztül közelítjük. A diszkretizálás után statikai feladatoknál lineáris/nemlineáris algebrai egyenletrendszert nyerünk. Abban az esetben, ha a keresett mezőt (mezőket) végesszámú altartomány (végeselem) felett közelítjük általunk önkényesen választott approximációs függvények segítségével, továbbá a függvények együtthatóinak egy részét az elemek határoló felületén elhelyezkedő csomópontokbeli függvény vagy azok deriváltjai vagy a határoló felülethez kötött paraméterek révén fejezzük ki, és így az altartományok feletti mezők összeillesztésével állítjuk elő a teljes tartományra vonatkozó mezőt (mezőket), továbbá a mezőket leíró paramétereket (melyeknek egy része az elem csomópontjaihoz kötött) valamilyen hibaelvből, variációs elvből származó algebrai egyenlet vagy egyenlőtlenségi rendszer révén határozzuk meg végeselem-módszernek (VEM) nevezzük.

Ilymódon az 1.1. ábrán vázolt valóságos szerkezethez, technológiához, fizikai jelenséghez rendelt mechanikai modell közelítő megoldásaihoz kapcsolódó módszerek közül a *-gal jelöltek lokális approximáció alkalmazása

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 1\overline{2 \triangleright}$

esetén különböző hibaelvekre alapozott végeselemes eljárásnak felelnek meg.



1.1. ábra. Szerkezet, mechanikai modell, közelítő megoldási eljárások

A lokális közelítést választva lehetőség kínálkozik az elemek méretének, az elemenbelüli közelítő polinom p fokszámának, illetve mindkettőnek a megváltoztatására. Az elemek méretének lefixált p melletti megváltoztatása az ún. h-verziójú számítást eredményezi. Változatlan elemméretek mellett a p növelése, az ún. p-verziójú számításhoz vezet. Amikor mindkettőt változtatjuk (feszültségkoncentrációs helyeken kis elemek nagy p mellett), akkor a hp-verziójú számításról beszélünk. A fentiek alkalmazása különböző sebességű "konvergenciájú" megoldást eredményez. A megoldás konvergenciája alatt azt értjük, hogy a h csökkentésével, vagy a p növelésével illetve a kettő kombinációjával kapott eredmények valamilyen határértékhez tartoznak, és további háló és fokszám változtatással az eredmények gyakorlatilag már változatlanok

1.2. A tantárgy célja

A végeselem-módszer oktatás célja a műszaki mechanika alaptantárgyaira és a numerikus módszerek ismeretére alapozva, illetve építve olyan ismeret elsajátítása, amely az érdeklődőt képessé teszi

- 1. a módszer mechanikai alapjainak elsajátítására,
- 2. különféle elemek előállítására,
- 3. a modellezési kérdések behatóbb elemzésére,
- 4. a nagyméretű rendszerek numerikus kezelésére,
- 5. a kapott eredmények szakszerű értékelése,
- 6. végeselem-programrendszerek használatára.

A felsorolt – valószínűleg nem is teljes – célok, képességfejlesztések csak komoly, elmélyült tanulással, végeselem-programrendszerek használatával érhetők el. Szükségesek-e ezen ismeretek egy műszaki (gépész, mechatronikai, energetikai stb.) mérnök számára? A válasz egyértelműen igen. Tapasztalatok mondatják, hogy az emberiség mai kultúráját, életszínvonalát nem érhette volna el a mérnökök sokrétű alkotómunkája nélkül. Tevékenységükben a rutin munka automatizálódik, a gyakran ismétlődő számításokat, a nagy tömegű információ- és adatkezelést, a rutinszerű elemzéseket átveszik a számítógépek. Mindemellett, ugyanakkor erősödik a mérnöki munka, alkotó, kutató, fejlesztő jellege. Új, modern gépek, eszközök létrehozásához, a mechanika tudománya jelentősen hozzá tud járulni. A gyártási folyamatok szimulálása, optimális paraméterek megválasztása elképzelhetetlen a mechanika aktív művelése nélkül. Minthogy a végeselem-módszer ezideig soha nem látott bonyolultságú modellek számítástechnikai kezelésére ad módot, és az elérhető programok egyre kényelmesebben kezelhetők, a hallgatók valóságos méretű, bonyolultságú feladatok megoldásával is találkozhatnak a képzés folyamán a tervezői, technológiai jellegű tantárgyak ismeretanyagának elsajátításakor. A feladatok magas színtű megoldásánál alkalmuk lesz alkotó módon felhasználni az ezen tantárgy keretén belül tanultakat.

A javasolt tananyag a Miskolci Egyetem Mechanikai Tanszékének több mint három évtizedes saját tapasztalatára, nemzetközi, kiemelkedő tudósok által írt könyvek ismeretanyagára épít. A végeselem-módszer fontosságát aláhúzzák azon nemzetközi konferenciák is, amelyek kijelölik az elméleti és gyakorlati problémák megoldására irányuló kutatásokat, továbbá tekintettel kell lenni azon szakemberek növekvő számára is, akik különféle vállalkozásokban végeselemes modellezést, számításokat, analízist végeznek ipari üzemek, vállalatok megbízásából, vagyis kialakult egy új szakma, a végeselemes számítások szakmája. A végeselem-módszer tantárgy ezen igény kielégítését is szolgálja.

A szerzők a következő anyagrészeket állították össze: Páczelt I. (1., 2., 3., 5. fejezetek), Páczelt I., Szabó T. (4., 6. fejezetek), Baksa A. (7. fejezet).

Miskolc, 2007. február

A jegyzet tanulmányozásához sikeres, elmélyült munkát kívánnak a

A szerzők

1.3. Hivatkozások az 1. fejezethez

- 1. *Courant, R.:* Variational methods for the solution of problem of equilibrium and vibrations, Bull. Am. Math. Soc., 49, **1943**, p. 1-23.
- Turner, M. J. Clough, R. J. Martin, H. C. Topp, L. J.: Stiffness and deflection analysis of complex structures, J. Aeronaut. Sci., 23, No 9, 1956, p. 805-823.
- 3. *Zienkievicz, O. C. Cheung, Y. K.*: The finite element method in structural and continuum mechanics, McGraw-Hill Book Company, London-New York, **1970**.
- 4. *Szabó, B. Babuska, I.:* Finite element analysis, John Wiley & Sons , Inc., New York, **1991.**
- 5. *Bathe, K. J.*: Finite element procedures in engineering analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, **1982.**
- 6. *Allaire, P. E.*: Basics of the finite element method: Solid mechanics, Heat transfer and Fluid mechanics, Dubuque, Iowa: W. C. Brown, **1985**.
- 7. *Hughes, T. J. R.*: The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, **1987**.
- 8. Zienkievicz, O. C. Taylor, R. L.: The finite element method, Vol 1, Basic formulation and linear problems, McGraw-Hill Book Company, New York, **1989** Vol 2. Solid and fluid mechanics, Dynamics and non-linearity, McGraw-Hill Book Company, New York, **1991.**

VEM alapjai	Hivatkozások az 1. fejezethez
Tartalom Tárgymutató	$\Leftarrow \ \Rightarrow \ \triangleleft \ 15 \ \triangleright$

- 9. *Reddy, J.N.*: An introduction to the finite element method, McGraw-Hill, Inc. New York, London **1993.**
- 10. *Páczelt, I.:* Végeselem-módszer a mérnöki gyakorlatban, I. kötet, Miskolci Egyetemi Kiadó, **1999.**

2. Alapvető fogalmak

A tantárgy anyagának könnyebb elsajátítása érdekében előjáróban összefoglaljuk a leglényegesebb vektor-, tenzorszámítási [1], mátrixalgebrai [2] és peremérték feladatokkal [3] kapcsolatos ismereteket. Ezek az ismeretek bővebb kifejtését a korábbi tantárgyak anyagai tartalmazták, ill. számos könyvből azok elmélyíthetők. Érdemes itt is kiemelni, hogy a vektor és tenzor jellegű mennyiségek kétféle jelöléssel is előfordulnak. Ennek megfelelően jelöléskor a vektor vastagon szedett dőlt kisbetű (a, b), míg a tenzor vastagon szedett dőlt nagybetű (A, T). Ezen mennyiségeknek megfelelő mátrixos jelölésben vastagon szedett álló kis, illetve nagy betű szerepel (a, b, A, T).

2.1. Néhány alapvető matematikai fogalom

2.1.1. Vektor-, tenzorszámítás alapjai

Vektor

Vektor alatt egy hosszal és irányítással rendelkező objektumot értünk. descartesi derékszögű koordinátarendszert választva, a kérdéses vektort *a*val jelölve, a koordinátarendszer tengelyeinek irányát kijelölő jobbsodrású bázisvektorokat jelölje rendre e_x , e_y , e_z . Ekkor a kérdéses vektor

$$\boldsymbol{a} = a_x \, \boldsymbol{e}_x + a_y \, \boldsymbol{e}_y + a_z \, \boldsymbol{e}_z \tag{2.1}$$

ahol a_x, a_y, a_z - skalár koordináták (az x, y, z tengelyekre eső irányított vetületek).

A vektor hossza egyszerű geometriai megfontolásból számolható, azaz

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{2.2}$$

Egységvektor alatt egységnyi hosszúságú vektort értünk. Az
 airányába mutató egységvektor

$$\boldsymbol{e}_a = \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} \tag{2.3}$$

Két vektor között többfajta szorzás értelmezett. Egyik a skaláris szorzás

$$s = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \cos \alpha \tag{2.4}$$

ahol α a szóban forgó két vektor közötti szög. Ha képezzük a következő skaláris szorzatot, akkor $\cos\alpha$ közvetlenül kiszámolható

$$s_a = \boldsymbol{e}_a \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{e}_a\| \|\boldsymbol{b}\| \cos \alpha = \|\boldsymbol{b}\| \cos \alpha$$

ahonnan

$$\cos \alpha = s_a / \|\boldsymbol{b}\| \tag{2.5}$$

Mivel a választott koordinátarendszerben a koordinátatengelyek egymásra merőlegesek, így áll:

$$\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x = 1, \quad (x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z), \quad \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = 0, \quad (xy \Leftrightarrow zy \Leftrightarrow xz)$$
 (2.6)

Az előzőek révén a (2.4) alatt definiált skaláris szorzás

$$s = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_x \, \boldsymbol{e}_x + a_y \, \boldsymbol{e}_y + a_z \, \boldsymbol{e}_z) \cdot (b_x \, \boldsymbol{e}_x + b_y \, \boldsymbol{e}_y + b_z \, \boldsymbol{e}_z) =$$

= $a_x \, b_x + a_y \, b_y + a_z \, b_z$ (2.7)

A másik szorzás a *vektoriális szorzás*, ami a két vektor síkjára merőleges vektort szolgáltat, a kapott vektor hossza a két vektor által kijelölt paralelogramma területét adja:

$$c = a \times b \Rightarrow ||c|| = ||a|| ||b|| \sin \alpha$$
 (2.8)

iránya pedig olyan, hogy *a*, *b* és *c* jobbsodrású.

A bázisvektorokra alkalmazva (jobbsodrású koordinátarendszerben vagyunk!) nyerjük, hogy

$$\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y, \quad \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x$$
 (2.9)

de a szorzás sorrendjét felcserélve az eredmény a fentiek negatívja, tehát

$$-\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_x, \quad -\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_y, \quad -\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z$$
 (2.10)

Három vektornál az ún. vegyes szorzat

$$V = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$$
(2.11)

a három vektor által kijelölt térrész térfogatát adja – előjeltől eltekintve–, míg a kétszeres vektoriális szorzásnál áll:

$$\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) \ \boldsymbol{c} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) \ \boldsymbol{a}$$
(2.12)

VEM alapjai	Néhány alapvető matematikai fogalom
Tartalom Tárgymutató	$\ \ \leftarrow \ \ \Rightarrow \ \ \triangleleft 18 \ \ \triangleright$

Amennyiben egy vektor a helynek a függvénye értelmezzük a deriváltakat.

Pl. az x szerinti derivált

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial x} \boldsymbol{e}_x + \frac{\partial a_y}{\partial x} \boldsymbol{e}_y + \frac{\partial a_z}{\partial x} \boldsymbol{e}_z.$$

Későbbiekben, számtalan esetben használjuk a Hamilton-féle differenciál operátort, amely descartesi koordinátarendszerben

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{e}_z$$
(2.13)

alakot nyeri, illetve a hozzátartozó Laplace-féle operátor

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial z^2}$$

Tenzor

Tenzor alatt egy homogén vektor-vektor függvény kapcsolatban megjelenő objektumot értünk, nevezetesen a c vektorhoz a B jelű objektum, azaz a tenzor segítségével az a vektor van hozzárendelve

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{c} \tag{2.14}$$

A ${\pmb B}$ tenzor (3 × 3)-as számsokasággal is jellemezhető, vagyis a tenzort mátrixosan megjelenítve

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} & b_{xz} \\ b_{yx} & b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zx} & b_{zy} & b_{zz} \end{bmatrix}$$
(2.15)

illetve ún. három diád révén állítható elő.

Általában egy diád alatt

$$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}$$
 (2.16)

jelű kifejezést értjük, amelyet a skaláris szorzásra vonatkozó tulajdonságaival értelmezünk.

Skaláris szorzásnál

$$\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \left(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \right), \quad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{c} \cdot \left(\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} \right) = \left(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} \right) \boldsymbol{b} \tag{2.17}$$

eredményt kapjuk, ami azt jelenti, hogy a skalárisan azt a két vektort kell összeszorozni, amelyek közel állnak egymáshoz, azaz, amelyek között a skaláris szorzás jele és a zárójel van.

A B tenzor diadikus előállítása a következő eredményt adja

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} & b_{xz} \\ b_{yx} & b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zx} & b_{zy} & b_{zz} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_x \circ \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{b}_y \circ \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{b}_z \circ \boldsymbol{e}_z$$
(2.18)

amiből $b_x = B \cdot e_x = b_{xx} e_x + b_{yx} e_y + b_{zx} e_z$ stb. vagyis a tenzor oszlopaiban a bázisvektorokhoz tartozó vektorok találhatók.

Legyen *A* és *B* az (x,y,z) koordinátarendszerben adott 3 sorú és 3 oszlopú, azaz (3,3)-as tenzor:

$$A = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} & b_{xz} \\ b_{yx} & b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zx} & b_{zy} & b_{zz} \end{bmatrix}$$

A két tenzor skaláris szorzása az alábbi módon értelmezett:

$$A \cdot B = (a_x \circ e_x + a_y \circ e_y + a_z \circ e_z) \cdot (b_x \circ e_x + b_y \circ e_y + b_z \circ e_z) = \begin{bmatrix} a_{xx}b_{xx} + a_{xy}b_{yx} + a_{xz}b_{zx} & a_{xx}b_{xy} + a_{xy}b_{yy} + a_{xz}b_{zy} & a_{xx}b_{xz} + a_{xy}b_{yz} + a_{xz}b_{zz} \\ a_{yx}b_{xx} + a_{yy}b_{yx} + a_{yz}b_{zx} & a_{yx}b_{xy} + a_{yy}b_{yy} + a_{yz}b_{zy} & a_{yx}b_{xz} + a_{yy}b_{yz} + a_{yz}b_{zz} \\ a_{zx}b_{xx} + a_{zy}b_{yx} + a_{zz}b_{zx} & a_{zx}b_{xy} + a_{zy}b_{yy} + a_{zz}b_{zy} & a_{zx}b_{xz} + a_{zy}b_{yz} + a_{zz}b_{zz} \end{bmatrix}$$

$$(2.19)$$

azaz az egyes elemek a megfelelő sorok és oszlopok szorzat összegeiből állnak elő.

A kétszeres skaláris szorzás két diád között az alábbit adja

$$c = (\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}) \cdot \cdot (\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{h}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{g}) (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{h})$$
(2.20)

és ily módon

$$A \cdot B = (\boldsymbol{a}_x \circ \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{a}_y \circ \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{a}_z \circ \boldsymbol{e}_z) \cdot (\boldsymbol{b}_x \circ \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{b}_y \circ \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{b}_z \circ \boldsymbol{e}_z)$$

= $\boldsymbol{a}_x \cdot \boldsymbol{b}_x + \boldsymbol{a}_y \cdot \boldsymbol{b}_y + \boldsymbol{a}_z \cdot \boldsymbol{b}_z = a_{xx} \cdot b_{xx} + a_{xy} \cdot b_{xy} + \ldots + a_{zz} \cdot b_{zz}$
(2.21)

A tenzor mátrixának főátlóra való tükrözése (oszlopok sorok cseréje) a transzponálást jelent, ezt ^{*T*} fogja jelölni. Ha $A = A^T$ akkor a tenzor szimmetrikus, ha pedig $B = -B^T$ akkor a tenzor aszimmetrikus.

Ha $A = A^T$ és $B = c \circ d$, azaz a c és d vektorok általános (diadikus) szorzata, azaz

$$\boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{cccc} c_x d_x & c_x d_y & c_x d_z \\ c_y d_x & . & . \\ c_z d_x & . & . \end{array} \right]$$

akkor $A \cdot B = A \cdot (c \circ d) = c \cdot A \cdot d.$

VEM alapjai	Néhány alapvető matematikai fogalom
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 20 \triangleright$

Amennyiben

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} = \lambda \boldsymbol{n} \tag{2.22}$$

akkor az
 negységvektor által kijelölt irányt főiránynak é
s λ értékét sajátértéknek nevezzük.

A (2.22) sajátérték problémát jelöl ki. Ilyennel találkoztunk szilárdságtanban a T feszültségi tenzor vonatkozásában a σ főfeszültségek meghatározásánál.

2.1.2. Mátrixalgebra alapjai

Sorfolytonosan elrendezett számok (elemek) sokasága egy vektort jelöl ki, pl.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$
(2.23)

ahol \boldsymbol{n} az elemek száma.

A vektor transzponáltja fekvő alakban helyezkedik el

$$\mathbf{a}^T = [a_1 \ a_2 \dots a_i \dots a_n] \tag{2.24}$$

Két vektor skaláris szorzata

$$s = \underbrace{\mathbf{a}^T}_{(1,n)} \underbrace{\mathbf{b}}_{(n,1)}$$
(2.25)

míg az alábbi szorzás (diadikus)

$$\underbrace{\mathbf{C}}_{(n,m)} = \underbrace{\mathbf{b}}_{(n,1)} \underbrace{\mathbf{a}^T}_{(1,m)}$$
(2.26)

egy (n,m) méretű (n sorral, m oszloppal rendelkező) mátrixot eredményez, azaz egy téglalap alakzatba rendezett elemek halmazát szolgáltatja.

Két vektor normált, ha

$$\mathbf{a}_1^T \ \mathbf{a}_1 = 1, \quad \mathbf{a}_2^T \ \mathbf{a}_2 = 1$$
 (2.27)

Néhány alapvető matematikai fogalom

Tartalom | Tárgymutató

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 21 \triangleright$

és ortonormáltnak mondjuk, ha

$$\mathbf{a}_1^T \ \mathbf{a}_2 = 0 \tag{2.28}$$

Két mátrix (skaláris) szorzása

$$\underbrace{\mathbf{C}}_{(m,p)} = \underbrace{\mathbf{A}}_{(m,n)} \underbrace{\mathbf{B}}_{(n,p)}$$
(2.29)

csak akkor végezhető el, ha a szorzásban részvevő első mátrix oszlopainak száma (n), megegyezik a második mátrix sorainak számával.

A mátrix tetszőleges elemét szokás alsó – sor, oszlop – indexeinek feltűntetésével megadni

$$\underbrace{\mathbf{C}}_{(m,p)} = [C_{i\,j}]_{(m,p)} \tag{2.30}$$

ilymódon C_{ij} az *i*-dik sor *j*-dik elemét jelöli.

Ekkor a szorzás egyszerűen leírható:

$$C_{i\,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} \tag{2.31}$$

A transzponálás a mátrix sorainak, oszlopainak felcserélésével a következőt adja

$$\underbrace{\mathbf{C}}_{(m,p)} = [C_{ij}]_{(m,p)}, \quad \underbrace{\mathbf{C}}_{(p,m)}^T = [C_{ji}]_{(p,m)}$$
(2.32)

A kvadratikus mátrix sorainak és oszlopainak száma megegyezik (n = m). A mátrix szimmetrikus, ha az transzponáltjával megegyezik: $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$.

A diagonál mátrix csak a főátlóban rendelkezik zérustól különböző elemekkel. Az egyszerűbb jelölés érdekében $\mathbf{B} = \langle B_{11} \ B_{22} \ \dots B_{ii} \ \dots B_{nn} \rangle$ jelölést fogjuk a továbbiakban használni.

Szorzat transzponálására vonatkozóan áll az alábbi egyenlőség

$$\underbrace{\mathbf{C}}_{(m,p)} = \underbrace{\mathbf{A}}_{(m,n)} \underbrace{\mathbf{B}}_{(n,p)}, \quad \underbrace{\mathbf{C}}_{(p,m)}^T = \underbrace{\mathbf{B}}_{(p,n)}^T \underbrace{\mathbf{A}}_{(p,m)}^T$$
(2.33)

Csak azonos méretű mátrixokat lehet összeadni és kivonni.

$$\underbrace{\mathbf{C}}_{(m,n)} = \underbrace{\mathbf{A}}_{(m,n)} \pm \underbrace{\mathbf{B}}_{(m,n)} \Rightarrow [C_{ij}] = [A_{ij} \pm B_{ij}]$$
(2.34)

Egy skalár számmal történő szorzásnál a mátrix minden eleme szorzódik,

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{B} \Rightarrow [C_{ij}] = [\alpha B_{ij}] \tag{2.35}$$

Ortogonálisnak nevezzük az A mátrixot, ha fennáll

$$\mathbf{A} \ \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \ \mathbf{A} = \mathbf{E} \tag{2.36}$$

összefüggés, ahol **E** az egységmátrixot $\mathbf{E} = \langle 1 \ 1 \dots 1 \rangle$ jelöli. Ebből következik, hogy a mátrix transzponáltja megegyezik inverzével:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$$

Szorzat inverzére a mátrixok invertálhatósága esetén áll az alábbi egyenlőség

$$\underbrace{\mathbf{C}}_{(m,m)} = \left(\underbrace{\mathbf{A}}_{(m,m)} \underbrace{\mathbf{B}}_{(m,m)}\right)^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$$
(2.37)

A mátrix rangja alatt a lineárisan független sorok (oszlopok) számát értjük.

$$\rho\left(\mathbf{A}\right) \tag{2.38}$$

Lineárisan egymástól függetlennek nevezzük az oszlopokat, ham>nesetén

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0} \tag{2.39}$$

egyenlőség csak $c_j = 0, j = 1,...,n$ esetén áll fenn. Ha pl. találunk két olyan oszlopot, amelyek lineáris kombinációja zérust ad, akkor a mátrix rangja eggyel csökken, azaz $\rho(\mathbf{A}) = n - 1$.

Az $(m,\!n)$ méretű mátrixnál

$$m \ge \rho\left(\mathbf{A}\right) \le n \tag{2.40}$$

Az

$$\underbrace{\mathbf{A}}_{(n,n)} \underbrace{\mathbf{x}}_{(n,1)} = \underbrace{\mathbf{b}}_{(n,1)}$$
(2.41)

kifejezésben szereplő x vektort ismeretlennek tekintve, algebrai egyenletrendszer áll előttünk. Egyértelmű megoldásához az A együttható mátrix

VEM alapjai	Néhány alapvető matematikai fogalom
Tartalom Tárgymutató	$\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 23 \triangleright$

invertálható kell, hogy legyen, vagyis determinánsa zérustól különbözni köteles. A determinánst

$$\det \mathbf{A}$$
 (2.42)

jelöli. Ekkor a (2.41) megoldása

$$\underbrace{\mathbf{x}}_{(n,1)} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1}}_{(n,n)} \underbrace{\mathbf{b}}_{(n,1)}$$
(2.43)

ahol az együttható mátrix inverze \mathbf{A}^{-1} . Invertálhatóság esetén $\rho(\mathbf{A}) = n$.

Az algebrai egyenletrendszer megoldására számos eljárás ismert. Vannak egzakt megoldást adók (pl. A Gauss-féle eliminációval dolgozók), ill. iterációt felhasználók [2].

Itt is megfogalmazhatók sajátérték problémák. Nevezetesen

$$\mathbf{A} \ \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \tag{2.44}$$

A rezgéstani feladatoknál a (2.44) sajátérték-feladatnak kitüntetett szerepe lesz a mechanikai rendszer dinamikai válaszainak meghatározásánál.

Kvadratikus mátrix jobbról, balról történő szorzása skalár számot ad. Ha

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \, \mathbf{x} \ge 0 \tag{2.45}$$

akkor ez esetben azt mondjuk, hogy a mátrix pozitív szemidefinit, ha a szorzás eredménye csak pozitív szám, akkor a mátrix pozitív definit. Ezzel a kérdéssel konkrétan az alakváltozási-, kinetikai energia számításánál fogunk találkozni. A szorzat zérus értékénél a mátrix rangja kevesebb mint az x vektor mérete.

2.1.3. Kezdeti peremérték feladat

A modellhez kapcsolt differenciálegyenletben vagy rendszerben ismeretlen függvények szerepelnek, amelyeknek időben vizsgált feladatoknál a kezdeti, továbbá a vizsgált tartomány peremén jelentkező peremfeltételeket is ki kell elégíteni, vagyis vagy a függvénynek, vagy deriváltjának, vagy ezek lineáris kombinációjának adott értéket kell felvenniük.

Peremnek nevezzük azt a pont-sokaságot, amelynek környezetében találhatók olyan pontok, amelyek a tartományhoz tartoznak, illetve olyanokat is, amelyek már nem. Tetszőleges tartományt Ω -val fogjuk jelölni, illetve peremét Γ -val.

VEM alapjai	Néhány alapvető matematikai fogalom
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 24 \triangleright$

Egy többváltozós függvényt, amennyiben rendelkezik *m*-ed rendű folytonos deriváltakkal $C^m(\Omega)$ osztályú függvénynek szokás nevezni. Így pl. *f* függvény $C^0(\Omega)$ osztályú, ha *f* folytonos, de egyváltozós esetben a $\partial f / \partial x$ derivált már nem. A továbbiakban egyváltozós esetben legyen x a független változó.

Az alábbiak a perem illetve kezdeti feladatokra mutatnak be néhány egyszerű példát.

Peremérték feladat

$$\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) + p = 0, \quad 0 < x < 1 \tag{2.46}$$

$$u(0) = u_0, \left(a\frac{du}{dx}\right)_{|x=1} = F_0$$
 (2.47)

Kezdeti értékfeladat

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} + a u = q , \quad 0 < t < t_0$$
(2.48)

$$u(0) = {}^{0}u, \quad \left(\frac{du}{dt}\right)_{|t=0} = {}^{0}v$$
 (2.49)

Kezdetiperemérték feladat *u* függvényre vonatkozólag:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) = p(x,t) , \quad 0 < x < 1$$
(2.50)

 $0 < t < t_0$

$$u(x,0) = {}^{0}u(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = {}^{0}v(x)$$
(2.51)

$$u(0,t) = u_0(t), \quad \left(a\frac{du}{dx}\right)_{|x=1} = F_0(t)$$
 (2.52)

(2.47) és (2.52)-t peremfeltételnek, (2.49) és (2.51)-t kezdeti feltételnek szokás nevezni. Amennyiben az u_0 , F_0 illetve 0u , 0v zérustól különböznek, úgy a feltételeket inhomogénnak, ellenkező esetben homogén perem és kezdeti feltételnek nevezzük. A problémánál ρ , a, u_0 , F_0 , $^\circ u$, $^\circ v$ mennyiségek adottak. A jobboldalon szereplő p(x,t) = 0 esetén a differenciálegyenlet homogén, zérustól eltérő esetben inhomogén.

VEM alapjai	Néhány alapvető matematikai fogalom
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 25 \triangleright$

Sajátérték problémánál keressük azt
a λ sajátértéket, amelynél az alábbi differenciálegyen
let kielégül.

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) = \lambda u , \quad 0 < x < 1$$
(2.53)

$$u(0) = 0$$
, $\left(a\frac{du}{dx}\right)_{|x=1} = 0.$ (2.54)

Ezen osztályú feladatok rezgéstani, stabilitási kérdések megválaszolásakor merülnek fel a mechanikán belül

2.1.4. Integrálátalakítási összefüggések

Egy zárt Ω tartományban értelmezett $u(x)^1$ függvényre ható ∇ Hamiltonféle differenciáloperátor esetén áll

$$\int_{\Omega} \nabla \boldsymbol{u} d\Omega = \int_{\Gamma} \boldsymbol{n} \boldsymbol{u} d\Gamma$$
(2.55)

illetve

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{u} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u} d\Gamma \,, \qquad (2.56)$$

továbbá

$$\int_{\Omega} \nabla \times \boldsymbol{u} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u} d\Gamma \,, \qquad (2.57)$$

összefüggés, ahol *n* jelöli az Ω tartományból kifele mutató normális egységvektort, ·, × a vektorok között értelmezett skaláris és vektoriális szorzást jelöli.

Gyakran szükség van a szorzat integrálására is. Pl.

$$\int_{0}^{L} v \frac{dw}{dx} dx = \int_{0}^{L} \frac{d}{dx} (v \cdot w) \, dx - \int_{0}^{L} \frac{dv}{dx} w \, dx = [v \cdot w]_{0}^{L} - \int_{0}^{L} v' w \, dx \qquad (2.58)$$

u vektort és T tenzort tartalmazó kifejezés esetén áll

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u}) d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{T}) \cdot \boldsymbol{u} d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{T} .. \nabla \circ \boldsymbol{u} d\Omega$$
(2.59)

¹A szimbolikusan tárgyalt vektorokat és tenzorokat vastag ferde betűkkel fogjuk jelölni, eltérően a végeselemes tárgyalásmódban használatos álló vastagon szedett mátrixoktól és vektoroktól

ami (2.56) szerint is kifejezhető

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \left(\nabla \cdot \boldsymbol{T} \right) \cdot \boldsymbol{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{T} .. \nabla \circ \boldsymbol{u} d\Omega \tag{2.60}$$

A vektor és tenzor jellegű mechanikai jellemzők jelölésére egyaránt használjuk a szimbólikus és a mátrixos (általában (x,y,z) koordinátarendszerben kapott koordinátákból alkotott) jelölést. A vektor és tenzor jele vastagon szedett dőlt kis– illetve nagybetű. Mátrixos jelölésnél pedig álló helyzetű kis- illetve nagybetű.

2.1.5. Funkcionál

Funkcionál alatt az Ω értelmezési tartományon értelmezett függvénytől, annak különböző rendű deriváltjaitól függő skalár mennyiséget értünk, azaz

$$F = F\left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}', \dots\right) \tag{2.61}$$

ami egyváltozós esetben

$$F = F\left(x, \ u(x), \ \frac{du}{dx} \cdots\right) = F(x, \ u, \ u' \cdots)$$
(2.62)

Ittra helyvektort jelöli, u^\prime a megkívánt módon képzett elsőrendű deriváltat. Például

$$F(x,u) = \int_{0}^{1} a \left(\frac{du}{dx}\right)^{2} dx - \int_{0}^{1} up dx$$
(2.63)

vagy

$$F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{u}) = \int_{\Omega} \left[a(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) + b\nabla\cdot\boldsymbol{u} \right] d\Omega - \int_{\Gamma} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p} \, d\Gamma$$
(2.64)

A fizikai feladathoz rendelten az F-ben szereplő u = u(r) függvény az ismeretlen, ennek meghatározása a cél.

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 27 \triangleright$

2.1.6. Variálás

A függvény variációja alatt, annak kismértékű megváltoztatását értjük. Általában a megváltoztatott függvénytől meg szokás követelni a folytonosságot és deriválhatóságot, illetve feladattól függően bizonyos peremfeltételek kielégítését is.

A variálás jeleként δ -t szokás használni. Így u variációja alatt δu -t értjük, ami a 2.1. ábrán a folytonos vonallal rajzolt függvénytől való eltérést jelenti.



2.1. ábra. Variáció értelmezése

A funkcionál első variációját $F=F\left(x,u,u'\right)$ esetén

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u' + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u'$$
(2.65)

jelenti, míg az ${\cal F}$ teljes differenciálja

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial u}du' + \frac{\partial F}{\partial u'}du'$$
(2.66)

Állnak az alábbi összefüggések

$$\delta(F_1 + F_2) = \delta F_1 + \delta F_2$$
$$\delta(F_1 \cdot F_2) = \delta F_1 \cdot F_2 + F_1 \cdot \delta F_2$$
$$\delta F^n = n F^{n-1} \delta F$$

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 28 \triangleright$

Tartalom | Tárgymutató

$$\delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \frac{\delta F_1 \cdot F_2 - F_1 \cdot \delta F_2}{(F_2)^2} \tag{2.67}$$

Az u függvény megváltoztatását egy α állandó és v(x) függvényen keresztül kifejezve $\delta u = \alpha v$, ahol α paraméter, amely a különböző variációknál más és más, v(x) egy másik függvény. Az u függvény variációjának deriváltja

$$\frac{d}{dx}(\delta u) = \frac{d}{dx}(\alpha v) = \alpha \frac{dv}{dx} = \alpha v' = \delta u' = \delta \left(\frac{du}{dx}\right)$$
(2.68)

vagyis a deriválás és a variálás sorrendje felcserélhető.

Integrálásnál áll

$$\delta \int_{\Omega} u(x)dx = \int_{\Omega} \delta u(x)dx$$
 (2.69)

A (2.63) alatti funkcionál tartalmaz lineáris és nemlineáris részeket. Lineáris rész

$$l(u) = \int_{\Gamma} u \, p \, d\Gamma \tag{2.70}$$

míg az ún. bilineáris rész

$$B(u,u) = \int_{\Gamma} a \frac{du}{dx} \frac{du}{dx} dx$$
(2.71)

illetve

$$B(w,u) = \int_{\Omega} a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx$$
(2.72)

Az l(u) funkcionál lineáris, ha fennáll

$$l(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha l(u_1) + \beta l(u_2)$$
(2.73)

míg B(w,u)-t bilineárisnak mondjuk, ha fennáll az alábbi linearitás

$$B(\alpha u_1 + \beta u_2, w) = \alpha B(u_1, w) + \beta B(u_2, w)$$
(2.74)

$$B(u_1, \alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha B(u_1, w_1) + \beta B(u_1, w_2)$$
(2.75)

A B(w,u) bilineáris részt szimmetrikusnak mondjuk, ha

$$B(w,u) = B(u,w) \tag{2.76}$$

2.1.7. Peremértékfeladat gyenge megoldásának felépítése

A peremértékfeladat közelítő megoldásához variációs módszert választva a differenciálegyenletet és a peremfeltételek egy részét integrál értelemben "átlagolva" kívánjuk kielégíteni, vagyis a megoldást gyengítjük a közelítésre használt függvényektől alacsonyabb rendűségi folytonossági feltételeket megkövetelve.

A differenciálegyenlet és a peremfeltétel súlyozására különböző függvényeket vehetünk fel, megkövetelve a peremfeltételek egy részének "a priori" – a számítás során annak tudatos – pontos kielégítését. Ezen típusú peremfeltételt *lényeges, alapvető* peremfeltételnek szokás nevezni. A megmaradó peremfeltételek *naturális, fő, természetes* feltételeknek nevezzük. Vizsgáljuk az alábbi differenciálegyenletet

$$\frac{d}{dx} \left[a(x) \frac{du}{dx} \right] + p(x) = 0 \qquad 0 < x < L$$
(2.77)

az alábbi peremfeltételekkel

$$u(0) = u_0, \qquad \left(a\frac{du}{dx}\right)_{|x=L} = Q_L \tag{2.78}$$

A közelítő megoldást

$$u = u_h = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(x)$$
 (2.79)

alakban fogjuk keresni, ahol $\varphi_i(x)$ lineárisan független közelítő mezőnek felel meg, c_i ismeretlen paraméterek, $\varphi_0(x)$ a "lényeges" peremfeltételeket kielégítő függvény, $\varphi_i(x)$ ugyanezen a peremen homogén peremfeltételeket elégíti ki, azaz zérus értéket vesz fel.

Vegyük a (2.77) alatti kifejezést, szorozzuk meg a súlyfüggvénnyel és integráljuk az *L* tartomány felett, továbbá vegyük a (2.78) alatti második peremfeltétel zérusra átrendezett alakját *w*-vel megszorozva. A (2.78) alatti baloldali peremfeltételt az *u* (2.79) alatti közelítésénél "a priori" kielégítjük, így *w* itt zérus kell legyen.

$$\int_{0}^{L} w \left[\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) + p \right] dx - w_L \left[\left(a \frac{du}{dx} \right) - Q_L \right] = 0$$
(2.80)

Figyelembe véve, hogy

$$\Rightarrow \triangleleft 30 \triangleright$$

$$\frac{d}{dx}\left[w\left(a\frac{du}{dx}\right)\right] = \frac{dw}{dx}a\frac{du}{dx} + w\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)$$

az integrálást a szorzatintegrálási szabály szerint képezve

$$\int_{0}^{L} \left(-\frac{dw}{dx} a \frac{du}{dx} + wp \right) dx + \left[w a \frac{du}{dx} \right]_{0}^{L} - w_{L} \left[\left(a \frac{du}{dx} \right)_{L} - Q_{L} \right] = 0 \quad (2.81)$$

Az integrált szemlélve észrevesszük, hogy a kapott integrálban az u függvény deriváltja eggyel alacsonyabb rendű, mint a megoldandó differenciálegyenletben volt, ami a $\varphi_i(x)$ megválasztását majdan megkönnyíti. A peremmel kapcsolatos az aw(du/dx) tag. A súlyfüggvény koefficiense az a(du/dx) mennyiség, aminek a vizsgált problémához tartozó fizikai jelentése is van, ami valójában a természetes peremfeltétellel kapcsolatos. Az összevonásokat elvégezve a kezdeti probléma megoldására szolgáló "gyenge" alak

$$\int_{0}^{L} \left(-a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + wp \right) dx + (wQ)_{L} = 0$$
(2.82)

A (2.82) egyenletben szereplő tagokat bilineáris és lineáris részekre tudjuk szétszedni, így

$$B(w,u) = \int_{0}^{L} a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx$$
(2.83)

$$l(w) = \int_{0}^{L} wpdx + (wQ)_{L}$$
(2.84)

vagyis

$$B(w,u) - l(w) = 0$$
 (2.85)

A w súlyfüggvényt

$$w = u + \delta u \tag{2.86}$$

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 31 \triangleright$

alakban képezve, a kapott variációs egyenlet egy másik formában is felírható. A későbbiekben elsősorban ezen jelölést használó egyenletet fogjuk használni.

$$B(\delta u, u) - l(\delta u) = 0 \tag{2.87}$$

Minthogy a *B* szimmetrikus, úgy áll

$$\delta \left[\frac{1}{2}B(u,u)\right] - \delta \left[l(u)\right] = 0$$

$$I(u) = \frac{1}{2}B(u,u) - l(u)$$
(2.88)

azaz

funkcionál bevezetésével

$$\delta I(u) = 0 \tag{2.89}$$

variációs egyenlethez jutunk.

Rugalmasságtani feladatoknál a következő fejezetben látni fogjuk, hogy az I = I(u) funkcionál a teljes potenciális energiának fog megfelelni.

2.2. Rugalmasságtani összefoglaló

Szilárdságtani tanulmányokból – elsősorban a rudak vizsgálata alapján – ismert, hogy a mechanikai állapot leírására a test pontjainak elmozdulását, a pontok környezetének relatív mozgását, torzulását, azaz alakváltozását, ill. a testben kialakuló feszültségeket kell meghatározni. Az is látható volt, hogy a kérdés elemzésére a vektor-, tenzorszámítás kínálkozik hatékony eszközül. Az elmozdulást a pontról pontra változó u elmozdulás-vektor (elmozdulásmező) jellemzi, az alakváltozást az elmozdulásmező deriválásból nyert A alakváltozási tenzormező, míg a feszültségállapotot a T feszültségi tenzormező írja le. Az alábbiakban nagyon tömören összefoglaljuk az alapvető fogalmakat és összefüggéséket a végeselem-módszer megalapozása céljából.

2.2.1. Alapvető fogalmak [1,4,6,7]

Vizsgálatainkat egy tetszőleges terhelésű és megfogású test esetére végezzük el, azzal a feltételezéssel, hogy a vizsgált test a terhelés hatására rugalmasan fog viselkedni, azaz a terhelés fel és levétele után a test visszatér eredeti helyzetébe, és ha kezdeti állapot feszültségmentes volt, akkor a tehermentesítés után szintén feszültségmentes lesz. A mérnöki gyakorlatban

számos ilyen esettel találkozunk. Azt lehet mondani, a teherviselő szerkezetek, gépi berendezések, mechatronikai eszközök döntő része ezeket a feltételeket kielégíti.

Ezek után a 2.2. ábra szerinti terhelés és megfogás mellett fogjuk vizsgálni a testet, azaz keressük a testben kialakuló u elmozdulásmezőt, az Aalakváltozási tenzormezőt, és a T feszültségi tenzormezőt. A ρ sűrűségű test V térfogatán a ρk térfogaton megoszló terhelés, A felületének A_p részén p felületi terhelés, A_u részén adott u_o elmozdulás működik.

Vizsgálatunkat az x,y,z viszonyítási descartesi derékszögű koordinátarendszerben végezzük el. A koordinátarendszer tengelyeinek irányába e_x, e_y, e_z egységvektorok mutatnak.

A tér tetszőleges P pontjának helykoordinátáját jelölje

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z. \tag{2.90}$$

Az elmozdulásmező

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = u\boldsymbol{e}_x + v\boldsymbol{e}_y + w\boldsymbol{e}_z \tag{2.91}$$

az alakváltozási tenzormező

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{r}) \tag{2.92}$$

és a feszültségi tenzormező

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{r}\right) = \boldsymbol{T}^{T}\left(\boldsymbol{r}\right) \tag{2.93}$$

a hely függvénye. Az alakváltozási tenzor és annak skalárkoordinátái az alábbiak szerint értelmezettek:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{y} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_{z} \end{bmatrix}, \varepsilon_{x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \dots$$
(2.94)

melyben az $\varepsilon_i,~\gamma_{ij}$ fajlagos nyúlások és szögtorzulások, dimenziótlan mennyiségek.

A feszültségi tenzor:

$$\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{r}\right) = \begin{bmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{bmatrix}$$
(2.95)





2.2. ábra. A test terhelése, megfogása

ahol σ és τ a normál és a nyíró feszültségeket jelöli.

A fenti (2.91)-(2.93) alattiak 3 és a szimmetria miatt 6-6 ismeretlen mezőt tartalmaznak. Vagyis összesen 15 mezőt kell meghatározni. Ezek meghatározására – a szilárdságtani és rugalmasságtani ismereteinkre, annak linearizált elméletére (kis elmozdulás (az elmozdulás lényegesen kisebb mint a test mérete), illetve kis alakváltozás (az alakváltozás jellemzői lényegesen kisebbek mint 1)) alapozva – az alábbi egyenletek szolgálnak:

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{u} \circ \nabla + \nabla \circ \boldsymbol{u}) \tag{2.96}$$

geometriai egyenlet, ahol Va Hamilton féle differenciál operátor, a

$$\boldsymbol{T} \cdot \nabla + \rho \, \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0} \tag{2.97}$$

egyensúlyi egyenlet, a

$$T = D \cdot A \tag{2.98}$$

anyagegyenlet², a (Hooke-féle törvény) áll rendelkezésre. A

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 \qquad \boldsymbol{r} \in A_u \tag{2.99}$$

²A kétszeres skaláris szorzás bemutatására vegyük a *T=D*··*A* kifejezést.

A tenzorszámítás szerint háromváltozós esetben egy másodrendű tenzor három diád összegeként állítható elő. Így

 $T = T_x \circ e_x + T_y \circ e_y + T_z \circ e_z = (\sigma_x e_x + \tau_{yx} e_y + \tau_{zx} e_z) \circ e_x + \dots$

Bevezetve x,y,z indexek helyett az 1,2,3-at, továbbá legyen $T_x = T_{11}e_1 + T_{21}e_2 + T_{21}e_3 + T_{21}e_$

geometriai (kinematikai) peremfeltétel (KPF), a

$$T \cdot n = p$$
 $r \in A_n$ (2.100)

feszültségi (dinamikai) peremfeltétel (DPF) kielégítése mellett. A fentiekben "·" a skaláris, "·" a kétszeres skaláris szorzást, "o" a diadikus szorzást jelöli, továbbá, D az anyagállandók negyedrendű tenzora, n a felületből kifelé mutató normális.

Homogén, izotróp anyag esetén (2.98) helyett a

$$\boldsymbol{T} = 2G\left(\boldsymbol{A} + \frac{\nu}{1 - 2\nu}A_{I}\boldsymbol{I}\right)$$
(2.101)

ismert általános Hook törvény írható fel, ahol *G* a csúsztató rugalmassági tényező, ν a Poisson féle tényező, A_I az *A* tenzor első skalár invariánsa (a tenzor főátlóbeli elemeinek összege), *I* idemtenzor.

A későbbi variációs elvek alkalmazásához igen lényeges szerepet töltenek be az alábbi feltételeket kielégítő mezők.

Definíció 1.

Kinematikailag lehetséges (megengedett) elmozdulásmezőnek nevezünk minden olyan u^* mezőt, amely folytonos, véges deriváltakkal rendelkezik és kielégíti a KPF-t, azaz

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}_0 \qquad \boldsymbol{r} \in A_u$$
 (2.102)

$$\boldsymbol{A}^* = \frac{1}{2} (\boldsymbol{u}^* \circ \nabla + \nabla \circ \boldsymbol{u}^*) \qquad \boldsymbol{r} \in V$$
 (2.103)

Definíció 2.

 $T_{31}e_3$ stb. akkor a feszültségi tenzor

$$T = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij} e_i \circ e_j$$

alakban is felírható.

Ennek analógiájára a negyedrendű tenzor

$$D = \sum_{\substack{i,j,k,l=1\\i,j,k,l=1}}^{3} D_{ijkl} e_i \circ e_j \circ e_k \circ e_l$$

Vagyis
$$T = D \dots A = \left(\sum_{\substack{i,j,k,l=1\\i,j,k,l=1}}^{3} D_{ijkl} e_i \circ e_j \circ e_k \circ e_l \right) \dots \left(\sum_{\substack{m,n=1\\m,n=1}}^{3} A_{mn} e_m \circ e_n \right) = \sum_{\substack{i,j=1\\i,j=1}}^{3} D_{ijkl} A_{kl} e_i \circ e_j = \sum_{\substack{n,j=1\\i,j=1}}^{3} T_{ij} e_i \circ e_j$$

VEM alapjai	Rugalmasságtani összefoglaló
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 35 \triangleright$

Statikailag lehetséges feszültségmezőnek nevezünk minden olyan \bar{T} tenzormezőt, mely kielégíti az egyensúlyi egyenletet és a dinamikai peremfeltételt, azaz

$$\bar{T} \cdot \nabla + \rho \, \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{r} \in V$$
 (2.104)

$$ar{m{T}}\cdotm{n}=m{p} \qquad m{r}\in A_p$$
 (2.105)

A fenti definiciókból következik, hogy a kinematikailag lehetséges elmozdulásmező is kielégíti a

$$abla imes \mathbf{A}^* imes
abla = \mathbf{0} \qquad \mathbf{r} \in V$$

$$(2.106)$$

kompatibilitási egyenletet, de nem elégíti ki a (2.97) egyensúlyi egyenletet:

$$T^* \cdot \nabla + \rho \ \mathbf{k} \neq \mathbf{0} \qquad \mathbf{r} \in V$$
 (2.107)

és a (2.100) dinamikai peremfeltételt:

$$T^* \cdot n \neq p$$
 $r \in A_p$ (2.108)

Fordítva a statikailag lehetséges feszültségmezőből származó \bar{A} alakváltozási tenzormező

$$ar{T}=m{D}\,\cdot\,\cdot\,ar{A} \qquad \Rightarrow \qquad ar{A}=m{D}^{-1}\,\cdot\,\cdot\,ar{T}\equiv C\,\cdot\,\cdot\,ar{T}$$

már nem elégíti ki a (2.106) kompatibilitási egyenletet, azaz

$$\nabla \times \bar{\boldsymbol{A}}(\bar{\boldsymbol{T}}) \times \nabla \neq \boldsymbol{0} \tag{2.109}$$

és ilymódon a (2.99) alatti kinematikai peremfeltételt sem, azaz

$$\overline{\boldsymbol{u}} \neq \boldsymbol{u}_0 \quad \boldsymbol{r} \in A_u \tag{2.110}$$

A (2.96) - (2.100) alatti peremértékfeladat megoldásának egyik lehetséges módja, hogy a háromfajta u, A és T mezők helyett vagy csak az uelmozdulásmezőt, vagy csak a T feszültségi tenzormezőt tartjuk meg a megoldandó végső parciális differenciálegyenletrendszerben. Nem nehéz belátni, hogy homogén-izotróp anyag esetén az elmozdulásmezőre felírható alapegyenlet (A-nak (2.98)-ba, majd T-nek (2.97)-be helyettesítésével)

$$\nabla^2 \boldsymbol{u} + \frac{1}{1 - 2\nu} \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + \frac{\rho \, \boldsymbol{k}}{G} = \boldsymbol{0}$$
(2.111)

VEM alapjai	Rugalmasságtani összefoglaló
Tartalom Tárgymutató	$\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 36 \triangleright$

elmozdulásvektorra vonatkozó ún. *Navier*-féle alapegyenlet fogalmazható meg. Természetesen a (2.100) alatti dinamikai peremfeltétel is az elmozdulásvektoron keresztül nyer kifejezést.

A (2.111) parciális differenciál egyenletre alapozott számításnál elmozdulásmódszerről beszélünk. Ekkor a primál (elsődleges) változók az elmozdulásmező skalár koordinátái, s ezekből deriválás után jutunk el az alakváltozáshoz, illetve a feszültséghez. Egy másik úton – általában feszültségfüggvények bevezetésével – a feszültségi mező szerepel alapváltozóként. Természetesen mindkét esetben a peremfeltételeket vagy az elmozdulásmezőn, vagy a feszültségmezőn keresztül kell kifejezni. Speciális terhelések, test geometriák esetére számos eljárás került kifejlesztésre, amelyekkel a rugalmasságtani könyvekben találkozhatunk [1, 4].

Elkövetkezőkben célunk lesz a rugalmasságtani peremértékfeladat megoldását közvetett úton – nem differenciálegyenlet-rendszer megoldásán keresztül – hanem közvetlen úton, energetikai elvekre alapozott variációs módszerek felhasználásával elérni. Látni fogjuk, ez az út a mérnöki szemlélethez is jól igazodik, s a számítógépek felhasználásával igen eredményesen, a gyakorlati igényeket messze kielégítő módon alkalmazható.

2.2.2. Variációs elvek

Az általunk vizsgált mechanikai problémák variációs elvek segítségével történő vizsgálata a differenciálegyenlet-rendszer közvetlen megoldásával szemben az alábbi főbb előnyökkel rendelkezik.

- 1. A vizsgált variációs elvhez kapcsolódó funkcionál nagyon gyakran fizikai tartalommal bír.
- 2. A funkcionál alacsonyabb rendű deriváltakat tartalmaz, mint ami az eredeti feladat differenciál-egyenletrendszerében szerepel.
- Variációs elvek révén bonyolult peremfeltételek, illesztési feltételek, mezőegyenletek vezethetők le, ill. igazolni lehet a megoldás létezését és egyértékűségét.
- 4. A számítás közelítésének jóságára a funkcionálban szereplő mezők "a priori" ki nem elégített perem és illesztési feltételeinek kielégülési mértékén keresztül kapunk szemléletes képet. A közelítés egyetlen skalárral, a funkcionál értékével minősíthető.
- 5. A variációs elvekre alapozva numerikusan stabil és konvergens eljárások származtathatók.
| VEM alapjai | Rugalmasságtani összefoglaló |
|------------------------|--|
| Tartalom Tárgymutató | $\iff \triangleleft 37 \triangleright$ |

6. A közelítő mezők alkalmas megválasztásával jól kondicionáltságú algebrai egyenletrendszer nyerhető, amelynek számítógépes megoldására jól ismert hatékony eljárások használhatók.

A teljes potenciális energia minimum elve, a Lagrange-féle variációs elv

Legyen az elmozdulásmező kinematikailag lehetséges. Ekkor az elmozdulás mező variációja (virtuális elmozdulás) alatt, a kinematikailag lehetséges és a tényleges (valódi) elmozdulásmezők közötti különbséget értjük, amelynek jele: δu

$$\delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{u}, \tag{2.112}$$

ahol u az egzakt elmozdulás. Nyilvánvalóan teljesül: $\delta u = 0$, ha $r \in A_u$.



2.3. ábra. Elmozdulásmező variációja

Hasonlóan értelmezhető az alakváltozás variációja:

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 38 \triangleright$

$$A^{*} = A(u^{*}) = A(u + \delta u) = \frac{1}{2} [(u + \delta u) \circ \nabla + \nabla \circ (u + \delta u)] =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2} (u \circ \nabla + \nabla \circ u)}_{A} + \underbrace{\frac{1}{2} (\delta u \circ \nabla + \nabla \circ \delta u)}_{\delta A} \quad (2.113)$$

azaz

 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A} + \delta \boldsymbol{A}$

Definiáljuk a teljes potenciális energiát rugalmas anyagú testre

$$\Pi_{p} = \Pi_{p} \left(\boldsymbol{u} \right) = \frac{1}{2} \int_{V} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A} \, dV - \int_{V} \boldsymbol{u} \cdot \rho \boldsymbol{k} \, dV - \int_{A_{p}} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p} \, dA \quad (2.114)$$

A Hooke-féle anyagegyenlet értelmében $T = D \cdot A$.

A potenciális energia kifejezésében az első tag az alakváltozási energia

$$\frac{1}{2} \int \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A} \, dV = U_{alakv.}$$

míg a külső erők munkája

$$W_{k} = \int_{A_{p}} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p} \, dA + \int_{V} \boldsymbol{u} \cdot \rho \boldsymbol{k} \, dV$$
(2.115)

Kérdésként merül fel, mennyi a $\delta \Pi_p$ értéke kinematikailag lehetséges elmozdulásmező esetén? Behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk arról, hogy

$$\Pi_{p} (\boldsymbol{u} + \delta \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2} \int_{V} (\boldsymbol{A} + \delta \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A} + \delta \boldsymbol{A} dV - \int_{V} (\boldsymbol{u} + \delta \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{p} \, \boldsymbol{k} \, dV - \int_{A_{p}} (\boldsymbol{u} + \delta \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{p} \, dA =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{V} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A} \, dV - \int_{V} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\rho} \, \boldsymbol{k} \, dV - \int_{A_{p}} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p} \, dA +$$

$$= \underbrace{\int_{V} \delta \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A} \, dV - \int_{V} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\rho} \, \boldsymbol{k} \, dV - \int_{A_{p}} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p} \, dA +$$

$$= \underbrace{\int_{V} \delta \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A} \, dV - \int_{V} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\rho} \, \boldsymbol{k} \, dV - \int_{A_{p}} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p} \, dA +$$

$$= \underbrace{\int_{V} \delta \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A} \, dV - \int_{V} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\rho} \, \boldsymbol{k} \, dV - \int_{A_{p}} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p} \, dA +$$

 $\delta \Pi_p$: a potenciális energia első variációja

$$+\underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_{V}\delta\boldsymbol{A}\cdot\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{D}\cdot\cdot\delta\boldsymbol{A}}\,dV}_{\delta^{2}\Pi_{p}\geq0}$$

$$\Pi_p(\boldsymbol{u}^*) = \Pi_p(\boldsymbol{u} + \delta \boldsymbol{u}) = \Pi_p(\boldsymbol{u}) + \delta \Pi_p + \delta^2 \Pi_p$$
(2.116)

ahol

$$\delta^2 \Pi_p = \frac{1}{2} \int\limits_V \delta \boldsymbol{A} \cdot \cdot \boldsymbol{D} \cdot \cdot \delta \boldsymbol{A} \, dV \ge 0 \tag{2.117}$$

hisz ez utóbbi kifejezés alakváltozási energiát fejez ki. Az első variáció zérus értéke $\delta \Pi_p = 0$ a potenciális energia stacionér pontját jelöli ki, amelyben a potenciális energia abszolút minimummal rendelkezik. A kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőnél a potenciális energia mindig nagyobb, mint a tényleges mezőhöz tartozóé.

$$\Pi_{p}\left(\boldsymbol{u}^{*}\right) \geq \Pi_{p}\left(\boldsymbol{u}\right) \tag{2.118}$$

A $\delta \Pi_p = 0$ feltétel a ${\pmb T}({\pmb u}) = {\pmb D} \cdot \cdot {\pmb A}$, ${\pmb A} = {\pmb A}({\pmb u})$ jelöléssel

$$\delta \Pi_{p} = \int_{V} \delta \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{T} \left(\boldsymbol{u} \right) dV - \int_{V} \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \, \boldsymbol{k} dV - \int_{A_{p}} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p} \, dA = 0 \qquad (2.119)$$

Tartalom | Tárgymutató

Az első integrál átalakításával

$$\int_{V} (\delta \boldsymbol{u} \circ \nabla) \cdot \boldsymbol{T} \, dV = \int_{V} (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \nabla) \, dV - \int_{V} \delta \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \nabla) \, dV$$

majd a Gauss-Osztrogradszkij tétel felhasználásával, a (2.119) helyett

$$-\int_{V} \delta \boldsymbol{u} \cdot \left[\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{u}\right) \cdot \nabla + \rho \,\boldsymbol{k}\right] dV + \int_{A_{p}} \delta \boldsymbol{u} \cdot \left[\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{u}\right) \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}\right] dA = 0 \qquad (2.120)$$

írható, mivel $\delta u = 0$ az A_u felületen. Mit is mond ez az egyenlet? Mivel a δu elmozdulásmező variációja a V térfogaton és az A_p felületen tetszőleges, az integrálok csak akkor tűnnek el, akkor lesz értékük zérus, ha a δu melletti zárójeles kifejezések zérussal egyenlők. Ezek pedig rendre fizikailag az egyensúlyi egyenletet és a DPF-t fejezik ki.

Tétel:

A teljes potenciális energia minimumát meghatározó $\delta \Pi_p = 0$ stacionaritási feltétel által kijelölt pontban olyan elmozdulásmező alakul ki a testben, amely az eredetileg "a priori" előírt kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőre kirótt feltételeket betartva, kielégíti az előzetesen nem biztosított egyensúlyi egyenletet, mint mezőegyenletet és a dinamikai peremfeltételt, vagyis szolgáltatja a rugalmasságtani feladat egzakt megoldását.

A tételből következik, hogy közelítő számítás felépítésekor miután u helyett u^* -ot használunk, az egyensúlyi egyenlet és a DPF már nem fog pontosan kielégülni. Annál kisebb lesz az eltérés, minél közelebb vagyunk a tényleges u megoldáshoz. Nagyon lényeges, hogy az elv "csak igyekszik" kielégíteni ezeket, és így a (2.107), (2.108)-ben szereplő hiba mértékéből a számítás pontosságára tudunk következtetni: például a DPF esetén a

$$\frac{\|\boldsymbol{T}^* \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}\|}{\|\boldsymbol{p}\|} \le \vartheta \tag{2.121}$$

egyenlőtlenség (ahol ϑ előírt hibakorlát) adhat feleletet a megoldás pontosságára az A_p tartomány különböző pontjaiban vett értékek kiszámítása révén. Vagyis fizikai oldalról tudjuk ellenőrizni számításunk pontosságát.

Hőhatás, kezdeti feszültség figyelembevétele

A testben kialakuló hőmérsékletmezőt ismertnek feltételezve, az α fajlagos hőtágulási tenzor révén kezdeti alakváltozások

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{\alpha} T \tag{2.122}$$

$$\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 40 \triangleright$$

ahol $T=T(\boldsymbol{r})$ a hőmérsékletmező változása. Homogén, izotróp anyag esetén

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha \boldsymbol{I}, \tag{2.123}$$

ahol I idemtenzor, α fajlagos hőtágulási együttható.

A testben lévő (általában a gyártás során "bevitt" maradó feszültséget) kezdeti T_0 feszültségnek fogjuk nevezni.

A terhelés, a maradó feszültség és a hőhatás során kialakult elmozdulásmező ismeretében a keletkező feszültség

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{D} \cdot \cdot (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{A}_0) + \boldsymbol{T}_0$$
(2.124)

illetve

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} \cdot \cdot (\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}_0) + \boldsymbol{A}_0 \tag{2.125}$$

Ekkor a teljes potenciális energia

$$\Pi_{p} = \frac{1}{2} \int_{V} (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_{0}) \cdot \cdot \boldsymbol{D} \cdot \cdot (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_{0}) \, dV - \int_{A_{p}} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p} \, dA - \int_{V} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\rho} \, \boldsymbol{k} \, dV + \int_{V} \boldsymbol{A} \cdot \cdot \boldsymbol{T}_{0} \, dV \quad (2.126)$$

Természetesen a $\delta \Pi_p = 0$ stacionaritási feltételhez rendelt tételben foglaltak továbbra is érvényben vannak. Megjegyzendő, hogy konkrét számításnál a variálás szempontjából állandónak tekintett $\frac{1}{2} \int_{\Omega} A_0 \cdot D \cdot A_0 \, dV$

integrált szükségtelen meghatározni.

A Ritz-féle módszer

A teljes potenciális energia minimum elv szerint a $\delta \Pi_p = 0$ variációs egyenletet kielégítő u elmozdulásmező a rugalmasságtani feladat egzakt megoldásához tartozik. A tényleges u elmozdulásmező helyett a kinematikailag lehetséges u^* elmozdulásmező szerepeltetése $\delta \Pi_p = 0$ egyenlet alapján közelítő megoldást fog eredményezni. A megoldás pontossága az általunk felvett u^* mező "jóságától" fog függni. Az minél pontosabban közelíti a tényleges mezőt, az eredmény annál pontosabb lesz. A tényleges mezőnél a potenciális energia abszolút minimummal rendelkezik. Ettől eltérő mezőnél a megközelített potenciális energia nagyobb értékkel fog

rendelkezni. Általában a közelítést speciális hatványfüggvények alkotta sorral képzik. Így az u^* mezőt az alábbi módon közelítjük:

$$u^{*} = u_{0}^{*}(r) + \sum_{i=1}^{N} (c_{i}\varphi_{i}(r)e_{x} + c_{i+N}\psi_{i}(r)e_{y} + c_{i+2N}\chi_{i}(r)e_{z})$$
(2.127)

ahol $u_0^*(r)$ kinetikai peremfeltételt kielégítő mező $u_0^*(r) = u_0(r)$ $r \in A_u, \varphi_i(r), \psi_i(r), \chi_i(r)$ általunk felvett közelítő függvények, amelyek eleget tesznek a $\varphi_i(r) = \psi_i(r) = \chi_i(r) = 0$ $r \in A_u$ homogén peremfeltételnek, folytonosak, deriválhatók, N a közelítő sorban felvett tagok száma, c_i (i = 1,...,3N) ismeretlen állandók, paraméterek.

Az u* mező variációja

$$\delta \boldsymbol{u}^* = \sum_{i=1}^{N} \left(\delta c_i \varphi_i(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{e}_x + \delta c_{i+N} \psi_i(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{e}_y + \delta c_{i+2N} \chi_i(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{e}_z \right)$$
(2.128)

 u^* -nak (2.126)-be helyettesítésével a potenciális energia az ismeretlen paraméterek függvényeként áll elő

$$\Pi_p = \Pi_p(c_1, \dots, c_{3N}) \tag{2.129}$$

А

$$\delta \Pi_p = 0 = \delta c_1 \frac{\partial \Pi_p}{\partial c_1} + \ldots + \delta c_i \frac{\partial \Pi_p}{\partial c_i} + \ldots + \delta c_{3N} \frac{\partial \Pi_p}{\partial c_{3N}}$$
(2.130)

stacionaritási (minimum) feltételből

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial c_i} = 0 \qquad \quad i = 1, \dots, 3N \tag{2.131}$$

algebrai egyenletrendszert nyerjük a c_i állandók meghatározására. Vagyis a feladatot véges dimenziójú feladatra sikerült visszavezetni, mégpedig algebrai egyenletrendszer megoldása révén. Ily módon az eredeti parciális differenciál-egyenletrendszer megoldását energetikai elv révén sikerült algebrai egyenletrendszer megoldásával megkapni. A bemutatott módszer igen hatékony, bonyolult gyakorlati feladatok megoldására kiválóan alkalmazható.

VEM alapjai	Rugalmasságtani összefoglaló
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 43 \triangleright$

Az elmondottak illusztrálására vegyünk néhány egyszerű rúdra vonatkozó egydimenziós feladatot. Számos esetben a bemutatott feladatoknak egzakt megoldása ismeretes. A példák a közelítő módszer felépítésének útját, elvi hátterét kívánják elsősorban illusztrálni.

2.1. feladat: A változó A = A(x) keresztmetszetű rúd hossztengelye mentén megoszló terhelés intenzitása legyen p. A rúd x = 0 helyen megfogott, míg az x = L végén F_L koncentrált erő hat, továbbá \tilde{c} állandójú rugón keresztül csatlakozik a talajhoz. (2.4. ábra)

Megoldás: A teljes potenciális energia

$$\Pi_{p} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{V} \sigma_{x} \varepsilon_{x} \, dV}_{\text{rúd belső alakváltozási energiája}} \underbrace{-\int_{L} u \, p \, dx - u_{L} F_{L}}_{\text{külső terhelés munkája}} \underbrace{+ \underbrace{\frac{1}{2} \tilde{c} \, (u_{L})^{2}}_{\text{rúgóenergia}}$$
(2.1-a)

A rudaknál használt hipotézis szerint a keresztmetszetben $\sigma_x = E\varepsilon_x =$ áll. feszültség keletkezik, ahol

 $\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \equiv u'$, EYoung féle rugalmassági modulus.



2.4. ábra. Példa egyváltozós feladatra a) Rúd és terhelése, b) rúd elemi része

Így

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_L \int_A E(u')^2 dA dx - \dots \\ \Pi_p = \frac{1}{2} \int_L AE(u')^2 dx - \int_L pu \, dx - F_L \, u_L + \frac{1}{2} \tilde{c} u_L^2$$
(2.1-b)

A variációszámítás szabálya szerint

$$\delta u^2 = 2u \cdot \delta u \tag{2.1-c}$$

és így

$$\delta \Pi_p = \int_L AEu' \delta u' \, dx - \int_L \delta u \, p \, dx - \delta u_L F_L + \tilde{c} u_L \delta u_L = 0$$

Az első integrált a szorzatintegrálási szabály szerint átalakítva

$$\delta \Pi_p = AEu' \delta u \Big|_o^L - \int_L \left[(AEu')' + p \right] \delta u \, dx - \delta u_L (F_L - \tilde{c}u_L) = 0$$

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 44 \triangleright$

majd rendezve

$$\delta \Pi_p = \delta u_L \cdot [AEu' \mid_L - F_L + \tilde{c}u_L] - \int_L [(AEu')' + p] \,\delta u \, dx = 0$$
(2.1-d)

variációs egyenlethez jutunk, mivel az
 x=0helyen lévő megfogás miatt $\delta u=0.$ Az első tag eltűnéséből a

$$N_L \equiv (AEu)'_L = F_L - \tilde{c}u_L \tag{2.1-e}$$

dinamikai peremfeltételt, míg az integrál eltűnéséből az

$$(AEu')' = -p,$$
 $(N' = -p)$ (2.1-f)

egyensúlyi egyenletet nyertük. Ez utóbbit hagyományos úton is megkaphatjuk. Véve a rúd elemi részét, a reá ható tengelyirányú erők egyensúlyi feltételéből $dN + p\Delta x = 0$, illetve N' = -p következik, ami egybeesik a $\delta \Pi_p = 0$ feltételnél kapottal.

Legyen AE =áll. Közelítsük az u mezőt négyzetes hatvány függvényen keresztül.

$$u = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \tag{2.1-g}$$

Mivel x = 0-nál u = 0, $c_0 = 0$ következik. A (2.1-g) alatti közelítéssel $u' = c_1 + 2c_2x$, továbbá

$$\begin{split} \Pi_p &= \frac{1}{2} \int\limits_L AE(c_1 + 2c_2 x)^2 \, dx - \int p(c_1 x + c_2 x^2) \, dx - \\ &\quad - F_L(c_1 L + c_2 L^2) + \frac{1}{2} \tilde{c}(c_1 L + c_2 L^2)^2 \end{split}$$

illetve

$$\begin{split} \delta \,\Pi_p &= \int\limits_L AE(c_1 + 2c_2 x) (\delta \, c_1 + 2\delta \, c_2 x) \, dx - \int\limits_L p(\delta \, c_1 x + \delta \, c_2 x^2) \, dx - \\ &- F_L(\delta \, c_1 L + \delta \, c_2 L^2) + \tilde{c}(c_1 L + c_2 L^2) (\delta \, c_1 L + \delta \, c_2 L^2) \end{split}$$

Rendezve az egyenletet

$$\begin{split} \delta \,\Pi_p &= 0 = \delta \, c_1 \left[\int\limits_L AE(c_1 + 2c_2 x) \, dx - \int\limits_L px \, dx - F_L \, \cdot \, L + \tilde{c}(c_1 L + c_2 L^2) L \right] + \\ &+ \delta \, c_2 \left[\int\limits_L AE(c_1 + 2c_2 x) \, 2x \, dx - \int\limits_L px^2 \, dx - F_L \, \cdot \, L^2 + \tilde{c}(c_1 L + c_2 L^2) L^2 \right] \end{split}$$

ami rövidebben

$$\delta \Pi_p = \delta c_1 \frac{\partial \Pi_p}{\partial c_1} + \delta c_2 \frac{\partial \Pi_p}{\partial c_2} = 0$$
(2.1-h)

alakban is felírható. Mivel $\delta c_i, (i=1,2)$ tetszőleges,
 $\partial \, \Pi_p / \partial \, c_i = 0$ egyenleteket nyerjük. Ezek jelen esetben

$$\left\{\int_{L} AE[1;2x] dx + [\tilde{c}L^{2};\tilde{c}L^{3}]\right\} \begin{bmatrix} c_{1} \\ c_{2} \end{bmatrix} - \int_{L} px dx - F_{L} \cdot L = 0$$

Tartalom | Tárgymutató

$$\Rightarrow \triangleleft 45 \triangleright$$

$$\left\{ \int_{L} AE[2x; 4x^{2}] dx + [\tilde{c}L^{3}; \tilde{c}L^{4}] \right\} \begin{bmatrix} c_{1} \\ c_{2} \end{bmatrix} - \int_{L} px^{2} dx - F_{L} \cdot L^{2} = 0$$

p=áll. érték mellett a végső megoldandó egyenlet
rendszer

$$\begin{pmatrix} AE \begin{bmatrix} L & L^2 \\ L^2 & \frac{4}{3}L^3 \end{bmatrix} + \tilde{c} \begin{bmatrix} L^2 & L^3 \\ L^3 & L^4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_LL + p\frac{L^2}{2} \\ F_LL^2 + p\frac{L^3}{3} \end{bmatrix}$$
(2.1-i)

Alesetek

$$p=0$$
 $\tilde{c}=0$ (húzott rúd esete) \Rightarrow $c_1=rac{F_L}{AE},$ $c_2=0$

$$p = p_0 =$$
áll., $F_L = 0$, $\tilde{c} = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{p_0}{AE}L$, $c_2 = -\frac{p_0}{2AE}$

3.

2.

1.

 $p = p_0 =$ áll., $F_L = 0$, $\tilde{c} = 0$ a megoldást az előző két eset

szuperponálásából kapjuk
$$\Rightarrow$$
 $c_1 = \frac{1}{AE} \left(F_L + p_0 L \right), \quad c_2 = \frac{p_0}{2AE}$

4.

$$p=0, \quad AE=0, \quad F_L \neq 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{F_L}{\tilde{c}}, \quad u_L = \frac{F_L}{\tilde{c}}$$

@@

2.2. feladat: Vizsgáljuk az *xz* síkban elhelyezkedő hajlított-nyírt tartót. A tartó keresztmetszetének főtengelyei essenek egybe az *xz* síkra merőleges *y* tengellyel, ill. a *z* tengellyel. A keresztmetszetek súlypontjain áthaladó tengely ílymódon az *x* tengelynek felel meg (2.5. ábra). A tartóra *z* tengely irányába *p* sűrűségű megoszlóterhelés, az x = L keresztmetszetben F_L^z nyíróerő és M_L^Y hajlítónyomaték működik. Ezen terhelések hatására a tartó az *xz* síkban deformálódik. A tartó középvonalának elmozdulás koordinátája *z* irányában w_0 .

Megoldás: A Bernoulli-féle hipotézis szerint a tartó keresztmetszete az alakváltozás után is merőleges marad a meggörbült középvonalra, a középvonal nem nyúlik meg. Ilymódon az xz koordinátájú P pont x irányú elmozdulása

$$u = -w_0'z \tag{2.2-a}$$

amiből az \boldsymbol{x} irányú fajlagos nyúlás

$$\varepsilon = u' = -w_0''z \tag{2.2-b}$$

és a keletkező normál feszültség

$$\sigma = E\varepsilon = -Ew_o''z \tag{2.2-c}$$

A teljes potenciális energia

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int\limits_V \sigma \varepsilon \, dV - \int\limits_L p w_o \, dx - w_L F_L^z + w'_{oL} M_L^Y \tag{2.2-d}$$

 $\Leftarrow \Rightarrow$

⊲ 46 ⊳

Tartalom | Tárgymutató



2.5. ábra. Hajlított-nyírt tartó, terhelése és a Bernoulli-féle hipotézis

ahol $w_{0L}=w_0(L),\ w_{0L}'=w_0'(L).$ A (2.2-b), (2.2-c) egyenletek behelyettesítésével, a keresztmetszetbeli integrálás elvégzésével

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_L I_y E(w_0'')^2 dx - \int_L pw_0 dx - w_{0L} F_L^z + w_{0L}' M_L^Y$$
(2.2-e)

A Π_p első variációját képezve, kapjuk azt, hogy

$$\delta \Pi_p = \int_L I_y E w_0'' \delta w_0' \, dx - \int_L p \delta w_0 \, dx - \delta w_{0L} F_L^z + \delta w_{0L}' M_L^Y \tag{2.2-f}$$

A szorzatintegrálási szabály kétszeri alkalmazásával, a tagok rendezésével stacionér helyzetben

$$\delta \Pi_{p} = [I_{y} E w_{0}^{\prime\prime}|_{L} + M_{L}^{Y}] \delta w_{0L}^{\prime} - [(I_{y} E w_{0}^{\prime\prime})^{\prime}|_{L} + F_{L}^{z}] \delta w_{oL} + \int_{L} [I_{y} E w_{0}^{\prime\prime})^{\prime} - p] \delta w_{0} dx = 0$$
(2.2-g)

hisz azx=0-nál lévő befalazás miatt $\delta\,w_0(0)=0, \quad \delta\,w_0'(0)=0.$

A variációk függetlenségéből adódóan egyrészt a dinamikai peremfeltételeket kapjuk meg:

$$M_L^Y = -I_y E w_{0L}^{\prime\prime} \qquad \Rightarrow \qquad M_y = -I_y E w_0^{\prime\prime} \tag{2.2-h}$$

$$F_L^z = -(I_y E w_0'')_L' \implies F^z = -T_z = -(I_y E w_0'')'$$
 (2.2-i)

VEM alapjai

Tartalom | Tárgymutató

ahol T_{z} a nyíró
erő, másrészt az

$$(I_y E w_o'')'' = p$$
 (2.2-j)

egyensúlyi egyenlethez jutunk.

A (2.2-h) és (2.2-i) alatt egyúttal az M_y hajlítónyomatékra és T_z nyíróerőre is kapunk összefüggéseket. Prizmatikus tartónál $I_y =$ áll.

Az alábbiakban építsük fel a közelítő megoldást $F_L^z = M_L^Y = 0$ esetén. A közelítőfüggvény

$$w_0 = \sum_{n=2}^{N} c_n x^n$$
 mivel $w_0(0) = w'_0(0) = 0$ kell legyen. (2.2-k)

Továbbá a lehajlás másodrendű deriváltja

$$w_0'' = \sum_{n=2}^N n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^N g_n(x)c_n = [g_2 \dots g_N] \begin{bmatrix} c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \mathbf{g}^T \mathbf{c}$$
(2.2-l)

A w_0 és w_0'' -nek (2.2-e)-be helyettesítésével a potenciális energia

$$\Pi_{p} = \frac{1}{2} \mathbf{c}^{T} \underbrace{\int_{L} \begin{bmatrix} g_{2} \\ \vdots \\ g_{N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} I_{y} E[g_{2} \dots g_{N}] dx \mathbf{c} - \mathbf{c}^{T} \underbrace{\int_{L} \begin{bmatrix} x^{2} \\ \vdots \\ x^{n} \end{bmatrix} p dx}_{\mathbf{b}}$$

a c paraméterek függvényeként áll elő, vagyis

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{Q} \, \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \mathbf{b} \tag{2.2-m}$$

ahonnan a minimumfeltételből a

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \mathbf{c}} = \mathbf{0} = \mathbf{Q} \, \mathbf{c} - \mathbf{b} \tag{2.2-n}$$

algebrai egyenletrendszert nyerjük a c állandók meghatározására. @@

2.3. feladat: Vizsgáljuk a 2.6. ábrán vázolt prizmatikus tartót.

Megoldás: A Példa 2.2-j szerint elegendő a lehajlást negyedfokú hatványfüggvénnyel(polinommal) közelíteni:

$$w_0 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4$$
(2.3-a)

Az x=0helyen lévő kinematikai peremfeltételből $c_0=c_1=0$ következik, míg az x=Lhelyen állnia kell a

$$w_0(L) = 0 = c_2 L^2 + c_3 L^3 + c_4 L^4$$

összefüggésnek, amiből

$$c_2 = -(c_3L + c_4L^2)$$

vagyis

$$w_0 = c_3(x^3 - Lx^2) + c_4(x^4 - L^2x^2)$$
(2.3-b)





2.6. ábra. Statikailag határozatlan tartó

továbbá

$$w_0'' = c_3(6x - 2L) + c_4(12x^2 - 2L^2)$$
(2.3-c)

A teljes potenciális energia

$$\Pi_{p} = \frac{1}{2} [c_{3} c_{4}] \int_{L} \begin{bmatrix} 6x & - & 2L \\ 12x^{2} & - & 2L^{2} \end{bmatrix} I_{y} E [6x - 2L, 12x^{2} - 2L^{2}] dx - \\ - [c_{3} c_{4}] \int_{L} \begin{bmatrix} x^{3} - Lx^{2} \\ x^{4} - L^{2}x^{2} \end{bmatrix} p dx = \\ = \frac{1}{2} [c_{3} c_{4}] I_{y} E \begin{bmatrix} 4L^{3} & 8L^{4} \\ 8L^{4} & \frac{252}{15}L^{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{3} \\ c_{4} \end{bmatrix} - [c_{3} c_{4}] p \begin{bmatrix} -\frac{L^{4}}{12} \\ -\frac{2}{15}L^{5} \end{bmatrix}$$
(2.3-d)

amiből a $\delta\,\Pi_p=0$ értelmében előálló egyenletrendszer

$$I_{y}E\begin{bmatrix} 4L^{3} & 8L^{4} \\ 8L^{4} & \frac{252}{15}L^{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{3} \\ c_{4} \end{bmatrix} = -pL^{4}\begin{bmatrix} -\frac{1}{12} \\ \frac{2}{15}L \end{bmatrix}$$
(2.3-e)

A megoldásként kapott állandók értékeinek ismeretében az elmozdulás és a hajlítónyomaték \boldsymbol{x} függvényeként már könnyen felírható:

$$c_{3} = -\frac{5}{48} \frac{pL}{I_{y}E}, \qquad c_{4} = \frac{p}{24I_{y}E},$$
$$w_{o}(x) = \frac{p}{48I_{y}E} \left(3L^{2}x^{2} - 5Lx^{3} + 2x^{4}\right), \qquad M_{y}(x) = -p \left(\frac{1}{8}L^{2} - \frac{5}{8}Lx + \frac{x^{2}}{2}\right)$$
(2.3-f)

@@

2.3. Potenciális energia minimum elv alkalmazása több testből álló rendszer esetén

Tekintsük a 2.7. ábrán vázolt 1 és 2 jelű testekből álló szerkezetet. Az egyes elemekhez tartozó mennyiségeket felső indexbe tett sorszám jelöli. Mindkét elemre egyidejűleg az *e* felső indexszel hivatkozunk. A V^e térfogatú *e* elemet az A^e felület határolja. A V^e térfogaton a $\rho^e k^e$ sűrűségű megoszló

VEM alapjai	Potenciális energia minimum elv
Tartalom Tárgymutató	$\Leftrightarrow \ \Rightarrow \ \triangleleft \ 49 \ \triangleright$

terhelés, az A_p^e felületen a p sűrűségű felületi terhelés működik, míg az A_u^e felületen ismert az u_0 elmozdulás. Az A^e felület megmaradó A_c^e részén az elem a szomszédos elemmel érintkezik, csatlakozik. Mindkét testre érvényesek a rugalmasságtan egyenletei, azaz

$$\boldsymbol{A}^{e} = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{u}^{e} \circ \nabla + \nabla \circ \boldsymbol{u}^{e} \right) \quad \boldsymbol{r} \in V^{e}$$
(2.132)

$$\boldsymbol{T}^e = \boldsymbol{D}^e \cdot \boldsymbol{A}^e \quad \boldsymbol{r} \in V^e \tag{2.133}$$

$$\boldsymbol{T}^e \cdot \nabla + \rho \boldsymbol{k}^e = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{r} \in V^e \tag{2.134}$$

mint mezőegyenlet, továbbá érvényesek a peremfeltételek [1]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^{e} &= \boldsymbol{u}_{0} \quad \boldsymbol{r} \in A_{u}^{e} \\ \boldsymbol{T}^{e} \cdot \boldsymbol{u}^{e} &= \boldsymbol{p}^{e} \quad \boldsymbol{r} \in A_{u}^{e} \end{aligned}$$
 (2.135)



2.7. ábra. Kételemű rendszer

A testek csatlakozó A_c^e közös felületén, az eddig nem ismert illesztési feltételek állnak fenn. Ezek két csoportba oszthatók. Egyik az elmozdulásokra vonatkozik. Feltételezésünk értelmében a közös felületi pontok együtt mozognak, nem válnak el egymástól, azaz a testek között kétoldalú érintkezési feltételek állnak fenn. A másik a feszültségekre vonatkozik. A felületen lévő feszültségek egyensúlyban vannak. Ily módon a KIF (kinematikai illesztési) és a DIF (dinamikai illesztési) feltételek az alábbiak:

VEM alapjai	Potenciális energia minimum elv
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 50 \triangleright$

Itt n^1 és n^2 a testekből kifelé mutató normálvektorok.

Vizsgáljuk meg, hogy ebben az esetben hogyan használható a potenciális energia minimuma elv, illetve a megfelelő variációs elv.

Tételezzük fel, hogy az u^{*e} elmozdulásmező kinematikailag lehetséges, illetve teljesíti a kinematikai illesztési feltételt. Ez utóbbiból következik, hogy

$$\delta \boldsymbol{u}^1 = \delta \boldsymbol{u}^2 \quad \boldsymbol{r} \in A_c \tag{2.137}$$

A vizsgált rendszer teljes potenciális energiája a két testre külön-külön felírható potenciális energiák összegeként áll elő:

$$\Pi_{p} = \sum_{e=1}^{2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{V^{e}} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A} \, dV - \int_{V^{e}} \boldsymbol{u} \cdot \rho \boldsymbol{k} \, dV - \int_{A_{p}^{e}} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p} \, dA \right\}$$
(2.138)

A két testre vonatkozó variációs elv felépítéséhez induljunk ki a teljes potenciális energiák variációjából:

$$\delta \Pi_p = \sum_{e=1}^2 \delta \Pi_p^e = \sum_{e=1}^2 \left\{ \delta U^e_{alakv.} - \delta W^e_k \right\} = 0$$

$$\sum_{e=1}^{2} \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} \int_{V^{e}} \delta \boldsymbol{A}^{e} \cdot \boldsymbol{T}^{e} \, dV}_{\delta U^{e}_{alakv.}} - \underbrace{\int_{V^{e}} \delta \boldsymbol{u}^{e} \cdot \rho \boldsymbol{k} \, dV}_{-\delta W^{e}_{k}} - \underbrace{\int_{A^{e}_{p}} \delta \boldsymbol{u}^{e} \cdot \boldsymbol{p} \, dA}_{-\delta W^{e}_{k}} \right\}$$
(2.139)

Az első integrál az egy testre vonatkozó vizsgálatnál bemutatottak szerint átalakítható

$$\int_{V^e} \delta \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \nabla)^e \, dV = \int_{V^e} (\delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \nabla)^e \, dV - \int_{V^e} (\underbrace{\delta \boldsymbol{u} \circ \nabla}_{\delta \boldsymbol{A} + \delta \boldsymbol{\Psi}} ... T^e \, dV =$$
$$= \int_{A^e} \delta \boldsymbol{u}^e \cdot \boldsymbol{T}^e \cdot \boldsymbol{n}^e \, dA - \int_{V^e} \delta \boldsymbol{A}^e ... \boldsymbol{T}^e \, dV$$

innen

$$\int_{V^e} \delta \boldsymbol{A}^e \cdot \boldsymbol{T}^e dV = \int_{A^e} \delta \boldsymbol{u}^e \cdot \boldsymbol{T}^e \cdot \boldsymbol{n}^e \, dA - \int_{V^e} \delta \boldsymbol{u}^e \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \nabla)^e \, dV$$

Tartalom | Tárgymutató

ahol $A^e = \underbrace{A^e_u}_{\delta u = 0} + A^e_c$ A kapott formulákat visszaírva és a tagokat átrendezve:

 $\sum_{e=1}^{2} \left\{ \int_{V^{e}} \delta \boldsymbol{u}^{e} \cdot \left[\boldsymbol{T} \cdot \nabla + \rho \boldsymbol{k} \right]^{e} dV - \int_{A_{p}^{e}} \delta \boldsymbol{u}^{e} \cdot \left(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{p} \right)^{e} dA \right\} - \int_{A_{p}^{12}} \delta \boldsymbol{u}^{1} \cdot \left(\boldsymbol{T}^{1} \cdot \boldsymbol{n}^{1} + \boldsymbol{T}^{2} \cdot \boldsymbol{n}^{2} \right) dA = 0 \quad (2.140)$

variációs egyenlethez jutunk. Nyilvánvalóan, ha a KIF nem állna fenn, akkor a (2.140) utolsó integrálja két részre esne, ami a belső felület feszültségmentességét fejezné ki. Ez pedig a megfigyelésekkel ellentétes eredményt szolgáltatna. A levezetett variációs egyenlet, vagyis a variációs elv biztosítja az egyensúlyi egyenlet, a dinamikai perem-, és illesztési feltétel teljesülését. Tehát ezzel a teljes potenciális energia minimum elv a több testből álló rendszerekre is alkalmazható a kinematika perem- és illesztési feltételeket "*a priori"* kielégítő elmozdulásmező felvétele esetén.

A több testből álló rendszerekre vonatkozóan számos variációs elvet fejlesztettek ki. Sok esetben az elmozdulásmezőn kívül a feszültségi tenzormező is szerepel a variálandó mezők között. Az illesztési feltételek "*a priori*" kielégítési mértékétől függően további mezőket, multiplikátorokat kell felvenni. Az [5, 8] könyvek e témakörben további információval szolgálnak.

2.4. Hivatkozások a 2. fejezethez

- 1. *Béda Gy. Kozák I.*: Rugalmas testek mechanikája, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, **1987**.
- 2. *Galántai A. Jenei A.:* Numerikus módszerek, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, **2005.**
- 3. *Rontó M. Raisz Pné:* Differenciálegyenletek műszakiaknak, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, **2004.**
- 4. Lurje A.I. Teorija uprugosti, Nauka, Moszkva, (orosz nyelven) 1970.
- 5. *Páczelt I. Scharle P.:* A végeselem-módszer a kontinuummechanikában, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, **1987**.

- 6. *Kozák I.:* Szilárdságtan V. Jegyzet, NME Gépészmérnöki Kar, Tankönyvkiadó, Budapest, **1967**.
- 7. Mechanika mérnököknek, Szilárdságtan, Szerkesztette *M. Csizmadia Béla, Nándori Ernő*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, **1999**.
- 8. *Páczelt I.*: Végeselem-módszer a mérnöki gyakorlatban, I. kötet, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, **1999**.

3. A végeselem-módszer elemmodelljének felépítése

Az előző fejezetben kiemelt figyelmet fordítottunk a teljes potenciális energiára, a hozzá kapcsolódó variációs elvre és a reá épülő közelítő számításra. Láttuk, hogy az elv nem csak egy testből álló mechanikai rendszerre alkalmazható, hanem több testből felépülő (konkrét elemzést két testre tettük meg) rendszerre is. Láttuk, hogy a módszer használatához a kinematikai perem és illesztési feltételeket kielégítő elmozdulásmező közelítését kell biztosítani, ami nem jelent túlzott nehézséget.

A módszert először Ritz alkalmazta a múlt század elején. Olyan közelítő mezőket használt, amelyek az egész értelmezési tartományon gyakorlatilag zérustól eltérő értékekkel rendelkeztek. A kapott algebrai egyenletrendszer együttható mátrixa, ha az alkalmazott koordinátafüggvények nem ortogonálisak az alakváltozási energia számításánál, akkor egy teljesen telített (zérus elemek nincsenek) mátrixot kapunk. A közelítő függvények mástípusú felvétele, amint ezt a későbbiekben látni fogjuk szalagszerkezetű együttható mátrixot fog eredményezni. Ez akkor érhető el, amikor a közelítő függvények zérustól csak az egész tartomány kicsiny alrészén különböznek. Ezt az ún. lokális approximáció elv alkalmazásával érhetjük el, ami voltaképp a végeselem-módszert fogja jelenteni.

A továbbiakban előjáróban egyváltozós feladatot fogunk vizsgálni (húzott rúd) bemutatva a lokális közelítés elvét, a végeselemes tárgyalás alapvető fogalmait.

3.1. Alapfogalmak

A végeselem-módszer lényegét az alábbi egydimenziós, húzott rúd példáján kívánjuk bemutatni.

Az x = 0 helyen megfogott, p sűrűségű megoszló terhelés hatására a 3.1.a ábra szerinti u = u(x) tengelyirányú elmozdulásmező alakul ki. Ezt a mezőt oly módon fogjuk közelíteni, hogy a közelítő függvénytől megköveteljük az x_i (i = 1,...,6) koordinátájú pontokbeli $u_i = u(x_i)$ függvényértékeken történő keresztülhaladást. Vagyis a közelítő $u = u^*$ függvény kielégíti az $u_i^* = u_i$ feltételt. A közelítő kinematikailag lehetséges u^* elmozdulásfüggvény egy lehetséges esetét a szaggatott vonallal rajzolt, szakaszonként lineárisan változó függvény jelenti. Egy másik változatot az 1-2-3, illetve 3-4-5 pontok által kijelölt négyzetes parabolák ill. az 5-6 közötti egyenes által leírt függvény jelentené. Miután adott pontokon keresztül halad a

VEM alapjai	Alapfogalmak	
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 54 \triangleright$	

közelítő függvény, úgy a közelítést a numerikus matematikából ismert Lagrange-féle polinommal történő közelítésnek nevezhetjük. A gondolat általánosításával a 6. ponton átmenő Lagrange féle polinom révén lehetne a legjobban megközelíteni az eredeti *u* függvényt.



3.1. ábra. Az $u(\boldsymbol{x})$ elmozdulásmező közelítése végeselemmel

Térjünk vissza a szakaszonkénti lineáris közelítésre. Az 1-2, 2-3 stb. pontok (csomópontok) közötti tengelyszakasz jelöli ki az első, második, stb. elemet.

Gondolatban szedjük szét a rudat csomópontjaival kijelölt elemekre, hozzá csatlakoztatva a hozzátartozó elmozdulás-függvényeket is. Ekkor a

 $\frac{\text{Alapfogalmak}}{\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 55 \triangleright}$



3.2. ábra. Koordinátafüggvények, közelített elmozdulásmező

VEM alapjai	Alapfogalmak
Tartalom Tárgymutató	$\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 56 \triangleright$

2. és 3. elem vonatkozásában a 3.1.c ábrán megrajzolt u^e -t nyerjük. Itt és a továbbiakban a felső e index az e jelű elemhez való tartozásra utal!

A 2. jelű elem csomópontjainak elmozdulása $u_2^2 = u_2$, $u_3^2 = u_3$, ahol az alsó index a csomópontra utal. A 3. jelű elemnél $u_3^3 = u_3$, $u_4^3 = u_4$. Az elemen belüli lineáris, szaggatottan rajzolt, közelítő függvényt az elem csomópontjaiban lévő elmozdulásokon keresztül tudjuk kifejezni. Láthatóan, egymástól függetlenül, elemenként fel tudjuk építeni a csomóponti elmozdulásokon keresztül a közelítőfüggvényt.

A különálló elemeket összeillesztve (pl. 2. és 3. elemnél $u_3^2 = u_3 = u_3^3$), megkapjuk az eredeti *u* függvény közelítését az egész tartományra vonatkozólag.

Ezideig feltételeztük, hogy u ismert és így a csomóponti értékek is, vagyis a fenti közelítés hibája a csomópontokban zérus.

Természetesen a konkrét mechanikai feladat megoldásának kezdetekor az u elmozdulásfüggvény (elmozdulásmező) nem ismert, és így a csomóponti értékek se. Megfordítva, ha a csomóponti elmozdulások közelítő értékét tudnánk, a felvett approximáció révén bárhol az u^* közelített elmozdulásmezőt is ismernénk, sőt ennek felhasználásával az A^* , T^* alakváltozási és feszültségmezőket is, vagyis a teljes potenciális energia Π_p (u^*) kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőhöz tartozó értéke is ismert volna. Minthogy u^* a csomóponti elmozdulásokon keresztül nyer kifejezést, a Π_p minimum elv értelmében ezek a csomóponti elmozdulások, paraméterek meghatározhatók lesznek. Lényegében a Ritz módszer jelenik meg azzal a különbséggel, hogy a közelítés sorában a c_i (i = 1, ..., 3N) állandók helyett (lásd (2.129)) a konkrét helyen fellépő elmozdulások szerepelnek s a φ_i koordinátafüggvények sajátságos tulajdonságokkal rendelkeznek. Melyek ezek? Az alábbi gondolati kísérlet erre fog feleletet adni.

A csomópontokba helyezzünk el függőleges megvezetésű csapokat, majd a csapokhoz erősítve feszítsünk ki egy gumiszálat az *x* tengely mentén, (3.2. ábra). A csapokat rögzítsük le egy-egy csavar segítségével. A rögzítés feloldásával emeljük meg az első csapot egységnyi magasságra. A gumi a 3.2.a ábra szerinti alakot veszi fel. Engedjük le az 1-es csapot eredeti helyzetébe s emeljük meg a 2-es csapot. A gumi a 3.2.b ábra szerinti alakot fogja felvenni. Tovább folytatva a kísérletet, azaz a csapok felemelését és leengedését a 3.2.c-f ábrán rajzolt függvényekhez fogunk jutni. Látjuk, hogy ezek a függvények ténylegesen zérustól eltérő értékkel csak kis tartományban, lokálisan (egy vagy két elem értelmezési tartományán) jelennek meg. Innen származik a lokális approximáció elnevezés. Ha ezeket a függvényeket rendre megszorozzuk a csomópontbeli elmozdulással, akkor a 3.2.g

VEM alapjai	Alapfogalmak	
Tartalom Tárgymutató	$\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 57 \triangleright$	

ábra szerinti közelített u^* mezőt kapjuk meg. Vagyis a 3.2.a-f ábrán megrajzolt függvények a Ritz-féle módszer koordinátafüggvényeinek felelnek meg.

Az elmondottak értelmében a közelített elmozdulásmező

$$u^{*}(x) = \sum_{i=2}^{6} N_{i}(x) u_{i} = [N_{2}(x) \ N_{3}(x) \cdots N_{6}(x)] \begin{bmatrix} u_{2} \\ u_{3} \\ \vdots \\ u_{6} \end{bmatrix} = \mathbf{N}(x) \mathbf{q}$$
(3.1)

ahol \mathbf{q} a csomóponti elmozdulások vektora, $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ az approximációs mátrix.

Az egész rendszerre vonatkozó teljes potenciális energiát, az elemenként vett potenciális energiák összegeként szeretnénk előállítani.

Ehhez képezzük azi,jcsomópontokat tartalmazó elemen belüli elmozdulásmezőt

$$u^{e}(x) = \left[\frac{x_{j} - x}{L^{e}}, \frac{x - x_{i}}{L^{e}}\right] \left[\begin{array}{c} u_{i}^{e} \\ u_{j}^{e} \end{array}\right]$$
(3.2)

ami
a $\xi=x-x_i$ változó bevezetésével, azaz új lokális helyko
ordináta felvételével

$$u^{e}(\xi) = \left[1 - \frac{\xi}{L}, \frac{\xi}{L}\right]^{e} \left[\begin{array}{c}u_{i}^{e}\\u_{j}^{e}\end{array}\right] = \\ = \left[N_{i}^{e}(\xi) N_{j}^{e}(\xi)\right] \left[\begin{array}{c}u_{i}^{e}\\u_{j}^{e}\end{array}\right] = \mathbf{N}^{e}(\xi) \mathbf{q}^{e} = \mathbf{q}^{eT} \mathbf{N}^{eT}(\xi) \quad (3.3)$$

alakban is felírható. Itt $L^e = x_j - x_i$.

A húzott rúdban kialakuló fajlagos nyúlás

$$\varepsilon^e = \frac{du^e}{dx} = \varepsilon^e(\xi) = \frac{du^e(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{L} [-1, 1] \mathbf{q}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e$$
(3.4)

illetve a normál feszültség a Hooke törvény alapján

$$\sigma^e = E\varepsilon^e = \sigma^e(\xi) = E\varepsilon^e(\xi) = E\mathbf{B}^e\mathbf{q}^e$$
(3.5)

Az elem teljes potenciális energiája az A^e keresztmetszetű, prizmatikus (állandó keresztmetszetű) rúd esetén, az alakváltozási energiából

 $\frac{\text{Alapfogalmak}}{\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 58 \triangleright}$

$$U^{e} = \frac{1}{2} \int_{L} \sigma \varepsilon A \, d\xi = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \int_{L^{e}} \mathbf{B}^{eT} A^{e} E \, \mathbf{B}^{e} d\xi \, \mathbf{q}^{e} =$$
$$= \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \frac{A^{e} E}{L^{e}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q}^{e} \equiv \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^{e} \, \mathbf{q}^{e}, \quad (3.6)$$

a külső erők munkájából



3.3. ábra. Egydimenziós végeleselem, lokális koordinátafüggvények $N^e_i(\xi), N^e_j(\xi)$

$$W_k^e = \int_{L^e} u p \, d\xi = \mathbf{q}^{eT} \int_{L^e} \mathbf{N}^{eT}(\xi) p \, d\xi \equiv \mathbf{q}^{eT} \mathbf{f}^e \tag{3.7}$$

áll össze, azaz

$$\Pi_p^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{eT} \mathbf{f}^e$$
(3.8)

ahol \mathbf{K}^e az elem merevségi mátrixa, \mathbf{f}^e a külső terhelés csomóponti redukált terhelési vektora, \mathbf{q}^e az elem csomóponti elmozdulási vektora.

Állandó intenzítású hosszmenti p megoszló terhelésnél

$$\mathbf{f}^{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{i} \\ \mathbf{f}_{j} \end{bmatrix}^{e} = \int_{L^{e}} \mathbf{N}^{eT}(\xi) p \, d\xi = \int_{\xi=0}^{L^{e}} \begin{bmatrix} N_{i}(\xi) \\ N_{j}(\xi) \end{bmatrix}^{e} p \, d\xi = \frac{pL^{e}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

vagyis a lineáris elmozdulásmező miatt a rúdelemen ébred
ő pL^e nagyságú erő a két csomópontra fele-fele arányban van szét
osztva, azaz redukálva.

A kapott merevségi mátrixot almátrixokra felbontva

$$\Pi_{p}^{e} = [\mathbf{q}_{i}^{T}\mathbf{q}_{j}^{T}]^{e} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix}^{e} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{i} \\ \mathbf{q}_{j} \end{bmatrix}^{e} - 2 \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{i} \\ \mathbf{f}_{j} \end{bmatrix}^{e} \right)$$
(3.10)

Jelen esetben, (3.6) és (3.7) alapján

$$\mathbf{q}_{i}^{e} = u_{i}^{e}, \ (i \longleftrightarrow j), \quad \mathbf{K}_{ii}^{e} = \left(\frac{AE}{L}\right)^{e} \text{ stb.}$$

Bevezetve az összes csomóponti elmozdulások vektorát

$$\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_2^T \dots \mathbf{q}_6^T] \tag{3.11}$$

a rúd teljes potenciális energiája

$$\Pi_{p} = \frac{\mathbf{q}^{T}}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{1} & \mathbf{K}_{12}^{1} \\ \mathbf{K}_{21}^{1} & \mathbf{K}_{22}^{1} + \mathbf{K}_{22}^{2} & \mathbf{K}_{23}^{2} \\ & \mathbf{K}_{32}^{2} & \mathbf{K}_{33}^{2} + \mathbf{K}_{33}^{3} \\ & & \mathbf{K}_{43}^{3} & \cdots & \mathbf{K}_{45}^{4} \\ & & & \mathbf{K}_{55}^{4} + \mathbf{K}_{55}^{5} & \mathbf{K}_{56}^{5} \\ & & & & \mathbf{K}_{65}^{5} & \mathbf{K}_{66}^{5} \end{bmatrix} \mathbf{q} - \mathbf{q}^{T} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1}^{1} \\ \mathbf{f}_{2}^{1} + \mathbf{f}_{2}^{2} \\ \mathbf{f}_{3}^{2} + \mathbf{f}_{3}^{3} \\ \mathbf{f}_{4}^{3} + \mathbf{f}_{4}^{4} \\ \mathbf{f}_{5}^{4} + \mathbf{f}_{5}^{5} \\ \mathbf{K}_{65}^{5} & \mathbf{K}_{66}^{5} \end{bmatrix}$$

$$(3.12)$$

Mivel az 1-es pontban a rúd elmozdulása zérus, úgy $\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$. A $\delta \Pi_p = 0$ variációs egyenlet értelmében

$$\delta \Pi_p = \sum_{i=2}^5 \, \delta \mathbf{q}_i^T \frac{\partial \Pi_p}{\partial \mathbf{q}_i} = 0, \tag{3.13}$$

azaz a megoldandó algebrai egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & & & \\ \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} & & \\ & \mathbf{K}_{43} & \mathbf{K}_{44} & \mathbf{K}_{45} & \\ & & \mathbf{K}_{54} & \mathbf{K}_{55} & \mathbf{K}_{56} \\ & & & \mathbf{K}_{65} & \mathbf{K}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \\ \mathbf{q}_5 \\ \mathbf{q}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \\ \mathbf{f}_5 \\ \mathbf{f}_6 \end{bmatrix}$$
(3.14)

ahol $\mathbf{K}_{22} = \mathbf{K}_{22}^1 + \mathbf{K}_{22}^2$, $\mathbf{K}_{23} = \mathbf{K}_{23}^2$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_2^1 + \mathbf{f}_2^2$ stb. A (3.14) tömören

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f} \tag{3.15}$$

alakban írható fel, ahol ${\bf K}$ a rendszer merevségi mátrixa, ${\bf f}$ a csomóponti redukált terhelés vektora.

A fentiekben egydimenziós feladat kapcsán mutattuk be a lokális approximációt felhasználó végeselem-módszer alapjait, kitérve néhány alapvető fogalomra, és azok értelmezésére. Láttuk, hogy a közelítő megoldás speciális tulajdonságú koordinátafüggvényeket $(N_i(x))$ felhasználó Ritzmódszernek tekinthető. Eltérően a hagyományos felépítéstől, a választott koordinátafüggvények zérustól csak néhány végeselem felett különböznek. Ez azt is jelenti, hogy a végső egyenlet együttható mátrixa (a jelen példában merevségi mátrixa) szalagstruktúrával rendelkezik, ami nagyméretű egyenletrendszerek megoldásánál nagyon előnyösnek ígérkezik.

3.2. Egyváltozós feladatok

Sok esetben a 3 dimenziós térben elhelyezkedő testet, a mechanikai viselkedés szempontjából, kinematikai és feszültségi hipotézisek felhasználásával egy, ill. kétváltozós feladatokká lehet áttranszformálni, vagyis redukálni. Ezzel a feladatok megoldhatósági körülményei egyszerűsödnek. A felvett hipotézisek alkalmazását a gyakorlat ugyanakkor visszaigazolja.

Igen lényeges osztályát jelenti az ilyen típusú szerkezeteknek, a rúdként tárgyalható modellek.

Vizsgálatainkat síkbeli szerkezetekkel korlátozzuk.

3.2.1. Síkbeli rúdszerkezetek

Rúdnak nevezzük azokat a testeket, amelyeknél a test egy kitüntetett térgörbére merőleges geometriai méretei lényegesen kisebbek a térgörbe irányában mérthez képest. Ha a térgörbe egyenes, akkor egyenes rudakról beszélünk. A test "merőleges metszetei" a rúd keresztmetszetét jelölik ki. Feltételezésünk szerint a keresztmetszet súlypontja a térgörbén helyezkedik el, amit tömören középvonalnak nevezünk.

Vizsgálatainkat egyenes középvonalú és állandó keresztmetszetű (prizmatikus) húzott-nyomott, hajlított-nyírt rudakra korlátozzuk. A nyírási energia elhanyagolásával az. ún. Bernoulli hipotézisű rudakhoz jutunk [1, 2]. A rúdszerkezetek modelljeivel számos gyakorlati probléma szilárdságtani elemzése kényelmesen és nagy megbízhatósággal megoldható. A gépészetben az erőátviteli hajtóművek tengelyeinek méretezése, a gépállványok első durva méreteinek meghatározása, csarnokszerkezetek tervezése stb. feladatorientáltan elkészített végeselemes programok révén a mindennapos tervezői analízis eszköze. A bemutatott elmélet az elmélyültebb munkát, a mechanikai szemléletmód erősítését szolgálja.

Bernoulli – féle hipotézis, variációs egyenletek

A vizsgált x - z síkban fekvő rúdszerkezet egy tetszőleges e jelű elemét a végein elhelyezkedő i és j csomópontokkal jellemezzük. A rúdhoz kötött helyi koordinátarendszert az i,j csomópontokon átmenő ξ tengely és a rúdkeresztmetszetben elhelyezkedő η , ζ főtengelyek alkotják. A rúd tengelye az x tengellyel β szöget zár be, hossza L^e .

A rúd elmozdulásánál feltételezzük, hogy a rúd keresztmetszete merőleges marad a meggörbült középvonalra, azaz érvényes a Bernoulli-féle hipotézis.

Ekkor, szilárdságtani ismereteink alapján mondhatjuk, hogy a rúdban alakváltozási energiát csak rúdirányú feszültségek adnak. A keresztmetszet mentén húzás-nyomásból állandó, hajlításból lineárisan megoszló lefutású feszültség keletkezik. Ehhez tartozóan a rúdirányú elmozdulás a keresztmetszet egy tetszőleges P pontjában (lásd a 3.4. ábrát) a következőképp írható fel:

$$u_P = u_P(\xi, \eta, \zeta) = u(\xi) - w'(\xi) \zeta, \qquad (3.16)$$

ahol ()' = $\frac{d}{d\xi}$ (), $u(\xi)$, $w(\xi)$ a ξ ill. ζ irányú elmozdulás.

Az (3.16) összefüggés felhasználásával a tengelyirányú fajlagos nyúlás

$$\varepsilon_{\xi}\left(\xi,\zeta\right) = \varepsilon\left(\xi,\zeta\right) = u'\left(\xi\right) - w''\left(\xi\right) \zeta, \qquad (3.17)$$

míg az egyszerű Hooke-féle anyagegyenlet alapján a normál feszültség

$$\sigma\left(\xi,\zeta\right) = E \varepsilon\left(\xi,\zeta\right),\tag{3.18}$$

ahol *E* a Young modulus.

Jelölje a rúdon ható megoszló terhelést, hosszirányban p_{ξ} , keresztirányban p_{ζ} , melyeknek mértékegysége [N/mm].

A rúd végein $-F_{\xi 0}$, $F_{\xi L}$ rúderő, $-F_{\zeta 0}$, $F_{\zeta L}$ nyíróerő és $-M_{\eta 0}$, $M_{\eta L}$ hajlítónyomaték hat.



3.4. ábra. Síkbeli rúd elmozdulása, terhelése

A fenti terheléseket figyelembevéve, továbbá tekintettel arra, hogy alakváltozási energia csak a $\sigma(\xi)$ feszültségből származik, a rúd teljes potenciális energiája két integrálon keresztül és a rúdvégeken ható koncentrált erők és nyomatékok terhelési munkájából áll össze.

$$\Pi_{p} = \frac{1}{2} \int_{L} \int_{A} \varepsilon_{\xi} E \varepsilon_{\xi} dA d\xi - \int_{L} (u p_{\xi} + w p_{\zeta}) d\xi - (u (L) F_{\xi L} - u (0) F_{\xi 0} + w (L) F_{\zeta L} - w (0) F_{\zeta 0}) - (-w' (L) M_{\eta L} + w' (0) M_{\eta 0})$$
(3.19)

A minimum feltételt kijelölő $\delta \Pi_p = 0$ stacionaritási feltételből a δu és δw mezők függetlensége miatt – az u rúdirányú elmozdulás vonatkozásában részletezett módon –, az alábbi mezőegyenletek és peremfeltételek vezethetők le:

$$\delta_{u} \Pi_{p} = 0 = \int_{L} \int_{A} \delta u' E (u' - w''\zeta) dA d\xi - \int_{L} \delta u p_{\xi} d\xi - (\delta u (L) F_{\xi L} - \delta u (0) F_{\xi 0}) = \int_{L} \delta u' AE u' d\xi - \int_{L} \delta u p_{\xi} d\xi - (\delta u (L) F_{\xi L} - \delta u (0) F_{\xi 0}) = [(AEu' - F_{\xi i}) \delta u]_{0}^{L} - \int_{L} \delta u [(AEu')' + p_{\xi}] d\xi$$
(3.20)

Tartalom | Tárgymutató

amiből

$$A E u'' + p_{\xi} = 0, \qquad (3.21)$$

és

$$(N - F_{\xi i}) \, \delta u \mid_0^L = 0, \quad N = A E u'$$
 (3.22)

A részletek mellőzésével a keresztirányú *w* elmozdulás vonatkozásában, az egyensúlyt kifejező alapegyenlet (lásd Példa 2.2)

$$I_{\eta} E w^{IV} - p_{\zeta} = 0, \qquad (3.23)$$

és a dinamikai peremfeltételt adó variációs egyenletek

$$(F_{\zeta} - F_{\zeta i}) \,\,\delta w \mid_{0}^{L} = 0, \quad (M_{\eta} - M_{\eta i}) \,\,\delta w' \mid_{0}^{L} = 0, \tag{3.24}$$

azaz

$$F_{\zeta} = -I_{\eta} E w''', \text{ és } M_{\eta} = -I_{\eta} E w''$$
(3.25)

Látható, hogy megoszló terhelés hiányában a (3.21) és (3.23) mezőegyenletek lineáris u, ill. harmadfokú w polinommal elégíthetők ki.

Amennyiben a rúd hossza mentén megoszló terhelések lineárisan változnak, akkor a mezőegyenletek partikuláris megoldását harmadfokú ill. ötödfokú polinom szolgáltatja. Ebben az esetben a végeselem közelítő mezői egyúttal pontos megoldások, vagyis jelen esetben a teljes potenciális energia minimuma elv egzakt megoldást szolgáltat a rúdszerkezet vonatkozásában. Nagy előnye a módszernek, hogy kis elmozdulások és alakváltozások feltételezése mellett, a statikailag többszörösen határozatlan szerkezetek minden nehézség nélkül vizsgálhatók. Figyelmet a kinematikai perem- és illesztési feltételek kielégítésére kell csak összpontosítani.

A fenti (3.21)-(3.25) alatti variációs egyenletekből, peremfeltételekből következik, hogy az elemek közötti mezők folytonossági feltételek u mezőnél C^0 osztályú – azaz a függvény folytonos –, a w mezőnél C^1 osztályú folytonosságot azaz a derivált folytonosságát is megköveteljük. A síkban elhelyezkedő különböző irányítottságú elemek miatt a $\xi - \zeta$ helyi koordinátarendszerben értelmezett, csomópontonként megjelenő $u, w, \varphi_{\eta} = -w'$ elmozdulási paraméterek transzformációjára lesz majd szükség.

Elmozdulásmező közelítése

A fenti levezetésből következik, hogy az elemen belüli elmozdulásmező u, w. Ezeket polinomok segítségével közelítjük. A polinomok tagjainak egy részénél az együtthatókat csomópontonként felvett két elmozdulási

VEM alapjai	Egyváltozós feladatok	
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 64 \triangleright$	

és egy szögelfordulási értékkel tudjuk kifejezni, ill. az inhomogén differenciálegyenletek partikuláris megoldásaihoz tartozó tagokat pótlólagos állandóként, paraméterként fogjuk a továbbiakban szerepeltetni. Definiálva az elem helyi koordinátarendszerben értelmezett $\bar{\mathbf{q}}^e$ általánosított csomóponti vektorát, az $\bar{\mathbf{a}}^e$ pótlólagos állandók vektorát, a felsorolt műveletek végrehajtása után az alábbi approximációhoz jutunk. Vagyis az elemen belüli elmozdulásvektor

$$\mathbf{u}^{e}\left(\xi\right) = \begin{bmatrix} u\\ w \end{bmatrix}^{e} = \mathbf{\bar{N}}^{e}\left(\xi\right) \, \mathbf{\bar{q}}^{e} + \mathbf{\breve{N}}^{e}\left(\xi\right) \, \mathbf{\breve{a}}^{e}, \qquad (3.26)$$

ahol a csomóponti elmozdulásvektorhoz tartozó approximációs mátrix

$$\bar{\mathbf{N}}^{e}(\xi) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{N}}_{i}(\xi) & \bar{\mathbf{N}}_{j}(\xi) \end{bmatrix}^{e}, \qquad (3.27)$$

ahol

$$\bar{\mathbf{N}}_{i}^{e}(\xi) = \begin{bmatrix} 1-\bar{\xi} & 0 & 0\\ 0 & 1-3\bar{\xi}^{2} + 2\bar{\xi}^{3} & -L\left(\bar{\xi}-2\,\bar{\xi}^{2}+\bar{\xi}^{3}\right) \end{bmatrix}^{e},$$

$$\bar{\mathbf{N}}_{j}^{e}(\xi) = \begin{bmatrix} \bar{\xi} & 0 & 0\\ 0 & 3\bar{\xi}^{2} - 2\bar{\xi}^{3} & L\left(\bar{\xi}^{2} - \bar{\xi}^{3}\right) \end{bmatrix}^{e}, \qquad \bar{\xi} = \frac{\xi}{L^{e}}.$$

A pótlólagos állandókkal megszorzott approximációs mátrix

$$\begin{split} \tilde{\mathbf{N}}^{e}(\xi) &= \begin{bmatrix} L^{2}\left(\bar{\xi}^{2} - \bar{\xi}\right) & L^{3}\left(\bar{\xi}^{3} - \bar{\xi}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L^{4}\left(\bar{\xi}^{4} - 2\,\bar{\xi}^{3} + \bar{\xi}^{2}\right) & L^{5}\left(\bar{\xi}^{5} - 3\,\bar{\xi}^{3} + 2\bar{\xi}^{2}\right) \end{bmatrix}^{e} \\ &= \begin{bmatrix} \underbrace{\tilde{\mathbf{N}}_{u}^{e}(\xi)}_{(1,2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underbrace{\tilde{\mathbf{N}}_{w}^{e}(\xi)}_{(1,2)} \end{bmatrix} \end{split}$$
(3.28)

$$\bar{\mathbf{q}}^{e,T} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_i^T & \bar{\mathbf{q}}_j^T \end{bmatrix}^e, \quad \breve{\mathbf{a}}^{e,T} = \begin{bmatrix} \breve{\mathbf{a}}_u^T & \breve{\mathbf{a}}_w^T \end{bmatrix}^e, \quad \bar{\mathbf{q}}_i^{e,T} = \begin{bmatrix} u & w, -w' \end{bmatrix}_i^e.$$

VEM	ala	pja	i
Transford			

Merevségi mátrix, redukált terhelési vektorok

Az (3.19) diszkretizálása után véges dimenziójú feladatot kapunk, azaz a diszkretizált teljes potenciális energia

$$\Pi_{p} = \Pi_{p} \left(\bar{\mathbf{q}}^{e}, \, \breve{\mathbf{a}}^{e} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}^{e,T} \, \breve{\mathbf{a}}^{e,T} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}^{e}_{qq} & \bar{\mathbf{K}}^{e}_{qa} \\ \bar{\mathbf{K}}^{e}_{aq} & \bar{\mathbf{K}}^{e}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}^{e} \\ \breve{\mathbf{a}}^{e} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}^{e}_{q(p)} \\ \bar{\mathbf{f}}^{e}_{a(p)} \end{bmatrix} \right)$$
(3.29)

ahol

$$\bar{\mathbf{f}}_{q(p)}^{e} = \int_{L^{e}} \bar{\mathbf{N}}^{e,T}(\xi) \begin{bmatrix} p_{\xi} \\ p_{\zeta} \end{bmatrix} d\xi, \quad \bar{\mathbf{f}}_{a(p)}^{e} = \int_{L^{e}} \breve{\mathbf{N}}^{e,T}(\xi) \begin{bmatrix} p_{\xi} \\ p_{\zeta} \end{bmatrix} d\xi \quad (3.30)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{qq}^{e} = \int_{L^{e}} \mathbf{B}^{e,T}(\xi) \begin{bmatrix} AE & 0 \\ 0 & I_{\eta}E \end{bmatrix}^{e} \mathbf{B}^{e}(\xi) d\xi,$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{aa}^{e} = \int_{L^{e}} \breve{\mathbf{B}}^{e,T}(\xi) \begin{bmatrix} AE & 0 \\ 0 & I_{\eta}E \end{bmatrix}^{e} \breve{\mathbf{B}}^{e}(\xi) d\xi.$$

Itt

$$\bar{\mathbf{B}}^{e}\left(\xi\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0\\ 0 & \frac{12\bar{\xi}-6}{L^{2}} & \frac{4-6\bar{\xi}}{L} & 0 & \frac{6-12\bar{\xi}}{L^{2}} & \frac{2-6\bar{\xi}}{L} \end{bmatrix}^{e}$$
(3.31)

A potenciális energiában szereplő, a helyi koordinátarendszerben értelmezett vegyes indexű merevségi mátrix, jelen esetben $\bar{\mathbf{K}}_{aq}^{e} = \bar{\mathbf{K}}_{qa}^{e,T} = \mathbf{0}$. A teljes potenciális energia variációja

$$\delta \Pi_p = \delta \sum_e \Pi_p^e = \sum_e \delta \bar{\mathbf{q}}^{eT} \frac{\partial \Pi_p^e}{\partial \bar{\mathbf{q}}^e} + \sum_e \delta \breve{\mathbf{a}}^{eT} \frac{\partial \Pi_p^e}{\partial \breve{\mathbf{a}}^e} = 0$$
(3.33)

VEM alapjai	Egyváltozós feladatok
Tartalom Tárgymutató	$\iff \ \ 4 \ \ 66 \ \ \triangleright$

Az $\mathbf{\check{a}}^e$ paraméterekhez tartozó $\mathbf{\bar{K}}^e_{aa}$ merevségi mátrix és annak inverze zárt alakban felírható és mivel az $\mathbf{\check{a}}^e$ paraméter csak az *e*-dik elemen belül működik, a $\partial \Pi^e_p / \partial \mathbf{\check{a}}^e = \mathbf{\bar{K}}_{aa} \mathbf{\check{a}}^e - \mathbf{\bar{f}}^e_{a(p)} = \mathbf{0}$ minimum feltételből $\mathbf{\check{a}}^e$ kiszámolható. A számítások elvégzése után a pótlólagos állandók vektora a két mező vonatkozásában

$$\mathbf{\breve{a}}_{u}^{e,T} = \begin{bmatrix} -\frac{p_{\xi\,i}}{2AE} & \frac{1}{6AEL} \left(p_{\xi\,i} - p_{\xi\,j} \right) \end{bmatrix}^{e}, \tag{3.34}$$

$$\mathbf{\breve{a}}_{w}^{e,T} = \begin{bmatrix} \frac{p_{\zeta i}}{24I_{\eta}E} & \frac{1}{120I_{\eta}EL} \left(p_{\zeta j} - p_{\zeta i}\right) \end{bmatrix}^{e}.$$
(3.35)

A szimmetrikus $\bar{\mathbf{K}}^{e}_{aa}$ merevségi mátrix az alábbi

 $\bar{\mathbf{K}}_{qq}^{e} = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & -AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 12I_{\eta}E/L^{3} & -6I_{\eta}E/L^{2} & 0 & -12I_{\eta}E/L^{3} & -6I_{\eta}E/L^{2} \\ 0 & -6I_{\eta}E/L^{2} & 4I_{\eta}E/L & 0 & 6I_{\eta}E/L^{2} & 2I_{\eta}E/L \\ -AE/L & 0 & 0 & AE/L & 0 & 0 \\ 0 & -12I_{\eta}E/L^{3} & 6I_{\eta}E/L^{2} & 0 & 12I_{\eta}E/L^{3} & 6I_{\eta}E/L^{2} \\ 0 & -6I_{\eta}E/L^{2} & 2I_{\eta}E/L & 0 & 6I_{\eta}E/L^{2} & 4I_{\eta}E/L \end{bmatrix}^{e}$ (3.36)

A redukált csomóponti terhelési vektor a (3.30) alatti integrál kiszámítása után a következő összefüggések révén számolható, (az áttekinthetőség érdekében a mátrix elemeket vesszővel választjuk el):

$$\vec{\mathbf{f}}_{q(p)}^{e,T} = \left[L \left[\frac{p_{\xi i}}{2} + \frac{1}{6} \left(p_{\xi j} - p_{\xi i} \right) \right], L \left[\frac{p_{\zeta i}}{2} + \frac{3}{20} \left(p_{\zeta j} - p_{\zeta i} \right) \right], \\ - L^{2} \left[\frac{p_{\zeta i}}{12} + \frac{1}{30} \left(p_{\zeta j} - p_{\zeta i} \right) \right], L \left[\frac{p_{\xi i}}{2} + \frac{1}{3} \left(p_{\xi j} - p_{\xi i} \right) \right], \\ L \left[\frac{p_{\zeta i}}{2} + \frac{7}{20} \left(p_{\zeta j} - p_{\zeta i} \right) \right], L^{2} \left[\frac{p_{\zeta i}}{12} + \frac{1}{20} \left(p_{\zeta j} - p_{\zeta i} \right) \right] \right]^{e}$$
(3.37)

A helyi koordinátarendszerben felírt diszkretizált potenciális energiát az elemek közötti elmozdulásmező folytonosságának biztosítása érdekében az x,z globális koordinátarendszerben értelmezett U,W elmozdulásokkal és a síkra merőleges φ_{η} szögelforduláson keresztül lehet kifejezni.

A helyi, rúdhoz kötött koordinátarendszerben lévő csomóponti általánosított elmozdulást a globálbeli értékeken keresztül az alábbi összefüggés révén fejezhetjük ki:

$$\bar{\mathbf{q}}_{i}^{e} = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_{\eta} = -w' \end{bmatrix}_{i}^{e} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{e} \begin{bmatrix} U \\ W \\ \varphi_{Y} \end{bmatrix}_{i}^{e} \equiv \mathbf{T}_{0}^{e} \, \mathbf{q}_{i}^{e},$$
(3.38)

VEM alapjai

Tartalom | Tárgymutató

vagyis az elem csomóponti általánosított elmozdulásvektora

$$\bar{\mathbf{q}}^{e} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_{i} \\ \bar{\mathbf{q}}_{j} \end{bmatrix}^{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{0} \end{bmatrix}^{e} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{i} \\ \mathbf{q}_{j} \end{bmatrix}^{e} \equiv \mathbf{T}^{e} \mathbf{q}^{e}, \quad (3.39)$$

ahol \mathbf{T}^e az elem transzformációs mátrixa.

Ezek után az elem teljes potenciális energiája

$$\Pi_{p} = \Pi_{p} \left(\bar{\mathbf{q}}^{e}, \, \bar{\mathbf{a}}^{e} \right) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}^{e,T} \, \bar{\mathbf{K}}_{qq}^{e} \bar{\mathbf{q}}^{e} - \mathbf{q}^{e,T} \mathbf{f}_{q(p)}^{e} + \dots = \Pi_{p} \left(\mathbf{q}^{e}, \, \bar{\mathbf{a}}^{e} \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \mathbf{q}^{e,T} \left(\mathbf{T}^{e,T} \, \bar{\mathbf{K}}_{qq}^{e} \mathbf{T}^{e} \mathbf{q}^{e} - 2 \mathbf{T}^{e,T} \bar{\mathbf{f}}_{q(p)}^{e} \right) + \dots = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{e,T} \, \mathbf{K}_{qq}^{e} \mathbf{q}^{e} - \mathbf{q}^{e,T} \mathbf{f}_{q(p)}^{e} + \dots,$$
(3.40)

ahol

$$\mathbf{K}_{qq}^{e} = \mathbf{T}^{e,T} \, \bar{\mathbf{K}}_{qq}^{e} \mathbf{T}^{e} \tag{3.41}$$

a globális rendszerbeli merevségi mátrix,

$$\mathbf{f}_{q(p)}^{e} = \mathbf{T}^{e,T} \ \mathbf{\bar{f}}_{q(p)}^{e} \tag{3.42}$$

a globális rendszerbeli redukált csomóponti általánosított terhelési vektor. Ezek ismeretében az elemek csatolása az ismert szabályok (lásd 3.4 fejezet) alapján már könnyen elvégezhető.

Hőhatás figyelembevétele

A rúdban a hőmérséklet változás-megoszlást a $T = T(\xi,\zeta)$ függvényen keresztül adjuk meg, α -a fajlagos hőtágulási együttható. Feltételezzük, hogy a rúdban a hőmérséklet változás az alábbi összefüggés alapján a hely lineáris függvénye

$$T = T(\xi,\zeta) = T_i + (T_j - T_i)\,\xi/L + \zeta\,(\,\Delta T_i + (\Delta T_j - \Delta T_i)\,\xi/L\,) \quad (3.43)$$

ahol T_i az *i*-edik keresztmetszet súlypontjának hőmérsékletét, ΔT_i pedig a hőmérséklet *i*-edik keresztmetszetbeli ζ menti lineáris változását jellemzi.

Hőhatás esetén a keletkező normálfeszültség

$$\sigma\left(\xi,\zeta\right) = E \left\{\varepsilon_{\xi}\left(\xi,\zeta\right) - \alpha \,\Delta T\left(\xi,\zeta\right)\right\}.$$
(3.44)

A képlet szerint látható, ha pl. egy rúd meg van akadályozva a megnyúlásában (két vége merev lapokra támaszkodik), akkor egyenletesen melegítve a rudat $T(\xi,\zeta) = T_{\text{áll}}$, alakváltozás nem lép fel, de a keresztmetszet menti állandó nyomó feszültség jön létre $\sigma(\xi,\zeta) = -E\alpha T_{\text{áll}}$. Ha a rúd egyik végét mozgásában nem akadályozzuk, akkor a hőmérséklet emelkedésből származó fajlagos nyúlás $\varepsilon_{\xi}(\xi,\zeta) = \alpha T_{\text{áll}}L/L$ azonos lesz az $\alpha T_{\text{áll}}$ értékkel, vagyis a rúdban nem lép fel hőfeszültség. Általánosan mondható, ha a test homogén, izotróp, és a testben a hőmérséklet lineárisan változik, továbbá a test szabadon tud terjeszkedni, akkor a testben a hőhatásból nem származnak feszültségek, annak ellenére, hogy a testben elmozdulások felléptek.

A hőhatásból adódóan a teljes potenciális energia módosul. Szimmetrikusan felírva

$$\Pi_{p} = \frac{1}{2} \int_{L} \int_{A} \int_{A} \left(\varepsilon_{\xi} - \alpha T \right) E \left(\varepsilon_{\xi} - \alpha T \right) dA d\xi - \int_{L} \left(u p_{\xi} + w p_{\zeta} \right) d\xi - \dots$$
(3.45)

majd a diszkretizálást elvégezve a redukált hőterhelési vektor:

$$\bar{\mathbf{f}}_{q(T)}^{e,T} = \begin{bmatrix} -\frac{AE\alpha}{2} \left(T_i + T_j\right), & \frac{I_{\eta}E\alpha}{L} \left(\Delta T_i - \Delta T_j\right), & -I_{\eta}E\alpha \ \Delta T_i, \\ \frac{AE\alpha}{2} \left(T_i + T_j\right), & \frac{I_{\eta}E\alpha}{L} \left(\Delta T_j - \Delta T_i\right), & I_{\eta}E\alpha \ \Delta T_j \end{bmatrix}^e$$
(3.46)

ill. a hőmérséklethez tartozó pótlólagos állandók vektora

$$\mathbf{\breve{a}}_{(T)}^{e,T} = \begin{bmatrix} \alpha \frac{T_j - T_i}{2L}, & 0, & 0 \end{bmatrix}^e.$$
(3.47)

3.1. feladat: A vázolt prizmatikus rudat lineárisan megoszló terhelés terheli. Egy végeselemet felvéve, a kapott merevségi mátrix és redukált csomóponti terhelés birtokában határozzuk meg a rúd elmozdulási és feszültségi állapotát.

Megoldás:



3.5. ábra. Rúd terhelése

A (3.33) variációs egyenletből, egyelőre a kinematikai peremfeltételt nem kielégítve a

 $\Rightarrow \triangleleft 68 \triangleright$

VEM alapjai

Tartalom | Tárgymutató

$$\frac{\partial \Pi_p^e}{\partial \,\bar{\mathbf{q}}^e} = \frac{\partial \,\Pi_p}{\partial \,\bar{\mathbf{q}}} = 0$$

következik, amiből a (3.40) figyelembevételével a $\overline{\mathbf{K}}_{qq} \bar{\mathbf{q}} = \overline{\mathbf{f}}_{q(p)}$ egyenlet vezethető le. Ez a (3.36), (3.37)-ra tekintettel a megfelelő sorok és oszlopok kiválasztásával

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L\left(\frac{p_1}{2} + \frac{1}{6}(p_2 - p_1)\right) \\ L\left(\frac{p_1}{2} + \frac{1}{3}(p_2 - p_1)\right) \end{bmatrix}$$

alakot nyeri, amiből a kinematikai peremfeltételt kielégítve ($u_1 = 0$) a rúdvég elmozdulására

$$u_2 = \frac{L^2}{AE} \left(\frac{p_1}{2} + \frac{1}{3} (p_2 - p_1) \right)$$
(3.1-a)

értéket kapjuk. A pótlólagos állandók vektorát (3.34) szerint számolhatjuk:

$$\breve{\mathbf{a}} = \frac{1}{2AE} \begin{bmatrix} -p_1 \\ (-p_2 + p_1)\frac{1}{3L} \end{bmatrix}$$

A kapott csomóponti elmozdulás birtokában a rúd elmozdulásmezője (3.26), (3.27) szerint

$$u = \frac{\xi}{L} u_2 + \breve{\mathbf{N}}(\xi) \breve{\mathbf{a}}.$$
 (3.1-b)

A feszültség a Hooke-törvény értelmében

$$\sigma = E \frac{du}{d\xi} = E \frac{u_2}{L} + E \mathbf{\breve{B}}(\xi) \mathbf{\breve{a}}$$
(3.1-c)

A $\xi = 0$ és a $\xi = L$ helyen

$$\sigma(0) = \frac{E}{L}u_2 + E\left[-L - L^2\right] \breve{\mathbf{a}} = \frac{L}{A}\left(p_1 + \frac{p_2 - p_1}{2}\right)$$
(3.1-d)

$$\sigma(L) = \frac{E}{L}u_2 + E\begin{bmatrix} L & 2L^2 \end{bmatrix} \mathbf{\breve{a}} = 0$$
(3.1-e)

ami egybeesik a pontos megoldással, hisz a rudat terhelő eredő erő $F = \left(p_1 + \frac{p_2 - p_1}{2}\right)L$, másrészt a $\xi = L$ rúdvég terheletlen.

@@

3.2. feladat: Húzott rúdelem vizsgálata izoparametrikus tárgyalásmódban

A 3.6 ábrán vázolt egydimenziós (húzott rúd) elem L hosszúságú, x,y rendszerben csomópontjainak x koordinátája x_1, x_2 .

Megoldás: Most a rúdhoz kötötten egy másik fajta ξ koordinátarendszert veszünk fel olymódon, hogy a $\xi = 0$ a rúd közepét, -1 a bal, +1 a jobb végét jelölje ki, vagyis ξ változó most a $-1 \le \xi \le 1$ intervallumban változik. Ekkor a rúd tetszőleges pontjának x helykoordinátája a 3.6. ábra alapján

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \xi = \frac{1}{2}(1 - \xi)x_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)x_2 = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2$$
(3.2-a)

alakban írható fel, ahol az $N_1(\xi)$, $N_2(\xi)$ lineáris függvények szintén a 3.6. ábrán találhatók meg. Természetesen (3.2-a) felhasználásával

$$\xi = \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) \frac{2}{x_2 - x_1}$$
(3.2-b)

VEM alapjai Tartalom | Tárgymutató

 u_1 u_2 a.) $y \downarrow$ b.) x_2 x_1 0 c.) $\frac{x_2 - x_1}{2}$ x_2 $\frac{x_1 + x_2}{2}$ x_1 d.) $N_1(\xi)$ e.)ξ 1 $N_2(\xi)$ f.)È

3.6. ábra. Egyváltozós izoparametrikus elem

is képezhető mivel a rúd (vonal) elem hossza $L=x_2-x_1\neq 0$. Ilymódon az x és ξ között kölcsönös, egyértelmű függvénykapcsolat írható fel, röviden az x-et a ξ rendszerbe, vagy fordítva ξ -t az x rendszerbe képezzük le. A ξ-t naturális, vagy természetes koordinátának is szokásos nevezni.

Vizsgálva az $N_i(\xi)$ függvényt látjuk, hogy áll

$$N_i(\xi_j) = \begin{cases} 1 & \text{ha} & i=j\\ 0 & \text{ha} & i\neq j \end{cases}, \quad i = 1, 2, \ j = 1, 2 \tag{3.2-c}$$

továbbá

$$\sum_{i=1}^{2} N_i(\xi) = 1 .$$
 (3.2-d)

A fentieket általánosítva, az $x = x(\xi)$ leképzést oly módon is fel lehet építeni, hogy további belső pontokat veszünk fel a (3.2-c, 3.2-d) feltételek betartása mellett (lásd 3.7. ábra)

$$\left. \begin{array}{l} N_{3}(\xi) = 1 - \xi^{2} \\ N_{1} = f_{1} - \frac{1}{2}N_{3} = -\frac{\xi}{2}(1 - \xi) \\ N_{2} = f_{2} - \frac{1}{2}N_{3} = \frac{\xi}{2}(1 + \xi) \end{array} \right\}$$
(3.2-e)

Egy belső 3-as jelű csomópont felvételével $N_3(\xi) = 1 - \xi^2$ parabolának felel meg, míg az N_1 -t a belső csomóponton való áthaladás miatt az f_1 lineáris függvény és az N_3 lineáris kombinációjából határozhatjuk meg, nevezetesen az f_1 -ből N_3 -nak a felét le kell vonni. Hasonlóan járunk el N_2 esetén is (3.7. ábra). Az ilyen típusú függvényeket Lagrange-féle polinomoknak szokás nevezni.

A rúdelem u elmozdulásmezejének közelítésére használjuk fel az $x = x(\xi)$ leképzésnél használatos $N_i(x)$ függvényeket, amelyeket a továbbiakban próbafüggvényeknek, alakfüggvényeknek fogunk nevezni [4,5].



VEM alapjai

Egyváltozós feladatok $\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 71 \triangleright$

Tartalom | Tárgymutató



3.7. ábra. Háromcsomópontú elem alakfüggvényei

Ilymódon

$$u = u(\xi) = \sum_{i} N_i(\xi) u_i \tag{3.2-f}$$

ahol u_i - a rúdelem icsomópontjában lévő elmozdulás értéke. Nyilvánvaló, hogy

$$u(\xi_j) = u_j = \sum_i N_i(\xi_j) u_i$$

azonosság értelemben állnia kell a (3.2-c) alatti összefüggésnek.

Komplettnek (teljesnek) nevezzük az alakfüggvényeket, ha (egydimenziós feladatról lévén szó) a csomóponti elmozdulás tetszőleges lineáris polinomon

$$u_i = u(x_i) = c_1 + c_2 x_i \tag{3.2-g}$$

keresztüli képzése maga után vonja a mező ugyanazon – tetszőleges lineáris – polinomon keresztüli

$$u(x) = c_1 + c_2 x \tag{3.2-h}$$

alakú leírását. Vagyis

 $u(\xi) = \sum_{i} N_i(\xi)(c_1 + c_2 x_i) = c_1 \sum_{i} N_i(\xi) + c_2 \sum_{i} N_i(\xi) x_i$ (3.2-i)

amiből a (3.2-h)-vel való összehasonlítás eredményeképpen

$$\sum_{i} N_i(\xi) = 1, \quad x = \sum_{i} N_i(\xi) x_i$$

következik. Ez azt jelenti, hogy ha a végeselemes felosztást egyre jobban sűrítjük, akkor az egzakt megoldás és annak deriváltja közelítőleg állandó az elemen belül, vagyis az alakfüggvényeknek állandó és lineáris tagot tartalmaznia kell. Következéskép az elemnek tartalmaznia kell a merevtestszerű mozgás leírását és az állandó értékű alakváltozási állapotot.

Tartalom | Tárgymutató

VEM alapjai

Tartalom | Tárgymutató

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 72 \triangleright$

Ezek után - lineáris elemet vizsgálva - építsük fel az elem merevségi mátrixát. A rúdelem alakváltozási energiája

$$U = \frac{1}{2} \int \sigma \varepsilon \, dV = \frac{1}{2} \int_{0}^{L} AE(\varepsilon)^2 dx$$
(3.2-j)

továbbá a fajlagos nyúlás

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{2}(1-\xi)u_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)u_2\right]\frac{d\xi}{dx} = \frac{u_2 - u_1}{2}\frac{d\xi}{dx}.$$
 (3.2-k)

Mivel

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{2} (1-\xi)x_1 + \frac{1}{2} (1+\xi)x_2 \right] = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{L}{2}$$
(3.2-l)

úgy

$$\varepsilon = \frac{u_2 - u_1}{L} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{B} \mathbf{q}$$
 (3.2-m)

Ily módon

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} AE \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \frac{L}{2} d\xi \mathbf{q}$$

amiből a rúdelem merevségi mátrixa

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
(3.2-n)

@@

3.3. Kompatibilis elmozdulási elemmodell

3.3.1. Az elmozdulásmező közelítésének felépítése, csomóponti elmozdulás vektor

A fentiekben a rúdelemeknél tett megfontolások alapján általánosítani óhajtjuk ismereteinket.

Végeselem-módszer alkalmazásakor első lépésben a tartományt véges kiterjedésű részekre ún. elemekre bontjuk. Egy test véges számú felülettel határolt részét *végeselemnek* nevezzük.

Az elem határfelületén vagy belsejében kiválasztott végesszámú pontok sokaságát *csomópont*nak fogjuk hívni. Látni fogjuk, hogy ezen pontok kitűntetett jelentőségűek, hisz a pontokban fellépő elmozdulás, vagy ezek deriváltja fog szerepelni ismeretlenként a teljes potenciális energia minimum variációs elvhez kapcsolódó algebrai egyenletrendszerben. A végeselem definíciójából adódóan a szomszédos elemek azonos dimenziójú részekkel
VEM alapjai	Kompatibilis elmozdulási elemmodell
Tartalom Tárgymutató	$\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 73 \triangleright$

csatlakoznak egymáshoz: lap lappal, él éllel, csomópont csomóponttal. A csomópontokbeli elmozdulással kapcsolatos ismeretlen paramétereket magukban foglaló vektort csomóponti általánosított elmozdulásvektornak fogjuk nevezni.

Az elemeket sorszámozzuk. Elemenként külön – külön közelítjük az elmozdulást úgy, hogy az a teljes testre kinematikailag lehetséges elmozdulássá legyen illeszthető. Ez azt jelenti, hogy kinematikailag lehetséges elmozdulás közelítésből indulunk ki, azaz teljesül az elemek határán az illesztési vagy kinematikai peremfeltétel, továbbá a deriváltak szakaszonként (elemenként) folytonosak. A közelítő függvényeket többnyire az elemhez illeszkedő lokális koordinátarendszerben szokás megadni. Illesztés céljából az elemek határán jelöljünk ki pontokat ún. csomópontokat. Ezeket is sorszámozzuk. Az egymáshoz kapcsolódó elemek egybeeső csomópontjainak elmozdulásait fogjuk azonossá tenni. A csomópontok számát és a közelítés típusát úgy kell megválasztani, hogy a csomóponti elmozdulások azonossága biztosítsa a teljes érintkezési tartományon a folytonosságot. Az így felépített elemet kompatibilis elmozdulási elemnek fogjuk nevezni [2].

Legyen az e jelű i,j,k csomópontokkal rendelkező elem csomóponti elmozdulásainak vektora a következő:

$$\mathbf{q}^{eT} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i^{eT} & \mathbf{q}_j^{eT} & \mathbf{q}_k^{eT} \dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_i^{eT} = \begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i \end{bmatrix}^e$$
(3.48)

Az elmozdulásmező közelítését az alábbi összefüggés írja le

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{u}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\mathbf{q}^e = \mathbf{N}^e\mathbf{q}^e \tag{3.49}$$

ahol az \mathbf{N}^e mátrixot az elem approximációs mátrixának nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy \mathbf{N}^e a csomópontok szerint felbontható, partícionálható:

$$\mathbf{N}^{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{i} & \mathbf{N}_{j} & \mathbf{N}_{k} & \dots \end{bmatrix}^{e}$$
(3.50)

ahol N_i az *i*-dik csomóponthoz tartozó approximációs mátrix.

Az elmozdulásmező közelítéséből kiindulva származtathatók az elem további szilárdsági jellemzői.

3.3.2. Alakváltozás-, feszültségi vektor, terhelési vektorok

Az alakváltozási tenzor szimmetriáját felhasználva a tenzor elemeiből térbeli feladatoknál (3D-s feladat) 6 méretű, síkbeli feladatoknál 3 méretű vektor állítható elő. Síkbeli esetet tekintve Tartalom | Tárgymutató

$$\Rightarrow \triangleleft 74 \triangleright$$

$$\mathbf{A}(x,y) \Rightarrow \mathbf{\varepsilon}^{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x} \\ \varepsilon_{y} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^{e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}^{e} = \\ = \partial \mathbf{u}^{e} (\mathbf{x}) = \partial \mathbf{N}^{e} (\mathbf{x}) \mathbf{q}^{e} = \mathbf{B}^{e} (\mathbf{x}) \mathbf{q}^{e} \quad (3.51)$$

ahol a \mathbf{B}^e mátrix is felbontható a csomópontok szerint:

$$\mathbf{B}^{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{i}^{e} & \mathbf{B}_{j}^{e} & \mathbf{B}_{k}^{e} & \dots \end{bmatrix}$$
(3.52)

Feszültségmező leírására hasonlóan értelmezhető a 3 méretű feszültségvektor:

$$\boldsymbol{T} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{eT} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^e$$
(3.53)

illetve a (2.124) alatti Hooke-törvény alapján ez felírható a csomóponti elmozdulásvektorral is:

$$\boldsymbol{\sigma}^{e} = \mathbf{D} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{e} - \boldsymbol{\varepsilon}_{0}^{e}\right) + \boldsymbol{\sigma}_{0}^{e} = \mathbf{D} \left(\mathbf{B}^{e} \mathbf{q}^{e} - \boldsymbol{\varepsilon}_{0}^{e}\right) + \boldsymbol{\sigma}_{0}^{e}$$
(3.54)

ahol **D** az anyagjellemzők mátrixa., továbbá ε_0^e -a hőhatásból származó kezdeti alakváltozások vektora, σ_0^e kezdeti feszültségek vektora.

A későbbiek miatt érdemes a terhelési vektorokat is oszlopvektorba rendezni. A peremen és a térfogaton megoszló terhelések oszlopvektorai a következők:

$$\boldsymbol{p} \Rightarrow \mathbf{p}^{e} = \begin{bmatrix} p_{x} \\ p_{y} \end{bmatrix}^{e} , \ \rho \boldsymbol{k} \Rightarrow \rho \mathbf{k}^{e} = \begin{bmatrix} \rho k_{x} \\ \rho k_{y} \end{bmatrix}^{e}$$
(3.55)

3.3.3. Az elem potenciális energiája

A végeselem-módszer másik fontos lépése egy hibaelv megválasztása, amely lehetővé teszi az állandók meghatározását. Hibaelvként a potenciális energia minimuma elvhez tartozó variációs elvet választjuk.

A továbbiakban előállítjuk az elem potenciális energiáját a közelítő mezők felhasználásával. Az előző fejezetben bevezetett vektorokkal az e jelű elemre a (2.126) figyelembevételével felírható potenciális energia:

$$\Pi_{p}^{e} = \frac{1}{2} \int_{V^{e}} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{eT} - \boldsymbol{\varepsilon}_{0}^{eT} \right) \mathbf{D}^{e} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{e} - \boldsymbol{\varepsilon}_{0}^{e} \right) dV - \int_{A_{p}^{e}} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{p}^{e} dA - \int_{V^{e}} \mathbf{u}^{eT} \rho \mathbf{k} dV + \int_{V^{e}} \boldsymbol{\varepsilon}^{eT} \boldsymbol{\sigma}_{0}^{e} dV$$
(3.56)

VEM alapjai	Elemek illesztése
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 75 \triangleright$

A csomóponti elmozdulásokat bevezetve a végesdimenzióban felírt potenciális energia:

$$\Pi_p^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{eT} \mathbf{f}^e$$
(3.57)

Ebben a kifejezésben előforduló \mathbf{K}^e elemi merevségi mátrix és \mathbf{f}^e elemi terhelési vektor az alábbi szerkezetű:

$$\mathbf{K}^{e} = \int_{V^{e}} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}^{e} \mathbf{B}^{e} dV =$$

$$= \int_{V^{e}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{i}^{eT} \\ \mathbf{B}_{j}^{eT} \\ \vdots \end{bmatrix} \mathbf{D}^{e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{i}^{e} & \mathbf{B}_{i}^{e} & \dots \end{bmatrix} dV = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^{e} & \mathbf{K}_{ij}^{e} & \dots \\ \mathbf{K}_{ji}^{e} & \mathbf{K}_{jj}^{e} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$
(3.58)

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}^e_p + \mathbf{f}^e_{
ho \mathbf{k}} + \mathbf{f}^e_{arepsilon_0} + \mathbf{f}^e_{\sigma_0}$$

$$\mathbf{f}_{p}^{e} = \int_{A_{p}^{e}} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{p}^{e} dA \quad , \quad \mathbf{f}_{\rho \mathbf{k}}^{e} = \int_{V^{e}} \mathbf{N}^{eT} \rho \mathbf{k}^{e} dV \quad ,$$
$$\mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{0}}^{e} = \int_{V^{e}} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}^{e} \boldsymbol{\varepsilon}_{0}^{e} dV \quad , \quad \mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}_{0}}^{e} = -\int_{V^{e}} \mathbf{N}^{eT} \boldsymbol{\sigma}_{0}^{e} dV \quad (3.59)$$

Nyilvánvaló, hogy a merevségi mátrix szimmetrikus, továbbá a merevségi és terhelési mátrix csomópontok szerint felbontható, partícionálható. Az elem merevségi mátrixa az elem alakváltozási energiájával kapcsolatos. Ezért ha a q^e az elem merevtestszerű mozgását írja le, akkor az alakváltozási energia zérus, egyébként pedig pozitív:

$$\mathbf{q}^{eT}\mathbf{K}^{e}\mathbf{q}^{e} \ge 0 \tag{3.60}$$

amiből az következik, hogy a mátrix elfajuló.

3.4. Elemek illesztése, a rendszer merevségi mátrixa, redukált terhelési vektora, kinematikai peremfeltétel figyelembevé-tele

A potenciális energia minimum elv alkalmazhatóságánál az elemek közötti elmozdulásmező folytonosságát az approximációnak biztosítani kell. Tételezzük fel, hogy ez fennáll, és ily módon az elemek csatolásánál, az elemek

VEM alapjai	Elemek illesztése
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 76 \triangleright$

illesztésénél a közös csomópontba eső elmozdulások azonosságát elegendő már csak megkövetelni.

Legyen példaként az ijelű csomópontokba befutó elemek jele rendre $e,\ e+1$ illetves.Ekkor az elmondottak szerint az illesztésnél

$$\mathbf{q}_i^e = \mathbf{q}_i^{e+1} = \mathbf{q}_i^s = \mathbf{q}_i \tag{3.61}$$

vagyis azt is mondhatjuk, hogy a megkülönböztető felső index elhagyható.

A vizsgált rendszer teljes potenciális energiája az elemek energiáinak összegéből (N_e .az elemek száma) illetve a W^K koncentrált csomóponti erők munkájából áll elő:

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^{N_e} \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K} \mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{eT} f^e \right) - W^k = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f}$$
(3.62)

Ez a kifejezés értelmezi a szerkezet **q** csomóponti elmozdulás vektorát, terhelési vektorát, valamint a szerkezet **K** merevségi mátrixát.

A terhelés munkáját képezve, a szerkezet csomóponti terhelési és elmozdulási vektora az illesztési feltétel alapján

$$\sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{f}^e + W^K = \dots + \mathbf{q}_i^{eT} \mathbf{f}_i^e + \mathbf{q}_i^{e+1T} \mathbf{f}_i^{e+1T} + \mathbf{q}_i^{sT} \mathbf{f}_i^s + \dots + \mathbf{q}_i^T \mathbf{f}_i^K = \\ = \dots + \mathbf{q}_i^T \left(\underbrace{\mathbf{f}_i^e + \mathbf{f}_i^{e+1} + \mathbf{f}_i^s + \mathbf{f}_i^K \mathbf{f}_i}_{\mathbf{f}_i} \right)$$

alakban képezhető, azaz a rugalmas rendszer csomóponti redukált terhelési vektorának *i*-dik csomópontra vonatkozó része

$$\mathbf{f}_i = \sum_{e \in i} \mathbf{f}_i^e + \mathbf{f}_i^K \tag{3.63}$$

Látható, hogy az összegzést mindazon elemekre el kell végezni, amelyek az *i* jelű csomópontot tartalmazzák és hozzá kell adni a csomópontban ható koncentrált terhelés \mathbf{f}_i^K vektorát.

Itt

$$\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T & \mathbf{q}_2^T & \dots & \mathbf{q}_{ncs}^T \end{bmatrix}$$
(3.64)

$$\mathbf{f}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^T & \mathbf{f}_2^T & \dots & \mathbf{f}_{ncs}^T \end{bmatrix}$$
(3.65)

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 76 \triangleright$

VEM alapjai	Elemek illesztése
Tartalom Tárgymutató	$\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 77 \triangleright$

ncs pedig a szerkezet csomópontjainak száma.

A szerkezet merevségi mátrixa az alakváltozási energiával kapcsolatos:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{q}^e \mathbf{K} \mathbf{q}^e$$

ahol

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ij} \end{bmatrix} \quad i, j = 1, \dots, ncs \quad \mathbf{K}_{ij} = \sum_{e \in i, j} \mathbf{K}_{ij}^e$$
(3.66)

A bizonyítást [2] itt mellőzve, az összegzés alapján ij indexű blokk mindazon elemeknél szerepel, amelyek tartalmazzák egyidejűleg az i és a j jelű csomópontot.

A csomóponti elmozdulások számítása a potenciális energia variációjának eltűnése alapján történik. Ennek megfelelően

$$\delta \Pi_p = \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial \Pi_p}{\partial \mathbf{q}} = 0 \tag{3.67}$$

azaz

$$\delta \mathbf{q}^T \left(\mathbf{K} \, \mathbf{q} - \mathbf{f} \right) = 0 \tag{3.68}$$

ahol δq a kinematikai peremfeltételt kielégítő csomóponti elmozdulásvektor variációja.

Legyen $\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_{ju}$ adott csomóponti elmozdulás, mely azt jelenti, hogy $\delta \mathbf{q}_j = \mathbf{0}$ Ekkor a (3.68) egyenletben a *j*-edik blokksor 0-val szorzódik. (Valójában a variációs elv értelmében ez az egyenlet nem létezik).

Az adott elmozdulás hatása a –
 $\mathbf{K}_{ij}\mathbf{q}_{ju}$ taggal a jobboldalon kinematikai teherként jelenik meg.

Hasonló eredményre vezet a kinematikai előírás rugalmas megtámasztással való biztosítása. Ekkor megfelelően nagy rugóállandót kell alkalmazni [2].

Az egyenletek számát megtartva az alábbi struktúra is szolgáltatja a megoldást:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \dots & \mathbf{0} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}^{T} & \dots & \mathbf{E} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{K}_{1,ncs} & \dots & \mathbf{0} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{1} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{j} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{ncs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1} - \mathbf{K}_{1j} \mathbf{q}_{ju} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{ju} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{ncs} - \mathbf{K}_{ncs,j} \mathbf{q}_{ju} \end{bmatrix}$$
(3.69)

VEM alapjai	Elemek illesztése
Tartalom Tárgymutató	$\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 78 \triangleright$

A K rangját megkapjuk, ha képezzük az összes ismeretlen és a merevtestszerű mozgás szabadságfokának a különbségét. A csomóponti paraméterek megkötése révén, figyelembevéve a kinematikai előírásokat, megszűnik a merevtestszerű mozgás lehetősége. A megoldandó egyenletrendszert ekkor is

$$\mathbf{Kq} = \mathbf{f} \tag{3.70}$$

alakban írjuk fel, azzal a megjegyzéssel, hogy az együttható mátrix és terhelési vektor már tartalmazza a kinematikai előírásokat is.

Az egyenletrendszer jellemzői közül a nagy méretek miatt fontos az együttható mátrix zérustól különböző elemeinek elhelyezkedése. Az egyenletrendszer, a (3.66) alatti összegzés szabály miatt szalagszerkezetű, amelyet az alábbi ábra szemléltet:



3.8. ábra. K szalagszerkezete

Ez azt jelenti, hogy a zérustól különböző blokkok egy adott sávba esnek, amelyet az elemen lévő sorszámkülönbség maximális értéke határoz meg. Nagysága alapvetően a sorszámozástól függ.

3.3. feladat: Példaként tekintsük a következő végeselem felosztást (lásd. 3.9. ábra) és konstruáljuk meg a hozzá tartozó sematikus merevségi mátrixot 3.10. ábra.

Megoldás:

Itt látható, hogy a sávszélesség: főátló +5 elem. Ennél van kedvezőbb számozás is (3.11. ábra), mely egyúttal optimális számozást jelent (lásd. 3.12. ábra).

@@



3.9. ábra. Téglalap felosztása 3 elemre



3.10. ábra. K mátrix szerkezete



3.11. ábra. Optimális sorszámozás



3.12. ábra. K optimális szerkezetre

VEM alapjai	Elemek illesztése
Tartalom Tárgymutató	$\iff \Rightarrow \ \triangleleft 80 \ \triangleright$

Az egyenletrendszer megoldásának két nagy csoportja terjedt el a kereskedelmi végeselemes szoftverekben [3]:

Direkt eljárások: Gauss elimináció valamilyen alkalmazása, ez a technika kb. ≤ 100 ezer ismeretlenig megbízható, illetve elfogadható sebességű.

Iterációs megoldások: mátrixok szorzásával jutunk egyre közelebb a megoldáshoz.

Ez utóbbi eljárás előnye, hogy elegendő csak a zérustól különböző mátrix elemeket tárolni, így valójában érzéketlen a csomóponti sorszám kiosztására. Azonban a direkt megoldóknál az ún. feltöltődés miatt a sávon belül a zérus mátrix elemeket is szükséges tárolni.

A 3.13. ábra a legelterjedtebb tárolási struktúrákat szemlélteti. A frontális technikánál egyidőben nem készül el a teljes szerkezeti mátrix, csupán egy-egy blokkját találjuk meg a memóriában.



3.13. ábra. Mátrix tárolási formák lehetnek: félsáv blokkolva, aktív oszlop blokkolva, frontális technika (tárol elemi szinten)

A direkt megoldó eljárások előnybe részesülnek az olyan feladatok esetén, amikor a mátrix együtthatóinak nagyságrendje igen nagy különbséget mutat. Az ún. locking, azaz rossz mátrix kondicionáltság tipikusan ezt a helyzetet eredményezi. De ilyen feladatok lehetnek, pl. az érintkezési feladatok, héjfeladatok és az összenyomhatatlan tulajdonsággal rendelkező gumit tartalmazó problémák is.

$$U_{alakv.}^{1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_{1} & u_{2} \end{bmatrix}^{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1} \\ u_{2} \end{bmatrix}^{1} \frac{AE}{L^{1}}$$
(3.4-a)

^{3.4.} feladat: Vizsgáljuk az x, z síkban fekvő rácsos szerkezetet. A szerkezetre a 2-es pontban F_0 nagyságú koncentrált erő hat. Az 1-es pontban csuklós megfogás, a 3-as pontban vízszintes elmozdulást megengedő görgős támasz van. A rudak anyaga, keresztmetszete azonos. A rudakhoz kötött helyi koordinátarendszer ξ tengelye a kisebb sorszámú csomóponttól a nagyobbik felé mutat.

Megoldás: Az egyes rudak alakváltozási energiái a rúdhoz kötött helyi koordinátarendszerben az alábbiak (Az egyes mennyiségek melletti felső indexek az elemhez való tartozásra utalnak, nem hatványozást jelölnek!)

Tartalom | Tárgymutató

$$U_{alakv.}^{2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_{2} & u_{3} \end{bmatrix}^{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2} \\ u_{3} \end{bmatrix}^{2} \frac{AE}{L^{2}}$$
(3.4-b)

$$U_{alakv.}^{3} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_{1} & u_{3} \end{bmatrix}^{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1} \\ u_{3} \end{bmatrix}^{3} \frac{AE}{L^{3}}$$
(3.4-c)



3.14. ábra. Rácsos szerkezet a rudakhoz kötött $\xi^e \ (e=1,2,3)$ koordinátarendszer u^e rúdirányú elmozdulás

Itt L^e az e-dikrúd hosszát jelöli. A globálrendszerbeli elmozdulásokkal kifejezve a helyi rendszerbeli elmozdulásokat nyerjük, hogy

$$\bar{\mathbf{q}}^{1} = \begin{bmatrix} u_{1} \\ u_{2} \end{bmatrix}^{1} = \begin{bmatrix} 0 & | & 1 & | & 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 & | & 0 & | & 1 \end{bmatrix}^{1} \begin{bmatrix} U_{1} \\ W_{1} \\ U_{2} \\ W_{2} \end{bmatrix}^{1} = \mathbf{T}^{1} \mathbf{q}^{1}$$
(3.4-d)

$$\bar{\mathbf{q}}^2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \cos\beta & | & -\sin\beta & | & 0 \\ 0 & | & 0 & | & \cos\beta & | & -\sin\beta \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} U_2 \\ W_2 \\ U_3 \\ W_3 \end{bmatrix}^2 = \mathbf{T}^2 \mathbf{q}^2 \quad (3.4\text{-e})$$

$$\bar{\mathbf{q}}^{3} = \begin{bmatrix} u_{1} \\ u_{3} \end{bmatrix}^{3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{3} \begin{bmatrix} U_{1} \\ W_{1} \\ U_{3} \\ W_{3} \end{bmatrix}^{3} = \mathbf{T}^{3} \mathbf{q}^{3}$$
(3.4-f)

Ezek után a rudak alakváltozási energiája a globálrendszerbeli csomóponti elmozdulásokon keresztül

$$U_{alakv.}^{1} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{1T} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q}^{1} \frac{AE}{L^{1}} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{1T} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{1} & \mathbf{K}_{12}^{1} \\ \mathbf{K}_{21}^{1} & \mathbf{K}_{22}^{1} \end{bmatrix} \mathbf{q}^{1}$$
(3.4-g)

$$U_{alakv.}^{2} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{2T} \begin{bmatrix} c.c & -c.s & -c.c & c.s \\ -c.s & s.s & c.s & -s.s \\ -c.c & c.s & c.c & -c.s \\ c.s & -s.s & -c.s & s.s \end{bmatrix} \mathbf{q}^{2} \frac{AE}{L^{2}} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{2T} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{22}^{2} & \mathbf{K}_{23}^{2} \\ \mathbf{K}_{32}^{2} & \mathbf{K}_{33}^{2} \end{bmatrix} \mathbf{q}^{2} \mathbf{q}^{2}$$
(3.4-h)

Tartalom | Tárgymutató

Tartalom | Tárgymutató

ahol $c = \cos \beta$, $s = \sin \beta$

$$U_{alakv.}^{3} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{3T} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q}^{3} \frac{AE}{L^{3}} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{3T} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{3} & \mathbf{K}_{13}^{3} \\ \mathbf{K}_{31}^{3} & \mathbf{K}_{33}^{3} \end{bmatrix} \mathbf{q}^{3}$$
(3.4-i)

melyben $\mathbf{K}_{ij}^{e}(2,2)$ méretű.

A teljes rendszer alakváltozási energiáját a rudanként előállított alakváltozási energiák összegeként kapjuk meg, vagyis

$$U_{alakv} = \sum_{e=1}^{3} U^e_{alakv.} \tag{3.4-j}$$

Definiálva a rendszer csomóponti elmozdulásvektorát

$$\mathbf{q}^{T}_{(1,6)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{1T}_{(1,2)}, \ \mathbf{q}^{2T}_{(1,2)}, \ \mathbf{q}^{3T}_{(1,2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & W_1 & U_2 & W_2 & U_3 & W_3 \end{bmatrix}$$
(3.4-k)

a (3.4-j) alatti energia (3.4-g)-(3.4-i) figyelembevételével tömören az alábbi formában állítható elő

$$U_{alakv.} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{1} \\ \mathbf{q}^{2} \\ \mathbf{q}^{3} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{1} + \mathbf{K}_{11}^{3} & \mathbf{K}_{12}^{1} & \mathbf{K}_{13}^{3} \\ \mathbf{K}_{21}^{1} & \mathbf{K}_{22}^{1} + \mathbf{K}_{22}^{2} & \mathbf{K}_{23}^{2} \\ \mathbf{K}_{31}^{3} & \mathbf{K}_{32}^{2} & \mathbf{K}_{33}^{2} + \mathbf{K}_{33}^{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{1} \\ \mathbf{q}^{2} \\ \mathbf{q}^{3} \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{2} \mathbf{q}^{T} \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (3.4-1)$$

ami megfelel a 3.4 pontban ismertetett (3.66) alatti merevségi mátrix előállítási összefüggés adta szabálynak.

A vizsgált szerkezetre a 2-es csomópontban ható F_0 erő okozta külső terhelés munkája

$$W^{K} = F_{0} \cos \alpha \cdot U_{2} + F_{0} \sin \alpha \cdot W_{2} \equiv \mathbf{q}^{T} \mathbf{f}^{K}$$
(3.4-m)

ahol

$$\mathbf{f}^{K,T} = [0, 0, F_0 \cos \alpha, F_0 \sin \alpha, 0, 0]$$

A szerkezet teljes potenciális energiája

$$\Pi_p = U_{alakv} - W^K \tag{3.4-n}$$

míg a stacionér helyzetet kijelölő teljes potenciális energia első variációja

$$\delta \Pi_p = \delta U - \delta W^K = 0 , \qquad (3.4-o)$$

azaz

$$\delta \Pi_p = \delta \mathbf{q}^T \left(\mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{f}^K \right) = 0 \tag{3.4-p}$$

ahol $\delta\,\mathbf{q}^T$ - a csomóponti elmozdulások megengedett variációja. Jelen esetünkben a kinematikai peremfeltétel

$$U_1 = W_1 = W_3 = 0 \tag{3.4-q}$$

amiből az követekezik, hogy

$$\delta \mathbf{q}^T = [0, 0, \delta U_2, \delta W_2, \delta U_3, 0] \tag{3.4-r}$$

ezt figyelembevéve, a (3.4-p) alatti egyenletrendszert oly módon kapjuk meg, hogy a csatolt rendszerre vonatkozó egyenlet (zárójeles kifejezés) 1., 2., 6. sorát töröljük, s mivel (3.4-q) is fennáll, a $\mathbf{K} \mathbf{q}$ szorzásnál elegendő a \mathbf{K} mátrix 3., 4. és 5. oszlopát megtartani.

Tartalom | Tárgymutató

Tehát

$$\begin{bmatrix} 0\\0\\\delta U_2\\\delta W_2\\\delta U_3\\0\end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}\\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\\0\\U_2\\W_2\\U_3\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0\\0\\F_0\cos\alpha\\F_0\sin\alpha\\0\end{bmatrix} \right) = 0$$
(3.4-s)

vagyis a végső megoldandó egyenletrendszer

$$\tilde{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} U_2 \\ W_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \cos \alpha \\ F_0 \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$
(3.4-t)

ahol (3.4-s),(3.4-l),(3.4-g),(3.4-h),(3.4-i) figyelembevételével

$$\tilde{\mathbf{K}} = AE \begin{bmatrix} U_2 & W_2 & U_3 \\ \frac{c.c}{L^2} & -\frac{c.s}{L^2} & -\frac{c.c}{L^2} \\ -\frac{c.c}{L^2} & \frac{1}{L^1} + \frac{s.s}{L^2} & \frac{c.s}{L^2} \\ -\frac{c.c}{L^2} & \frac{c.s}{L^2} & \frac{c.c}{L^2} + \frac{1}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ W_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$
(3.4-u)

Konkrét méreteket választva: $\alpha=60^\circ,$
 $L^2=2000\,mm,$ nyerjük, hogy $c=\cos 60=0.5,$
 $s=\sin 60=\sqrt{3}/2$ és így $L^1=\sqrt{3}\cdot 5000\,mm,$
 $L^3=1000\,mm,$ továbbá

$$\tilde{\mathbf{K}} = \frac{AE}{1000} \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} + 1 \end{bmatrix}$$
(3.4-v)

Mivel AE mértékegysége $[mm^2N/mm^2] = [N]$, a hosszúságé [mm], úgy a $\tilde{\mathbf{K}}$ elemeinek mértékegysége [N/mm].

Legyen $\alpha=0,$
 $F_0=1000$ N. A (3.4-t) alatt három ismeretlent tartalmazó algebrai egyenlet
rendszer megoldása (3.4-v) felhasználásával

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ W_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \frac{F_0 10^3}{AE} \begin{bmatrix} 9+3\sqrt{3} \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad [mm] \tag{3.4-w}$$

Ezek után az egyes rudakban fellépő rúderő a rúdhoz kötött koordináta-rendszerben mért fajlagos nyúlás (rúd megnyúlása/rúd kezdeti hossza) $\varepsilon^e = \Delta u^e/L^e$ felhasználásával $N^e = A\sigma^e = AE\varepsilon^e$, azaz (3.4-d),(3.4-f)-re is tekintettel (a felső indexek nem hatványozást jelölnek!)

$$N^{1} = AE \frac{W_{2}}{L^{1}} = \sqrt{3}F_{0}, \quad N_{2} = AE \left(\frac{(u_{3}-u_{2})}{L}\right)^{2}$$

$$N^{2} = \frac{AE}{L^{2}} \left[\cos\beta \cdot (U_{3}-U_{2}) + \sin\beta \cdot W_{2}\right] = -2F_{0}$$

$$N^{3} = \frac{AE}{T^{3}}U_{3} = F_{0}$$

$$(3.4-x)$$

Mivel a csomóponti elmozdulások az *AE* -vel fordítottan, a rúderők pedig egyenesen arányosak, végezetül a rúderők függetlenek az *AE* értékétől, ami természetesen egy statikailag határozott szerkezetnél fenn kell, hogy álljon. A statikában tanult csomóponti módszerrel könnyen meg tudjuk határozni a rudakban fellépő belső erőket, amelyek természetesen azonosak lesznek a példában bemutatott <u>elmozdulásmódszeren</u> alapuló eljárással kapottakkal. (Elmozdulásmódszernek nevezzük azt a módszert, amikor a peremérték feladathoz rendelt algebrai egyenlet-rendszerben ismeretlenként az elmozdulások szerepelnek, s a további mechanikai mennyiségek ezek kiszámítása után, azok felhasználásával számolhatók csak.) Ennek elvégzését azonban már az olvasóra bízzuk.

@@

3.5. feladat: Vizsgáljuk a 3.15. ábrán vázolt hajlított-nyírt tartót, amely a reá ható lineárisan megoszló $p_{\varsigma} = p_{\varsigma}(\xi)$ terhelés hatására a síkban fog deformálódni.

Megoldás: A rúdvégek elmozdulását jelölje w_1 és w_2 , míg a keresztmetszet szögelfordulását

$$w_1' = \left. \frac{dw}{d\xi} \right|_1$$
, $w_2' = \left. \frac{dw}{d\xi} \right|_2$.

A rúd legyen prizmatikus. Hajlítási merevsége $I_{\eta}E =$ áll. A (3.23) alapegyenlet értelmében

$$I_{\eta}Ew^{IV} = p_{\zeta} \tag{3.5-a}$$

míg a megoszló terhelés



3.15. ábra. Lineárisan megoszló terhelésű rúd

$$p = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{L}\xi$$
(3.5-b)

alakban írható fel.

Az (3.5-a) egyenlet megoldása

$$w = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3 + c_4\xi^4 + c_5\xi^5$$
(3.5-c)

ahol a c_4 és c_5 állandók a p-től függő partikuláris megoldáshoz tartoznak, azaz

$$I_{\eta}E(24c_4 + 120c_5\xi) = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{L}\xi$$

vagyis

$$c_4 = \frac{p_1}{24I_\eta E}, \quad c_5 = \frac{p_2 - p_1}{120I_\eta EL}.$$
 (3.5-d)

A (3.5-c) alatti polinom első négy tagja az (3.5-a) egyenlet homogén megoldása. A $c_0,...,c_3$ állandókat oly módon kívánjuk meghatározni, hogy azok helyett a rúdvégeken szereplő elmozdulások és szögelfordulások szerepeljenek.

Az elmozdulásmező deriváltja

$$w' = c_1 + 2c_2\xi + 3c_3\xi^2 + 4c_4\xi^3 + 5c_5\xi^4.$$
(3.5-e)

A kinematikai paramétereket egy vektorba gyűjtve, írhatjuk, hogy

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_1' \\ w_2 \\ w_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ L^4 & L^5 \\ 4L^3 & 5L^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 \\ c_5 \end{bmatrix}$$
(3.5-f)

Tartalom | Tárgymutató

$$\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 84 \triangleright$$

Tartalom | Tárgymutató

ami tömörebben

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{G} \, \mathbf{c} + \check{\mathbf{G}} \, \check{\mathbf{c}} \,.$$
 (3.5-g)

alakban is felírható. Mivel $\det \mathbf{G} \neq \mathbf{0}$, úgy \mathbf{G}^{-1} létezik

$$\mathbf{G}^{-1} = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} L^3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & L^3 & 0 & 0\\ -3L & -2L & 3L & -L^2\\ 2 & L & -2 & L \end{bmatrix}$$
(3.5-h)

és így

$$\mathbf{c} = \mathbf{G}^{-1}\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{G}^{-1}\check{\mathbf{G}}\check{\mathbf{c}}$$
(3.5-i)

azaz az elmozdulásmező

$$w = \begin{bmatrix} 1 \ \xi \ \xi^2 \ \xi^3 \end{bmatrix} \mathbf{c} + \begin{bmatrix} \xi^4 \ \xi^5 \end{bmatrix} \mathbf{\check{c}} \equiv \boldsymbol{\Psi}^T(\xi) \mathbf{c} + \mathbf{\check{\Psi}}^T(\xi) \mathbf{\check{c}}$$
$$w = \boldsymbol{\Psi}^T(\xi) \mathbf{G}^{-1} \mathbf{\bar{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{\check{\Psi}}^T(\xi) - \boldsymbol{\Psi}^T(\xi) \mathbf{G}^{-1} \mathbf{\check{G}} \end{bmatrix} \mathbf{\check{c}} \equiv \mathbf{n}^T(\bar{\xi}) \mathbf{\bar{q}} + \mathbf{\check{n}}^T(\bar{\xi}) \mathbf{\check{c}}$$
(3.5-j)

A műveleteket elvégezve, kapjuk, hogy

$$\mathbf{n}^{T}(\bar{\xi}) = \left[1 - 3\bar{\xi}^{2} + 2\bar{\xi}^{3}, L\left(\bar{\xi} - 2\bar{\xi}^{2} + \bar{\xi}^{3}\right), 3\bar{\xi}^{2} - 2\bar{\xi}^{3}, L\left(\bar{\xi}^{3} - \bar{\xi}^{2}\right)\right]$$
(3.5-k)

$$\breve{\mathbf{n}}^{T}(\bar{\xi}) = \left[L^{4} \left(\bar{\xi}^{4} - 2\bar{\xi}^{3} + \bar{\xi}^{2} \right), L^{5} \left(\bar{\xi}^{5} - 3\bar{\xi}^{3} + 2\bar{\xi}^{2} \right) \right], \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{L}.$$
(3.5-l)

Az $\mathbf{n}(\xi)$ -ben szereplő függvények az ún. Hermite-féle polinomoknak felelnek meg. Ezen polinomok a függvény értéken túl a derivált folytonosságát is biztosítják a rúdvégeken, ami hajlított tartóknál elengedhetetlen.

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a rúdvégeken

$$\breve{\mathbf{n}}^T(\bar{\xi}=0)=\breve{\mathbf{n}}^T(\bar{\xi}=1)=0\;,\quad \left.\frac{d\breve{\mathbf{n}}^T}{Ld\bar{\xi}}\right|_0=\left.\frac{d\breve{\mathbf{n}}^T}{Ld\bar{\xi}}\right|_L=0$$

aminek nyilván fenn kell állnia, hisz a w (3.5-j) alatti kifejezésében az első tag $(\mathbf{n}^T(\bar{\xi})\mathbf{\bar{q}})$ hordozza a rúdvégek elmozdulásának és szögelfordulásának hatását, ezt nem "ronthatja" el az $\mathbf{\check{n}}^T(\bar{\xi})\mathbf{\check{c}}$ tag.

Az itt bemutatott lépéssorozat a rúd – elmozdulásmódszeren alapuló – végeselem elmozdulásmező felépítésének felel meg.

@@

3.6. feladat: Vizsgáljuk a 3.16. ábrán vázolt síkbeli rudat különböző megtámasztások és terhelés esetén. Legyen $\Delta T_{\zeta} = \Delta T = const.$

Megoldás:

A megoldást

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}^T \left(\overline{\mathbf{K}}_{qq} \; \bar{\mathbf{q}} - 2\bar{\mathbf{f}}_q \right) \tag{3.6-a}$$

minimalizálásával érjük el, vagyis a

$$\delta \overline{\mathbf{q}}^T \left(\overline{\mathbf{K}}_{qq} \ \overline{\mathbf{q}} - \overline{\mathbf{f}}_q \right) = 0 \tag{3.6-b}$$

variációs egyenletből származó egyenletrendszer megoldásából. Mivel (3.6-b)-ben $\delta \overline{\mathbf{q}}^T$ az általánosított csomóponti elmozdulás kinematikailag megengedett variációja, így a megtámasztástól függően, más és más egyenleteket kell megtartanunk a (3.6-b)-ben szereplő zárójeles kifejezésben.



3.16. ábra. Síkbeli rúd

Az alább vázolt egyenletekben a jobboldalon szereplő terhelési koordináták a koncentrált erőkből és nyomatékokból, a p megoszló terhelésből és a ΔT keresztirányú hőmérsékletből származnak. A 3.17. ábra négy esetet tüntet fel.

a.) eset: $(u_i = w_i = \varphi_{\eta i} = 0)$, vagyis

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0\\ 0 & \frac{12IE}{L^3} & \frac{6IE}{L^2}\\ 0 & \frac{6IE}{L^2} & \frac{4IE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ w_j \\ \varphi_{\eta j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_j + \frac{pL}{2} \\ M_j + \frac{pL^2}{12} + IE\alpha \cdot \Delta T \end{bmatrix}$$
(3.6-c)

A megoldás:

$$\begin{split} u_j &= 0, \\ w_j &= \frac{F_j L^3}{3IE} - \frac{M_j L^2}{2IE} + \frac{pL^4}{8IE} - \frac{\alpha \cdot \Delta T}{2} L^2 \\ \varphi_{\eta j} &= -\frac{F_j L^2}{2IE} + \frac{M_j L}{IE} - \frac{pL^3}{6IE} + \alpha \cdot \Delta T \cdot L \end{split}$$

b.) eset: A (3.6-c) egyenletrendszer második sorát törülve (mivel $w_j = 0$) nyerjük, hogy

$$u_j = 0$$

$$\varphi_{\eta j} = \frac{M_j}{4IE} L + \frac{pL^3}{48IE} + \frac{\alpha \Delta T}{4} L$$

c.) eset: A (3.6-c) egyenletrendszerben $\varphi_{\eta j} = 0$, így

$$u_j = 0$$

$$w_j = \frac{F_j}{12IE}L^3 + \frac{pL^4}{24IE}$$

d.) eset: A (3.36), (3.37)-ből a kötöttségek figyelembevételével megszerkesztett (3.6-b) alatti egyenletrendszer az alábbi, mivel ($u_i = w_i = 0$, $w_j = 0$)

$$\begin{bmatrix} \frac{4IE}{L} & 0 & \frac{2IE}{L} \\ 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ \frac{2IE}{L} & 0 & \frac{4IE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{\eta i} \\ u_{j} \\ \varphi_{\eta j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_{i} - \frac{pL^{2}}{12} - IE\alpha \cdot \Delta T \\ 0 \\ M_{j} + \frac{pL^{2}}{12} + IE\alpha \cdot \Delta T \end{bmatrix}$$

azaz

$$\begin{split} u_j &= 0\\ \varphi_{\eta i} &= \frac{L}{6IE} \left(-2M_i - M_j - \frac{pL^2}{4} - 3IE\alpha \cdot \Delta T \right)\\ \varphi_{ji} &= \frac{L}{6IE} \left(M_i + 2M_j + \frac{pL^2}{4} + 3IE\alpha \cdot \Delta T \right) \end{split}$$

VEM alapjai Tartalom | Tárgymutató

 $\frac{\mathsf{Elemek illesztése}}{\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 87 \triangleright}$



3.17. ábra. Különböző megtámasztások esete

Végezetül az a.) esetben az F_j helyett adott w_j^0 elmozdulást működtessünk. Ekkor a (3.6-c) egyenletrendszerben a 2. feleslegessé válik, de az együtthatómátrixnak w_j^0 értékével megszorzott 2. oszlopa át kell kerüljön a jobboldalra. Az együtthatómátrix méretét megtartva, a 3.3. fejezetben ismertetett (3.69) alakú tárgyalásban is felírható az egyenletrendszer:

$egin{array}{c} AE \ 0 \ 0 \end{array}$	0 1 0	$\begin{array}{c} 0\\ 0\\ \underline{4IE}\\ L\end{array}$][$egin{array}{c} u_j \ w_j \ arphi_{\eta j} \end{array}$] =	$\begin{matrix} 0\\ w_j^0\\ -\frac{6IE}{L^2}w_j^0\end{matrix}$	

$$\varphi_{\eta j} = -\frac{3}{2} \frac{w_j^0}{L} \,.$$

@@

azaz

3.5. Kétváltozós rugalmasságtani feladatok vizsgálata izoparametrikus elemekkel

A mechanikai, fizikai problémák igen nagy osztálya két változótól függően írható le. Így ezen feladatokhoz tartozó végeselemek felépítése nagy fontossággal bír. Előjáróban összefoglaljuk azokat a feladattípusokat, amelyek a mindennapos mérnöki gyakorlatban a mechanikai modellek felépítésében nagy szerepet töltenek be.

3.5.1. Feladattípusok

Síkalakváltozás (SA)

Amennyiben a vizsgált test geometriája és terhelése következtében létezik egy olyan irány, amely mentén a test pontjai nem mozdulnak el, valamint ezen kitüntetett irányhoz tartozó helykoordinátától, a reá merőleges síkban fellépő elmozdulásvektor koordinátái függetlenek, síkalakváltozásról szokás beszélni. Ez az eset áll fenn például egy hosszú test esetén, mikor is a test pontjai csak a tengelyre merőleges metszetben mozdulnak el.



3.18. ábra. Síkalakváltozás (SA) z kitüntetett iránnyal

Legyen a kitüntetett e_z irányban mért helykoordináta a z. Ekkor a szóbanforgó állapot csak akkor tud kialakulni, ha a térfogaton megoszló ρk terhelésnek és az A_p felületen megoszló p terhelésnek nincs z irányú összetevője.

Így azután az elmozdulásmező és a terhelési függvények

$$u = u(x,y) = ue_x + ve_y$$

$$\rho k = \rho k(x,y) = \rho(k_x e_x + k_y e_y)$$

$$p = p(x,y) = p_x e_x + p_y e_y$$
(3.71)

alakban írhatók.

Az ${\boldsymbol A}$ alakváltozási tenzor a geometriai egyenlet értelmében, a fentiekből adódóan

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x,y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0\\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$
(3.72)

míg a T feszültségi tenzor

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T} (x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0\\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0\\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

ahol izotróp esetben $\sigma_z = \nu \left(\sigma_x + \sigma_y \right)$

Az $\varepsilon_z\equiv 0$ miatt az alakváltozási energia számításánál csak aTtenzor síkbeli részével kell dolgozni, tehát

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \sigma_z & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$
(3.73)

Így végül is, síkalakváltozás esetén, homogén izotróp anyagot feltételve, az anyagtörvény, a kezdeti alakváltozással és feszültséggel nem számolva

$$\mathbf{T} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.74)$$

Síkfeszültségi állapot (SF)

A síkfeszültségi állapotot az jellemzi, hogy most a kitüntetett z irányra merőleges síkokon nem keletkezik $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ feszültség. Ehhez

VEM alapjai	Kétváltozós feladatok
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 90 \triangleright$

az szükséges, hogy a ρk és p terhelési függvényeknek ne legyen z irányú összetevője. A vékony tárcsa középfelületére vonatkoztatva, ahol is z = 0, a terhelésnek, melyet az oldalperemen írunk elő, négyzetes függvényként kell változnia.



3.19. ábra. Síkfeszültségi állapotban (b vastagságú tárcsa)

Fentiek alapján a feszültségi tenzornak csak a síkbeli része lehet zérustól különböző

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0\\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}(x,y)$$
(3.75)

Ismét homogén, izotróp anyagot tételezünk fel, így a z irányú fajlagos nyúlás

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

míg az A alakváltozási tenzor

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0\\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}(x,y) \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$
(3.76)

Tekintettel megint az alakváltozási energia kiszámítási módjára elegendő csak a tenzorok síkbeli részét megtartani. Homogén, izotróp anyagnál áll:

$$\boldsymbol{T} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (3.77)$$

Általános síkfeszültségi állapot (ÁSF)

A SF állapot szigorú kiindulási feltételeinek enyhítése céljából ez esetben feltételezzük, hogy a σ_z mindenhol zérus, a σ_x , σ_y , τ_{xy} a *z*-nek páros függvénye. A τ_{xy} és a τ_{zy} nyíró feszültségek pedig a *z*-nek páratlan függvényei oly módon, hogy a tárcsa alsó és felső síkjainak terheletlenségéből adódó feltételt is kielégítik, azaz a tárcsa alsó és felsőlapjain zérus értékűek.

Fenti feszültségi koordinátákra vonatkozó feltételek teljesüléséhez a terhelési függvények a térfogaton egyrészt

$$\rho \mathbf{k}(x,y,z) = \rho \mathbf{k}(x,y,-z) \equiv \mathbf{0}$$
(3.78)

másrészt a paláston

$$p = p_x e_x + p_y e_y + p_z e_z$$

$$p_x(x,y,z) = p_x(x,y,-z), \quad p_y(x,y,z) = p_y(x,y,-z)$$

$$p_z(x,y,z) = -p_z(x,y,-z)$$
(3.79)

alakkal kell, hogy rendelkezzenek.

Az előírt terhelési feltételek mellett az egyes mechanikai mennyiségeket a *b* vastagság mentén integrálva átlagértékeket kapunk. Így értelmezhető az átlagos feszültségi és alakváltozási tenzor

$$\overline{T} = \frac{1}{b} \int_{(b)} T \, dz, \quad (T \leftrightarrow A)$$
(3.80)

valamint az "átlagos" elmozdulás és terhelési vektor

$$\overline{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \boldsymbol{u} \, dz \tag{3.81}$$

$$\overline{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \boldsymbol{p} \, dz = \overline{p}_x \boldsymbol{e}_x + \overline{p}_y \boldsymbol{e}_y \tag{3.82}$$

Így az integrálás elvégzésével az ÁSF állapotot is kétváltozósként lehet kezelni. A későbbiekben az átlagolásra utaló felülvonást elhagyjuk.

Tengelyszimmetrikus alakváltozás (TSz)

Számos esetben találkozunk a mérnöki gyakorlatban forgástestekkel (tengelyek, tartályok stb.). Ezek egy része a geometriai tengelyszimmetria

VEM alapjai	Kétváltozós feladatok		
Tartalom Tárgymutató	$\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 92 \triangleright$		

mellett, a megfogás és terhelés vonatkozásában is forgásszimmetriával, tengelyszimmetriával rendelkezik. Ez esetben a 3.20. ábrán látható z tengelyű forgástest terhelése és megfogása független a kerületi irányban mért φ koordinátától.

Így az alkalmasan választott henger-koordináta-rendszerben a test tetszőleges pontjának elmozdulás vektora

$$\boldsymbol{u} = u(R,z)\boldsymbol{e}_R + w(R,z)\boldsymbol{e}_z \tag{3.83}$$

alakú, azaz a vizsgálatokat egy tetszőleges meridián
metszet mentén az Rz síkban kétdimenziós feladatként lehet elvégez
ni.



3.20. ábra. Egy forgásszimmetrikus test geometriája és egy tetszőleges meridiánmetszet mentén jelentkező elmozdulás koordináták

Az alakváltozási és feszültségi vektorok

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_R \\ \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{Rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial R} \\ \frac{u}{R} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial R} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_R \\ \sigma_\varphi \\ \sigma_z \\ \tau_{Rz} \end{bmatrix}$$
(3.84)

között homogén izotróp anyagra az anyagállandók mátrixa

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$
(3.85)

teremt kapcsolatot.

 $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.86}$

3.5.2. Síkbeli elemek

A valóságos mérnöki, szilárdságtani feladatok mindig a térbeli, háromdimenziós Euklideszi térhez köthetők. Mégis, számos esetben a vizsgált test geometriai alakja, az anyagjellemzők és a testre működő külső erőrendszer tulajdonságai lehetővé teszik, hogy matematikailag a problémát kétváltozósként lehessen kezelni. A szilárdságtan tipikus kétváltozós feladattípusairól már szóltunk a fentekben. Láttuk ezeket a feladatokat kétváltozósként lehet kezelni, vagyis az alkalmazott végeselemek alakjukat, közelítő függvényeiket tekintve azonosnak vehetők.

A gyakorlati feladatok megoldásában különösen jól használhatók a lineáris és kvadratikus, három illetve négyszög geometriájú *izoparametrikus* elemek. Ez utóbbi, általános definíció szerint azt jelenti, hogy az elem geometriai pontjait és az elemen belüli elmozdulás mezőt ugyanolyan, természetes koordináta-rendszerben adott interpolációs függvényekkel közelítjük [2].

A következőkben az elemen értelmezett mennyiségek esetén nem jelöljük külön az elemre utaló e felső indexet.

Négycsomópontú elem

A 3.19a. ábra egy konvex egyenesoldalú, négycsomópontú elemet mutat az xy globális koordináta-rendszerben, amelyet egy két egység élű négyzet-tartományra kívánunk leképezni. Ennek érdekében az $x(\xi,\eta)$ és $y(\xi,\eta)$ leképező függvényeket bilineáris alakban írjuk fel:

$$x(\xi,\eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} \mathbf{a} = \boldsymbol{\varphi}^T(\xi,\eta)\mathbf{a}$$
$$y(\xi,\eta) = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} \mathbf{b} = \boldsymbol{\varphi}^T(\xi,\eta)\mathbf{b} \quad (3.87)$$

A (3.87)-ben szereplő a_i és b_i állandókat a csomópontok, azaz a sarokpontok

$$x(\xi_i,\eta_i) = x_i, \quad y(\xi_i,\eta_i) = y_i$$

VEM alapjai	Kétváltozós feladatok
Tartalom Tárgymutató	$\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 94 \triangleright$

koordinátái alapján lehet meghatározni. A 3.21b. ábrából kiolvashatóan a négy pont ξ,η koordinátájának behelyettesítésével

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$
(3.88)



3.21. ábra. Négyszög alakú végeselem a.) leképzés két egység élű négyzettartományra; b.) és c.) nem konvex elemek, amelyek nem biztosítják az egyértelmű leképzést $(\det \mathbf{J} \leq 0)$

ugyanez tömörebben

$$\mathbf{x} = \mathbf{G} \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{x}$$

Hasonlóképpen y-ra áll

$$\mathbf{y} = \mathbf{G} \mathbf{b} \quad \mathbf{b} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{y}$$

Az állandókat visszaírva (3.87)-be a leképezés

$$x(\xi,\eta) = \boldsymbol{\varphi}^T(\xi,\eta) \mathbf{G}^{-1} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi,\eta) x_i \quad (x \leftrightarrow y)$$
(3.89)

VEM alapjai	Kétváltozós feladatok	
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 95 \triangleright$	

alakban áll elő, ahol az $N_i(\xi,\eta)$ ún. alakfüggvények felépítése a következő:

$$N_{1} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad N_{3} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) N_{2} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \qquad N_{4} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$
(3.90)

Könnyen ellenőrizhető, hogy a (3.90) függvények összege:

$$\sum_{i=1}^{4} N_i(\xi, \eta) = 1 \tag{3.91}$$

A leképezést alkalmazva az elem j-dik csomópontjára

$$x(\xi_j,\eta_j) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi_j,\eta_j)x_i$$

amiből következik, hogy

$$N_i(\xi_j,\eta_j) = \begin{cases} 1, & ha \quad i=j\\ 0, & ha \quad i\neq j \end{cases}$$
(3.92)

A "szabályos (alap) elem"-hez tartozó $N_i(\xi,\eta)$ függvényeket *alakfügg-vényeknek* fogjuk nevezni. A fenti tulajdonságok általánosan jellemzik a végeselemek approximációs függvényeit. A valóságos elemre áttranszformált alakfüggvények az *elemszintű bázis függvények* elnevezéssel fognak rendelkezni.

Az izoparametrikus elemek definíciójára tekintettel a (3.90) függvények birtokában egyértelmű, hogy az elemek mentén az x irányú u és az y irányú v elmozduláskoordinátákat az

$$u = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi, \eta) u_i \qquad \text{és} \qquad v = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi, \eta) v_i \tag{3.93}$$

formulákkal közelítjük, ahol u_i , v_i konkréten az *i*-edik csomópontbeli x és y irányú elmozduláskoordinátákat jelenti.

Végül e ponton belül néhány megjegyzés:

Fordítsuk most a figyelmet a *közelítő függvények* elemenbelüli *simaságára*. A végeselem ténylegesen az x, y rendszerben létezik, vagyis (3.93) értelmében a mezők simaságához az $N_i(\xi(x,y), \eta(x,y))$ függvénynek is

VEM alapjai	Kétváltozós feladatok
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 96 \triangleright$

simának kell lennie. A (3.90)-ból nyilvánvalóan látszik, hogy az $N_i(\xi,\eta)$ függvények simák (folytonos deriváltakkal rendelkeznek a ξ,η rendszerben). Azonban, ha az elem valamelyik csomópontjánál az oldalak közötti szög 180°, vagy annál nagyobb (a belső szög tompa), akkor az x, y és ξ,η koordinátarendszerek közötti leképezés már nem lesz egyértelmű, amelyet a J Jacobi mátrix determinánsának nem pozitív volta is jelez. Az x, y és a ξ,η koordináta-rendszerek közötti egyértelmű leképzéshez szükséges, hogy

$$\det \mathbf{J} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} > 0,$$

azaz a J Jacobi-mátrix determinánsának pozitívnak kell lennie. Egyszerűen bizonyítható az elem teljessége

$$u = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi, \eta) u_i = \sum_{i=1}^{4} N_i(c_0 + c_1 x_i + c_2 y_i) =$$

= $\left(\sum_i N_i\right) c_0 + \left(\sum_i N_i x_i\right) c_1 + \left(\sum_i N_i y_i\right) c_2 = c_0 + c_1 x + c_2 y$ $(u \leftrightarrow v)$

ami fizikailag azt jelenti, hogy a közös oldallal rendelkező szomszédos elemek határai mentén-és így a teljes végeselemekkel behálózott kétdimenziós tartományon az elmozdulásmező folytonos.

Az eddig ismertetett gondolatok valamennyi izoparametrikus elemtípusra érvényesek, azaz az elemháló sűrítésével a konvergencia kritériumok (a közelítő mezőhöz és az egzakt mezőhöz tartozó potenciális energiák különbségre a zérushoz tart) automatikusan teljesülnek. Ez is magyarázata az izoparametrikus elemek széleskörű alkalmazásának.

Nyolccsomópontú elem

A 3.22. ábra egy nyolccsomópontú, görbeperemű izoparametrikus elemet mutatat, melynek nyolc alakfüggvényét [2] alapján az alábbiak sorolják fel:

$$N_{1} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \qquad N_{2} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) N_{3} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \qquad N_{4} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) N_{5} = \frac{1}{2}(1-\xi^{2})(1-\eta) \qquad N_{6} = \frac{1}{2}(1-\eta^{2})(1+\xi) N_{7} = \frac{1}{2}(1-\xi^{2})(1+\eta) \qquad N_{8} = \frac{1}{2}(1-\eta^{2})(1-\xi)$$

$$(3.94)$$

Természetesen a (3.94) alakfüggvények is teljesítik a (3.91) alatti követelményt, továbbá itt is érvényes, hogy egy adott alakfüggvénynek az adott csomópontbeli helyettesítési értéke egy, míg minden más csomópontbeli helyettesítési érték zérus (lásd (3.92)).

 $\frac{\text{K\acute{e}tv\acute{a}ltoz\acute{o}s feladatok}}{\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 97 \triangleright}$

Tartalom | Tárgymutató



3.22. ábra. Nyolccsomúpontú izoparametrikus elem

VEM alapjai	Kétváltozós feladatok
Tartalom Tárgymutató	$\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 98 \triangleright$

A háromcsomópontú és a hatcsomópontú elemek

A tartományok geometriai közelítésénél, az elemháló felvételénél gyakran nehézséget okoznak az előző pontban tárgyalt elemek. A végeselemes kutatások új fajta elemeket is felszínre hoztak. Ezek közül a 3.23. ábra a háromcsomópontú és a görbeperemű, hatcsomópontú elemeket mutatja:



3.23. ábra. a.) háromcsomópontú, b.) hatcsomópontú görbeperemű izoparametrikus elem

Az előbbiek alakfüggvényei:

$$N_1 = 1 - \xi - \eta$$
 $N_2 = \xi$ $N_3 = \eta$ (3.95)

míg a hatcsomópontú elemé:

$$N_{1} = 1 - \xi - \eta - \frac{1}{2}N_{4} - \frac{1}{2}N_{6} \quad N_{2} = \xi - \frac{1}{2}N_{4} - \frac{1}{2}N_{5}$$

$$N_{3} = \eta - \frac{1}{2}N_{5} - \frac{1}{2}N_{6} \qquad N_{4} = 4\xi(1 - \xi - \eta)$$

$$N_{5} = 4\xi\eta \qquad N_{6} = 4\eta(1 - \xi - \eta)$$
(3.96)

3.5.3. Az elem mechanikai jellemzői

Az alakváltozási vektor előállítása

A korábbi fejezetekben már láttuk, hogy az elem potenciális energiájában lévő alakváltozási energiát is számolni kell, vagyis ehhez az x, yglobális koordináta-rendszerbeli mezők deriváltjait is közelíteni kell. A két koordináta-rendszer közötti leképezést az előzőekkel összhangban

$$x = \sum_{i=1}^{n_{cs}} N_i(\xi, \eta) x_i \quad y = \sum_{i=1}^{n_{cs}} N_i(\xi, \eta) y_i$$
(3.97)

formulák adják, ahol n_{cs} az adott elemmodell csomópontjainak száma (Előző példáinkban 4 vagy 8 illetve 3, 6). Kétváltozós feladatok esetén az elmozdulás koordináták közelítésére az

$$u = \sum_{i=1}^{n_{cs}} N_i(\xi, \eta) u_i \quad v = \sum_{i=1}^{n_{cs}} N_i(\xi, n) v_i$$
(3.98)

összefüggések szolgálnak. A (3.98) -ban szereplő összegzést a mátrixalgebrai skaláris szorzással is kifejezhetjük. Ezzel a szokás szerinti tömör felírás

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} N_{n_{cs}} & 0 \\ 0 & N_{n_{cs}} \end{bmatrix} \mathbf{q}^e \equiv \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{q}$$
(3.99)

ahol $\mathbf{q}^{eT} = [u_1, v_1, \dots u_i, v_i, \dots u_{n_{cs}}, v_{n_{cs}}]$ az elem 2 · n_{cs} méretű elmozdulásvektora.

Ezek után, a globálrendszerbeli alakváltozási vektor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i \\ \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \\ \sum_i \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i \right) \end{bmatrix}$$
(3.100)

amiből látszik, hogy a ehhez szükséges az alakfüggvények globál koordináta-rendszerbeli $\frac{\partial N_i}{\partial x}$, $\frac{\partial N_i}{\partial y}$ parciális deriváltjainak

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$
(3.101)

Tartalom | Tárgymutató

meghatározása. A (3.101) -et is célszerű tömörebben felírni

$$(\partial_G N_i) = \mathbf{J}^{-1} (\partial_L N_i) = \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} \\ J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} \end{bmatrix} (\partial_L N_i)$$
(3.102)

ahol \mathbf{J}^{-1} a Jacobi mátrix inverze, $(\partial_G \cdot)$ a globálrendszerbeli deriváltak vektora, $(\partial_L \cdot)$ a lokálrendszerbeli deriváltak vektora.

A ξ , η rendszerbeli parciális deriváltakra analóg módon írható, hogy

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$
(3.103)

vagyis

$$(\boldsymbol{\partial}_L N_i) = \mathbf{J} \left(\boldsymbol{\partial}_G N_i \right) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \left(\boldsymbol{\partial}_G N_i \right)$$
(3.104)

így azután a (3.103) alatt definiált Jacobi mátrix (3.97) felhasználásával

$$\mathbf{J}_{(2,2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sum N_i}{\partial \xi} & \frac{\partial \sum N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \sum N_i}{\partial \xi} & \frac{\partial \sum N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \sum N_i}{\partial \eta} & \frac{\partial \sum N_i}{x_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dots \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \dots \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_i & y_i \\ x_{n_{cs}} & y_{n_{cs}} \end{bmatrix}$$
(3.105)

módon számítható. Látjuk tehát, hogy a két koordinátarendszerben értelmezett deriváltak között a Jacobi mátrix, vagy annak inverze teremt kapcsolatot. Ezek után (3.102) figyelembevételével az x és yszerinti parciális deriváltakat ξ és η szerinti parciális deriváltakból az alábbi módon lehet előállítani:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = J_{11}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{12}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = J_{21}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{22}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$
(3.106)

Ez azt jelenti, hogy így előállítható a következő formula által definiált **B** elmozdulás-alakváltozás transzformációs mátrix, amelyet szorozva a \mathbf{q}^e elem csomóponti elmozdulásvektorral, közvetlenül számítható az

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_i \\ v_i \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{B}(\xi, \eta) \mathbf{q}^e \quad (3.107)$$

elem alakváltozási vektora.

Az elemi merevségi mátrix és a redukált terhelési vektor számítása

Az előző pontokban ismertetett kétdimenziós feladattípusok sajátosságait figyelembe véve az elem teljes potenciális energia kifejezése mátrixos formában a (3.99) elmozdulás mező közelítéssel és az ε alakváltozási vektorra vonatkozó (3.100) formula felhasználásával

$$\Pi_p^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \int_{(A^e)} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \ b \ dA \ \mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{eT} (\mathbf{f}_{\varepsilon}^e + \mathbf{f}_p^e + \mathbf{f}_{qk}^e)$$
(3.108)

ahol

$$\begin{split} \mathbf{K}^{e} &= \int_{A^{e}} \mathbf{B}^{T} \mathbf{D} \mathbf{B} \ b \ dA \text{ az elemi merevségi mátrix,} \\ \mathbf{f}^{e}_{\varepsilon} &= \int_{A^{e}} \mathbf{B}^{T} \mathbf{D} \varepsilon_{0} \ b dA \text{ a kezdeti alakváltozásból,} \\ \mathbf{f}^{e}_{p} &= \int_{\Gamma^{e}} \mathbf{N}^{T} \mathbf{p} b \ d\Gamma \text{ a felületi terhelésből, és} \\ \mathbf{f}^{e}_{\rho k} &= \int_{A^{e}} \mathbf{N}^{T} \rho \mathbf{k} b \ dA \text{ a térfogati terhelésből} \end{split}$$

számítandó redukált csomóponti terhelési vektor. A (3.108) felírásakor kihasználtuk, hogy ÁSF esetén az elemi térfogat, *b* vastagságú tárcsa esetén

$$dV = b \, dA \tag{3.109}$$

Ugyanez SA esetén b = 1 egységnyi szeletre vonatkozik, míg TSz állapotváltozáskor (3.108)-ba

$$b = 2 \pi R$$

helyettesítésével kapjuk, hogy

$$dV = 2\pi R dA. \tag{3.110}$$

Numerikus integrálás

Az (3.108)-es kifejezésben szereplő felületi integrálok a ξ , η változók függvényei, így az integrálást ξ és η szerint -1 és +1 intervallumra vonatkozóan kell elvégezni. Mivel az elemi felület

$$dA = dx \, dy = \det \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta$$

formában írható, ezért az elemi merevségi mátrix

$$\mathbf{K}^{e} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^{T} \mathbf{D} \mathbf{B} b \det \mathbf{J} d\xi d\eta$$
(3.111)

VEM alapjai	Kétváltozós feladatok
Tartalom Tárgymutató	$\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 102 \triangleright$

illetőleg a térfogati terhelés redukált csomóponti vektor (és hasonlóan a kezdeti alakváltozásból adódó csomóponti vektor, ahol \mathbf{N}^T -t \mathbf{B}^T -re cseréljük)

$$\mathbf{f}_{\rho k}^{e} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \mathbf{N}^{T} \rho \, \mathbf{k} \, b \, \det \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta,$$
$$\mathbf{f}_{\varepsilon}^{e} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \mathbf{B}^{T} \mathbf{D} \, \varepsilon_{0} \, b \, \det \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta$$
(3.112)

szerint állítható elő.

A peremen ható terhelésből származó

$$\mathbf{f}_{p}^{e} = \int_{\Gamma^{e}} \mathbf{N}^{T} \mathbf{p} b \ d\Gamma \tag{3.113}$$

redukált csomóponti erő kiszámítását egy négyszögletes elem példáján keresztül mutatjuk be.

Az xirány
ú p_x intenzitású terhelés működjön az elem 3. oldalán, vagy
is $\eta=1$.

Ezen oldalon értelmezett elemi ívhossz

$$d\Gamma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$
 (3.114)

Mivel $\eta = 1 =$ áll., ezért

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi$$
, $dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi$

vagyis

$$d\Gamma = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} \, d\xi = \det \, \mathbf{J}^{\Gamma} d\xi \,, \qquad (3.115)$$

továbbá

$$\mathbf{f}_{p}^{e} = \int_{\Gamma^{e}} \mathbf{N}^{T} \mathbf{p} \, b \, d\Gamma = \int_{-1}^{1} \mathbf{N}^{T}(\xi, \eta = 1) \begin{bmatrix} p_{x} \\ 0 \end{bmatrix} b \, \det \, \mathbf{J}^{\Gamma} d\xi. \tag{3.116}$$

Gyakran a peremen ható terhelés nem a globális rendszerben van megadva, hanem az a peremre merőleges és érintőleges összetevőivel ismert. Ebben az esetben a terhelési vektor

$$\mathbf{p} = p_n \,\mathbf{n} + p_t \,\mathbf{t} \tag{3.117}$$



3.24. ábra. Az elem 3. oldalán p_x terhelés működik

ahol n a perem külső normálisa, t érintő egységvektora.

Ismételten legyen a terhelt perem az $\eta = 1$. Matematikából ismert, hogy a peremet leíró síkgörbe $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y$ helyvektorának ívkoordináta szerinti deriváltja az érintő egységvektort szolgáltatja:

$$t = \frac{\partial r}{\partial \Gamma} = \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \Gamma}$$
(3.118)

Ily módon a leképezési összefüggés felhasználásával

$$rac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} = \sum_{i} rac{\partial N_i(\xi, \eta = 1)}{\partial \xi} (x_i \, \mathbf{e}_x + y_i \, \mathbf{e}_y)$$

míg a (3.115)alapján

$$\frac{\partial \xi}{\partial \Gamma} = \frac{1}{\det \mathbf{J}^{\Gamma}} = \frac{1}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi}\right|}$$

Ezek után a normális egységvektor

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{t} = \frac{\partial \xi}{\partial \Gamma} \sum_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta = 1)}{\partial \xi} \left(x_i \, \boldsymbol{e}_y - y_i \boldsymbol{e}_x \right)$$
(3.119)

vagyis a (3.117) alatti megoszló terhelésből a globális rendszerbeli terhelési koordináták

$$p_x = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}_x, \quad p_y = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}_y.$$
 (3.120)

összefüggések alapján számolhatók.

VEM alapjai	Kétváltozós feladatok
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 104 \triangleright$

A kapott értékek (3.116))-be helyettesítésével a redukált csomóponti terhelési vektor kiszámítható. Sok esetben a globális p_x, p_y vagy a lokális p_n, p_t terhelési koordináták a szóban forgó perem csomópontjaiban felvett értékeken és az elem ezen peremére "lokalizált" (példánkban $N_i(\xi, \eta = 1)$) alakfüggvényeken keresztül írhatók fel.

Kérdés ezek után a (3.111), (3.112), (3.113) típusú integrálok előállítása, melynek széles körben alkalmazott módszere a Gauss-féle numerikus integrálási technika.

Egy dimenziónál egy F(x) függvény a,b intervallumbeli integrálját

$$\int_{a}^{b} F(x) dx = S_1 F(x_1) + \dots S_{NG} F(x_{NG}) + R_{NG}$$
(3.121)

kifejezés szolgáltatja, ahol S_i súlyfaktor, x_i később ismertetett koordináta, R_{NG} maradék tag, NG a felvett pontok száma. Kimutatható [6], hogy ezzel a közelítéssel 2 * NG - 1-ed fokú polinom még pontosan integrálható.

Az a,b intervallumból, amint azt már az elemeknél láttuk, a $-1 \le \xi \le 1$ intervallumba térünk át a leképezésnél használatos

$$x = \sum_{j} N_{j}(\xi) x_{j} \qquad dx = \sum_{j} \frac{\partial N_{j}}{\partial \xi} x_{j} d\xi \qquad (3.122)$$

összefüggéssel, míg a súlyfaktorra $S_i = \det \mathbf{J}(\xi_i) W_i$ fog fennállni, ahol W_i ún. Gauss-féle súlyfaktor, míg ξ_i a Legendre polinomok belső zérus helyeit kijelölő ún. Gauss-féle koordináta, továbbá $\mathbf{J} = \frac{\partial x}{\partial \epsilon} = \sum_{i=1}^{n_{cs}} \frac{\partial N_j(\xi)}{\partial \epsilon} x_i$

kijelölő ún. Gauss-féle koordináta, továbbá $\mathbf{J} = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{j}^{n_{cs}} \frac{\partial N_j(\xi)}{\partial \xi} x_j$ Ily módon az $\int_{a}^{b} F(x) dx$ integrál numerikus integrálással

$$\int_{a}^{b} F(x) dx = \int_{-1}^{1} F(\xi) \det \mathbf{J}(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{NG} W_i \det \mathbf{J}(\xi_i) F(\xi_i)$$
(3.123)

értéket nyeri. Megjegyezzük, hogy lineáris leképzés esetén

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi$$
, $\det \mathbf{J} = \frac{b-a}{2}$. (3.124)

Kétdimenziós esetben

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} F(\xi,\eta) \, \det \mathbf{J}(\xi,\eta) \, d\xi \, d\eta$$
 (3.125)

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 104 \triangleright$



3.25. ábra. Görbeperemű elemen a t, n irányokban ismert a terhelés

integrált először ξ szerint közelítjük

$$\sum_{i} W_{i} \int_{-1}^{1} \det \mathbf{J}(\xi_{i},\eta) F(\xi_{i},\eta) d\eta$$

majd az η szerinti integrált közelítjük a (3.123) analógiája alapján, vagyis

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} F(\xi,\eta) \det \mathbf{J}(\xi,\eta) d\xi \, d\eta = \sum_{i=1}^{NG} \sum_{j=1}^{NG} W_i \, W_j \det \mathbf{J}(\xi_i,\eta_j) \, F(\xi_i,\eta_j)$$
(3.126)

Ennek értelmében a (3.111) formula integranduszában szereplő mátrix-

Tartalom | Tárgymutató

 $\frac{\text{K\acute{e}tv\acute{a}ltoz\acute{o}s feladatok}}{\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 106 \triangleright}$

szorzatot $\mathbf{F}^{e}(x,y)$ -el jelölve a

$$\mathbf{K}^{e} = \int_{A^{e}} \mathbf{B}^{T}(x,y) \mathbf{D}(x,y) \mathbf{B}(x,y) b(x,y) dA \equiv \int_{A^{e}} \mathbf{F}^{e}(x,y) dA =$$
$$= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \mathbf{F}(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta) \det \mathbf{J}(\xi,\eta) d\xi d\eta =$$
$$= \sum_{i=1}^{NG} \sum_{j=1}^{NG} W_{i} W_{j} \det \mathbf{J}(\xi_{i},\eta_{j}) \mathbf{F}(\xi_{i},\eta_{j}) \quad (3.127)$$

míg például a (3.116) szerinti perem menti integrál

$$\mathbf{f}_{p}^{e} = \int_{\Gamma e} \mathbf{N}^{T} \mathbf{p} b d\Gamma =$$

$$= \int_{-1}^{1} \mathbf{N}^{T}(\xi, \eta = 1) \mathbf{p}(\xi) b(\xi, \eta = 1) \det \mathbf{J}^{\Gamma}(\xi, \eta = 1) d\xi$$

$$= \sum_{j=1}^{NG} W_{i} \det \mathbf{J}^{\Gamma}(\xi_{i}, \eta = 1) \mathbf{\tilde{f}}^{e}(\xi_{i}, \eta_{j})$$
(3.128)

formában számolható, ahol $\mathbf{\tilde{f}}^{e}(\xi) = \mathbf{N}^{T}(\xi_{i}, \eta = 1) \mathbf{p}(\xi_{i}) b(\xi_{i}, \eta = 1)$

Megismételve a fenti képletekben NG a ξ illetve η irányban felvett Gauss integrációs pontok számát, W_i , W_j pedig az integrációs súlyfaktorokat jelenti, amelyeket számszerűen a 3.1. táblázat is bemutat.

$$\int_{-1}^{1} F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{NG} W_i F(\xi_i)$$

Tartalom | Tárgymutató

3.1. táblázat. Négyszögelemnél jelentkező numerikus integrálás Gauss pontjainak koordinátái és súlyfaktorai

	$\pm \xi_i$	W_i
<i>NG</i> = 1	0	2.000 000 000 000 000
<i>NG</i> = 2	0.577 350 269 189 626	1.000 000 000 000 000
<i>NG</i> = 3	0.774 596 669 241 483	0.555 555 555 555 556
	0.000 000 000 000 000	0.888 888 888 888 889
NG = 4	0.861 136 311 594 953	0.347 854 845 137 454
	0.339 981 043 584 856	0.652 145 154 862 546
<i>NG</i> = 5	0.906 179 845 938 664	0.236 926 885 056 189
	0.538 469 310 105 683	0.478 628 670 499 366
	0.000 000 000 000 000	0.568 888 888 888 889
<i>NG</i> = 6	0.932 469 514 203 152	0.171 324 492 379 170
	0.661 209 386 466 265	0.360 761 573 048 139
	0.238 619 186 083 197	0.467 913 934 572 691
<i>NG</i> = 7	0.949 107 912 342 759	0.129 484 966 168 870
	0.741 531 185 599 394	0.279 705 391 489 277
	0.405 845 151 377 397	0.381 830 050 505 119
	0.000 000 000 000 000	0.417 959 183 673 469
<i>NG</i> = 8	0.960 289 856 497 536	0.101 228 536 290 376
	0.796 666 477 413 627	0.222 381 034 453 374
	0.525 532 409 916 329	0.313 706 645 877 887
	0.183 434 642 495 650	0.362 683 783 378 362
NG = 9	0.968 160 239 507 626	0.081 274 388 361 574
	0.836 031 107 326 636	0.180 648 160 694 857
	0.613 371 432 700 590	0.260 610 696 402 935
	0.324 253 423 403 809	0.312 347 077 040 003
	0.000 000 000 000 000	0.330 239 355 001 260
NG=10	0.973 906 528 517 172	0.066 671 344 308 688
	0.865 063 366 688 985	0.149 451 349 150 581
	0.679 409 568 299 024	0.219 086 362 515 982
	0.433 395 394 129 247	0.269 266 719 309 996
	0.148 874 338 981 631	0.295 524 224 714 753

Tartalom | Tárgymutató

3.7. feladat: Határozzuk meg a 3.26. ábrán vázolt elemek Jacobi mátrixát

Megoldás:



3.26. ábra. Vizsgált elemek

A leképezés szerint a.) elemnél

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4} \left(1-\xi \right) \left(1-\eta \right) \left(-4 \right) \,+\, \frac{1}{4} \left(1+\xi \right) \left(1-\eta \right) \left(+4 \right) \,+\, \frac{1}{4} \left(1+\xi \right) \left(1+\eta \right) \left(+4 \right) \,+\, \\ &+\, \frac{1}{4} \left(1-\xi \right) \left(1+\eta \right) \left(-4 \right) \,=\, -\, \frac{1}{4} \left(1-\xi \right) \,\cdot\, 8 \,+\, \frac{1}{4} \left(1+\xi \right) \,\cdot\, 8 \,=\, 4\xi \\ &y &= 3\eta, \ \text{vagyis} \ \mathbf{J} = \left[\begin{array}{c} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{array} \right], \ \det \mathbf{J} = 12. \end{aligned}$$

b.) elemnél

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4} (1+\xi) (1-\eta) (+8) + \frac{1}{4} (1+\xi) (1+\eta) (+8) &= 4 (1+\xi) \\ y &= \frac{1}{4} (1+\xi) (1+\eta) (+6) + \frac{1}{4} (1-\xi) (1+\eta) (+6) &= 3 (1+\eta) \\ vagy is \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{J} = 12 \end{aligned}$$

c.) elemnél

$$x = \frac{1}{4} \left\{ (1-\xi) (1-\eta) (+2) + (1+\xi) (1-\eta) (+2) \right\} = 1-\eta$$

$$y = \frac{1}{4} \left\{ (1+\xi) (1-\eta) (+2) + (1+\xi) (1+\eta) (+1) \right\} = \frac{1}{4} \left[3 (1+\xi) - \eta (1+\xi) \right]$$
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} (3-\eta) \\ -1 & -\frac{1}{4} (1+\xi) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \frac{1}{4} (3-\eta).$$

@@

Tartalom | Tárgymutató
VEM alapjai

Tartalom | Tárgymutató

3.8. feladat: Határozzuk meg a 8 csomópontú izoparametrikus elem 3.oldalán ható lineárisan változó nyomó terhelésből származó csomóponti redukált terhelés értékét. (3.27)

Megoldás: A 4-3-7 csomópontokhoz tartozó $\eta = 1$ peremen értelmezett alakfüggvények a (3.94) felhasználásával:

$$N_4(\xi,\eta=1) = -\frac{1}{2}(1-\xi)\xi, \quad N_3(\xi,\eta=1) = \frac{1}{2}(1+\xi)\xi, \quad N_7(\xi,\eta=1) = (1-\xi^2)$$

A szóbanforgó peremen az elmozdulásmező

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{\eta=1}^{e} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(1-\xi)\xi & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi)\xi & 0 & (1-\xi^{2}) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(1-\xi)\xi & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi)\xi & 0 & (1-\xi^{2}) \end{bmatrix}^{e} \begin{bmatrix} u_{4} \\ v_{4} \\ u_{3} \\ v_{3} \\ u_{7} \\ v_{7} \end{bmatrix}^{e}$$

míg a terhelési vektor $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}(1-\xi)p_4 & -\frac{1}{2}(1+\xi)p_3 \end{bmatrix}$, továbbá det $\mathbf{J}^{\Gamma} = 1$ (dx és d ξ azonosak).



3.27. ábra. Lineárisan változó terhelés

A (3.116) képlet analógiája alapján

$$\mathbf{f}_{p}^{e} = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(1-\xi)\xi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(1-\xi)\xi \\ \frac{1}{2}(1+\xi)\xi & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+\xi)\xi \\ (1-\xi^{2}) & 0 \\ 0 & (1-\xi^{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}(1-\xi)p_{4} & -\frac{1}{2}(1+\xi)p_{3} \end{bmatrix} b \, d\xi$$

Elvégezve az integrálást

$$\mathbf{f}_{p}^{e,T} = -\frac{b}{3} \begin{bmatrix} 0 & p_{4} & 0 & p_{3} & 0 & 2(p_{4}+p_{3}) \end{bmatrix}$$

@@

Tartalom | Tárgymutató

3.6. Lemezelemek felépítése

A szerkezeti elemek modellezésénél gyakran figyelembe vesszük, hogy a test egyik mérete lényegesen kisebb a másik két méretéhez képest. Ha a testet terhelő erőrendszer olyan, hogy a test elmozdulásának jelentős részét a legkisebb méret irányába okozza, akkor ezt a testet lemeznek szokás nevezni. Ismeretes, hogy a lemezen ki lehet jelölni egy középfelületet s ennek elmozdulásán keresztül - különböző hipotéziseket felhasználva - lehet tisztázni az alakváltozási illetve a feszültségállapotot. Az alkalmazott hipotézisek révén az eredeti háromváltozós feladatot kétváltozós feladatra lehet visszavezetni, ami a feladat megoldhatóságát egyszerűsíti. Ugyanakkor a lemez vagy tágabb értelemben vett héj megtámasztásánál, csatlakozásánál, erőbevezetési helyeinél, megerősítéseknél (pl. bordáknál) a ténylegesen kialakuló feszültségállapot térbeli, ami már az alkalmazott hipotézisekkel nem írható le. Vagyis egy valóságos szerkezet mechanikai vizsgálatánál ún. kevert modelleket kell alkalmazni. A zavarástól távoli helyeken a viszonyokat jól leíró lemez (héj) modellek felvétele mellett a zavarásnál jelentkező térbeli állapotot leíró ún. kontinuum modell, illetve a két modellt összekapcsoló ún. átmeneti modell használatával lehet a viszonyokat tisztázni. Természetesen az is előfordulhat, hogy a lemez (héj) modell pontosítására is szükség van. Az utóbbi évek kutatásai az elmondottak szerinti modellek kimunkálására irányulnak [4].

3.6.1. Geometriai és feszültségi hipotézis Reissner-Mindlin féle lemezmodellnél

Tételezzük fel, hogy a *b* vastagságú lemez középfelülete az xy síkban fekszik. A középfelületet jelölje *A*, míg peremét Γ . Az elmozdulásmező felírásánál azzal a feltételezéssel élünk, hogy az elmozdulásmező koordinátái

$$u = u(x,y,z) = \varphi_y(x,y)z, \quad v = v(x,y,z) = -\varphi_x(x,y)z \\ w = w(x,y,z) = w_0(x,y)$$
(3.129)

ahol w_0 , φ_x , φ_y a lemez középfelületén lévő pontok z irányú elmozdulása és a pont környezetének x és y tengelykörüli szögelfordulása. A későbbiekben w_0 -nál az alsó indexet elhanyagoljuk.

Kis elmozdulásokat feltételezve a fajlagos nyúlások

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z\varphi'_y = z \cdot \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}, \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}, \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.130)$$



3.28. ábra. Reissner-Mindlin-féle lemezelmélet φ_x, φ_y szögelfordulási mezőinek értelmezése

és a szögtorzulások

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \cdot \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}\right), \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_y$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_x \qquad (3.131)$$

A fentiek alapján a lemez középfelületére merőleges egyenes szakasz a terhelés után is egyenes marad, hossza nem változik. A szóbanforgó szakasz az y tengely körül $\varphi_y(x,y)$ az x tengely körül $\varphi_x(x,y)$ értékkel fordul el.

Érdemes a *z*-től függő, és a *z*-től független jellemzőket külön mátrixba rendezni:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = z \underbrace{ \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\kappa}} = z \boldsymbol{\kappa}$$
(3.132)

VEM alapjai

Tartalom | Tárgymutató

ahol κ a görbületek oszlopvektora:

$$\boldsymbol{\kappa} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$
(3.133)

A z-től független szögtorzulások pedig a következő kételemű vektorba rendezhetők:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\partial}_{\gamma}} \begin{bmatrix} w \\ \varphi_{x} \\ \varphi_{y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\partial}_{\gamma} \mathbf{u}$$
(3.134)

Látható, hogy az elmozdulási hipotézishez tartozó szögtorzulás két tagból áll. Az első tag a normális középfelülettel együtt történő mozgása miatt, a második pedig az ahhoz képest jelentkező szögelfordulás miatt van.

A klasszikus lemezelmélet másik hipotézise a feszültségállapottal kapcsolatos, nevezetesen, tapasztalatok alapján nem követünk el nagy hibát, ha a σ_z feszültséget elhanyagoljuk a σ_x és σ_y mellett, vagyis homogén, izotróp anyagnál a Hooke-féle anyagegyenlet felhasználásával

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y)$$
(3.135)

illetve a csúsztató feszültségek

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} , \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} , \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$
(3.136)

ahol $G = E/2(1 + \nu)$. Nyilvánvaló az $\varepsilon_z = \sigma_z = 0$ feltételek egyidejűsége ellentmond a Hooke-féle anyagegyenletnek. Mátrixos alakban pedig:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \widetilde{\mathbf{D}}\boldsymbol{\varepsilon} = z\widetilde{\mathbf{D}}\boldsymbol{\kappa} \quad (3.137)$$

A z-től független nyírófeszültségeket mátrixosan írva:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = kG\boldsymbol{\gamma} \tag{3.138}$$

 $\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 112 \triangleright$



közelítő egzakt

3.29. ábra. Nyírási tényező származtatása

A nyírófeszültségekben szereplő k az ún. nyírási tényező, mely abból a feltételezésből határozható meg, hogy a közelítő konstans nyírófeszültséghez és az egzakt nyírófeszültséghez tartozó alakváltozási energia megegyezik. Értéke: 5/6.

3.6.2. Felületi feszültségek és feszültségpárok (élerők és élnyomatékok)

Értelmezve a vastagság mentén megoszló feszültségek eredőit, nyomatékait, írhatjuk, hogy

$$Q_x = -\int_{(b)} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = -\int_{(b)} \tau_{yz} dz.$$
 (3.139)

Továbbá

$$M_x = \int_{(b)} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{(b)} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{(b)} \tau_{xy} z dz$$
(3.140)

amiből a (3.131), (3.136)alattiak figyelembevételével a felületi feszültségek (élerők)

$$Q_x = -k G b \left(\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad Q_y = -k G b \left(-\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$
(3.141)

míg a felületi feszültségpárok (élnyomatékok)

$$M_x = \frac{Eb^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}\right), \quad M_y = \frac{Eb^3}{12(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}\right)$$

Tartalom | Tárgymutató

$$M_{xy} = Gb^3 \frac{1}{12} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right)$$
(3.142)

amelyekhez az

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} M_x & M_{xy} \\ M_{yx} & M_y \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}$$
(3.143)

tenzor, illetve vektor is rendelhető.

A tetszőleges n normálisú és t érintőirányú síkon keletkező σ_n normál irányú és τ_{tn} , τ_{zn} csúsztató feszültség ($t = e_z \times n$) :

$$\sigma_n = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y$$

$$\tau_{tn} = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} = (\sigma_y - \sigma_x) n_x n_y + \tau_{xy} (n_x^2 - n_y^2)$$

$$\tau_{zn} = \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y$$
(3.144)

$$\boldsymbol{n} = n_x \boldsymbol{e}_x + n_y \boldsymbol{e}_y, \quad \boldsymbol{t} = -n_y \boldsymbol{e}_x + n_x \boldsymbol{e}_y \tag{3.145}$$

ahol $n_x = \cos \alpha$, $n_y = \sin \alpha$ a felület normálisának koordinátája (lásd 3.31. ábra).

Az élnyomatékok értelmezése alapján

$$M_n = \int_{(b)} \sigma_n z dz = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{n}$$
(3.146)

míg

$$M_{tn} = M_{nt} = \int_{(b)} \tau_{tn} z dz = (M_y - M_x) n_x n_y + M_{xy} (n_x^2 - n_y^2) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$$
(3.147)

továbbá

$$Q_n = -\int_b \tau_{zn} dz = Q_x n_x + Q_y n_y \equiv \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{n}$$
(3.148)



3.30. ábra. M_n, M_{nt} nyomatékok, Q_n nyíró
erő és a $\varphi_{n,} \; \varphi_{nt}$ szögelfordulások értelmezése

3.6.3. Reissner-Mindlin-féle lemez teljes potenciális energiája

A vázolt hipotézisek és vektorok felhasználásával a teljes potenciális energia

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int\limits_A \int\limits_b \boldsymbol{\varepsilon}^T \,\boldsymbol{\sigma} \, dz \, dA + \frac{1}{2} \int\limits_A \int\limits_b \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\tau} \, dz \, dA - W_k \tag{3.149}$$

ahol a külső erők munkája

$$W_k = \int_A wp \, dA + \int_{\Gamma_p} M_n^0 \varphi_{tn} ds - \int_{\Gamma_p} M_{nt}^0 \varphi_n ds - \int_{\Gamma_p} Q_n^0 w_0 ds \qquad (3.150)$$

mely kifejezésben pa középfelületre redukált megoszlózirányú terhelés intenzitása, $M_n^0, \quad M_{nt}^0, \quad Q_n^0$ a Γ_p^e peremen megadott értékek. A perem φ_n és φ_{tn} szögelfordulása a $\varphi = \varphi_x \ e_x + \varphi_y \ e_y$ vektor bevezetésével

$$\varphi_n = \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{n}, \quad \varphi_{tn} = \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{t}$$
 (3.151)

alakban állítható elő.

A lemez megtámasztásától függően az alábbi peremfeltételeket szokás megkülönböztetni (lásd 3.31. ábrát):

VEM alapjai	Lemezelemek felépítése
Tartalom Tárgymutató	$\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 116 \triangleright$

Befogás esetén:	$w=0$, $arphi_t=arphi_n=0$
szabad perem esetén:	$M_n = M_{tn} = Q_n = 0$
egyszerű alátámasztás esetén:	$w=0$, $M_n=M_{tn}=0$
vagy pedig:	$w = \varphi_n = 0 , M_n = 0$



3.31. ábra. Megtámasztási módok

3.6.4. Kirchhoff-féle hipotézis, technikai lemezelmélet

Amennyiben $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, akkor (3.131) alapján

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

azaz

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x}z, \qquad v = -\frac{\partial w}{\partial y}z$$
 (3.152)

összefüggéseket kapjuk, ami a *Kirchhoff*-féle hipotézisnek felel meg. Ezen hipotézisre alapozott technikai lemezelmélet vékony lemezek esetén a gyakorlat számára jó eredményt szolgáltat.

Ebben az esetben az alakváltozási tenzor zérustól különböző elemei

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z \,, \quad \varepsilon_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z \,, \quad \gamma_{xy} = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z \,. \tag{3.153}$$

A feszültségállapotra vonatkozó hipotézisek azonosak a Reissner-Mindlin lemezelméletnél bemutatottakkal. Így (3.137)szerint

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = z \widetilde{\mathbf{D}} \boldsymbol{\kappa} \equiv z \widetilde{\mathbf{D}} \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{D}} = \frac{E}{1 - v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - v}{2} \end{bmatrix}$$
(3.154)

VEM alapjai		Térbeli elemek
Tartalom Tárgym	utató	$\overleftarrow{\leftarrow} \Rightarrow \triangleleft 117 \triangleright$

Mivel a (3.149) alatti Π_p -ben a második integrál eltűnik (nincsen nyírási energia), a w mezőnek a (3.154) szerint másodrendű deriváltjai szerepelnek a potenciális energiában, a variációs elv értelmében a w mező C^1 osztályú folytonosságát kell biztosítani. A vékony lemezekre számos végeselem került kidolgozásra [5].

3.6.5. Izoparametrikus elem

Visszakanyarodva a Reissner-Mindlin elméletre alapozott eszmefuttatásra, a lemez elmozdulási állapotának közelítésére izoparametrikus elemet fogunk választani. Formálisan az elem lehajlási és szögelfordulási mezőit kell a megszokott módon alakfüggvények és csomóponti paraméterek szorzataként approximálni a C^0 osztályú folytonosság biztosításához. Itt, ilymódon a végeselem-módszernél használatos elemenbelüli elmozdulásmező három mezőt jelent: w, φ_x, φ_y :

$$\mathbf{u}^{eT} = \begin{bmatrix} w & \varphi_x & \varphi_y \end{bmatrix}^e = \mathbf{q}^{eT} \mathbf{N}^{eT}$$
(3.155)

ahol $\mathbf{q}^{eT} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T & \cdots & \mathbf{q}_{n_{cs}^e}^T \end{bmatrix}^e, \mathbf{q}_i^{eT} = \begin{bmatrix} w_i & \varphi_{xi} & \varphi_{yi} \end{bmatrix}^e$

Az elem merevségi mátrixát és tehervektorát az elemre felírt potenciális energiából származtatjuk. Megjegyezzük, hogy a hajlított rúdelemhez hasonlóan a csomópontokban koncentrált erőn kívül nyomaték is működhet.

A gyakorlatban az ún. Lagrange-típusú approximációt felhasználó 4,8, illetve 9 csomópontú izoparametrikus négyszög alakú elem a legelterjed-tebb.

3.7. Térbeli elemek

A gépészet számos szerkezete olyan kialakítású, hogy a korábban ismertetett redukálások már nem alkalmazhatók, hanem a testet mind geometriájában, mind terhelésében csak háromdimenziós (3D-s) feladatként lehet lekezelni. Nagyon jól tudjuk gépelembeli tanulmányainkból is, hogy a geometria lényegesen befolyásolja a kialakuló feszültségállapotot. Pl. a tengelyek különböző átmérőjű szakaszainak találkozásánál kialakított lekerekítések a feszültég koncentrációját jelentősen befolyásolják. Tehát célul kell kitűzni olyan végeselemek megalkotását, amelyek a geometriát minél jobban megközelítik, s kellő pontossággal a potenciális energia numerikusan kiszámíthatóvá teszik.

A végeselem- módszer fejlődését és mindennapos felhasználását tekintve megállapíthatjuk, hogy a térbeli elemek közül a legelterjedtebbek az izoparametrikus elemek, amelyek sokféle geometriai alakot ölthetnek. Ezek

VEM alapjai	Átmeneti elemek
Tartalom Tárgymutató	$\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 118 \triangleright$

közül a leggyakrabban alkalmazottak az egyenes illetve görbült élekkel rendelkező hatlapú (hexahedron) "tégla"-, négyoldalú (tetraéder) "gúla"-, vagy ötoldalú (pentaéder) "ék alakú" elemek. [2, 4, 5].

Ha az élek csak egyenes vonalúak, továbbá csomópontok csak a csúcspontokban vannak, akkor az elemen belül az approximáció lineáris (kvázilineáris), ha az élek mindegyik görbülhet is, akkor, pedig legalább kvadratikus. Természetesen az egyenes- és görbült él, azaz lineáris- és kvadratikus közelítés (approximáció) vegyesen is előfordulhat egy-egy elemen belül. A görbült elem élein, a végpontokon kívül, a felező pontokban is van csomópont. Megjegyezzük, hogy magasabb approximáció alkalmazása esetén, az éleken akár kettő vagy három közbenső csomópont is előfordulhat, valamint további csomópontok lehetnek az oldallapokon és az elem belsejében is [4].

Az elem csomópontjai három – x,y,z irányú elmozdulási – szabadságfokkal rendelkeznek, ezzel összhangban a csomóponti terhelések is csak koordináta irányú erők lehetnek.

3.8. Átmeneti elemek

Gyakran a szilárdságtani modell ismeretlenjeinek a száma oly módon csökkenthető, hogy egy számítási modellen belül térbeli elemeket és lemez (héj) elemeket használunk. Láttuk, hogy a lemezeknél tett hipotézisek a csomópontokban szögelfordulási ismeretlent is jelentenek, míg a térbeli elemeknél csak elmozdulási (eltolódási) paraméterek szerepelnek. A kompatibilitás, azaz az elmozdulásmező testbeli folytonossága megköveteli a kétfajta elem olyan illesztést, amit csak ún. *átmeneti* elemmel lehet megoldani. Az elemek csatlakozó felület minden pontjában az elmozdulás-mezőnek folytonosnak kell lennie. Ezeken az elemen lesznek olyan csomópontok, amelyek a térbeli elemmel, és vannak olyan pontok, amelyek a lemezzel csatlakoznak. Az elem approximációs függvényeinek felépítése speciális megfontolásokat igényel. Forgástestek vonatkozásában a [2]-ben találunk erre példákat.

3.9. Hivatkozások a 3. fejezethez

- 1. Mechanika mérnököknek, Szilárdságtan, Szerkesztette *M. Csizmadia Béla, Nándori Ernő*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, **1999**.
- 2. *Páczelt I.:* Végeselem-módszer a mérnöki gyakorlatban, I. kötet, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, **1999**.

- 3. *Galántai A., Jenei A.:* Numerikus módszerek, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, **2005**.
- 4. *Szabó, B. Babuska,I.: Finite Element Analysis,* John Wiley & Sons Inc., New York, **1991.**
- 5. *Bathe, K.J.: Finite Element Procedures,* Prentice-Hall, Inc., New Jersey, **1996.**

4. Hibaanalízis

A továbbiakban a végeselemes közelítés hibáját elemezzük. A korábbi fejezetekben bemutatott végeselemes elmozdulási módszert a teljes potenciális energia funkcionálra alapoztuk. A megoldás közelítéséből származó hibáját is energia értelemben határozzuk meg.

Mint ismeretes a rugalmas feladatok esetén, adott elmozdulási mező alapján az alakváltozási- és feszültségi mező egyértelműen meghatározható:

u elmozdulás $\rightarrow \varepsilon = \partial u$ alakváltozás, $\sigma = D \varepsilon$ feszültség.

Az alakváltozási energia és ezen keresztül az elmozdulás normája az előbbi mennyiségekkel az alábbi módon fejezhető ki

$$||\mathbf{u}||_{E} = \sqrt{U_{alakv.}} = \left(\frac{1}{2}\int_{V} \boldsymbol{\varepsilon}^{T}\boldsymbol{\sigma} \, dV\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\int_{V} (\boldsymbol{\partial}\mathbf{u})^{T} \, \mathbf{D} \, (\boldsymbol{\partial}\mathbf{u}) \, dV\right)^{\frac{1}{2}}.$$
(4.1)

Legyen a továbbiakban $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ex}$ az egzakt megoldás, \mathbf{u}_{VEM} a közelítő véges elemes megoldás, akkor az utóbbi hibája, a kettő különbsége

$$\mathbf{e} = \mathbf{u}_{VEM} - \mathbf{u}_{ex}.\tag{4.2}$$

Az e hiba pontszerű értelmezése a gyakorlatban ritkán határozható meg, de a (4.1) energia norma alapján értelmezve

$$||\mathbf{e}||_{E} = \left[\frac{1}{2} \int_{V} (\partial \mathbf{e}) \mathbf{D} (\partial \mathbf{e}) \ dV\right]^{\frac{1}{2}}$$
(4.3)

már léteznek matematikai megalapozottságú becslések.

Energia értelemben konvergens a megoldás, ha a hiba normája az ismeretlenek számának növelésével tart a nullához:

$$\lim_{N \to \infty} ||\mathbf{e}||_E = 0, \tag{4.4}$$

aholNaz ismeretlenek száma, térbeli izoparametrikus elemeknél $(3\cdot ncs).$

Pontonkénti konvergenciáról beszélünk, ha minden pontban teljesül az alábbi határérték

$$\lim_{N \to \infty} \mathbf{e} = 0. \tag{4.5}$$

VEM alapjai	Hibaanalízis
Tartalom Tárgymutató	$\Leftrightarrow \ \Rightarrow \ \triangleleft 121 \triangleright$

Az ismeretlenek számának növelése alapvetően kétféle módon is megvalósítható. Az egyik esetben az elemháló sűrítésével csökkentjük az elemek jellemző h méretét, változatlan lineáris vagy kvadratikus közelítő mező alkalmazása mellett. A másik esetben változatlan felosztás, azaz változatlan elemméret mellett, a közelítő polinomok p rendjét növeljük. A két eljárás ötvözete egyaránt magába foglalja a h méret csökkentését p polinom rendjének növelését. Az alkalmazott módszereket tekintve beszélhetünk h-verziójú-, p-verziójú- és hp-verziójú végelemes eljárásokról.

A *p*-verziónál alkalmazott függvénytér felépíthető Lagrange-féle és Legendre-féle polinomokkal is. Az utóbbi alkalmazása azért előnyösebb, mert az approximációs tér hierarchikusan egymásba ágyazott [1]. Ekkor a magasabb rendű *p* polinom alapján előállított mátrix leválaszthatóan tartalmazza az alacsonyabb rendű közelítések mátrixait is, a lineárissal bezárólag. A Legendre-féle polinomok és deriváltjaik ortogonális tulajdonsággal rendelkeznek, ezért a megoldandó egyenletrendszer kondíciója is kedvezőbb mint a Lagrange-féle közelítés esetén.

A peremérték feladatokat az irodalomban három csoportba szokás sorolni:

- A.) típusról beszélünk, ha megoldás elegendően sima, vagyis a vizsgált tartomány szingularitásokat nem tartalmaz, azaz *analitikus* jellegű.
- B.) típus esetén *szingularitásokat* tartalmaz a feladat, de ez a szinguláris hely az elem csomópontjába esik
- C.) típusnál a szingularitások tetszőlegesen helyezkednek el, azaz nem esnek csomópontokba.

A 4.1. ábra példákat mutat be a szinguláris helyekre. Ezek lehetnek, pl. éles saroknál, koncentrált erő támadási helyén, kompozit anyagok peremein. A szinguláris pontok a gyakorlatban a tönkremenetel kiindulási helyeiként igen veszélyesek lehetnek.

A szinguláris pont környezetében az elmozdulási mező lefutását a szingularitás jellege határozza meg. A szingularitás lehet erős és gyenge [1]:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{\Phi}_i \left(\varphi\right) \ r^{\lambda_i} \qquad r < r_0$$
(4.6)

ahol r_0 az elhalási hossz, ha



4.1. ábra. Példák a szinguláris pontokra



4.2. ábra. Szinguláris pont környéke

$$\min \lambda_i \left\{ \begin{array}{l} <1 \ {\rm szigor} \acute{\rm u} \\ >1 \ {\rm nem \ szigor} \acute{\rm u} \end{array} \right.$$

A szigorú szingularitás esetén a feszültség tart a végtelenbe, ha nem szigorú, akkor véges értékű lesz. Az éles sarok geometriája, azaz nyílásszöge döntő befolyással van a szingularitás jellegére. Ha nyílásszög kisebb, mint 120°, akkor a csúcspont veszélyes feszültséggyűjtő hely lehet.

A különböző típusú feladatokra vonatkozóan az irodalomban a következő a 4.1. táblázatban összefoglat hibabecslő formulák találhatók a h-, p-, hp-verziójú közelítésekre.

A 4.1. táblázatban szereplő N az ismeretlenek számát, p a közelítő polinom fokszámát, λ a szingularitás mértékét jelenti, k konstans érték.

A 4.1 táblázatból jól látható, hogy a p-verziós közelítés gyorsabb konvergenciával rendelkezik, mint a hagyományos h-verziós. A hp-verziós eljárás exponenciálisan gyors konvergenciájú még B-típusú feladatok, azaz

	A	B	C
p	$ \mathbf{e} _E = \leq k \cdot N^{-\frac{p}{2}}$	$ \mathbf{e} _E \le k \cdot N^{-\frac{1}{2}\min(p,\lambda)}$	$ \mathbf{e} _E \le k \cdot N^{-\frac{1}{2}\min(p,\lambda)}$
h	$ \mathbf{e} \le \left[\exp\left(-\gamma N^{\delta}\right)\right] \cdot k$ $\delta > \frac{1}{2}$	$ \mathbf{e} \leq k \cdot N^{-\lambda}$	$ \mathbf{e} \le k \cdot N^{-\frac{1}{2}\lambda}$
hp		$ \mathbf{e} \le \left[\exp\left(-\gamma N^{\delta}\right)\right] \cdot k$ $\delta > \frac{1}{3}$	

4.1. táblázat. Hibabecslő összefüggések

szingularitások csomóponti elhelyezkedése esetén is. Ekkor a felosztást a szingularitás közelében geometria sor szerint szükséges sűríteni.

A konvergencia sebességeket hasonlítja össze a 4.3. ábra. Az ábra jól mutatja a p- és hp-verzió előnyét, mert ugyanolyan hibahatár eléréséhez lényegesen kisebb az ismeretlenek száma a hagyományos h-verziós számításhoz képest [2].

Vizsgáljuk a B típusú feladat konvergenciáját kifejező összefüggést

$$\|\mathbf{e}\|_E \le k \, N^{-\beta} \tag{4.7}$$

A matematikai egyenlőtlenségben ismeretlen a hiba normája

$$\|\mathbf{e}\|_{E}^{2} = \|\mathbf{u}\|_{E}^{2} - \|\mathbf{u}_{VEM}\|_{E}^{2}$$
(4.8)

a karányossági tényező, és a szingularítás mértékét is tartalmazó β paraméter. Tehát három ismeretlenünk van.

A pontos megoldáshoz tartozó alakváltozási energiát azzal a megfontolással lehet megbecsülni, hogy felhasználjuk azt a feszültséget is, amit az elemeken belül az elmozdulásmező közelítésénél használt $N_i(\mathbf{x})$ alakfüggvényeken keresztül fejezünk ki - ami egy simább megoldás leírását adja -, mint azt az elmozdulásmező deriválásával számoltuk volna ki.

Vagyis a végeselemes megoldás

$$\sigma_{VEM} = \mathbf{D}\,\partial\mathbf{u}_{VEM} = \mathbf{D}\,\partial\mathbf{N}\,\mathbf{q} \tag{4.9}$$

szokásos feszültsége mellett, a pontos közelítését

$$\boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \tag{4.10}$$

alakban írjuk fel, ahol
a $\bar{\sigma}^*$ csomóponti értékek feszültségi vektorát a hibanégyzet minimum elvből származó

$$\int_{V} \mathbf{N}^{T} \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_{VEM} \right) dV = 0$$
(4.11)



4.3. ábra. A *h*-, *p* és *hp*-verziós számítások konvergenciája

egyenletből tudjuk meghatározni:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^* = \left(\int\limits_V \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, dV\right)^{-1} \int\limits_V \mathbf{N}^T \, \boldsymbol{\sigma}_{VEM} \, dV \tag{4.12}$$

 $ar{\sigma}^*$ ismeretében a hiba becslésére az alábbi integrált használhatjuk

$$\|\mathbf{e}\|_{E}^{2} \approx \frac{1}{2} \int_{V} \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_{VEM}\right)^{T} \mathbf{D}^{-1} \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_{VEM}\right) dV$$
(4.13)

Ezek után kétfajta elemfelosztással $N_1,\,N_2$ számú csomóponti elmozdulási koordinátákkal számítást végezve, írhatjuk, hogy a hiba normák

$$\|\mathbf{e}_1\|_E^2 \le k^2 N_1^{-2\beta}, \quad \|\mathbf{e}_2\|_E^2 \le k^2 N_2^{-2\beta}$$
 (4.14)

ahonnan

$$k^2 = \|\mathbf{e}_1\|_E^2 \ N_1^{2\beta} \tag{4.15}$$

értékét csak azután tudjuk kiszámolni, ha először a β -ra feloldjuk az egyenletrendszert

$$\beta = \lg \left(\frac{\|\mathbf{e}_2\|_E}{\|\mathbf{e}_1\|_E} \right) / \lg \left(\frac{N_1}{N_2} \right)$$
(4.16)

A 4.3. ábra szerint a h típusú számítás egyenese már megrajzolható és ezzel becsülhető az az ismeretlen N szám, aminél a hiba egy megkívánt érték alá vihető.

A gyakorlatban a számítást akkor fogadjuk el, egyrészt, ha a globális hiba a teljes alakváltozási energia valamilyen mértékű hányadánál kisebb, azaz

$$\|\mathbf{e}\|_E \le \eta \, \|\mathbf{u}\|_E \tag{4.17}$$

ahol η a felhasználó által beállított érték, általában 2-5 %, másrészt az elemek kielégítik az "optimális felosztási kritériumot", ami lokális tulajdonságot hordoz, azaz

$$\|\mathbf{e}\|_{E,i} = \|\mathbf{e}\|_{E,\,\mathrm{kivánt}} \tag{4.18}$$

ahol $\|\mathbf{e}\|_{E,\,i}$ az i-dikelem aktuális hibája, míg $\|\mathbf{e}\|_{E,\,\mathrm{kívánt}}$ az elvárt hiba mértéke.

Definiálva a globális és a lokális hibamértékeket

$$\xi_G = \frac{\|\mathbf{e}\|_E}{\eta \|\mathbf{u}\|_E}, \quad \bar{\xi}_i = \frac{\|\mathbf{e}\|_{E,i}}{\|\mathbf{e}\|_{E,k\text{ivánt}}}$$
(4.19)

ezekből az elem sűrítési paramétere vezethető le

$$\xi_i = \xi_G \bar{\xi}_i \tag{4.20}$$

A teljes rendszerbeli hibák az elemeken kapott hibákból állnak elő, nevezetesen a hibák négyzeteinek (ez felel meg a belső alakváltozási energiának) összege adja meg a teljes hibát

$$\|\mathbf{e}\|_{E}^{2} = \sum_{i=1}^{n_{el}} \|\mathbf{e}\|_{E,i}^{2}$$
(4.21)

A megkívánt hiba

$$\|\mathbf{e}\|_{E,\,\mathrm{kivánt}} = \frac{\|\mathbf{e}\|_E}{\sqrt{n_{el}}} \tag{4.22}$$

aminek figyelembevételével a sűrítési paraméter

$$\xi_i = \frac{\|\mathbf{e}\|_{E,i}}{\eta \|\mathbf{u}\|_E} \sqrt{n_{el}}$$
(4.23)

Ha $\xi_i \ge 1$, akkor az *i*-dik elemnél további sűrítés szükséges. A részleteket mellőzve [2], az elem új mérete

$$h_i^{\text{új}} = \frac{h_i}{\xi_i^{2/(2p+d)}\xi_G^p}$$
(4.24)

ahol, d a feladat dimenziója, 1 változósnál d = 1, 2*D*-s feladatnál d = 2 stb.

A modern számítógépi programok élnek az elemsűrítés lehetőségével. Még számos más technikával találkozunk a sűrítés végrehajtására. Néhánnyal a [2] - ben találkozunk.

4.1. Hivatkozások az 4. fejezethez

- 1. *Szabó, B. Babuska,I.: Finite Element Analysis,* John Wiley & Sons Inc., New York, **1991.**
- 2. *Páczelt I.:* Végeselem-módszer a mérnöki gyakorlatban, I. kötet, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, **1999**.

5. Modellezési kérdések

A szerkezetek számításánál számos olyan probléma kerül előtérbe, ami azzal van kapcsolatban, hogy hogyan lehet a modellt úgy felépíteni, hogy bizonyos megfogásokból származó peremfeltételek, az elemek közötti túlfedésből származó hatások, a teljes szerkezetnél megjelenő szerkezeti részek ismétlődésből származó ún. periodicitások, a ferde hatásvonalú megtámasztások stb. kényelmes kézbetartása mellett, az elem szintjén legyenek figyelembe véve a számítási időt is csökkentve.

Általában a számítógépes tervezés során a teljes szerkezetet nem lehet minden részletre kiterjedően a képernyőn megjeleníteni, ill. gyakran kész szerkezeti elemek, részegységek kerülnek beépítésre, amit a modellezésnél nyilvánvaló követelményként fel kell tudni használni. Az említettek újabb megfontolást igényelnek a végeselemes számítás megszervezésére, a modellünk felépítésére [1].

5.1. Alszerkezettechnika

Tételezzük fel, hogy a több szerkezeti egységből álló szerkezet egyes részeinek végeselemes felosztásához kapcsolódóan már előállítottuk a merevségi mátrixot és a csomóponti redukált terhelési vektort. Az egyes részeket a tervező által megálmodott felületek mentén össze kell illeszteni [1], hogy megkapjuk a teljes vizsgálandó szerkezet mechanikaim, végeselemes modelljét.

A címben szereplő probléma lényegének megértése céljából a szerkezet csak két részből lesz felépítve. Tehát az 5.1. ábrán lévő egyszerű felépítésű szerkezetet két alszerkezetre (i = 1,2) bontjuk fel. A mechanikai probléma végeselem-módszerrel történő megoldásánál megkövetelt pontosság elérésére megfelelő számú és fokszámú elemeket használunk fel. A szerkezeti részegységek, alszerkezetek az A_c^i felületük mentén csatlakoznak egymáshoz. Az itt található csomóponti elmozdulások vektora \mathbf{q}_c^i , míg a megmaradóké, röviden a belső pontoké \mathbf{q}_b^i . Az alszerkezet összes csomópontjának elmozdulásvektora \mathbf{q}^i .

A teljes potenciális energia minimuma elv szerint fennáll, hogy

$$\frac{\partial \Pi_{p}^{i}}{\partial \mathbf{q}^{i}} = \mathbf{K}^{i} \mathbf{q}^{i} - \mathbf{f}^{i} - \mathbf{r}^{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bc} \\ \mathbf{K}_{cb} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix}^{i} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{b} \\ \mathbf{q}_{c} \end{bmatrix}^{i} - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{b} \\ \mathbf{f}_{c} \end{bmatrix}^{i} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{\tilde{r}} \end{bmatrix}^{i} = \mathbf{0},$$
(5.1)

ahol \mathbf{K}^i az *i*-edik alszerkezet merevségi mátrixa, \mathbf{f}^i csomóponti redukált terhelési vektor, $\tilde{\mathbf{r}}^i$ a csatlakozásnál fellépő belső erőből (hatás-ellenhatás

törvénye szerint keletkező) csomóponti vektor.



5.1. ábra. Két alszerkezetre felbontott szerkezet

A kapott mátrixegyenlet első blokksora

$$\frac{\partial \Pi_p^i}{\partial \mathbf{q}_b^i} = \mathbf{K}_{bb}^i \, \mathbf{q}_b^i + \mathbf{K}_{bc}^i \, \mathbf{q}_c^i - \mathbf{f}_b^i = \mathbf{0}, \tag{5.2}$$

a belső csomópontok egyensúlyát fejezi ki, amiből

$$\mathbf{q}_{b}^{i} = \left(\mathbf{K}_{bb}^{i}\right)^{-1} \mathbf{f}_{b}^{i} - \left(\mathbf{K}_{bb}^{i}\right)^{-1} \mathbf{K}_{bc}^{i} \mathbf{q}_{c}^{i}.$$
(5.3)

Itt feltételeztük, hogy a csatlakozó pontok száma elegendő ahhoz, hogy a vizsgált alszerkezet merevtestszerű elmozdulása le legyen kötve, azaz a belső pontokra vonatkozó \mathbf{K}_{bb}^{i} merevségi mátrix inverze létezzen.

A kapott belső elmozdulások vektorát behelyettesítve a csatlakozó csomópontokra vonatkozó egyensúlyi egyenletbe

$$\frac{\partial \Pi_p^i}{\partial \mathbf{q}_c^i} = \mathbf{K}_{cb}^i \, \mathbf{q}_b^i + \mathbf{K}_{cc}^i \, \mathbf{q}_c^i - \mathbf{f}_c^i - \mathbf{\tilde{r}}^i = \mathbf{0}$$
(5.4)

nyerjük, hogy

$$\{ \mathbf{K}_{cc}^{i} - \mathbf{K}_{cb}^{i} \left(\mathbf{K}_{bb}^{i} \right)^{-1} \mathbf{K}_{bc}^{i} \} \mathbf{q}_{c}^{i} = \mathbf{f}_{c}^{i} - \mathbf{K}_{cb}^{i} \left(\mathbf{K}_{bb}^{i} \right)^{-1} \mathbf{f}_{b}^{i} + \tilde{\mathbf{r}}^{i}, \qquad (5.5)$$

ami tömörebben

$$\mathbf{K}_{red}^{i} \, \mathbf{q}_{c}^{i} = \, \mathbf{f}_{red}^{i} + \tilde{\mathbf{r}}^{i} \quad i = 1,2 \tag{5.6}$$

alakban írható fel. Itt \mathbf{K}_{red}^i , \mathbf{f}_{red}^i az *i*-edik alszerkezet csatlakozó csomópontokra redukált merevségi mátrixa és redukált csomóponti terhelési vektora. A hatás-ellenhatás értelmében $\mathbf{\tilde{r}}^1 = -\mathbf{\tilde{r}}^2$, továbbá a csatlakozási csomópontokban az elmozdulások azonosak, azaz

$$\mathbf{q}_c^1 = \mathbf{q}_c^2 = \mathbf{q}_c \tag{5.7}$$

A csatlakozó pontok egyensúlyát kifejező egyenletek összegzésével a következő végső egyenlethez jutunk a csatlakozó csomóponttokbeli elmozdulás meghatározására:

$$\left(\sum_{i} \mathbf{K}_{red}^{i}\right) \mathbf{q}_{c} = \sum_{i} \mathbf{f}_{red}^{i}$$
(5.8)

vagyis megkaptuk az ún. főszerkezet egyensúlyi egyenletét. Az egyenlet megoldásából nyert, a csatlakozási felületen lévő csomópontokra vonatkozó $\mathbf{q}_c = \mathbf{q}_c^1 = \mathbf{q}_c^2$ elmozdulási vektor ismeretében (5.3) alapján az *i*-dik alszerkezet belső csomópontjainak elmozdulásvektorta ismert lesz. Ezekután a teljes \mathbf{q}^i vektor ismeretében az *i*-dik alszerkezet elmozdulás és feszültségállapota számolhatóvá válik, aminek elemzése révén eldönthető annak jósága, avagy további szerkezeti módosítással kell a tervezési feladatot pontosítani.

A módszer előnyei: egyszerűbb az adatelőkészítés, a tipizált alkatrészek, szerkezeti egységek merevségi mátrixait, terhelési vektorait előre ki lehet számolni, azokat el lehet raktározni és újbóli számításnál a teljes rendszerbe könnyen be lehet illeszteni. Az alrészek számításánál a többprocesszorú, párhuzamos számítás technikáját is fel lehet használni jelentős időt megtakarítva. Az algebrai egyenletrendszerek megoldási idejét jelentősen befolyásoló sávszélesség minimalizálása egyszerűbb alszerkezeti szinten, mint a teljes rendszer vonatkozásában. A számítási eredmények birtokában azon részeken, ahol nem kell változtatást végrehajtani, az elraktározott \mathbf{K}_{red}^i , \mathbf{f}_{red}^i mennyiségek újból felhasználhatók, az újraszámítást csak azon részeken kell végrehajtani, ahol a geometriában, anyagban, esetleg a terhelésben álltak be változások. Ezzel gyorsítani lehet a végső tervek elérését. Az alszerkezetekkel kezelt rendszereknél az I/O műveletek száma csökken. Gyakran a számítógépi memória korlátja miatt is előnyös használata, mivel nem kell egyszerre a teljes egyenletrendszert tárolni. A gyakorlatban, nagybonyolultságú szerkezeteknél többszintű alszerkezeti struktúra felépítése is javasolt.

5.2. Adott elmozdulások figyelembevétele

Az elmozdulásmódszernél, a teljes potenciális energia minimuma elv használatakor a kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőnek a kinematikai peremfeltételt ki kell elégítenie. Feltételezéseink értelmében az A_u felületre kifutó végeselemek csomópontjainak elmozdulásával a teljes felületen meg-

VEM alapjai	Adott elmozdulások figyelembevétele
Tartalom Tárgymutató	$\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 130 \triangleright$

adott elmozdulás függvényt leírjuk. Így az elem szintjén nagyon egyszerű az adott elmozdulás figyelembevétele.

Legyen a teljes potenciális energia

$$\Pi_{p}^{e} = \Pi_{p}^{e} \left(\mathbf{q}^{e} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{s}^{e,T} \ \mathbf{q}_{u}^{e,T} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{ss}^{e} & \bar{\mathbf{K}}_{su}^{e} \\ \bar{\mathbf{K}}_{us}^{e} & \bar{\mathbf{K}}_{uu}^{e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{s}^{e} \\ \mathbf{q}_{u}^{e} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{s}^{e} \\ \mathbf{f}_{u}^{e} \end{bmatrix} \right) \quad (5.9)$$

ahol \mathbf{q}_u^e a \mathbf{q}^e csomóponti elmozdulásvektor azon része, amelynél az elmozdulások adottak, míg a \mathbf{q}_s^e -el jelöljük, a szabad, ismeretlen elmozdulásokat magában foglaló vektort. A kijelölt műveletek elvégzésével, a minimalizálás szempontjából állandó tagokat elhanyagolva, a minimalizálandó energia

$$\Pi_{p} = \sum_{e} \Pi_{p}^{e} \left(\mathbf{q}_{s}^{e} \right) = \sum_{e} \frac{1}{2} \mathbf{q}_{s}^{e,T} \left(\bar{\mathbf{K}}_{ss}^{e} \, \mathbf{q}_{s}^{e} - 2 \left(\mathbf{f}_{s}^{e} - \mathbf{K}_{su}^{e} \mathbf{q}_{u}^{e} \right) \right), \tag{5.10}$$

vagyis az adott elmozdulás egy kinematikai terhelést jelent, ami arányos az adott elmozdulással $-\mathbf{K}_{su}^{e}\mathbf{q}_{u}^{e}$.

Gyakran a kinematikai hatásokat külön terhelésként kezelik, rugalmas szerkezetről lévén szó a szuperpozíció elvének felhasználásával jutunk a teljes – a kölcsönhatásból származó erőhatásokat is figyelembe vevő – terhelés figyelembevételéhez. Ebben az esetben az egyenletrendszert megoldó eljárásnak ún. több jobboldalas számításra is alkalmasnak kell lennie. Az alapterhelések megoldásainak lineáris kombinációjával juthatunk el a kívánt terhelések összegzett hatásának az elemzésére. Ezzel a technikával gépidő takarítható meg. Ugyanis, a szerkezet méretétől függően az alapterhelésekhez tartozó elmozdulások kiszámítása igényel valójában jelentős időt. Azok lineáris kombinációja már gyorsan elvégezhető, a tervezési folyamattól függően, azok bármikor – az elraktározott futási eredmények birtokában megismételhetők, újjakkal tetszés szerint kiegészíthetők.

5.1. feladat: Vizsgáljuk a 5.2. ábrán feltüntetet befalazott tartó végén megadott w_0 értékű elmozdulás hatását. Az elem lehajlásával és szögelfordulásával kapcsolatos merevségi mátrixa (3.36) alapján, tekintettel a befalazásra

Megoldás:

$$\mathbf{K} = \frac{2IE}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} & \frac{3}{L} \\ \frac{3}{L} & 2 \end{bmatrix}.$$
 (5.1-a)

Mivel $w_j = w_0$, úgy a $\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r}$ egyensúlyi egyenlet értelmében

$$\frac{2IE}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} & \frac{3}{L} \\ \frac{3}{L} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ \varphi_{\eta j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}.$$
(5.1-b)

Az (5.9), (5.10) alatt bevezetett mátrixokkal és vektorokkal

$$\mathbf{K}_{ss}\mathbf{q}_s = -\mathbf{K}_{su}\mathbf{q}_u \tag{5.1-c}$$

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 130 \triangleright$

VEM alapjai

Tartalom | Tárgymutató

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 131 \triangleright$

a \mathbf{K}_{ss} mátrix az eredeti \mathbf{K} mátrix w_0 -hoz tartozó sorának és oszlopának törlésével, míg a \mathbf{K}_{su} a \mathbf{K} mátrix első oszlopából nyerhető, vagyis a megoldandó egyenlet

$$\mathbf{K}_{ss} \quad \mathbf{q}_s = -\mathbf{K}_{su} \quad \mathbf{q}_u \,, \tag{5.1-d}$$

amiből a rúd végső keresztmetszetének szögelfordulása

$$\varphi_{\eta\,j} = -\frac{3}{2L}w_0\tag{5.1-e}$$

Kérdésként merül fel, ezt a w_0 elmozdulást mekkora erő kifejtésével biztosíthatjuk? A (5.1-b) alatti mátrixegyenlet első sorából a kérdéses erő

$$r = \frac{2IE}{L} \left(\frac{6}{L^2} - \frac{9}{2L^2}\right) w_0 = \frac{3IE}{L^3} w_0.$$
(5.1-f)





A második sorból az elmozdulásokból származó végkeresztmetszeti hajlítónyomatékot kapjuk meg, ami nyilvánvalóan zérus.

@@

5.3. Adott elmozdulásmezőben fennálló szakadás, kezdeti hézag figyelembevétele

A gépészmérnöki gyakorlatban számos esetben az alkatrészek közötti kötést túlfedéssel valósítják meg. Ebben az esetben, a kapcsolatra olyan modell is felépíthető, amikor a testek között kétoldalú kapcsolatot tételezünk fel, ami azt jelenti, hogy az alakváltozás után a két test párbaállított pontjai azonos helyet fognak elfoglalni. Ez a modellezésben egy egyszerűsítés, mert az elemek közötti normális érintkezési feszültség előjelére és a súrlódási feltételekre nem vagyunk tekintettel. A geometriai illesztési feltétel kielégítésével a számítás után lehetőség van a feszültségi feltételek ellenőrzésére. Amennyiben az érintkezési tartományon nincs semmiféle adhézió, akkor a normál feszültség csak nyomó lehet. Száraz súrlódásnál a *Coulomb*-féle egyenlőtlenségi feltételnek is fenn kell fennállnia.

VEM alapjai	Szakadás figyelembevétele	
Tartalom Tárgymutató	$\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 132 \triangleright$	

Nézzük az egyszerűsített modellünket. Tételezzük fel, hogy az A és az F párbaállított csomópontok általánosított csomóponti elmozdulása között a

$$\mathbf{q}_F = \mathbf{q}_A + \mathbf{h}_{FA} \tag{5.11}$$

kapcsolat áll fenn, ahol h_{FA} a szakadásból (kezdeti hézagból) származó vektor. Az F pontot főcsomópontnak, az A pontot alcsomópontnak nevezzük. Az összefüggés értelmében alakváltozás után a két pont a tér egy közös P pontjába kerül (5.3. ábra).

Itt is feltételezzük, hogy a csatlakozó A_c tartományon a hézagfüggvényt, az elmozdulásmezőt a csomóponti értékek egyértelműen leírják.



5.3. ábra. Kétoldali kapcsolat x és z irányban

Az *A* csomópontot magába foglaló *e* jelű elem teljes potenciális energiája az *A* csomóponthoz \mathbf{q}_A^e és az elem megmaradó pontjaihoz tartozó \mathbf{q}_m^e csomóponti elmozdulás vektorokon keresztül írható fel:

$$\Pi_{p}^{e} = \Pi_{p}^{e} \left(\mathbf{q}_{A}^{e}, \mathbf{q}_{m}^{e} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{A}^{e,T} \ \mathbf{q}_{m}^{e,T} \end{bmatrix} \left(\mathbf{K}^{e} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{A}^{e} \\ \mathbf{q}_{m}^{e} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{A}^{e} \\ \mathbf{f}_{m}^{e} \end{bmatrix} \right), \quad (5.12)$$

illetve az (5.11) behelyettesítésével

$$\Pi_{p}^{e} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{F}^{T} - \mathbf{h}_{FA}^{T}, \, \mathbf{q}_{m}^{e,T} \end{bmatrix} \left(\mathbf{K}^{e} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{F} - \mathbf{h}_{FA} \\ \mathbf{q}_{m}^{e} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{A}^{e} \\ \mathbf{f}_{m}^{e} \end{bmatrix} \right).$$
(5.13)

A merevségi mátrixot az elmozdulásvektor szerint felbontva

$$\mathbf{K}^{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{Am} \\ \mathbf{K}_{mA} & \mathbf{K}_{mm} \end{bmatrix}^{e}.$$
 (5.14)

Tartalom | Tárgymutató

Ennek felhasználásával nyerjük, hogy

$$\Pi_{p}^{e} = \Pi_{p}^{e} \left(\mathbf{q}_{F}, \mathbf{q}_{m}^{e} \right) - \left[\mathbf{q}_{F}^{T}, \mathbf{q}_{m}^{e,T} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{K}_{AA} \\ \mathbf{K}_{mA} \end{array} \right]^{e} \mathbf{h}_{FA}, \tag{5.15}$$

vagyis az A pontbeli ismeretlenek F pontba való áthelyezésével az e-edik elem merevségi mátrixa nem módosul, a csomóponti terhelésé azonban igen:

$$\mathbf{f}_{\text{mod}}^{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{A}^{e} \\ \mathbf{f}_{m}^{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} \\ \mathbf{K}_{mA} \end{bmatrix}^{e} \mathbf{h}_{FA}$$
(5.16)

Gyakorlatban, számos esetben az al- és főcsomópontok között nem az összes koordináták között van alárendeltség, továbbá az elemnek nem csak egy alcsomópontja van, hanem több. Formálisan, a kapott eredmények ekkor is érvényben maradnak, a módosított redukált csomóponti terhelési vektornál a merevségimátrix megfelelő oszlopait kell megszorozni a \mathbf{h}_{FA} vektorral.

A kapott eredmények birtokában el lehet dönteni, hogy a kétoldalú kapcsolatú érintkezési feltételek valóban fennállnak-e avagy nem. Ha a testek közötti adhéziótól eltekintünk, akkor az érintkezési felületen keletkező feszültségnek normális összetevője csak nyomó feszültség lehet. Ha a kapott feszültségkép ettől lényegesen eltér, akkor a feladatot az egyoldalú kapcsolatú érintkezési feltételek mellett kell megoldani. Ezzel a kérdés komplexummal a [1]-ben találunk bőséges kifejtést

Hengeres testek esetén a radiális irányú alárendeléssel lehet a túlfedés hatását figyelembe venni, míg a tengelyirányban az alárendelés hiánya a súrlódásmentességet, alárendelés (elmozdulások azonossága) pedig a végtelen értékű súrlódási tényező felvételét jelenti. A valóságban a súrlódási tényező véges értéke miatt, a két feltételezéssel kapott eredmény között van az "igazság".

5.2. feladat: Vizsgáljuk az 5.4. ábrán vázolt két azonos merevségű rúdból álló szerkezetet. Az összeszerelés után a 2-3 pontok (csukló) a tér közös pontjába kerülnek. A kérdés: hova, s mekkora a rúdvégek szögelfordulása?

Megoldás: Legyen a 2-es csomópont az A alcsomópont, míg 3-as az F pont. Ilymódon (3.36)-ra is tekintettel az 1-es rúd potenciális energiája

$$\Pi_{p}^{1} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{1T} \mathbf{K}^{1} \mathbf{q}^{1} = \frac{1}{2} [w_{2} \ \varphi_{2}] \frac{2IE}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{L^{2}} & \frac{3}{L} \\ \frac{3}{L} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{2} \\ \varphi_{2} \end{bmatrix}$$
(5.2-a)

míg a 2-es testé

$$\Pi_{p}^{2} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{2T} \mathbf{K}^{2} \mathbf{q}^{2} = \frac{1}{2} [w_{3} \ \varphi_{3}] \frac{2IE}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{L^{2}} & -\frac{3}{L} \\ -\frac{3}{L} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{3} \\ \varphi_{3} \end{bmatrix}$$
(5.2-b)

Tartalom | Tárgymutató





5.4. ábra. Kezdeti hézag két test között

A 2-3 pontok közötti kinematikai illesztési feltétel

$$w_2 + h = w_3$$
. (5.2-c)

A (5.2-c) egyenletből kifejezett w_2 -t az (5.2-a)-ba behelyettesítve az 1-es test potenciális energiája

$$\Pi_p^1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_3 & \varphi_2 \end{bmatrix} \frac{2IE}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} & \frac{3}{L} \\ \frac{3}{L} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_3 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_3 & \varphi_2 \end{bmatrix} \frac{2IE}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} \\ \frac{3}{L} \end{bmatrix} h + \text{áll.}$$
(5.2-d)

A rendszer teljes potenciális energiája $\Pi_p = \Pi_p^1 + \Pi_p^2$. Ennek minimumát keresve

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial w_3} = 2 \cdot \frac{6}{L^2} w_3 + \frac{3}{L} \varphi_2 - \frac{3}{L} \varphi_3 - \frac{6}{L^2} h = 0 \\ \frac{\partial \Pi_p}{\partial \varphi_2} = -\frac{3}{L} w^3 + 2\varphi_2 - \frac{3}{L} h = 0 \\ \frac{\partial \Pi_p}{\partial \varphi_3} = -\frac{3}{L} w_3 + 2\varphi_3 = 0$$

$$(5.2-e)$$

egyenletrendszerhez jutunk, aminek megoldása

$$w_3 = \frac{h}{2}, \qquad \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{3}{4L}h,$$
 (5.2-f)

továbbá (5.2-c) alapján

$$w_2 = -\frac{h}{2} \tag{5.2-g}$$

ami a rudak azonos merevsége és azonos hossza miatt teljesen nyilvánvaló. A $\mathbf{K}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{s}^e$ összefüggés alapján könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a rúdvégeken hajlító nyomaték nem keletkezik. @@

5.4. Ferdehatásvonalú támasz figyelembevétele

A szerkezetek egy részénél a megtámasztási korlátok nem párhuzamosak a választott koordinátarendszer tengelyeivel. Ilyen megtámasztások, korlátok a ferde hatásvonalú görgős támaszok, különféle csuszkák. Látni fogjuk ezeket az eseteket kényelmes a ferde megtámasztáshoz kötött helyi koordinátarendszerben tárgyalni. A vizsgálatainkat síkbeli esetre korlátozzuk.

VEM alapjai	Ferdehatásvonalú támasz figyelembevétele
Tartalom Tárgymutató	$\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 135 \triangleright$

Az 5.5. ábra alapján a síkbeli ferde hatásvonalú görgős támasz lokális rendszerében értelmezett és az x, z síkban értelmezett i csomópontbeli elmozdulások között az alábbi összefüggések állnak fenn:

$$\mathbf{q}_{Gi} = \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_g \\ u_n \end{bmatrix}$$
(5.17)

Mivel a görgő elmozdulásának irányára merőlegesen az
 $u_{\ n}=0,$ úgy az előbbi egyenlet

$$\mathbf{q}_{Gi} = \begin{bmatrix} U\\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta\\ \sin\beta \end{bmatrix} [u_g] = \mathbf{T}_{Gi} \bar{\mathbf{q}}_{Gi}$$
(5.18)

alakot ölti. Az elem összes csomópontjához tartozó görgős támaszok elmozdulásait egybegyűjtve, a görgős megtámasztású pontok q_G globális elmozdulásvektora a lokális \bar{q}_G elmozdulásvektorral kifejezhető

$$\mathbf{q}_G = \mathbf{T}_G \bar{\mathbf{q}}_G. \tag{5.19}$$

Az elem csomóponti elmozdulási vektorának két részre bontásával

$$\mathbf{q}^{e,T} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_G^{e,T} & \mathbf{q}_m^e \end{bmatrix}$$
(5.20)

ami után az elem teljes potenciális energiája

$$\Pi_p^e = \Pi_p^e \left(\mathbf{q}_G^e, \mathbf{q}_m^e \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_G^{e,T} \ \mathbf{q}_m^{e,T} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{GG}^e & \mathbf{K}_{Gm}^e \\ \mathbf{K}_{mG}^e & \mathbf{K}_{mm}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_G^e \\ \mathbf{q}_m^e \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \mathbf{f}_G^e \\ \mathbf{f}_m^e \end{bmatrix} \right)$$



5.5. ábra. Síkbeli ferde hatásvonalú görgős támasz

VEM alapjai Tartalom | Tárgymutató

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 136 \triangleright$

Az (5.19) transzformációs összefüggés felhasználásával

$$\begin{aligned} \Pi_{p}^{e} &= \Pi_{p}^{e} \left(\bar{\mathbf{q}}_{G}^{e}, \mathbf{q}_{m}^{e} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_{G}^{e,T} \, \mathbf{q}_{m}^{e,T} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{G}^{T} \mathbf{K}_{GG}^{e} \mathbf{T}_{G} & \mathbf{T}_{G}^{T} \mathbf{K}_{Gm}^{e} \\ \mathbf{K}_{mG}^{e} \mathbf{T}_{G} & \mathbf{K}_{mm}^{e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_{G}^{e} \\ \mathbf{q}_{m}^{e} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{G}^{T} \mathbf{f}_{G}^{e} \\ \mathbf{f}_{m}^{e} \end{bmatrix} \right), \end{aligned}$$
(5.21)

vagyis a görgős megtámasztáshoz kötött helyi koordináta-rendszerbeli elmozdulásra áttérve, az elem merevségi mátrixának és redukált terhelési vektorának az áttranszformálására van szükség. Látjuk, hogy egy görgőnél a helyi rendszerben az ismeretlenek száma eggyel csökkent, mivel csak az u_q szerepel.

5.3. feladat: Az 5.6. ábrán vázolt *L* hosszúságú befalazott tartó 2-es keresztmetszete α szöggel kijelölt csuszka irányában tud elmozdulni. Határozzuk meg a csuszka irányába mutató külső F_0 erő hatását.

Megoldás:



5.6. ábra. Csuklós megtámasztású tartó

Az (5.17) alatti transzformáció felhasználásával

$$\mathbf{q}_{2} = \begin{bmatrix} u_{2} \\ w_{2} \\ \varphi_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \varphi_{2} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{T}_{G} \, \bar{\mathbf{q}}_{G}$$
(5.3-a)

Ily módon az (3.36) alatti potenciális energia

$$\Pi_{p} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}_{G}^{T} \mathbf{T}_{G}^{T} \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0\\ 0 & \frac{12IE}{L^{3}} & \frac{6IE}{L^{2}}\\ 0 & \frac{6IE}{L^{2}} & \frac{4IE}{L} \end{bmatrix} \mathbf{T}_{G} \bar{\mathbf{q}}_{G} - \tilde{u}F_{0}$$
(5.3-b)

A kijelölt műveletek elvégzése után a $\partial \Pi_p / \partial \bar{\mathbf{q}}_G = \mathbf{0}$ egyenletrendszer az alábbi

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L}\cos^2\alpha + \frac{12IE}{L^3}\sin^2\alpha & -\frac{6IE}{L^2}\sin\alpha \\ -\frac{6IE}{L^2}\sin\alpha & \frac{4IE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
 (5.3-c)

Alesetek:

$$\begin{array}{ll} \text{1. eset:} & \alpha = 0^{\circ} & \tilde{u} = \frac{F_0}{AE}l, & \varphi_2 = 0, \\ \text{2. eset:} & \alpha = 90^{\circ} & \tilde{u} = \frac{F_0L^3}{3IE}, & \varphi_2 = \frac{F_0L^2}{2IE} \end{array}$$

@@

5.5. Periódikus szerkezet

A gépészet, építészet szerkezetei gyakran rendelkeznek szimmetria tulajdonságokkal, vagy ismétlődő részekkel, azonos terhelés és peremfeltételek mellett. A szimmetria és az ismétlődésből származó periodicitás figyelembevétele a számítási igények lényeges csökkenéséhez vezet, mivel a teljes szerkezet viselkedését egy kisebb rész vizsgálatával is tisztázni lehet. Ehhez az adatelőkészítés kevesebb munkája is pozitívan járul hozzá.

A szerkezet geometriájából, anyagából, terheléséből és megfogásából származó szimmetria miatt, a szimmetria felületein, vonalain, bizonyos kinematikai mennyiségek zérus értékkel rendelkeznek.

Példaként szolgáljon egy olyan téglalap alakú lemez, amely mind a négy oldalán befalazott. A terhelés egyenletes nyomás a lemez teljes felületén. Az egyes oldalak mentén megfelezve a lemezt, a negyedrészének vizsgálatával célhoz érünk, ha a középvonalak mentén a vonalirányú szögelfordulást zérusra állítjuk be, azaz ez lesz a kinematikai peremfeltétel.

Egy másik gyakori példa a forgó alkatrészek, szerkezeti elemekhengerkoordináta-rendszerbeli vizsgálata. Ekkor ebben a rendszerben a szerkezet periodicitással rendelkezhet. Pl. egy szivattyú járókereke. A lapátok közötti rész ismétlődik. Egy felvett R sugáron a lapátokat Fés A pontban metsszük el. Ehhez a pontokhoz rendre a φ_F és φ_A hengerkoordinátarendszerbeli szögek tartoznak. E szögekkel kijelölt helyi koordinátarendszerben a radiális és tangenciális elmozdulások páronként azonosak, azaz $\bar{u}_F = \bar{u}_A$ és $\bar{v}_F = \bar{v}_A$.

Emiatt a periodicitási peremet (felületet) tartalmazó végeselemeknél azon csomópontokban, amelyek ezeken a peremeken helyezkednek el, az x, y rendszerből át kell transzformálni a mennyiségeket a helyi koordinátarendszerekbe, továbbá az F, A pontpár ismeretlenjeit egybe kell ejteni, majd ennek figyelembevételével kell az elemek illesztését elvégezni a végső egyenletrendszer előállítása céljából. Jelen esetben az A és F pontok sorszámainak nagyobb távolsága miatt a végső egyenletrendszerben a sávszélesség megnő, de az ismeretlenszám lényeges csökkenése e negatívumot kompenzálja.

5.6. Hivatkozások az 5. fejezethez

- 1. *Szabó, B. Babuska, I.: Finite Element Analysis,* John Wiley & Sons Inc., New York, **1991.**
- 2. *Páczelt I.:* Végeselem-módszer a mérnöki gyakorlatban, I. kötet, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, **1999**.

6. Rezgéstani feladatok vizsgálata

6.1. Alapfogalmak

Mit is értünk rezgésen? A mechanikai rendszernek az egyensúlyi helyzet környezetében ide-oda történő váltakozó mozgását rezgésnek nevezzük.

A rendszer állapotát a t időtől függő paraméterek írják le. Az elméletnek arra kell feleletet adnia, hogy hogyan fog viselkedni a rendszer az idő előrehaladásával, ha a rendszer egy kezdeti helyzetből elindult, s reá ismert külső hatások működnek. Legyen a paraméterek egyike u. Ez mechanikai rendszernél lehet pl. az elmozdulás egyik koordinátája, a feszültségi tenzor egyik tagja stb. Vizsgálatunk folyamán a paraméter változását a $t \in (0,\infty)$ időintervallumban vizsgáljuk. Amennyiben a rendszert jellemző paraméterek mindegyike, vagy döntő többsége időben váltakozik, lengedezik, ezt a rendszert rezgéstani rendszernek nevezzük. Ezekben az esetekben a magára hagyott rendszer - a kezdeti felhalmozott energia révén további külső hatások nélkül - képes rezgéseket végezni.

A mechanikai rendszereket az őket leíró egyenletek segítségével is osztályozhatjuk. Szimbólikusan írhatjuk, hogy a rendszer állapotát jellemző paraméterek u(t)vektora az L a perem és illesztési feltételeket is magábafoglaló rendszer operátoron keresztül áll kapcsolatban a rendszert "terhelő" f(t) külső hatással, vagyis

$$Lu = f \tag{6.1}$$

<u>Stacionérnak</u> nevezzük a rendszert, ha annak tulajdonságai nem változnak a vizsgált időintervallumban. <u>Autonom</u> a rendszer, ha (6.1)-ben a gerjesztés explicite az időt nem tartalmazza. Rezgések ebben az esetben csak akkor lépnek fel, ha a rendszer kezdeti megzavarásával a rendszer belső energiaforrással tud rendelkezni.

A rezgéstani folyamatokat az alábbi módon szokásos osztályozni:

- Szabad rezgés: Azt a rezgést, amely oly módon zajlik le, hogy külső hatás nem éri a rendszert, szabad rezgésnek nevezik. Az autonom rendszereket ez jellemzi.
- *Gerjesztett rezgés:* Külső hatás következtében előálló rezgést gerjesztett rezgésnek szokás nevezni. A nem autonom rendszereket ez jellemzi.
- Parametrikus rezgés: A rezgést parametrikusnak szokás nevezni, ha a rezgést a rendszer paramétereinek változása okozza. Ilyen rezgés csak nemstacionér rendszereknél állhat elő.

VEM alapjai	Alapfogalmak
Tartalom Tárgymutató	$\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 139 \triangleright$

 - Öngerjesztő rezgés: A rezgés által keltett energia felszabadulása által okozott rezgést öngerjesztett rezgésnek nevezik.

A periódikus rezgésekhez tartozó alapfogalmakat egyváltozós eseten keresztül mutatjuk be. Legyen u(t) elmozdulás, aminek időszerinti deriváltja a sebesség illetve második deriváltja a gyorsulás.

A rezgés periódikus, ha a kitérés bármely értéke ismétlődikTidő eltelte után, vagyis áll $u(t+T)=u(t) \quad [mm]$, aholT[s] a rezgés periódus ideje. Ennek reciproka a mozgás frekvenciája $f=1/T \left[s^{-1}\right]$.

Szokás az

$$\alpha = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad [rad/s] \tag{6.2}$$

körfrekvenciát is értelmezni. A rezgés frekvenciáját [Hz]Hertz-ben szokás megadni.

Harmónikus rezgésnél a kitérés

$$u(t) = A\cos(\alpha t + \psi), \qquad (6.3)$$

ahol A, α, ψ állandó értékű paraméterek.
 Aa rezgés amplitudója, ψ a fázisszög. A fellépő se
besség

$$v(t) = \frac{du}{dt} = -\alpha \sin(\alpha t + \psi) \left[mm/s\right]$$
(6.4)

míg a gyorsulás

$$a(t) = \frac{d^2u}{dt^2} = -\alpha^2 A \cos(\alpha t + \psi) \quad \left[mm/s^2\right], \tag{6.5}$$

vagyis a sebesség és a gyorsulás amplitudója megváltozik, az időbeli változást ugyanazon körfrekvencia jellemzi.

Általános esetben T periódusidejű rezgést az alábbi alakú Fourier-féle sorával is megadhatjuk

$$u(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t,$$
 (6.6)

amelynél a rezgés körfrekvenciája $\omega = 2\pi T$.

Az $a_0,a_1,...,b_1,b_2,...$ tényezőket a Fourier-féle együtthatóknak nevezzük. Az $a_0/2$ a rezgés közepes értékét adja, a k = 1 az alap vagy első harmónikust, míg k > 1 a felső harmonikusokat, azaz az alap harmonikus egész

VEM alapjai	Bubnov-Galjorkin féle variácós elv alkalmazása
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 140 \triangleright$

számú szám
szorosait jellemzi. Ittka harmónikus sorszáma. Mindegyik harmónikust

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad tg\psi_k = \frac{b_k}{a_k}$$
 (6.7)

amplitudó és kezdeti fázis jellemez.

Az amplitudók haromónikusok szerint rendezett összessége az *amplitudó spektrumot*, míg a kezdeti fázisok összessége a *fázis spektrumot* adja. Két harmónikust tartalmazó esetben kialakuló rezgést nem csak az amplitudók és körfrekvenciák aránya, hanem a fázisok aránya is befolyásolja.

A rezgés amplitudóját a Fourier-féle együtthatókból lehet meghatározni. Nevezetesen

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos k\omega t \, dt \qquad (k = 0, 1, 2, ...)$$
(6.8)

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin k\omega t \, dt$$
 $(k = 1, 2, ...).$

A kialakult összegzett rezgés jól látható módon függ az alkotók körfrekvenciájától, a rezgések amplitúdójától, a fázisszögtől, vagyis a k ill. az $a_0,a_1,...,b_1,b_2,...$, $a_0,a_1,...,b_1,b_2,...$ mennyiségektől.. A 6.1 - 6.4. ábrák ezekre mutatnak be néhány esetet.

6.2. Bubnov-Galjorkin féle variácós elv alkalmazása

Vizsgáljunk egyetlen test alkotta rendszert, amelyet az approximálás céljából n_{el} számú végeselemre bontunk fel. Az e jelű elem A_p^e felületén adott a \bar{p} felületi megoszló terhelés, A_u^e felületén adott az \bar{u} elmozdulás, míg az A_c^e csatlakozási felületen eleve biztosítottak a kinematikai illesztési feltételek. Az anyag belső súrlódásának hatását a sebességgel arányos $-\rho c_M \dot{u}$ megoszló terheléssel szokás figyelembe venni , ahol c_M a csillapítási tényező.

D'Alambert-elv felhasználásával a test elemi részének egyensúlyát az alábbi egyenlet fejezi ki:

$$\boldsymbol{T}^{e} \cdot \nabla + \rho^{e} \left(\boldsymbol{k}^{e} - c_{M}^{e} \dot{\boldsymbol{u}}^{e} - \ddot{\boldsymbol{u}}^{e} \right) = 0 \qquad \boldsymbol{r} \in V^{e}$$
(6.9)

ahol T^e a feszültségi tenzor, ρ^e a test sűrűsége, $\rho^e k^e$ a térfogaton megoszló ismert terhelés intenzitása, u^e az elem elmozdulás-vektora, \dot{u}^e a sebessége, \ddot{u}^e a gyorsulása, ∇ a Hamilton-féle differenciáloperátor.

 \Rightarrow \leftarrow

Tartalom | Tárgymutató



6.1. ábra. Rezgések különböző harmonikus összetevőkből adódóan



6.2. ábra. Rezgések különböző harmonikus összetevőkből adódóan



6.3. ábra. Rezgések különböző harmonikus összetevőkből adódóan



6.4. ábra. Rezgések különböző harmonikus összetevőkből adódóan

Bubnov-Galjorkin féle variácós elv alkalmazása ⇐ ⇒ ⊲ 143 ▷

Tartalom | Tárgymutató

A kinematikai peremfeltétel (KPF)

$$\boldsymbol{u}^e = \bar{\boldsymbol{u}} \qquad \boldsymbol{r} \in A^e_u \tag{6.10}$$

míg a dinamikai peremfeltétel (DPF)

$$T^e \cdot n^e = \bar{p} \quad r \in A_p^e.$$
 (6.11)

illetve a dinamikai illesztési feltétel az e és j jelű elem között

$$T^e \cdot n^e + T^j \cdot n^j = 0$$
 $r \in A_c^{ej}$ (6.12)

Ezek bármely időpillanatban érvényesek. Ezen túlmenően teljesülnek az ún. kezdeti feltételek:

$$u^{e}(t=0) = {}^{0}u^{e} \qquad \mathbf{r} \in V^{e}$$
$$\dot{u}^{e}(t=0) = {}^{0}v^{e} \qquad \mathbf{r} \in V^{e}$$

A *Bubnov-Galjorkin-*elv alapján, a (6.9), (6.11) és a (6.12) felhasználásával – az elmozdulásmezőktől megkövetelve a kinematikai perem- és illesztési feltétel kielégítését – írhatjuk, hogy

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{V^e} \delta \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \nabla + \rho \boldsymbol{k} - \rho c_M \dot{\boldsymbol{u}} - \rho \ddot{\boldsymbol{u}}) \, dV - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{A_p}^e \delta \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} - \bar{\boldsymbol{p}}) dA - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{A_c^{ej}}^e \delta \boldsymbol{u} \cdot \left(\boldsymbol{T}^e \cdot \boldsymbol{n}^e + \boldsymbol{T}^j \cdot \boldsymbol{n}^j\right) \, dA = 0 \quad (6.13)$$

ahol $(\delta u^2 = \delta u^1 = \delta u$ $r \in A_c)$.

Az alábbi szorzat deriválási szabály

$$(\delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \nabla) = (\delta \boldsymbol{u} \circ \nabla) \cdot \cdot \boldsymbol{T} + \delta \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \nabla)$$
(6.14)

és az

$$\int_{V} \boldsymbol{B} \cdot \nabla dV = \int_{A} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \, dV \tag{6.15}$$

VEM alapjaiBubnov-Galjorkin féle variácós elv alkalmazásaTartalom | Tárgymutató⇐ ⇒ ⊲ 144 ▷

Gauss-Osztrogradszkij integrálátalakítási tétel figyelembevételével, egyszerű lépések megtétele után nyerjük, hogy

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{A^e} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} \, dA - \int_{V^e} (\delta \boldsymbol{u} \circ \nabla) \dots \boldsymbol{T} \, dV - \int_{V^e} \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \, dV - \int_{A^e_p} \delta \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} - \bar{\boldsymbol{p}}) \, dA + \int_{V^e} \delta \boldsymbol{u} \cdot (\rho \boldsymbol{k} - \rho c_M \dot{\boldsymbol{u}}) \, dV - \int_{A^e_c} \delta \boldsymbol{u} \cdot \left(\boldsymbol{T}^e \cdot \boldsymbol{n}^e + \boldsymbol{T}^j \cdot \boldsymbol{n}^j \right) \, dA \right\} = 0 \quad (6.16)$$

Tekintettel a DPF-re, az aláhúzott integrál integranduszának $\delta A..T$ -vel való helyettesítésére, továbbá figyelembevéve, hogy az elem határoló felülete három részből tevődik össze $A^e = A^e_u + A^e_p + A^e_c$, a (6.16) variációs egyenlet helyett

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{A_p^e} \delta \boldsymbol{u} \cdot \overline{\boldsymbol{p}} \, dA + \int_{V^e} \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \boldsymbol{k} \, dV \right\} - \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{V^e} \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho c_M \dot{\boldsymbol{u}} dV \right\} - \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{V^e} \delta \boldsymbol{A} .. \boldsymbol{T} dV + \int_{V^e} \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \ddot{\boldsymbol{u}} dV \right\} = 0 \quad (6.17)$$

írható.

A külső terhelés virtuális munkájával

$$\delta W_k = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{A_p^e} \delta u \cdot \bar{p} dA + \int_{V^e} \delta u \cdot \rho k dV \right\}$$
(6.18)

a negatív belső csillapító erő virtuális munkájával

$$\delta C = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{V^e} \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho c_M \dot{\boldsymbol{u}} \, dV \tag{6.19}$$

a belső alakváltozási energia variációjával

$$\delta U_{alakv.} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{V^e} \delta \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{T} \, dV \tag{6.20}$$

 $\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 144 \triangleright$
Bubnov-Galjorkin féle variácós elv alkalmazása

Tartalom | Tárgymutató

VEM alapjai

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 145 \triangleright$

végezetül az előbbi egyenlet

$$\delta U_{alakv.} - \delta W_k + \delta C + \sum_e \int_{V^e} \rho \,\,\delta \boldsymbol{u} \cdot \ddot{\boldsymbol{u}} \,\,dV = 0 \tag{6.21}$$

alakban írható fel.

A ρ sűrűség állandósága mellett áll a

$$\delta u \cdot \rho \, \ddot{\boldsymbol{u}} = \delta u \cdot \rho \frac{d \dot{\boldsymbol{u}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \dot{\boldsymbol{u}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\delta \boldsymbol{u} \right) \cdot \rho \dot{\boldsymbol{u}} \tag{6.22}$$

azonosság. Ezt felhasználva, a $\frac{d}{dt}(\delta u) = \delta \frac{du}{dt} = \delta \dot{u}$ variálási szabályra is tekintettel, a (6.21) térfogati integrálja helyett

$$\begin{cases}
\int_{V} \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \ddot{\boldsymbol{u}} dV = \frac{d}{dt} \int_{V} \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \dot{\boldsymbol{u}} dV - \int_{V} \delta \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \rho \dot{\boldsymbol{u}} dV \\
= \frac{d}{dt} \int_{V} \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \dot{\boldsymbol{u}} dV - \delta \int_{V} \frac{1}{2} \rho \dot{\boldsymbol{u}}^{2} dV \\
= \frac{d}{dt} \int_{V} \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \dot{\boldsymbol{u}} dV - \delta E ,
\end{cases}$$
(6.23)

írható, ahol

$$E = \frac{1}{2} \int_{V} \rho \dot{\boldsymbol{u}}^2 dV \tag{6.24}$$

a test kinetikus energiája.

Ezek után a (6.21) más alakúra rendezhető

$$\delta U_{alakv.} - \delta W_k + \delta C - \delta E + \frac{d}{dt} \int \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \dot{\boldsymbol{u}} \, dV = 0, \qquad (6.25)$$

Amennyiben a kapott kifejezést tetszőleges t_1 és t_2 időhatárok között integráljuk, az alábbi kifejezéshez jutunk

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U_{alakv.} - \delta W_k + \delta C - \delta E) dt - \int_{Vt_1} \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \boldsymbol{\dot{u}} dV = 0$$

Megkövetelve azt, hogy az u elmozdulásmező elégítse ki a t_1 és t_2 pontbeli tényleges értékeket, azt nyerjük, hogy $\delta u = 0$ a tetszőlegesen választott időintervallum határoknál, vagyis

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U_{alakv.} - \delta W_k + \delta C - \delta E) dt = 0$$
(6.26)

VEM alapjai	Bubnov-Galjorkin féle variácós elv alkalmazása
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 146 \triangleright$

A kapott variációs egyenlet a *kiterjesztett Hamilton-féle variációs elv*hez tartozó egyenletnek felel meg.

Amennyiben a külső erőrendszer konzervatív, felírható a teljes potenciális energia $\Pi_p = U_{alakv.} - W_k$ és így (6.26) helyett a jól ismert Hamilton-féle variációs elvhez jutunk.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E - \Pi_p - C) dt = 0$$
(6.27)

Megjegyezzük, hogy a $-W_k$ a külső erők potenciálja.

6.1. feladat: Vizsgáljuk a 6.5. ábrán vázolt rúd longitudinális (hosszirányú) rezgését Hamilton-féle variációs elv alapján.

Megoldás:



6.5. ábra. Példa a longitudinális rezgés vizsgálatára

A rúd x koordinátája keresztmetszetének x irányú elmozdulását jelölje u. Az illető keresztmetszet
 x irányú sebessége $v=\frac{du}{dt}=\dot{u}$.

Az $0 \le x \le L^1$ szakaszon a rúd keresztmetszete A^1 , Young-féle modulusa E^1 , sűrűsége ρ^1 . Az $L^1 < x \le (L^1 + L^2)$ szakaszon az előbbiek rendre ugyanezen mennyiségek A^2 , E^2 , ρ^2 . A felhalmozódott kinetikus energia

$$E = \frac{1}{2} \int \rho(\dot{u})^2 dV = \frac{1}{2} \sum_{e} \int_{L^e} \rho(\dot{u})^2 A dx , \qquad (6.1-a)$$

az alakváltozási energia a rúd hossztengely irányú fajlagos nyúlásra és feszültségére vonatkozó $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\sigma_x = E \varepsilon_x$ összefüggésekre is tekintettel

$$U_{alakv.} = \frac{1}{2} \int_{V} \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2} \sum_{e} \int_{L^e} \varepsilon_x E A \varepsilon_x dx, \qquad (6.1-b)$$

továbbá a külső terhelés virtuális elmozdulásokon végzett munkája

$$\delta W_k = F_2 \,\delta u_2 + \sum_e \int_{L^e} \delta u \, q_x dx \tag{6.1-c}$$

Tartalom | Tárgymutató

 $\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 146 \triangleright$

VEM alapjai

Tartalom | Tárgymutató

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 147 \triangleright$

míg a belső súrlódásból származó negatív csillapító erő virtuális munkája

$$\delta C = \int_{V} \delta u \,\rho \, c_M \dot{u} dV = \sum_e \int_{L^e} \delta u \rho \, c_M \dot{u} \,A \,dx \tag{6.1-d}$$

A (6.26) -ból

$$\begin{split} \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_e \delta \left\{ \frac{1}{2} \int_{L^e} A\rho(\dot{u})^2 dx - \int_{L^e} AE(u')^2 dx \right\} + F_2 \delta u_2 + \sum_e \int_{L^e} \delta u q_x dx \right] dt - \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_e \int_{L^e} \delta u c_M A \dot{u} \, dx \right) dt = 0 \end{split}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_e \int_{L^e} A\rho \dot{u} \delta \dot{u} \, dx - \sum_e \int_{L^e} \delta u' AEu' dx + F_2 \, \delta u_2 - \sum_e \int_{L^e} \delta u(\rho \, c_M A \dot{u} - q_x) dx \right] dt = 0 \quad (6.1-e)$$

következik. Itt a $\frac{\partial (\)}{\partial x} = (\)', \ \frac{\partial (\)}{\partial t} = (\)^{\cdot}$ jelöléseket alkalmaztuk. Az aláhúzott integrál átalakításából

$$\int_{L^e} \delta u' A E u' dx = A E u' \delta \left. u \right|_0^{L^e} - \int_{L^e} \delta u (A E u')' dx \tag{6.1-f}$$

továbbá

$$\int_{L^e} \delta \dot{u} A \rho \dot{u} dx = \frac{d}{dt} \int_{L^e} \delta u (A \rho \dot{u}) dx - \int_{L^e} \delta u A \rho \ddot{u} dx$$
(6.1-g)

kifejezéseket nyerjük.

Ily módon (6.1-e)-ből az $u_1 = u_2$, $x = L^1$ kinematikai illesztési feltételre is tekintettel

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{e} \int_{L^e} \delta u \left[(AEu')' - \rho c_M A \dot{u} + q_x \right] dx - \underbrace{\left[(AEu') \right]_{L^1}^1 - (AEu') \right]_{L^1}^2}_{DIF} \right\} \delta u_1 - \underbrace{\left[(AEu') \right]_{L^1 + L^2}^1 - F_2}_{DPF} \delta u_2 - \sum_{e} \int_{L^e} \delta u A \rho \ddot{u} dx \right\} dt = 0 \quad (6.1-h)$$

variációs egyenlethez jutunk, amiből a tetszőleges t_1, t_2 időintegrálhatások miatt rúdelemenként

$$(AEu')' + \rho c_M \dot{u} - A\rho \, \ddot{u} = -q_x \tag{6.1-i}$$

mozgásegyenlet, továbbá a rúdelemek közötti dinamikai illesztési feltétel (DIF) és a 2.rúd végén lévő dinamikai peremfeltétel (DPF) nyerhető. Itt $\binom{e}{L}$ az e dik elem x = L helyen vett értékére utal.

@@

 $\Leftarrow \Rightarrow$

⊲ 148 ⊳

Tartalom | Tárgymutató



6.6. ábra. Hajlított tartó rezgése

6.2. feladat: Vizsgáljuk meg a 6.6. ábrán vázolt Bernoulli-féle hipotézisű változó keresztmetszetű rúd x, z síkbeli hajlítórezgését.

Megoldás: A rúd potenciális energiája

$$\Pi_{p} = \frac{1}{2} \int_{L} I_{y} E(w_{0}^{\prime\prime})^{2} dx - \int_{L} p w_{0} dx - w_{0L} F_{L}^{Z} + w_{0L}^{\prime} M_{L}^{Y}$$
(6.2-a)

míg a kinetikus energia

$$E = \frac{1}{2} \int_{L} A \rho \dot{u}_0^2 dx \tag{6.2-b}$$

A $\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} (E-\Pi_p) dt = 0$ Hamilton-féle variációs elvből az

$$\int_{L} \delta \dot{w}_0 A \rho \dot{w}_0 dx = \frac{d}{dt} \int_{L} \delta w_0 A \rho \dot{w}_0 dx - \int_{L} \delta w_0 A \rho \ddot{w}_0 dx$$

integrálátalakítást, továbbá a Példa 2.2 (2.2-g) $\delta \Pi_p$ értékét is figyelembevéve

$$(I_y E w_0'')'' + A \rho \ddot{w}_0 - p = 0 \tag{6.2-c}$$

mozgásegyenlet, az

$$M_L^Y = -I_y E w_0'' \big|_L , \qquad F_L^Z = -(I_y E w_0'')' \big|_L$$
(6.2-d)

dinamikai peremfeltételek vezethetők le.

Hogyan változik a mozgásegyenlet, ha a rúd mentén x irányú erő is működik. Legyen ismert a rúderő értéke N = N(x). A rúd potenciális energiájában a rúderő munkája is megjelenik.

$$\Pi_p \Rightarrow \Pi_p - \int_L N\left(\sqrt{1 + {w'_0}^2} - 1\right) dx \tag{6.2-e}$$

 $\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 148 \triangleright$

VEM alapjai

Bubnov-Galjorkin féle variácós elv alkalmazása

Tartalom | Tárgymutató

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 149 \triangleright$

mivel a terhelt rúd középvonalának elemi hossza

$$ds = \sqrt{1 + {w'}_0^2} dx$$

és a rúderő (ds - dx) elemi megnyúláson végez munkát. Véve az (e) alatti integrál variációját, nyerjük, hogy

$$\int_{L} \frac{N}{\sqrt{1 + w_0'^2}} w_0' \delta w_0' dx \cong \left[\delta w_0(Nw_0') \right]_{0}^{L} - \int_{L} \delta w_0(Nw_0')' dx$$

és így a mozgásegyenlet

$$(I_y E w_0'')'' - (Nw_0')' + \rho A \ddot{w}_0 - p = 0$$
(6.2-f)

míg a nyíróerő is módosul:

$$F^{z} = -(I_{y}Ew_{0}^{\prime\prime})^{\prime} - Nw_{0}^{\prime}$$
(6.2-g)

@@

6.3. feladat: Vizsgáljuk az előző Példa 6.2 alatt levezetett hajlító rezgéséhez tartozó

$$(I_y E w_0'')'' + A\rho \,\ddot{w}_0 - p = 0 \tag{6.3-a}$$

parciális differenciálegyenlet megoldását különböző peremfeltételek, azaz megtámasztások esetén.

Megoldás: Bevezetve az $m = A\rho$ jelölést, továbbá feltételezve, hogy a tartó prizmatikus, és nincs gerjesztve, azaz p = 0, az (6.3-a) helyett áll

$$I_y E w_0^{iv} + m \, \ddot{w}_0 = 0 \tag{6.3-b}$$

A megoldást a változók szétválasztásán keresztül a

$$w_0 = W(x) I(t) \tag{6.3-c}$$

alakban keressük. Behelyettesítés után

$$\frac{\ddot{I}}{I} = -\frac{I_y E}{m} \frac{W^{iv}}{W}$$
(6.3-d)

amiből következik, hogy mind az időtől, mind az x helykoordinátától függő tagok bármilyen időben és helyen csak akkor lehetnek azonosak, ha azok valamilyen állandóval rendelkeznek. Jelöljük ezt az állandót $-\alpha^2$ -el. Így két egyenlethez jutunk:

$$\ddot{I} + \alpha^2 I = 0, \tag{6.3-e}$$

$$W^{iv} - \frac{m \alpha^2}{I_y E} W = 0 \tag{6.3-f}$$

Az első egyenlet azt mutatja, hogy a tartó időben α körfrekvenciával rezeg. A második egyenlet a rezgés alakját adja meg. Mivel az (6.3-f) negyedrendű differenciálegyenletnek felel meg, a megoldást a

$$k = \sqrt[4]{\frac{m \alpha^2}{I_y E}}$$
(6.3-g)

mennyiség bevezetésével $W=e^{nx}$ alakban kereshetjük. Behelyettesítés után az ún. karakterisztikus egyenlet

VEM alapjai

Tartalom | Tárgymutató

$$\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 150 \triangleright$$

amiből

$$n^4 = k^4 e^{i\frac{\pi}{2}s}$$
 $s = 1,2,3,4;$ $i = \sqrt{-1}, e^{ix} = \cos x + i \sin x,$

 $(n^4 - k^4) e^{nx} = 0$

azaz

$$n_s = ik, \quad -k, \quad -ik, \quad k$$

vagyis a megoldás

$$W = \tilde{C}_1 e^{kx} + \tilde{C}_2 e^{-kx} + \tilde{C}_3 e^{ikx} + \tilde{C}_4 e^{-ikx}$$

ami az alábbi alakba is átírható

$$W = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 shkx + C_4 chkx$$
(6.3-h)

A Krülov A. N. által javasolt megoldást választva (6.3-h) helyett

$$W = C_1 S + C_2 T + C_3 U + C_4 V$$
(6.3-i)

írható, ahol

$$S = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} kx + \cos kx), \quad T = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} kx + \sin kx)$$
$$U = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} kx - \cos kx), \quad V = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} kx - \sin kx)$$
(6.3-j)

A fenti függvények jellemző tulajdonsága, hogy

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad S=1, \ T=U=V=0$$

továbbá deriváltjaik között áll

$$S = \frac{T'}{k}, \quad T = \frac{U'}{k}, \quad U = \frac{V'}{k}, \quad V = \frac{S'}{k}$$
 (6.3-k)

Ebből következik, hogy a megoldás deriváltjai

$$W' = k \left(C_1 V + C_2 S + C_3 T + C_4 U \right)$$
$$W'' = k^2 \left(C_1 U + C_2 V + C_3 S + C_4 T \right)$$
$$W''' = k^3 \left(C_1 T + C_2 U + C_3 V + C_4 S \right)$$
(6.3-l)

A teljes megoldás a sajátrezgések sorbafejtésén keresztül képezhető

$$w_{0} = \sum_{n=1}^{\infty} W_{n}(x) I(t)$$
 (6.3-m)

A sajátrezgés körfrekvenciáinak meghatározására a peremfeltételeket kell áttekinteni. a) Szabadvég: Mind a hajlítónyomaték, mind a nyíróerő zérus, vagyis a Példa 6.2 (6.2-d) szerint

$$W'' = W''' = 0. \tag{6.3-n}$$

b) Görgős alátámasztás: Lehajlás és a hajlítónyomaték zérus, azaz

$$W = W'' = 0. (6.3-o)$$

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 150 \triangleright$

Bubnov-Galjorkin féle variácós elv alkalmazása

c) Befalazás: Lehajlás, szögelfordulás zérus

$$W = W' = 0.$$
 (6.3-p)

 $\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 151 \triangleright$

d) Rugalmas alátámasztás
 c_r rugóállandójú rúgón keresztül, Hajlítónyomaték zérus, nyíró
erő arányos a lehajlással

$$W'' = 0, \quad c_r W = \pm I_y E W'''$$
 (6.3-q)

Konkrét példaként álljon a két végén görgős megtámasztás esete. Ekkor W = W'' = 0. Felhasználva (6.3-i) és (6.3-l) alatti összefüggéseket, az x = 0 helyre vonatkozó feltételből $C_1 = C_3 = 0$ adódik. Az x = L helyen felírt feltételekből

$$C_2 T (kL) + C_4 V (kL) = 0,$$

$$C_2 V (kL) + C_4 T (kL) = 0$$
(6.3-r)

A kapott homogén algebrai egyenlet triviálistól eltérő megoldása akkor áll fenn, ha determinánsa eltűnik. Jelen esetben kifejtve azt, egy transzcendes egyenletet kapunk, amiből a sajátkörferkvenciák már meghatározhatók. Kismértékű átalakítások után, nyerjük, hogy

$$\sin kL \, \mathrm{sh} \, kL = 0 \tag{6.3-s}$$

Mivel $\,sh\,kL\neq 0,$ így $\sin kL\,=0,$ aza
z $kL\,=n\pi=k_nL\quad (n=1,2,3,\ldots).$ A (6.3-g) felhasználásával

$$\alpha_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{I_y E}{m}} \tag{6.3-t}$$

A sajátrezgés alakja abból a megfontolásból számolható, hogy egyrészt, (6.3-r) szerinti első egyenletből

$$C_2 = -\frac{V\left(kL\right)}{T\left(kL\right)} C_4$$

másrészt (6.3-i) szerint

$$W_n = C_2 \left(T\left(k_n x\right) - \frac{T\left(k_n L\right)}{V\left(k_n^L\right)} V\left(k_n x\right) \right)$$

Mivel

$$\frac{T\left(k_n L\right)}{V\left(k_n^L\right)} = 1$$

végezetül $C_n = C_2$ állandó jelölésével

$$W_n = C_n \, \sin \, k_n x \tag{6.3-u}$$

ami valóban kielégíti a peremfeltételeket.

@@

6.4. feladat: Vizsgáljunk egy baloldalon mereven befalazott, vízszintesen elhelyezkedő, jobb végén húzó-nyomó igénybevétel felvételére alkalmas függőlegesen elhelyezett c_r rugóállandójú rúgóval kialakított rugalmas rendszert.

A sajátrezgés vizsgálatát a Példa 6.3 szerinti lépések értelemszerű alkalmazásával végezzük el.

Megoldás: A lehajlást

$$w_0 = W\left(x\right)I\left(t\right) \tag{6.4-a}$$

$$W = C_1 S + C_2 T + C_3 U + C_4 V$$
(6.4-b)

Bubnov-Galjorkin féle variácós elv alkalmazása

Tartalom | Tárgymutató

VEM alapjai

alakban keressük. A Krülov-féle függvények tulajdonságainak felhasználásával a peremfeltételek könnyen felírhatók.

Á baloldali peremfeltételből adódóan W(0) = W'(0) = 0. Ezt a (b) alatti megoldásban $C_1 = C_2 = 0$ felvételével tudjuk kielégíteni.

A jobboldali végen a hajlítónyomaték zérus, míg a rugós alátámasztás a lehajlással arányos nyíróerőt szolgáltat, vagyis

$$W''(L) = 0, \quad c_r W(L) = I_y E W'''(L).$$

Ily módon

$$C_{3} S (kL) + C_{4} T (kL) = 0,$$

$$c_{r} [C_{3} U (kL) + C_{4} V (kL)] = I_{y} E k^{3} [C_{3} V (kL) + C_{4} S (kL)]$$
(6.4-c)

Átrendezések után

$$\frac{c_r L^3}{I_y^E} = -k^3 L^3 \frac{S^2 (kL) - V (kL) T (kL)}{T (kL) U (kL) - S (kL) V (kL)} = -k^3 L^3 \frac{\operatorname{ch} kL \cos kL + 1}{\operatorname{ch} kL \sin kL - \operatorname{sh} kL \cos kL}$$
(6.4-d)

Amennyiben $c_r = 0$, a legkisebb gyök értéke $k_1L = 1,875$, vagyis megkaptuk a balvégén befalazott tartó legkisebb körfrekvenciájával kapcsolatos értéket. Ha $\frac{c_r L^3}{I_E^3} = 20$, akkor $k_1L \approx 3$, ha $\frac{c_r L^3}{I_E^3} = 65$, akkor $k_1L \approx 3,5$. A rugóállandó növelésével k_1L tart 3,93 értékhez, vagyis a balvégén befalazott, jobbvégén görgősen alátámasztott tartó esetéhez.

Általánosan írhatjuk, hogy a különböző megtámasztású prizmatikus tartóknál a sajátrezgés körfrekvenciája

$$\alpha_n = s_n \sqrt{\frac{I_y^E}{mL^4}}$$

összefüggéssel számolható.

Sorba véve a különféle tartó eseteit, a részletek mellőzésével kapjuk, hogy

- Balvégén befalazott tartónál

$$s_1 = 3,53, \ s_2 = 22,0 \ s_3 = 61,70, \ s_4 = 121,0, \ s_5 = 200,0$$

míg a rezgéskép

$$W_{n}=C_{3}\ \left(\ U\left(k_{n}x\right)-\frac{V\left(k_{n}L\right)}{S\left(k_{n}^{L}\right)}\ V\left(k_{n}x\right)\ \right).$$

- Kétvégén befalazott tartónál

$$s_1 = 22,0$$
 $s_2 = 61,7$ $s_3 = 61,70$ $s_4 = 200,0$ $s_5 = 298,2$

míg a rezgéskép

$$W_n = C_3 \left(U\left(k_n x\right) - \frac{T\left(k_n L\right)}{U\left(k_n^L\right)} V\left(k_n x\right) \right)$$

- Balvégén befalazott, jobbvégén görgősen alátámasztott tartónál

$$s_1 = 15, 4$$
 $s_2 = 50, 0$ $s_3 = 104, 0$ $s_4 = 178, 0$ $s_5 = 272, 0$

míg a rezgéskép

$$W_{n}=C_{3}\ (\ U\left(k_{n}x\right)-\frac{S\left(k_{n}L\right)}{T\left(k_{n}^{L}\right)}\ V\left(k_{n}x\right)\)$$

Tartalom | Tárgymutató

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 153 \triangleright$

- Szabadvégű tartónál

$$s_1 = 22,0$$
 $s_2 = 61,7$ $s_3 = 121,0$ $s_4 = 200,0$ $s_5 = 298,2$

míg a rezgéskép

$$W_n = C_1 \left(S\left(k_n x\right) - \frac{T\left(k_n L\right)}{U\left(k_n^L\right)} T\left(k_n x\right) \right)$$

@@

6.5. feladat: Vizsgáljuk az előbbi tartó sajátfrekvenciáit abban az esetben , amikor a tartó N hosszirányú időben állandó erővel terhelt. A példa mechatronikai szempontból azért érdekes, mert a hajlított rúd sajátrezgései N rúderővel vezérelhető azaz elhangolható. Példa 6.2-ben kapott eredmények alapján a mozgásegyenlet

$$(I_y E w_0'')'' - (Nw_0')' + \rho A \ddot{w}_0 - p = 0$$

Megoldás: Ismét prizmatikus tartót és nyomó rúderőt feltételezve, (a továbbakban N > 0), a sajátrezgést meghatározó differenciálegyenlet

$$I_y E w_0^{iv} + N w_0^{"} + \rho A \ddot{w}_0 = 0 \tag{6.5-a}$$

Ismételten bevezetve az $m = A \rho$ jelölést, élve a változók szétválasztásával

$$w_0 = W(x) I(t) \tag{6.5-b}$$

két differenciálegyenletet nyerünk. Az egyik

$$\ddot{I} + \alpha^2 I = 0, \tag{6.5-c}$$

míg a másik

$$W^{iv} + \beta^2 W'' - k^4 W = 0 \tag{6.5-d}$$

ahol

$$k^4 = \frac{m\,\alpha^2}{I_y E}, \quad \beta^2 = \frac{N}{I_y E}.$$
(6.5-e)

A megoldás

$$W = C_1 \sin s_1 x + C_2 \cos s_1 x + C_3 \operatorname{sh} s_2 x + C_4 \operatorname{ch} s_2 x$$
(6.5-f)

ahol

$$s_1 = \sqrt{\frac{\beta^2}{2} + \sqrt{\frac{\beta^4}{4} + k^4}}, \quad s_2 = \sqrt{-\frac{\beta^2}{2} + \sqrt{\frac{\beta^4}{4} + k^4}}$$
 (6.5-g)

Kétvégén görgősen alátámasztott tartót vizsgálva, a peremfeltételek egybeesnek az előző pédabelivel.

A lehajlás és nyomaték zérus értékéből az
 x=0 helyen következik, hogy $C_2=C_4=0.$ A jobboldali végen lévő per
emfeltételből

$$0 = C_1 \sin s_1 L + C_3 \operatorname{sh} s_2 L$$

$$0 = -C_1 s_1^2 \sin s_1 L + C_3 s_2^2 \operatorname{sh} s_2 L$$

feltételeket nyerjük.. A homogén egyenlet determinánsának eltűnéséből

$$0 = (s_1^2 + s_2^2) \sin s_1 L \, \mathrm{sh} \, s_2 L$$

amiből a $0 = \sin s_1 L$ egyenlet gyökei

$$s_1 L = n \pi, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$
 (6.5-h)

Végezetül (6.5-g) felhasználásával

$$L \sqrt{\frac{\beta^2}{2} + \sqrt{\frac{\beta^4}{4} + k^4}} = n \pi$$

amiből az (6.5-e)-re is tekintettel a rendszer sajátkörfrekvenciái

$$\alpha_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{I_y E}{m}} \sqrt{1 - \frac{N L^2}{n^2 \pi^2 I_y E}}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$
(6.5-i)

Az eredmény jól mutatja, hogy a nyomóerő növelésével a sajátkörfrekvenciák csökkennek, míg húzóerőnél nőnek. Másrészt az is látszik, ha N az $N_{kr} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} I_y E$ Euler-féle kritikus erőhöz közeledik, a gyök alatti mennyiség zérushoz tart és a tartó elveszíti stabilitását. @@

6.3. Végeselemes modellezés

A vizsgált testeket gondolatban alrészekre, elemekre felbontva, fel tudjuk építeni a közelítendő mezőket olymódon, hogy az elemen belüli elmozdulások a C^0 osztályú folytonosságot biztosító alakfüggvényekkel és paraméterekkel legyenek leírhatók. Az elemen belüli elmozdulásmezőt a dinamikai feladatoknál is a szokásos alakban közelítjük. A statikai feladatoktól eltérően itt az alakfüggvények csak a hely, míg az elmozdulási paraméterek időben nem állandóak, hanem az időnek egyelőre ismeretlen függvénye. Így az elemenbelüli elmozdulás

$$\boldsymbol{u}^e \Rightarrow \mathbf{u}^e(\mathbf{x},t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\mathbf{q}^e(t)$$
 (6.28)

míg a sebesség és a gyorsulás az alábbiak szerint számolható

$$\dot{\boldsymbol{u}}^e \Rightarrow \dot{\boldsymbol{u}}^e(\mathbf{x},t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\dot{\mathbf{q}}^e(t), \quad \ddot{\boldsymbol{u}}^e \Rightarrow \ddot{\boldsymbol{u}}^e(\mathbf{x},t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{q}}^e(t)$$
(6.29)

A korábbiakban bevezetett jelölésekkel az alakváltozási vektor

$$\mathbf{A}^{e} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{e}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\partial} \mathbf{u}^{e}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}^{e}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^{e}(t), \tag{6.30}$$

a feszültségi vektor rugalmas anyag és viszkózus belső csillapítás feltételezésével (a kezdeti feszültséget elhanyagoljuk)

$$\mathbf{T}^e \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x},t) = \mathbf{D}^e (\boldsymbol{\varepsilon} + c_K \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)^e$$
 (6.31)

ahol c_K belső csillapítási tényező, ε_0 kezdeti alakváltozási vektor, \mathbf{D}^e anyagállandók mátrixa.

Az elmozdulásmező variációja

$$\delta \mathbf{u}^e = \mathbf{N}(x) \delta \mathbf{q}^e(t) \tag{6.32}$$

A (6.22) alatti variációs elvből kiindulva, a behelyettesítések után

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \delta \mathbf{q}^{eT} \left\{ \mathbf{M}^e \; \ddot{\mathbf{q}}^e + \mathbf{C}^e \; \dot{\mathbf{q}}^e + \mathbf{K}^e \; \mathbf{q}^e - \mathbf{f}^e \right\} = 0 \tag{6.33}$$

variációs egyenlethez jutunk, ahol az
 ${\bf M}^e$ tömegmátrix , ${\bf C}^e$ csillapítási mátrix és
a ${\bf K}^e$ merevségi mátrix

$$\mathbf{M}^{e} = \int_{V^{e}} \mathbf{N}^{T} \rho \mathbf{N} dV, \qquad \mathbf{C}^{e} = c_{M} \mathbf{M}^{e} + c_{K} \mathbf{K}^{e}, \qquad (6.34)$$

$$\mathbf{K}^{e} = \int_{V^{e}} \mathbf{B}^{T} \mathbf{D} \mathbf{B} \, dV \,, \tag{6.35}$$

továbbá a redukált terhelési vektor összetevői

$$\mathbf{f}_{\varepsilon_0}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\varepsilon_0 dV, \quad \mathbf{f}_{\rho_k}^e = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{k} \, dV, \quad \mathbf{f}_p^e = \int_{A_p^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} \, dA \tag{6.36}$$

azaz

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}^e_{\varepsilon_0} + \mathbf{f}^e_{\rho k} + \mathbf{f}^e_p. \tag{6.37}$$

A tömeg-és a merevségi mátrixszal arányos \mathbf{C}^e csillapítási mátrixot *Rayleigh-féle csillapítási mátrixnak* is szokás nevezni.

Az (6.33) levezetésénél feltételeztük, hogy a rugalmas rendszer mozgását az inerciarendszerben írtuk le. Mozgó rendszerbeli leírások használatakor a relatív mozgásoknál használatos fogalmakkal kell operálni. Ezek ismertetésétől terjedelmi okok miatt itt eltekintünk.

Az elemek illesztésére vonatkozó szabály figyelembevételével a (6.33) variációs egyenletből, az egész rendszerre értelmezett elmozdulási paraméterek **q** vektorával, az alábbi variációs egyenlet állítható elő

$$\delta \mathbf{q}^T \left\{ \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{f} \right\} = 0$$
(6.38)

Az $\mathbf{M}^{e},...$ mátrixok felépítése hasonló, mint a már korábban megismert \mathbf{K}^{e} merevségi mátrixé. Vagyis, ha pl. az elem i,j... jelű csomópontokkal, összességében n_{cs}^{e} számú csomóponttal rendelkezik, és csomóponti

VEM alapjai

Tartalom | Tárgymutató

elmozdulás
vektora $\mathbf{q}_{i}^{eT} = [u, v, w]$ három elmozdulásko
ordinátát tartalmaz, akkor

$$\mathbf{M}^{e}_{(3*n^{e}_{cs},3*n^{e}_{cs})} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ij} & \dots \\ \mathbf{M}_{ji} & \mathbf{M}_{jj} & \dots \\ (3,3) & & \\ \vdots & & \end{bmatrix}^{e}$$

és a teljes rendszerre vonatkozó tömegmátrix a 3.4. fejezetbeli meghatározások révén:

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{ccc} & \vdots \\ \dots & M_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{array} \right] \,,$$

ahol

$$\mathbf{M}_{ij} = \sum_{e \in i,j} \mathbf{M}_{ij}^{e}, \quad \mathbf{M}_{ij}^{e} = \begin{cases} \mathbf{0} & ha \ e \notin i,j \\ \neq \mathbf{0} & ha \ e \in i,j \end{cases}$$
(6.39)

összefüggéssel számolható. Ugyanez áll fenn a többi mátrixra is.

6.4. Kinematikai peremfeltétel figyelembevétele

A 6.3. fejezetben a végeselem-módszer felhasználásával levezettük a mozgásegyenletet.

Az elemek illesztésével az egész testre felírható az elmozdulásmező, ahol $\mathbf{q}(t)$ a rugalmas rendszerre vonatkozó elmozdulási (csomóponti) paramétereket tartalmazza. Ezt célszerűségi szempontok miatt két részre bontjuk fel, egyik része ismert \mathbf{q}_u , a kinematikai perem-feltételből adódóan, míg a másik része ismertetlen, azaz szabad \mathbf{q}_s . Tehát formálisan a testben az elmozdulásmezőt a következő módon approximáljuk:

$$\boldsymbol{u} \Rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{q}(t) = \mathbf{N}_s(\mathbf{x})\mathbf{q}_s(t) + \mathbf{N}_u(\mathbf{x})\mathbf{q}_u(t),$$
 (6.40)

vagyis az elmozdulási paraméterek vektora

$$\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_s^T & \mathbf{q}_u^T \end{bmatrix}. \tag{6.41}$$

A (6.38) alatti variációs egyenlet az alábbi

$$\delta \mathbf{q}^T \left\{ \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{f} \right\} = \mathbf{0}$$
(6.42)

Bontsuk fel a mátrixokat, a terhelési vektort a q vektornak megfelelően

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{su} \\ \mathbf{M}_{us} & \mathbf{M}_{uu} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ss} & \mathbf{C}_{su} \\ \mathbf{C}_{us} & \mathbf{C}_{uu} \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{su} \\ \mathbf{K}_{us} & \mathbf{K}_{uu} \end{bmatrix}$$

Ekkor a szabad elmozdulásokra vonatkozóan a variációs egyenlet

$$\delta \mathbf{q}_s^T \left\{ \mathbf{M}_{ss} \ddot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{C}_{ss} \dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{K}_{ss} \, \mathbf{q}_s - \mathbf{f}_{\text{mod}} \right\} = 0 \tag{6.43}$$

ahol

$$\mathbf{f}_{\text{mod}} = \mathbf{f}_s - \mathbf{M}_{su} \ddot{\mathbf{q}}_u - \mathbf{C}_{su} \dot{\mathbf{q}}_u - \mathbf{K}_{su} \mathbf{q}_u$$
(6.44)

Mivel δq_s tetszőleges, a (6.43) csak úgy áll fenn, ha a hullámos zárójelben szereplő vektor zérus, vagyis a szabad paraméterekre vonatkozó differenciálegyenlet, a mozgásegyenlet

$$\mathbf{M}_{ss}\ddot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{C}_{ss}\dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{K}_{ss}\,\mathbf{q}_s - \mathbf{f}_{\mathrm{mod}} = \mathbf{0} \tag{6.45}$$

A felírásból jól látjuk, hogy az A_u felületen a megadott mozgások miatt a csomóponti terhelési vektor jelentős mértékben megváltozik. Nem csak az elmozdulásnak, hanem azok időszerinti deriváltjainak is van hatásuk. Ezek figyelembevétele, pl. földrengéseknél az épületek méretezésénél, járművek dinamikai viselkedésének megtervezésénél (a kerekről az út egyenlőtlenségeiből adódó mozgások, mint gerjesztés szerepe) nem elhanyagolható.

A továbbiakban az egyszerűbb jelölés érdekében az alsó indexeket elhanyagoljuk és egyszerűbb felírásban az alábbi egyenletet fogjuk vizsgálni

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{f} \tag{6.46}$$

Ez azt jelenti, hogy a **q** vektor csak az ismeretleneket jelöli, az **f**-ben viszont a kinematikai peremfeltétel hatása már benne van!

6.5. Rezgések osztályozása

A (6.46) alatti differenciálegyenlet számos alesetet foglal magában

A feladatok egyik osztálya az *autonom* rendszerrel kapcsolatos, vagyis amikor a rendszerre gerjesztés nem hat. Ekkor

$$\mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{6.47}$$

Amennyiben C = 0, a rendszert *szabad, csillapítás nélkülinek* nevezzük, azaz

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{6.48}$$

ellenkező esetben szabad csillapításos rendszerről beszélünk

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{6.49}$$

Amennyiben a gerjesztés is hat, a rendszert *gerjesztett* rendszernek nevezzük. Többféle gerjesztést különböztetünk meg.

- 1. *Determenisztikus*. Az időben lejátszódó folyamatot egyértelmű függvénykapcsolat írja le.
 - (a) Egyik nagy osztálya a harmónikusan változó terhelések esete. Pl.

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_A \sin \omega t \tag{6.50}$$

vagy Fouier-féle sorbafejtésen keresztül megadható terhelés

$$\mathbf{f} = \sum_{i} \mathbf{f}_{Ai}^{s} \sin \omega_{i} t + \sum_{i} \mathbf{f}_{Ai}^{c} \cos \omega_{i} t$$
(6.51)

(b) Másik esetben a terhelések tetszőlegesen változnak időben

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}\left(t\right) \tag{6.52}$$

Ilyen terhelésekkel találkozunk alakítógépek (pl. kovácsolási, lemez alakítási technológiáknál) üzemeltetésénél, vagy lassú lefutású kinematikai terheléseknél.

2. Sztohasztikus terhelések többek között gépjárműveknél, forgácsoló szerszámgépeknél, veszélyes zónában lévő épületek, létesítmények földrengéseinél fordulnak elő. A rendszer válaszadása is nyílván sztohasztikus jelleggel rendelkezik. Ezek vizsgálatával kurzusunk keretében nem fogunk foglakozni.

6.6. Csillapítások

A szerkezetek dinamikai viselkedését nagymértékben befolyásolják a különféle csillapítások, amelyek az anyag belső szerkezetéből, a szerkezet kialakításából (konstrukciós csillapítás), és a környezet ráhatásából adódnak.

A rugalmas rendszerben felhalmozott energiának szétszóródását, felemésztését, háromfajta hatás befolyásolja.

Az első csoportba a külső környezet és a vizsgált rendszer között fellépő súrlódás, másodikba az anyag belső súrlódása, míg a harmadikba a konstrukciós kialakításnál jelentkező súrlódás hatása sorolható fel.

A külső súrlódásnál fel szokás tételezni, hogy a csillapító erő a sebességgel arányos (pl. a test folyadékban, gázban mozog, vagy speciális hidraulikus csillapítók vannak beépítve a rendszerbe).

A *Coulomb*-féle száraz súrlódásnál a csillapító erő arányos az érintkezési nyomással és a súrlódási tényezővel. Csavarkötéseknél ilyen típusú súrlódással találkozunk.

VEM alap	ojai	Csillapítások		
Tartalom	Tárgymutató	$\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 159 \triangleright$		

A ciklikus alakváltozásnak kitett anyag esetén a belső súrlódás következtében az energia egy része hő formájában felszabadul. A belső súrlódást az anyag inhomogenitása okozza. A belső súrlódásnak jelentős szerepe van, hisz a rezgések csillapítását okozzák.

6.6.1. Csillapítóerők

Egyszabadságfokú rendszert vizsgálva a csillapítóerők egyrészt

$$F_{csill} = F_{csill}(\dot{q}) = -c_1 \dot{q} \tag{6.53}$$

alakban számoljuk. Illetve nagy sebességeknél négyzetes összefüggést használnak

$$F_{csill} = -c_2 \dot{q}^2 \operatorname{sign} \dot{q} \tag{6.54}$$

A konstrukciós csillapítást a száraz súrlódással szokás modellezni

$$F_{csill} = -c_0 \operatorname{sign} \dot{q} \quad (c_0 \quad \text{súrlódó erő}). \tag{6.55}$$

A fentieket egyetlen nemlineáris összefüggésbe is belefoglalhatjuk:

$$F_{csill} = -c_n \, |\dot{q}|^n \, \mathrm{sign} \, \dot{q} \,, \tag{6.56}$$

ahol n, c_n állandók. A fentieket n = 1,2,0 -nál kapjuk vissza.

6.6.2. Hiszterézis

Sok esetben a tömegpontra ható erő szétosztása visszatérítő és csillapítóerőre feltételes. Általában a belső erő

$$F = F(q, \dot{q}) \tag{6.57}$$

alakban írható fel.

Harmónikus mozgásnál a kitérés

$$q = A\cos\omega t \tag{6.58}$$

A rezgés folyamán az $F = F(q, \dot{q})$ hiszterézis hurokkal jellemezhető. A hurok területe arányos azzal a munkával amit egy ciklus alatt a belső súrlódás okozta erők végeznek. Kísérletekből lehet a hiszterézis hurok formáját meghatározni. Mivel a hurok szélessége nem nagy, a kísérlet végrehajtása különleges figyelmet érdemel. A rezgés egy periódus alatti energiavesztesége a szétszóródott energia. Amennyiben

$$F(q, \dot{q}) = -kq + F_{csill}(\dot{q}) \tag{6.59}$$

alakban írható fel, az energiaveszteség (hiszterézis hurok területe)

$$\Delta U = -\oint F(q, \dot{q}) \, dq = -\int_{0}^{T} F_{csill}(\dot{q}) \dot{q} dt \tag{6.60}$$

ahol $T = 2\pi\omega$ periódus idő. A (6.56), (6.58) alapján az energiaveszteség

$$\Delta U = \int_{0}^{T} c_n \left| \dot{q} \right|^{n+1} dt = c_n A^{n+1} \omega^{n+1} \int_{0}^{T} \left| \sin \omega t \right|^{n+1} dt = c_n A^{n+1} \omega^n K_n$$
(6.61)

ahol $K_n = \int_{0}^{2\pi} |\sin s|^{n+1} ds$ mivel $s = \omega$, $ds = \omega dt$.

Az alábbi számsor a ${\cal K}_n$ néhány értékét tartalmazza

A kapott eredményből következik, hogy viszkózus csillapításnál (n=1)

$$\Delta U = c_1 \pi A^2 \omega \tag{6.62}$$

Coulomb-féle súrlódásnál (n = 0)

$$\Delta U = c_0 4A \tag{6.63}$$

vagyis viszkózus csillapításnál a csillapítóerő nem csak a rezgés amplitudójától, hanem a rezgés frekvenciájától is függ. Ugyanakkor kísérletekkel megállapították, hogy az anyag belső súrlódás okozta a hiszterézis hurok területe független a rezgés frekvenciájától.

Célunk az energiaveszteséget

$$\Delta U = m A^2 \tag{6.64}$$

alakban képezni. Értelmezzük, az ún. veszteségtényezőt

$$\eta = \frac{\Delta U}{2\pi U} = \frac{\Delta U}{\pi k A^2} \tag{6.65}$$

ahol $U = \frac{1}{2}kA^2$ alakváltozási energia.

VEM alapjai	Csillapítások
Tartalom Tárgymutató	$\iff \ \triangleleft \ 161 \ \triangleright$

A veszteségtényezőt határozzuk meg a (6.62), (2.64) esetben és tegyük egyenlővé azokat:

$$\eta = \frac{c\omega}{k} = \frac{m}{\pi k} \tag{6.66}$$

ahonnan

$$\frac{m}{\pi} = k\eta = c\omega \tag{6.67}$$

Az egyszabadságfokú csillapított gerjesztett rendszernél a komplex zelmozduláson keresztül az

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = F_0 e^{i\,\omega\,t} \tag{6.68}$$

mozgásegyenlet partikuláris megoldása ($i = \sqrt{-1}$)

$$z_{part} = z = Be^{i\,\omega\,t}\,.\tag{6.69}$$

Így az egyenlet második és harmadik tagja helyett (6.67) -ra is tekintettel

$$c\dot{z} + kz = (ic\omega + k)Be^{i\,\omega\,t} = k(1+i\eta)Be^{i\,\omega\,t} = k(1+i\eta)z_{part}$$

írható. Ezzel az eredeti mozgásegyenlet helyett

$$m\ddot{z} + k(1+i\eta)z = F_0 e^{i\,\omega\,t} \tag{6.70}$$

írható, amely az anyag belső csillapításának hatását már hordozza.

Térjünk vissza a (6.68)-as egyenlethez. Vizsgáljuk a gerjesztés nélküli esetet

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = 0. (6.71)$$

A megoldást $z=He^{\lambda t}$ alakban keresve a

$$2\beta = \frac{c}{m}, \qquad \alpha^2 = \frac{k}{m} \tag{6.72}$$

jelölésekkel a következő karakterisztikus egyenlethez jutunk

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \alpha^2 = 0. \tag{6.73}$$

Bevezetve a $\xi = \beta/\alpha$ Lehr-féle csillapítási tényezőt a (6.21) megoldása

$$\lambda_{1,2} = -\alpha\xi \pm i\alpha\sqrt{1-\xi^2} = -\beta \pm i\nu \tag{6.74}$$

ahol $\xi<1$ esetben a megoldás csökkenő amplitudójú periódikus mozgást jelöl ki ν körfrekvenciával, azaz λ_1 mellett

$$z = H e^{-\beta t} e^{i\nu t}.$$
(6.75)

VEM alapjai	Csillapítások
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 162 \triangleright$

Ezek után nem nehéz belátni, hogy ha a logaritmikus dekrementum alatt a következő mennyiséget értjük, akkor

$$\ln d = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}} = \beta T \tag{6.76}$$

A Trezgésidőt és az amplitudókat mérésekből megkapva a β értéke kiszámítható. Ha a rezgés csillapítása nem nagy mértékű, akkor írható, hogy

$$\ln d = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}} = \ln \frac{A_i}{A_i - \Delta A_i} = \ln \frac{1}{\left(1 - \frac{\Delta A_i}{A_i}\right)} \approx \frac{\Delta A_i}{A_i}.$$
 (6.77)

A rezgést végző rendszer rúgójában felhalmozódó alakváltozási energia a t_i időpillanatban $U_i = \frac{kA_i^2}{2}$, míg annak egy periódus alatti megváltozása

$$U_{i} - U_{i+1} = \frac{k(A_{i}^{2} - A_{i+1}^{2})}{2} = k \frac{(A_{i} + A_{i+1})}{2} \cdot (A_{i} - A_{i+1})$$

= $\frac{k}{2} (2A_{i} - (A_{i} - A_{i+1})) \cdot (A_{i} - A_{i+1}) = \frac{k}{2} A_{i} \left(2 - \frac{\Delta A_{i}}{A_{i}}\right) \Delta A_{i}$ (6.78)

A szétszóródó energiahányados (a hiszterézis hurok területe és a kezdeti alakváltozási energia hányadosa), a (6.78) ban a másodrendű tag elhanyagolásával

$$\psi = 2\pi\eta = \frac{\Delta U}{U} \cong \frac{2\Delta A_i}{A_i}, \quad \eta = \ln d/\pi$$
 (6.79)

amiből látható, hogy ψ értéke kétszerese a logaritmikus dekrementumnak, továbbá az η veszteségtényező a logaritmikus dekrementum π -ed része.

6.6.3. Az anyag belső csillapításának figyelembevétele

Az anyag belső csillapításának mértéke, amint azt a kísérletek igazolják, független a gerjesztés frekvenciájától. A viszkózus csillapításnál a csillapítás a sebességgel arányos. Amint az egyszabadságfokú rezgőrendszernél láttuk, a frekvenciafüggéstől az egyenletek felírása folyamán meg lehet szabadulni, vagyis a

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_A \sin \omega t \tag{6.80}$$

gerjesztés esetén az

$$\mathbf{M\ddot{q}} + \mathbf{C\dot{q}} + \mathbf{Kq} = \mathbf{f}_A \sin \omega t \tag{6.81}$$

egyenletnek

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_A \sin(\omega t - \varphi) \tag{6.82}$$

állandósult partikuláris megoldására tekintettel

$$\dot{\mathbf{q}} = \omega \, \mathbf{q},\tag{6.83}$$

vagyis a csillapító erő

$$-\omega \mathbf{C} \mathbf{q}$$

Az ω gerjesztési frekvenciától úgy tudunk megszabadulni, hogy a (6.81)-ben a hiszterézis csillapítást

$$\frac{1}{\omega} \mathbf{C}_A \dot{\mathbf{q}} \tag{6.84}$$

alakban szerepeltetjük, mivel így a kapott egyenlet

$$\mathbf{M\ddot{q}} + \frac{1}{\omega}\mathbf{C}_{A}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Kq} = \mathbf{f}_{A}\sin\omega t$$
(6.85)

a kísérleti tapasztalattal nem ellentétes.

Véve ugyanezen egyenletnek a cosinus törvény szerinti gerjesztéssel felírt alakját,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{\omega}\mathbf{C}_{A}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}_{A}\cos\omega t$$
(6.86)

majd bevezetve a

$$\mathbf{z} = \mathbf{p} + i\mathbf{q} \tag{6.87}$$

komplex vektort, az előzőekből

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \frac{1}{\omega}\mathbf{C}_{A}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{f}_{A}e^{i\omega t} = \tilde{\mathbf{f}}(t)$$
(6.88)

írható fel. Állandósult mozgást tanulmányozva,

$$\mathbf{z} = \mathbf{b}e^{i\omega t},\tag{6.89}$$

azaz

$$\mathbf{z}^{\cdot} = i\,\omega\mathbf{z}\,,\tag{6.90}$$

vagyis a mozgásegyenlet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + [\mathbf{K} + i\mathbf{C}_A]\,\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{f}}(t) \tag{6.91}$$

Lineáris szerkezeteknél a C_A mátrixot a K merevségi mátrixszal arányosan szokás felvenni. Az arányossági tényező η acélok esetén $\eta \cong 0.05$. Így a mozgásegyenlet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + (1+i\eta)\mathbf{K}\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{f}_A(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$
(6.92)

A jobboldalon álló terheléstől függően a kapott megoldásnak a valós vagy képzetes része képezi a tényleges megoldást.

6.7. Végesszabadságfokú rendszerek csillapítás nélküli szabad rezgése

A legáltalánosabb alakban felírt (6.46) alatti mozgásegyenletben a gerjesztés és a csillapítást elhagyva a megoldandó homogén differenciálegyenletet

$$\mathbf{M\ddot{q}} + \mathbf{Kq} = \mathbf{0}. \tag{6.93}$$

Legyen az ismeretelenek száma: *n*. A csillapításnélküli rendszerek vizsgálata, tulajdonságának ismerete, amint később is látni fogjuk nagy jelentőséggel bír, mind a csillapított szabad, illetve a gerjesztett rendszerek esetén. A sajátfrekvenciák és rezgésképek ismerete kellő támpontot ad a mérnöknek gerjesztések fellépésekor a szerkezet dinamikai viselkedését illetően.

6.7.1. Sajátrezgések, rezgésképek

A lineáris, homogén differenciálegyenletrendszer megoldását

$$\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}} \sin \alpha t \tag{6.94}$$

alakban keressük. Ekkor a behelyettesítés után

$$(-\alpha^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \tag{6.95}$$

homogén algebrai egyenletrendszerhez jutunk, aminek triviálistól eltérő megoldása az együttható mátrix determinánsának eltűnésekor áll fenn, azaz

$$\det(-\alpha^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = p(\alpha^2) = 0.$$
(6.96)

A determinánst kifejtve $p(\alpha^2)$ karakterisztikus polinomhoz jutunk, λ^2 nek n a legnagyobb hatványa, azaz a kapott polinom 2n -ed fokú. Bizonyítható, hogy a polinom gyökei pozitívak.

A (6.96) karakterisztikus egyenlet i-edik gyökét jelölje α_i , a hozzá tartozó sajátvektort φ^i , vagyis a sajátérték problémánál a

$$(\alpha_1, \boldsymbol{\varphi}^1), (\alpha_2, \boldsymbol{\varphi}^2), \dots, (\alpha_n, \boldsymbol{\varphi}^n)$$
 (6.97)

sajátértékpárok meghatározása jelenik meg. Itt és a továbbiakban a φ^i vektornál jelentkező felső *i* index nem hatványozást jelöl, míg az α_i^2 -nél a 2 négyzetreemelésre utal!

Sajátérték problémánál a megoldást

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\varphi} \sin \alpha t \tag{6.98}$$

VEM alapjai	Csillapítás nélküli rezgések
Tartalom Tárgymutató	$\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 165 \triangleright$

alakban keressük. Sajátvektor a kitérés amplitúdó vektorának felel meg.

A (6.93) egyenlet megoldását (6.98) alakban keresve

$$(\mathbf{K} - \alpha_i^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\varphi}^i = \mathbf{0} \equiv \mathbf{D}(\alpha_i^2)\boldsymbol{\varphi}^i = 0$$
(6.99)

homogén algebrai egyenletrendszerhez jutunk, aminek triviálistól különböző megoldása a α_i determináns eltűnéséből adódik. Az ebből nyert α_i ismeretében a φ^i vektor végtelen sokféle lehet. Általában úgy szokás a φ^i -t meghatározni, hogy a $\varphi^{iT}\mathbf{M}\varphi^i = 1$ legyen, azaz φ^i legyen normált a tömegmátrixra.

A φ^i -nek egy elemét lerögzítve (például az elsőt) a (6.99) egyenletet inhomogén egyenletté lehet átalakítani:

$$n \begin{bmatrix} D_{11} & \mathbf{d}^T \\ \mathbf{d} & \hat{\mathbf{D}}(\alpha_i^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^i \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}(\alpha_i^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varphi}}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \end{bmatrix}$$
(6.100)

Az első oszlopot a $\varphi^i(1) = 1$ elemével megszorozva átvisszük a jobboldalra, s az (n-1) ismeretlent tartalmazó egyenletrendszert $\hat{\varphi}^i$ -re megoldjuk. Így előálló $\hat{\varphi}^i$ -vel jobbról és balról megszorozzuk M-t, majd képezzük a normált sajátvektort

$$\varphi^{i}(norm\acute{a}lt) = \frac{\hat{\varphi}^{i}}{\hat{\varphi}^{iT}\mathbf{M}\hat{\varphi}^{i}}.$$
(6.101)

A későbbiekben $\varphi^i(normált)$ jelölést nem használva φ^i alatt a tömegmátrixra "normált" sajátvektort fogjuk érteni.

A $p(\alpha^2) = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökeit sorba szokás rendezni

$$0 \le \alpha_1^2 \le \alpha_2^2 \le \dots \le \alpha_n^2 \tag{6.102}$$

Ortogonalitási tétel:

A sajátvektorok egymásra merőlegesek, amit az ún. ortogonalitási tétel fejez ki. A tétel kimondja, hogy az egymástól eltérő sajátfrekvenciákhoz tartozó sajátvektorok a tömegmátrixon belül egymásra merőlegesek.

Bizonyítás:

Induljunk ki az i-dik sajátértékre vonatkozó

$$(\mathbf{K} - \alpha_i^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\varphi}^i = \mathbf{0}$$

egyenletből. Ugyanezt α_j^2 -nél is felírva

$$(\mathbf{K} - \alpha_j^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\varphi}^j = \mathbf{0}$$

VEM alapjai

Tartalom | Tárgymutató

majd az egyenleteket φ^{jT} és φ^{iT} -vel külön, külön megszorozva

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}^{jT} \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}^{i} &= \alpha_{i}^{2} \boldsymbol{\varphi}^{jT} \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}^{i} \,, \\ \boldsymbol{\varphi}^{iT} \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}^{j} &= \alpha \boldsymbol{\varphi}^{iT} \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}^{j} \,, \end{aligned}$$

a
 ${\bf K}={\bf K}^T\,,~{\bf M}={\bf M}^T$ szimmetria tulajdonságokat figyelembevéve, a két egyenlet különbségéből

$$0 = (\alpha_i^2 - \alpha_j^2) \boldsymbol{\varphi}^{jT} \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}^i$$

származik, amiből $\alpha^i \neq \alpha^j$ esetén $\varphi^{jT} \mathbf{M} \varphi^i = 0$ adódik, azaz

$$\varphi^{jT} \mathbf{M} \varphi^{i} = \begin{cases} 0 & ha \quad i \neq j \\ 1 & ha \quad i = j \end{cases} .$$
 (6.103)

továbbá

$$\boldsymbol{\varphi}^{jT} \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}^{i} = \begin{cases} 0 & ha \quad i \neq j \\ \alpha_{i}^{2} & ha \quad i = j \end{cases}$$
(6.104)

A következő kifejezést Rayleigh-féle hányadosnak szokás nevezni.

$$R\left(\varphi^{i}\right) = \alpha_{i}^{2} = \frac{\varphi^{iT}\mathbf{K}\varphi^{i}}{\varphi^{iT}\mathbf{M}\varphi^{i}}$$
(6.105)

6.7.2. Fő koordináták

Az egyes sajátértékekhez tartozó egyenleteket egymásután sorban felírhatjuk

$$\begin{split} \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}^1 &= \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}^1 \alpha_1^2, \\ \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}^2 &= \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}^2 \alpha_2^2, \\ &\vdots \\ \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}^n &= \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}^n \alpha_n^2. \end{split}$$

Ezeket egy mátrixegyenletbe is bele tudjuk foglalni, nevezetesen

$$\begin{split} \mathbf{K} \left[\boldsymbol{\varphi}^{1}, \boldsymbol{\varphi}^{2}, ..., \boldsymbol{\varphi}^{n} \right] &= \mathbf{M} \left[\boldsymbol{\varphi}^{1} \alpha_{1}^{2}, \boldsymbol{\varphi}^{2} \alpha_{2}^{2}, ..., \boldsymbol{\varphi}^{n} \alpha_{n}^{2} \right] \\ &= \mathbf{M} \left[\boldsymbol{\varphi}^{1}, \boldsymbol{\varphi}^{2}, ..., \boldsymbol{\varphi}^{n} \right] \left[\begin{array}{c} \alpha_{1}^{2} \\ & \alpha_{2}^{2} \\ & & \alpha_{n}^{2} \end{array} \right], \end{split}$$

ami a sajátvektorokat és a sajátértékeket tartalmazó

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^1, \, \boldsymbol{\varphi}^2, ..., \boldsymbol{\varphi}^n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{S}^2 = <\alpha_1^2, \, \alpha_2^2, ..., \alpha_n^2 > \quad (6.106)$$

diagonális mátrix bevezetésével

$$\mathbf{K}\mathbf{\Phi} = \mathbf{M}\Phi\mathbf{S}^2 \tag{6.107}$$

alakba is átírható. Az egyenletet Φ^T -vel megszorozva, az ortogonalitási tételre is tekintettel nyerjük, hogy

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} \mathbf{S}^2 = \mathbf{E} \mathbf{S}^2 = \mathbf{S}^2$$
(6.108)

vagyis az áttranszformált merevségi mátrix

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} \tag{6.109}$$

továbbá

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} = \mathbf{E} \,. \tag{6.110}$$

A (6.108)-ből az *i*-dik egyenletre kapjuk, hogy

$$\bar{K}_{ii} - \alpha_i^2 \bar{M}_{ii} = 0 \Rightarrow \bar{K}_{ii} = \alpha_i^2 .$$
(6.111)

Képezzük az eredeti elmozdulást a sajátrezgések sorbafejtésével

$$\mathbf{q} = \sum \boldsymbol{\varphi}^i w_i = \boldsymbol{\Phi} \, \mathbf{w} \tag{6.112}$$

ahol $\mathbf{w}^T = [w_1, ..., w_i, ..., w_n]$ - vektor elemeit az elmozdulás *fő koordinátáinak* nevezzük, míg a vektort a fő koordináták vektorának.

A főkoordináták vektorát felhasználva a (6.112) alatti sorbafejtéssel az eredeti mozgásegyenletet átalakítható

$$\begin{split} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{w} &= \mathbf{0} \,, \quad \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\mathbf{w}} + \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{w} &= \mathbf{0} \end{split}$$

ami tekintettel a (6.108) alattiakra

$$\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{S}^2 \mathbf{w} = \mathbf{0} \tag{6.113}$$

differenciálegyenletre vezet, amely n darab egymástól független egyenletnek felel meg az S^2 diagonális mátrix miatt. Vagyis sikerült, a sajátrezgések és sajátvektorok birtokában a rendszer szabad rezgésének tanulmányozását visszavezetni n db egyszabadságfokú rendszer elemzésére. Az eredeti kapcsolt differenciálegyenletrendszer széteső rendszerré alakult át.

A (6.113) *i* -dik egyenletének megoldása

$$w_i = A_i \cos \alpha_i t + B_i \sin \alpha_i t, \quad i = 1, \dots, n \tag{6.114}$$

amiben szereplő A_i, B_i állandókat a *kezdeti feltételekből* tudjuk meghatározni.

A vizsgálat kezdetén az időt zérusnak tekintjük. A kezdeti feltételek a kitérésre és a sebességre vonatkoznak.

Így t = 0 -nál

$$w_i (t=0) = w_{0i}, \quad \dot{w}_i (t=0) = \dot{w}_{0i}$$
 (6.115)

A (6.114) alatti megoldást a (6.115)-be helyettesítve a kérdéses állandók

$$A_i = w_{0i}, \qquad B_i = \frac{\dot{w}_{0i}}{\alpha_i}.$$
 (6.116)

Mivel a fő koordináták kezdő értékei nem ismertek, először azokat a q_0 és \dot{q}_0 vektorokból kell kiszámolni. Ez nagyon egyszerűen mehet végbe, hisz

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Phi} \mathbf{w}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{q}=\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\mathbf{w},$$

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{q} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} \mathbf{w} = \mathbf{w},$$

a (6.110)-re tekintettel és ily módon

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0, \, \dot{\mathbf{w}}_0 = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0, \tag{6.117}$$

vagyis $\mathbf{\Phi}^{-1}$ inverzmátrixot két mátrix szorzataként tudjuk előállítani

$$\mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \tag{6.118}$$

A \mathbf{w}_0 és $\dot{\mathbf{w}}_0$ vektor *i* -edik tagjait véve a (6.116) alapján az integrálási állandók ismertek lesznek s ezek birtokában pedig a (6.114) alatti megoldás.

A $\mathbf{q} = \mathbf{\Phi} \mathbf{w}$ transzformáció révén az eredeti koordinátákra vonatkozó megoldást is megkapjuk.

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 169 \triangleright$

6.8. Sajátrezgések meghatározásának hatékony eljárásai [3, 4]

A feladat a

$$\mathbf{M\ddot{q}} + \mathbf{Kq} = \mathbf{0} \tag{6.119}$$

differenciálegyenlethez tartozó

$$(\mathbf{K} - \alpha^2 \mathbf{M})\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{6.120}$$

általánosított sajátérték probléma megadása. (Klasszikus sajátértékprobléma alatt az $(\mathbf{A} - \alpha^2 \mathbf{E})\mathbf{q} = \mathbf{0}$ problémát értjük.)

Mátrixalgebrai ismereteinkből következik, hogy a (6.120) alatti homogén algebrai egyenletrendszernek triviálistól eltérő megoldása csak akkor áll fenn, ha az együttható mátrix determinánsa zérus, azaz

$$p(\alpha^2) = \det(\mathbf{K} - \alpha^2 \mathbf{M}) = \det \mathbf{D}(\alpha^2) = 0$$
(6.121)

A kapott $p(\alpha^2) = 0$ polinom tényleges felírása, nagyméretű rendszereknél lehetetlen. Sokkal gyorsabb és járhatóbb út, bár csak kisméretű feladatoknál szokásos, hogy polinom gyökhelyeit keressük meg, iterációval, α konkrét értékeinek a felvételével.

6.6. feladat: Határozzuk meg egy balvégén befalazott prizmatikus tartó sajátfrekvenciáit Ritz-féle közelítés felhasználásával. A megoldandó sajátérték feladat az alábbi

$$(\mathbf{K} - \alpha^2 \mathbf{M})\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{6.6-a}$$

Megoldás: A lehajlást

 $W\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{i}\left(x\right) \, q_{i} \tag{6.6-b}$

alakban keressük. Konkrétan a kinematikai peremfeltételeket kielégítő mező

$$W(x) = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{x}{L}\right)^{i} q_{i} = \left[\varphi_{1} \ \varphi_{2} \ \varphi_{3}\right] \begin{bmatrix} q_{1} \\ q_{2} \\ q_{3} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varphi}^{T} \mathbf{q}$$
(6.6-c)

A tömegmátrix

$$\int_{0}^{L} m W^{2} dx \Rightarrow \mathbf{M} = \int_{0}^{L} \boldsymbol{\varphi} m \, \boldsymbol{\varphi}^{T} dx$$

aminek ij eleme

$$M_{ij} = \int_{0}^{L} \varphi_i \, m \, \varphi_j \, dx = \int_{0}^{L} m \, \left(\frac{x}{L}\right)^{i+j+2} dx = \frac{mL}{i+j+3}$$

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 170 \triangleright$

Hasonlóan a merevségi mátrix

$$\int_{0}^{L} I_{y} E W''^{2} dx \Rightarrow \mathbf{K} = \int_{0}^{L} \varphi'' I_{y} E \varphi''^{T} dx$$

aminek ij-dik eleme

$$\begin{split} K_{ij} &= \int_{0}^{L} \varphi_i'' \, I_y E \, \varphi_j''^T \, dx = \frac{1}{L^4} \int_{0}^{L} I_y E \left[(i+1) \, i \, (j+1) \, j \, \left(\frac{x}{L}\right)^{i+j-2} \right] \, dx \\ &= \frac{I_y E}{L^3} \frac{i \, j \, (i+1) \, (j+1)}{i+j-1} \end{split}$$

A sorbafejtésből csak két tagot véve a sajátértékfeladat egyenlete

$$\frac{I_y E}{L^3} \begin{bmatrix} 4 & 6\\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1\\ q_2 \end{bmatrix} - \alpha^2 \ m \ L \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1\\ q_2 \end{bmatrix} = 0$$

Bevezetve az $\eta = \frac{\alpha^2 m L^4}{I_y E}$ jelölést, a karakterisztikus egyenlet

$$\eta^2 - 1224 \eta + 15120 = 0$$

amiből

$$\alpha_1^2 = \frac{12,\!48\;I_y\;E}{m\;L^4}, \ \ \alpha_2^2 = \frac{1212\;I_y\;E}{m\;L^4}$$

A pontos megoldásnál jelentkező szorzótényezők rendre 12,36; 485,5; azaz csak az első körfrekvenciát sikerült jó megközelíteni. Háromtagú sorfejtéssel a szorzótényezők: 12,37; és 494,5; amivel javul a sajátkörfrekvenciák megközelítése.

@@

6.8.1. Rayleigh- féle hányadosra alapozott iteráció

Kiindulva a

$$R\left(\mathbf{q}\right) = \frac{\mathbf{q}^{iT}\mathbf{K}\mathbf{q}^{i}}{\mathbf{q}^{iT}\mathbf{M}\mathbf{q}^{i}}$$
(6.122)

hányadosból, a $(\mathbf{K} - \alpha^2 \mathbf{M})\mathbf{q} = \mathbf{0}$ elmozdulásvektort a fő koordináták rendszerébe áttranszformálva ($(\mathbf{K} - \alpha^2 \mathbf{M})\mathbf{q} = \mathbf{0}$), a hányados

$$R(\mathbf{w}) = \frac{\sum_{i} w_{i}^{2} \alpha_{i}^{2}}{\sum_{i} w_{i}^{2}} = \alpha_{1}^{2} \frac{w_{1}^{2} + \left(\frac{\alpha_{2}}{\alpha_{1}}\right)^{2} w_{2}^{2} + \dots + \left(\frac{\alpha_{n}}{\alpha_{1}}\right)^{2} w_{n}^{2}}{w_{1}^{2} + w_{2}^{2} + \dots} = \alpha_{1}^{2} Q_{1}.$$

Mivel $\alpha_1^2 \leq \alpha_2^2 \leq \cdots \leq \alpha_n^2$ úgy a számláló nagyobb mint a nevező, vagyis $Q_1 > 1$, azaz $R(\alpha^2) > \alpha_1^2$. Amennyiben $w_2 = w_3 = \cdots = w_n$, úgy $R(\alpha^2) = \alpha_1^2$, vagyis

$$\alpha_1^2 \le R\left(\mathbf{w}\right). \tag{6.123}$$

Tartalom | Tárgymutató

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 170 \triangleright$

Másrészt

$$R\left(\mathbf{w}\right) = \frac{\sum_{i} w_{i}^{2} \alpha_{i}^{2}}{\sum_{i} w_{i}^{2}} = \alpha_{n}^{2} \frac{w_{n}^{2} + \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n}}\right)^{2} w_{n-1}^{2} + \dots + \left(\frac{\alpha_{1}}{\alpha_{n}}\right)^{2} w_{1}^{2}}{w_{1}^{2} + w_{2}^{2} + \dots} = \alpha_{n}^{2} Q_{n}$$

ahonnan $Q_n < 1$ következik, ami végezetül

$$\alpha_1^2 \le R\left(\mathbf{w}\right) \le \alpha_n^2 \tag{6.124}$$

egyenlőtlenséget jelöli ki. Ilymódon a *Rayleigh-féle* hányados a legkisebb és a legnagyobb sajátkörfrekvenciák négyzetei közötti értéket veszi fel.

Ha a
 q vektor ortonormált a $j = 1, 2, \dots, r-1$ sajátvektorra, azaz

$$\mathbf{q}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}^j = \sum_{i=1}^n w_i \boldsymbol{\varphi}^{iT} \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}^j = 0, \, j = 1, \dots, r-1, \quad (6.125)$$

akkor

$$w_i = 0, \ i = 1, ..., r - 1.$$
 (6.126)

Ebben az esetben a hányados értéke $\alpha_r^2 \leq R\left(\mathbf{w}\right) \leq \alpha_n^2~$ intervallumban fog változni.

A fenti feltételt kielégítő **q** vektort az ún. *Gramm-Smidt-féle ortoganizálás*sal tudjuk előállítani.

A tetszőlegesen felvett y vektorból számított

$$\mathbf{q} = \mathbf{y} - \sum_{j=1}^{r-1} \left(\boldsymbol{\varphi}^{jT} \mathbf{M} \mathbf{y} \right) \boldsymbol{\varphi}^{i}$$
(6.127)

vektor kielégíti a (6.125) feltételt.

6.8.2. Vektoriteráció

Alakítsuk át az eredeti $(\mathbf{K} - \alpha^2 \mathbf{M})\mathbf{q} = \mathbf{0}$ sajátérték feladatunkat klasszikus sajátérték feladatra **M** illetve **K** inverzének felhasználásával

$$-\alpha^2 \mathbf{q} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0}, \text{ vagy } - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{q} + \frac{1}{\alpha^2} \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \alpha^2 \mathbf{q}, \qquad \quad \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{q} = \frac{1}{\alpha^2} \mathbf{q} = \lambda \,\mathbf{q} \qquad (6.128)$$

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 172 \triangleright$

Megjegyezzük, a kapott A és \tilde{A} már nem szimmetrikus.

Szimmetrikus mátrixokat az alábbi úton kaphatunk. Bontsuk fel a tömegmátrixot alsó és felső háromszögű mátrixok szorzatára

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}_M^T \mathbf{U}_M.$$

Ekkor az

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}_M \mathbf{q}, \qquad \mathbf{q} = \mathbf{U}_M^{-1} \mathbf{x}$$

transzformációval a

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \alpha^2 \mathbf{U}_M^T \mathbf{U}_M \mathbf{q}$$

eredeti sajátérték feladat

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{x} = \alpha^2 \mathbf{x} \tag{6.129}$$

alakra írható át, ahol az áttranszformált merevségi mátrix

$$\mathbf{A} \equiv \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{U}_M^{-T} \mathbf{K} \mathbf{U}_M^{-1}. \tag{6.130}$$

(Érdemes megjegyezni, hogy diagonál felépítésű tömegmátrixnál

$$\mathbf{U}_M = \mathbf{U}_M^T = \mathbf{M}^{1/2}, \quad \mathbf{U}_M^{-1} = \mathbf{U}_M^{-T} = \mathbf{M}^{-1/2}.$$

A másik lehetőség a ${\bf K}$ merevségi mátrix alsó és felső háromszögű mátrixszorzatra történő felbontásának felhasználása

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}_K \mathbf{L}_K^T.$$

Ekkor

$$\mathbf{x} = \mathbf{L}_K^T \mathbf{q}, \qquad \mathbf{q} = \mathbf{L}_K^{-T} \mathbf{x}$$

transzformációval

$$\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{x} = \frac{1}{\alpha^2}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{6.131}$$

sajátérték problémához jutunk, ahol

$$\tilde{\mathbf{A}} \equiv \tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{L}_K^{-1} \mathbf{M} \mathbf{L}_K^{-T}$$
(6.132)

Ezek után vizsgáljuk meg az

$$(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{6.133}$$

 $\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 172 \triangleright$

VEM alapjai

Tartalom | Tárgymutató

egyenlet determinánsát. Felírva azt, majd kifejtve, írhatjuk, hogy

$$p(\lambda) = \lambda^n - \lambda^{n-1} (\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{22} + \dots + \tilde{A}_{nn}) + \lambda^{n-2} () \dots - \det \tilde{\mathbf{A}} = 0$$

Jelölje $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_n$ a karakterisztikus egyenlet gyökeit. A gyökök segítségével

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) =$$
$$= \lambda^n - \lambda^{n-1} (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) + \dots + (-1)^n \prod_{s=1}^n \lambda_{ts} = 0 \quad (6.134)$$

alakban is felírható.

A karakterisztikus egyenlet két alakjának összehasonlításából

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{p=1}^{n} \tilde{A}_{pp}$$

következik. Mivel $\lambda_1 = \frac{1}{\alpha_1^2}$ a legnagyobb, úgy közelítőleg áll

$$\lambda_1 = \frac{1}{\alpha_1^2} \approx \sum_{p=1}^n \tilde{A}_{pp} \tag{6.135}$$

Ezzel az ún. *Dunkeley*-féle formulához jutunk, amivel a valóságos első körfrekvenciánál kisebb értéket tudunk meghatározni. Vagyis alulról közelítünk.

$$\alpha_1^2 \text{ (közelített)} \leq \alpha_1^2$$
 (6.136)

Két típusú vektor iterációt fogunk megkülönböztetni. Az egyik esetben, alulról felfelé haladva tudjuk kiszámolni a sajátértékeket és a rezgésképet, míg a második típusnál a legnagyobbtól kezdődően lefelé haladva. Ezek miatt alsó és felső iterációról fogunk a továbbiakban beszélni.

6.8.3. Alsó (inverz) iteráció

Az alábbiakban az első sajátkörfrekvencia meghatározása szolgáló iterációt fogalmazzuk meg

Induljunk ki egy q_1 vektorból. Oldjuk meg a

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_2 = \mathbf{M}\mathbf{q}_1$$

egyenletet. A q1 elmozdulást sajátvektorok sorbafejtésével felírva

$$\mathbf{q}_1 = \sum_{i=1}^n c_i \boldsymbol{\varphi}^i , \quad \alpha_i^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}^i = \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}^i , \quad \mathbf{M} \sum_{i=1}^n c_i^i \boldsymbol{\varphi}^i = \mathbf{K} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i^2} c_i^i \boldsymbol{\varphi}^i$$

eredményre jutunk, vagyis

$$\mathbf{q}_2 = \sum_{i=1}^n rac{1}{lpha_i^2} c_i oldsymbol{arphi}^i \; .$$

Az iteráció folytatásával $\mathbf{K}\mathbf{q}_3 = \mathbf{M}\mathbf{q}_2$, $\mathbf{K}\mathbf{q}_4 = \mathbf{M}\mathbf{q}_3$, ...

$$\mathbf{q}_{k+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi^i \frac{1}{(\alpha_i^2)^k} = \frac{1}{(\alpha_1^2)^k} \left(c_1 \varphi^1 + c_2 \varphi^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} \right)^k + \dots \right) \,.$$

A lépéseket megismételve az egymást követő q_1 vektorok elemeinek tagonkénti hányadosa, ill. a *Rayleigh-féle* hányados

$$\lim_{k \to \infty} R(\mathbf{q}_{k+1}) = \frac{(\mathbf{q}_{k+1})_{s=1,\dots,n}}{(\mathbf{q}_k)_{s=1,\dots,n}} = \alpha_1^2$$
(6.137)

míg maga a vektor

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{q}_{k+1} \to \varphi^1 \tag{6.138}$$

az első saját vektort szolgáltatja. Konkrét megvalósításnál speciális iterációt szokás alkalmazni.

6.8.4. Felső iteráció

Az előzőekre is tekintettel a számítást oly módon is fel lehet építeni, hogy az iterációval a legnagyobb, majd azt követően a csökkenő sajátfrekvenciákat lehessen megközelíteni.

Valóban, induljunk ki egy q_1 vektorból. Oldjuk meg az

$$\mathbf{M}\mathbf{q}_2 = \mathbf{K}\mathbf{q}_1 \tag{6.139}$$

egyenletet. A q_1 elmozdulást sajátvektorok sorbafejtésével felírva

$$\alpha_i^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}^i = \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}^i , \quad \mathbf{M} \sum_{i=1}^n c_i \boldsymbol{\varphi}^i \alpha_i^2 = \mathbf{K} \sum_{i=1}^n c_i \boldsymbol{\varphi}^i$$

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 175 \triangleright$

eredményre jutunk, vagyis

$$\mathbf{q}_2 = \sum_{i=1}^n c_i \boldsymbol{\varphi}^i \alpha_i^2 \; .$$

Az iteráció folytatásával $\mathbf{M}\mathbf{q}_3 = \mathbf{K}\mathbf{q}_2, \mathbf{M}\mathbf{q}_4 = \mathbf{K}\mathbf{q}_3, \dots$

$$\mathbf{q}_{k+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi^i (\alpha_i^2)^k = (\alpha_n^2)^k \left(c_n \varphi^n + c_{n-1} \varphi^{n-1} \left(\frac{\alpha_{n-1}^2}{\alpha_n^2} \right)^k + \dots \right) \,.$$

A lépéseket megismételve

$$\lim_{k \to \infty} R(\mathbf{q}_{k+1}) = \alpha_n^2, \quad \lim_{k \to \infty} \mathbf{q}_{k+1} \to \boldsymbol{\varphi}^n$$
(6.140)

Ezt az iterációt *felső* iterációnak szokás nevezni, mivel a felső frekvenciák meghatározására alkalmas.

6.7. feladat: Iterációval határozzuk meg a $(\mathbf{K} - \alpha^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = \mathbf{0}$ sajátértékprobléma legnagyobb ill a legkisebb sajátkörfrekvenciáját és sajátvektorát ha

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$
 (6.7-a)

Megoldás: Az eredeti problémát M inverzének felhasználsával

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{q} = \alpha^2 \mathbf{q} \qquad azaz \qquad \mathbf{A}\mathbf{q} = \alpha^2 \mathbf{q} \tag{6.7-b}$$

alakba írhatjuk át. Ekkor

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} .$$
(6.7-c)

Induló vektorként $\mathbf{q}_0^T = \left[\begin{array}{ccc} 0.2 & 0.2 & 1 \end{array} \right]$ vektort választva

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{A}\mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{A}\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{q}_i, \quad (6.7-d)$$

számsorozaton keresztűl az egyes iterációs lépésekben $\mathbf{q}_{i+1}(m)/\mathbf{q}_i(m)$, m = 1,2,3 vektorkoordináták hányadosa is kiszámolható.

Jól látjuk, hogy a 18. iterációs lépésben a hányadosok gyakorlatilag már azonosak. Ekkor

$$\Sigma_m \left| \left(\mathbf{q}_{i+1}(m) - \mathbf{q}_i(m) \right) / \mathbf{q}_i(m) \right| \le 0.01 \,. \tag{6.7-e}$$

A megközelített $\alpha_3^2=5{,}9998~<~6$ egzakt érték.

Az $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}$ bevezetésével $\overline{\mathbf{A}}\mathbf{q} = \frac{1}{\alpha^2}\mathbf{q}$ sajátértékprobléma nyerhető. Hasonlóan elvégezve az iterációt nyerjük, hogy

A 8. iterációs lépésben az (6.7-e) által meghatározott hiba 1% alatt van. A 14. lépésben már az egzakt értéket nyerjük $\frac{1}{\alpha_1^2}$ – re.

@@

Tartalom | Tárgymutató

\mathbf{q}_0	\mathbf{q}_1	\mathbf{q}_2	\mathbf{q}_3	\mathbf{q}_4		$\mathbf{q}_{18}.10^{-14}$	 $\mathbf{q}_{25}.10^{-18}$
0,2	0,4	2,4	20,8	163,2		1,2176	5,6856
0,2	-0,4	-5,6	-40,0	-252,8		-1,2187	-5,6861
1,0	3,6	15,2	72,0	368		1,2198	5,6865
$\frac{\mathbf{q}_{i+1}(m)}{\mathbf{q}_i(m)}$	2	6	8,6667	7,8460		6,0041	6,0002
	-2	14	7,1429	6,3200		6,0000	6,0000
	3,6	4,22	4,7468	5,1111		5,9959	5,9948

6.1. táblázat. Számítási eredmények

6.2. táblázat. Számítási eredmények

\mathbf{q}_0	\mathbf{q}_1	\mathbf{q}_2	\mathbf{q}_3	\mathbf{q}_4	\mathbf{q}_5	\mathbf{q}_6	 $q_{12}.10^4$	$q_{14}.10^4$
0,2	0,1333	0,0806	0,0447	0,0236	0,012	0,0016	0,9763	0,2441
0,2	0,1667	0,0944	0,0491	0,0248	0,0125	0,0016	0,9766	0,2441
1,0	0,3333	0,1306	0,0572	0,0267	0,0129	0,0016	0,9768	0,2441
$\frac{\mathbf{q}_{i+1}(m)}{\mathbf{q}_{i}(m)}$	0,667	0,6042	0,5546	0,5281	0,5144	0,5019	0,5001	0,5
$\mathbf{q}_{i}(m)$	0,8333	0,5667	0,5196	0,5063	0,5021	0,5001	0,5000	0,5
	0,3333	0,3917	0,4379	0,473	04835	0,4980	0,4999	0,5

6.8.5. Alsó (inverz) iteráció eltolással

A merevségi mátrix bizonyos esetekben nem invertálható (pl. ha a test nincs merevtestszerű mozgásában korlátozva). Ebben az esetben az inverz iteráció által megkövetelt

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{q}_k \tag{6.141}$$

egyenletet a $\det \mathbf{K} = 0$ érték miatt nem lehet megoldani.

Vizsgáljuk a

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \alpha^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi} \tag{6.142}$$

sajátértékfeladatot.

Az eredeti sajátértéket állítsuk elő λ_E általunk választott, eltolási paraméter értékének a felhasználásával az alábbi módon

$$\alpha^2 = \mu^2 - \lambda_E^2, \tag{6.143}$$

Ekkor a behelyettesítés és rendezés után

$$(\mathbf{K} + \lambda_E^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\varphi} = \mu^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}$$
(6.144)

azaz

$$\mathbf{K}_E \boldsymbol{\varphi} = \mu^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} \,, \tag{6.145}$$

ahol az "eltolt" rendszer merevségi mátrixa

$$\mathbf{K}_E = \mathbf{K} + \lambda_E^2 \mathbf{M}. \tag{6.146}$$

Mivel az M-ről a pozitív definitséget feltételezzük, \mathbf{K}_E már invertálható lesz. Az eljárás akkor is működik, ha det $\mathbf{M} = 0$, de ahol $K_{jj} = 0$, ott $M_{jj} > 0$ kell legyen. A két mátrix kombinálásával a \mathbf{K}_E mátrix sorai egymástól lineárisan függetlenek lesznek, azért det $\mathbf{K}_E \neq 0$.

A (6.145) egyenlet sajátértéke μ^2 . A sajátérték meghatározása után az eredeti rendszer sajátértékét (6.143) alapján tudjuk kiszámolni. A (6.145) alatti egyenletről látható, hogy a sajátvektorok azonosak az eredeti probléma (6.142) alatti sajátvektorával.

Az alsó iterációt

$$\mathbf{K}_E \mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{M} \mathbf{q}_k \tag{6.147}$$

egyenletre kell felépíteni. Az iterációval a φ^i és μ_i^2 határozható meg, (i = 1, 2, ...) a \mathbf{q}_1 vektor megválasztásától függően.

A fentiekből adódóan *eltolódás értékének* megválasztásával az alsó iteráció az eredeti rendszer belső sajátfrekvenciáinak kiszámítására ad módot. Kérdésként merül fel, hányadik sajátértéket tudjuk így meghatározni. Erre a lényeges kérdésre *Sturm-féle sorozat* ad feleletet. A tétel értelmében a

$$\mathbf{K}_E = \mathbf{K} + \lambda_E^2 \mathbf{M}$$

mátrix

$$\mathbf{K}_E = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T \tag{6.148}$$

felbontásából (L alsó háromszög) a D diagonális mátrixban elhelyezkedő negatív D_{ij} értékek száma jelzi, hogy a λ_E eltolás alatt hány sajátértéke van a vizsgált rendszernek. Mivel az iterációval a sajátértéket közelítőleg határozzuk meg, a kérdés eldöntésénél a sajátértéket

$$0,99\lambda_j^{(k+1)} \le \lambda_j \le 1,01\lambda_j^{(k+1)}$$

sugárban értelmezzük, és ezekhez képest nézzük a D_{ii} negatív értéket.

6.8. feladat: Vizsgáljuk a Példa 6.7 alattiakat a Rayleigh-féle közelítő módszer felhasználásával.

Megoldás: A (6.122) révén a szóbanforgó hányados

$$R(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{q}^{iT} \mathbf{K} \mathbf{q}^{i}}{\mathbf{q}^{iT} \mathbf{M} \mathbf{q}^{i}} \Rightarrow R = \frac{\text{Alakváltozási energia amplitudóra vonatkoztatva}}{\text{Kinetikai energia amplitudóra vonatkoztatva}}$$
(6.8-a)

Tartalom | Tárgymutató

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 177 \triangleright$

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 178 \triangleright$

értelmezését adhatjuk. Ez hajlított tartónál

$$R = \frac{\int_0^L I_y E (W'')^2 dx}{\int_0^L m W^2 dx}$$
(6.8-b)

alakot ölti.

Konkrét esetként határozzuk meg egy befalazott tartó első sajátkörfrekvenciáját. Próbafüggvény-ként a tartó önsúlyából származó lehajlási függvényt fogjuk felhasználni. Legyen a terhelés hosszegy-ségre eső intenzitása q

A lehajlás

$$W(x) = \frac{qL^4}{24I_yE} \left(\frac{x^4}{L^4} - 4\frac{x^3}{L^3} + 6\frac{x^2}{L^2}\right)$$
(6.8-c)

A behelyettesítés után elvégezve az integrálásokat kapjuk, hogy $R = \alpha_1^2$, vagyis

$$\alpha_1 = \frac{3,53}{L^2} \sqrt{\frac{I_y E}{m}} \tag{6.8-d}$$

ami 0.4 %-al múlja felül a pontos értéket: $\alpha_1 = \frac{3,516}{L^2} \sqrt{\frac{I_y E}{m}}$ Két végén befalazott tartónál a lehajlást

j

$$W(x) = w_0 \left(1 - \cos\frac{2\pi}{L}x\right)$$
(6.8-e)

alakban keresve, a Rayleigh-hányados

$$R = \alpha_1^2 = \frac{\int_0^L I_y E (W'')^2 dx}{\int_0^L m W^2 dx} = \frac{\frac{I_y E}{2} w_0^2 \frac{8\pi^4}{L^3}}{\frac{3m}{4} w_0^2 L}$$

amiből

$$\alpha_1 = \frac{4\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{I_y E}{3m}} = \frac{22.7}{L^2} \sqrt{\frac{I_y E}{m}}$$
(6.8-f)

ami csak $1,\!3\,\%\text{-al}$ nagyobb, mint a pontos érték.

@@

6.9. feladat: Vizsgáljunk egy, két végén befalazott prizmatikus tartót végeselem-módszer felhasználásával. A 3*L* hosszúságú tartót *L* hosszúságú elemekre osztjuk fel.

Megoldás: A (6.247)-ben ismertetett hajlításra vonatkozó tömegmátrix, a 3.2 fejezetben leírt merevségi mátrix felhasználásával, pótlólagos állandók nélkül, a sajátértékekre a következő eredményt kapjuk:

$$\alpha_n = \frac{s_n}{9L^2} \sqrt{\frac{I_y E}{m}} \tag{6.9-a}$$

- az 1. sajátkörfrekvenciánál:

$$s_1 = 22,46$$
 exakt: $s_1 = 22,373$ (6.9-b)

- a 2. sajátkörfrekvenciánál:

$$s_2 = 62,904$$
 exakt: $s_2 = 61,669$ (6.9-c)

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 179 \triangleright$

- a 3. sajátkörfrekvenciánál:

 $s_3 = 146,30$ exakt: $s_3 = 120,91$ (6.9-d)

Itt is látható, hogy a közelítőleg kapott értékek, mindig nagyobbak, mint a pontos megoldás. Az is látható, hogy jó közelítéssel csak az első két körfrekvenciát kaptuk meg. A magasabb értékek több elem felvételével, vagy pótlólagos állandók használatával érhetők el.

@@

6.8.6. Sajátérték probléma megoldása Jacobi-féle módszerrel

А

$$\mathbf{Kq} = \alpha^2 \mathbf{Mq} \tag{6.149}$$

általánosított sajátérték problémából (6.130) és (6.132) szerint

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \alpha^2 \mathbf{q}, \quad \text{vagy} \quad \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{q} = \lambda \mathbf{q} \tag{6.150}$$

sajátértékproblémák állíthatók elő. Itt A és \tilde{A} szimmetrikusak.

Az

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}^i = \alpha_i^2 \boldsymbol{\varphi}^i \tag{6.151}$$

sajátérték
problémát megoldva $i=1,\ldots,n$ esetre, tömören

$$\mathbf{A}\left[\boldsymbol{\varphi}^{1},\boldsymbol{\varphi}^{2},...,\boldsymbol{\varphi}^{n}\right] = \left[\boldsymbol{\varphi}^{1},\boldsymbol{\varphi}^{2},...,\boldsymbol{\varphi}^{n}\right] < \alpha_{1}^{2},\alpha_{2}^{2},...,\alpha_{n}^{2} >$$

azaz

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}^2 \tag{6.152}$$

egyenlet írható fel. A sajátvektorok ortonormált tulajdonságaiból következően

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} = \mathbf{E},\tag{6.153}$$

továbbá

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{A} \mathbf{\Phi} = \mathbf{S}^2. \tag{6.154}$$

Tehát, ha az **A** mátrixot oly módon tudjuk átalakítani, hogy csak a főátlójában legyenek elemek, akkor ezek a számok a sajátvektorok négyzeteinek fognak megfelelni, míg az átalakításnál (**A** mátrix jobbról, balról történő szorzásánál használt mátrixok szorzata a Φ^T és Φ mátrixokat fogják kijelölni. Vagyis olyan szorzásokat kell választani, amivel az **A** mátrix átalakításával előálló mátrix főátlón kívüli elemei zérusok legyenek.

A jobbról és balról történő szorzás után az új mátrix

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{P}^{(1)T} \mathbf{A} \mathbf{P}^{(1)} \equiv \mathbf{P}^{(1)T} \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{P}^{(1)}$$

VEM alapjai	Sajátrezgések meghatározása
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 180 \triangleright$

míg általánosan a *k*-dik szorzás elvégzésével

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{P}^{(k)T} \mathbf{A}^{(k)} \mathbf{P}^{(k)} \tag{6.155}$$

A $\mathbf{P}^{(k)}$ permutáló mátrixot úgy kell megválasztani, pl. a p,qelemek vonatkozásában, hogy

$$\mathbf{P}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & c & s & \\ & & 1 & \\ & -s & c & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} p & & (6.156) \\ q & & & \end{array}$$

mátrixban szereplő $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$ szögek az $\mathbf{A}^{(k+1)}$ mátrix $\mathbf{A}_{pq}^{(k+1)}$ elemének zérus értéket adjanak. A $\mathbf{P}^{(k)T}\mathbf{A}^{(k)}\mathbf{P}^{(k)}$ szorzás változást okoz a p és q sorokban (oszlopokban)

$$A_{ip}^{(k+1)} = A_{ip}^{(k)}c - A_{iq}^{(k)}s$$

$$i \neq p,q$$

$$A_{iq}^{(k+1)} = A_{ip}^{(k)}s + A_{iq}^{(k)}c$$
(6.157)

illetve a főátló elemeit

$$A_{pp}^{(k+1)} = A_{pp}^{(k)}c^2 - 2A_{pp}^{(k)}c \cdot s + A_{qq}^{(k)}s^2$$
(6.158)

$$A_{qq}^{(k+1)} = A_{pp}^{(k)} s^2 + 2A_{pq}^{(k)} c \cdot s + A_{qq}^{(k)} c^2$$
(6.159)

értékűre változtatja meg. A cél érdekében megköveteljük, hogy $A_{pq}^{(k+1)}$ legyen zérus:

$$A_{pq}^{(k+1)} = \left(A_{pp}^{(k)} - A_{qq}^{(k)}\right)c \cdot s + A_{pq}^{(k)}(c^2 - s^2) = 0.$$

Ez utóbbi feltételből

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2A_{pq}^{(k)}}{A_{qq}^{(k)} - A_{pp}^{(k)}}.$$
(6.160)

A (6.158) és (6.159) vizsgálatából következik, hogy

$$A_{pp}^{(k+1)} + A_{qq}^{(k+1)} = A_{pp}^{(k)} + A_{qq}^{(k)}$$

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 180 \triangleright$
VEM alapjai Tartalom | Tárgymutató

vagyis a főátló elemeinek összege állandó, hisz a $\mathbf{P}^{(k)}$ -vel történő szorzás a többi főátlóbeli elemet nem változtatta meg

$$S_D^{(k+1)} = \sum_{i=1}^n A_{ii}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^n A_{ii}^{(k)} = S_D^{(k)}.$$
 (6.161)

Az átalakítások révén (6.154) alapján a főátlóban a sajátértékek négyzetei fognak szerepelni. Mivel a transzformáció a főátló összegét nem változtatja meg, úgy

$$S_D = \sum_{i=1}^n A_{ii} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$$
 (6.162)

A (6.157)-ból az átalakítás következő tulajdonságát nyerhetjük. Az egyenletek négyzetre emelésével és összeadásával

$$\left(A_{ip}^{(k+1)}\right)^{2} + \left(A_{iq}^{(k+1)}\right)^{2} = \left(A_{ip}^{(k)}\right)^{2} + \left(A_{iq}^{(k)}\right)^{2} \qquad i \neq p, q$$

Ez azt jelenti, hogy a p és q oszlopokban elhelyezkedő elemek négyzet összegei (a pq elemet kivéve) nem változnak meg. Ebből következik, hogy a főátlón kívüli elemek négyzet összege az iteráció során

$$S_N^{(k+1)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(A_{ij}^{(k+1)} \right)^2 = S_N^{(k)} - 2 \left(A_{pq}^{(k)} \right)^2$$
(6.163)

Az iteráció folyamán az S_N monoton csökken, mivel minden lépésben egy A_{pq} elemet zérussá teszünk. S_D diagonál összeg meg állandó. Mivel a mátrixban végesszámú elem van az iteráció véges számú lépésben zajlik le. Az iterációt a kerekítési hibák miatt

$$\left|A_{ii}^{(k+1)} - A_{ii}^{(k)}\right| \le \left(S_N^{(k+1)}\right)^{1/2} \qquad i = 1, \dots, n \tag{6.164}$$

korláttal szokás leállítani. A (6.155) alatti szorzás alapján

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{P}^{(k)T}\mathbf{P}^{(k-1)T} \dots \mathbf{P}^{(1)T}\mathbf{A}\mathbf{P}^{(1)} \dots \mathbf{P}^{(k-1)}\mathbf{P}^{(k)}$$

azaz a (6.154)-el való összevetésből következik, hogy a sajátvektorokat tartalmazó mátrix

$$\mathbf{\Phi}^{(k)} = \mathbf{P}^{(1)} \mathbf{P}^{(2)} \dots \mathbf{P}^{(k-1)} \mathbf{P}^{(k)}$$
(6.165)

másrészt a főátló elemei a sajátkörfrekvencia négyzeteit szolgáltatják.

$$A_{ii}^{(k+1)} = \alpha_s^2 \,. \tag{6.166}$$

VEM alapjai	Csillapítás nélküli gerjesztett rezgő rendszerek
Tartalom Tárgymutató	$\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 182 \triangleright$

A szorzások sorozata nem rendezi növekvő sorba a sajátfrekvenciákat, azokról külön kell gondoskodni. Természetesen külön kell gondoskodni a $\Phi^{(k)}$ -ban szereplő vektorok α_i -hez való rendeléséről is.

6.9. Csillapítás nélküli gerjesztett rezgő rendszerek

A gépek, berendezések működésük során időben változó terheléssel terheltek. Ezek egy része külső erőhatásból (pl. futódarú terhet emel) származhat, technológiai folyamatból (pl. esztergálásnál keletkező forgácsoló erő), a környezetről átadódó mozgásokból (pl. gépek talajjal érintkező részei, a más gépekről a talajra átadódó erőhatások miatt mozognak) vagy akár a működés közbeni belső geometriai kapcsolatok, hőmérsékleti mezők változásaiból. Az általános egyenlet levezetésénél láttuk, hogy összességében a mozgásegyenletek a szabad paraméterekhez hozzárendelten jelennek meg, a kinematikai előírások járulékos erőt szolgáltatnak.

6.9.1. Harmonikusan gerjesztett rendszerek

Tömören, csak a szabad paraméterek vonatkozásában felírható mozgásegyenlet

$$\mathbf{M\ddot{q}} + \mathbf{Kq} = \mathbf{f}(t) \tag{6.167}$$

Vizsgálatainkat a harmonikus gerjesztés esetével kezdjük. A forgó gépalkatrészek miatt a terhelések változása igen sok esetben időben harmonikus függvények szerint változnak. Ebben az esetben:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_A \sin(\omega t + \psi) \tag{6.168}$$

terhelést feltételezve, ahol \mathbf{f}_A a terhelés amplitudója, a megoldás

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_A \sin(\omega t + \psi). \tag{6.169}$$

A deriválások elvégzése után

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{q}_A = \mathbf{f}_A \tag{6.170}$$

algebrai egyenlethez jutunk, amiből a

$$\mathbf{Z}(\omega^2) = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \tag{6.171}$$

dinamikai merevségi mátrix bevezetésével

$$\omega^2 \neq \alpha_i^2$$
 (*i* = 1,...,*n*) (6.172)

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 182 \triangleright$

Tartalom | Tárgymutató

 $\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 183 \triangleright$

feltételezés mellett

$$\det \mathbf{Z}(\omega^2) \neq 0 \tag{6.173}$$

és így

$$\mathbf{q}_A = (\mathbf{Z}(\omega))^{-1} \mathbf{f}_A \equiv \mathbf{H}(\omega) \mathbf{f}_A, \qquad (6.174)$$

ahol $\mathbf{H}(\omega)$ dinamikai hatásmátrix. A feladat láthatóan algebrai egyenletrendszer megoldására vezethető vissza.

Próbáljuk meg a dinamikai merevségi mátrix inverzét a sajátérték probléma ismeretében felírni. A fő koordináták révén áll a

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Phi}\mathbf{w} \tag{6.175}$$

transzformáció, ahol Φ a sajátrezgésekhez tartozó sajátvektorok alkotta mátrix. A (6.175)-re tekintettel az amplitudók vonatkozásában

$$\mathbf{q}_A = \mathbf{\Phi} \mathbf{w}_A \tag{6.176}$$

összefüggés van érvényben. Az eredeti feladatot átírva a főkoordináták rendszerébe, majd a kapott egyenletet F^T -vel balról megszorozva, nyerjük, hogy

$$\left(\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} - \omega^2 \; \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}\right) \mathbf{w}_A = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{f}_A \quad . \tag{6.177}$$

A sajátvektorok tömeg- és merevségi mátrixra vonatkozó ortogonalítási tulajdonságát felhasználva a (6.177) helyett írható, hogy

$$(\mathbf{S}^2 - \omega^2 \mathbf{E})\mathbf{w}_A = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{f}_A \quad . \tag{6.178}$$

A kapott diagonál mátrixot Λ -val jelölve

$$\mathbf{\Lambda} = \left\langle \alpha_1^2 - \omega^2, \alpha_2^2 - \omega^2, \dots, \alpha_n^2 - \omega^2 \right\rangle$$
(6.179)

annak inverze

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \left\langle \frac{1}{\alpha_1^2 - \omega^2}, \frac{1}{\alpha_2^2 - \omega^2}, \dots, \frac{1}{\alpha_n^2 - \omega^2} \right\rangle$$
(6.180)

vagyis

$$\mathbf{w}_A = \mathbf{\Lambda}^{-1} \; \mathbf{\Phi}^T \mathbf{f}_A \tag{6.181}$$

amiből (6.176) alapján a kitérés amplitudó vektora

$$\mathbf{q}_A = \mathbf{\Phi} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{f}_A \tag{6.182}$$

VEM alapjai	Csillapítás nélküli gerjesztett rezgő rendszerek
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 184 \triangleright$

A kapott eredmény (6.174)-el való összevetéséből a dinamikai merevségi mátrix inverze, a dinamikai hatásmátrix

$$\mathbf{H}(\omega) = (\mathbf{Z}(\omega))^{-1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{\Phi}^{T} =$$

$$= \left[\boldsymbol{\varphi}^{1}, \boldsymbol{\varphi}^{2}, \dots, \boldsymbol{\varphi}^{n} \right] \left\langle \frac{1}{\alpha_{1}^{2} - \omega^{2}}, \frac{1}{\alpha_{2}^{2} - \omega^{2}}, \dots, \frac{1}{\alpha_{n}^{2} - \omega^{2}} \right\rangle \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^{1T} \\ \boldsymbol{\varphi}^{2T} \\ \boldsymbol{\varphi}^{nT} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{\varphi}^{i} \boldsymbol{\varphi}^{iT}}{\alpha_{i}^{2} - \omega^{2}}$$

$$(6.183)$$

Ennek (6.182)-ba történő visszahelyettesítése után

$$\mathbf{q}_A = \sum_{i=1}^n \varphi^i \frac{\varphi^{iT} \mathbf{f}_A}{\alpha_i^2 - \omega^2} \equiv \sum_{i=1}^n \varphi^i g_i \quad .$$
(6.184)

A kapott eredmény jól mutatja, ha $\omega = \alpha_i$ (i = 1,...,n) rezonancia fog fellépni, ami idővel végtelen nagy kitéréshez, a szerkezet tönkremeneteléhez vezet. Amennyiben $\varphi^{iT} \mathbf{f}_A = 0$, (a terhelés a φ^i sajátrezgéskép zéruspontjában hat, így az összegzésből kiesik), ami a rezonancia elkerüléséhez vezet (a külső terhelés munkája zérus). Persze azt is látni kell, a terhelés térbeli elhelyezkedésének (koncentrált erő) egy kismértékű eltolódása már $\varphi^{iT} \mathbf{f}_A \neq 0$ zérustól különbözővé teszi, és így ismételten $\alpha_i = \omega$ esetén igen nagymértékű elmozdulások fognak fellépni. A fentiek azt mutatják, hogy a szerkezet működésénél a gerjesztés frekvenciájának nem szabad a rendszer valamelyik sajátfrekvenciájával egybeesnie. Amennyiben a gerjesztés frekvenciája $\omega < \alpha_1$, akkor nem tud létrejönni rezonancia. Azonban a gyakorlatban általában ez nem áll fenn, hanem $\omega > \alpha_1$. Ilyen esetben pl. egy forgó alkatrész indításánál célszerű az alacsony rezonanciafrekvenciákon gyorsan áthaladni, nem hagyva időt a nagyméretű elmozdulások kialakulására.

6.10. feladat: A többszabadságfokú rendszerek konkrét vizsgálatával kapcsolatosan vizsgáljunk néhány feladatot a *rezgésvédelem* témakörében. Általánosan két esetet lehet megkülönböztetni. Az egyik esetben feladat a vizsgált objektum, (amely rezgésformát is tartalmaz, pl. egy forgó kiegyensúlyozatlan alkatrészből) elszigetelése a környezettől, olymódon, hogy a környezetre átadódó erők lehető legkisebbek legyenek. A másik eset, ennek a fordítottja, amikor is a vizsgált objektumot kell elszigetelni a környezettől olymódon, hogy a talajról rezgésszigetelő, tompító elemeken keresztül a lehető legkisebb amplitudójú rezgések adódjanak át.

Megoldás: Vizsgáljuk az első esetet. A 6.7. ábrán feltüntetett m_1 tömegű szerkezeten objektumon belül $F = F_0 \sin \omega t = 2r\omega^2 m \sin \omega t$ nagyságú gerjesztő erő keletkezik. A vizsgált objektum a talajjal k_1 merevségű rugón keresztül csatlakozik. Cél a talajra átadódó erő minimalizálása. E célból az eredeti rendszerre pótlólagosan k_2 rugón keresztül m_2 tömegű testet csatlakoztatunk.

VEM alapjai

Tartalom | Tárgymutató

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 185 \triangleright$

A kapott kétszabadságfokú rezgőrendszer mozgásegyenletei

$$E = \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 \tag{6.10-a}$$

$$U_{alakv.} = \frac{1}{2}k_1q_1^2 + \frac{1}{2}k_2(q_2 - q_1)^2$$
(6.10-b)

$$W_k = Fq_1 \tag{6.10-c}$$

energiákból és a külső terhelés munkájából adódóan, a (6.21) variációs egyenlet értelmében a diszkretizálás után $m_1\ddot{a}_1 + (k_1 + k_2)a_1 - k_2a_2 - E_0 \sin \omega t$

$$m_1 q_1 + (\kappa_1 + \kappa_2) q_1 - \kappa_2 q_2 = F_0 \sin \omega t$$

$$m_2 \ddot{q}_2 - k_2 q_1 + k_2 q_2 = 0$$
(6.10-d)



6.7. ábra. Dinamikus rezgéscsökkentés

A kapott differenciál-egyenletrendszert mátrixosan felírva

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin \omega t$$

azaz

$$\mathbf{M\ddot{q}} + \mathbf{Kq} = \mathbf{f}_A \sin \omega t \tag{6.10-e}$$

A partikuláris megoldás

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_A \sin \omega t \tag{6.10-f}$$

vagyis

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{q}_A = \mathbf{f}_A \tag{6.10-g}$$

ahonnan az amplitudók vektora

$$\mathbf{q}_A = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{f}_A = (\mathbf{Z} (\omega^2))^{-1} \mathbf{f}_A = \mathbf{H}(\omega^2) \mathbf{f}_A \quad .$$
(6.10-h)

A megoldás a Crammer szabály alkalmazásával könnyen felírható:

$$q_{1A} = \frac{\left[\begin{array}{cc} F_0 & -k_2 \\ 0 & k_2 - \omega^2 m_2 \end{array} \right]}{\det \mathbf{Z}}, \qquad q_{2A} = \frac{\left[\begin{array}{cc} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & F_0 \\ -k_2 & 0 \end{array} \right]}{\det \mathbf{Z}}$$

Tartalom | Tárgymutató

$\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 185 \triangleright$

VEM alapjai

Tartalom | Tárgymutató

 $\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 186 \triangleright$

vagyis

$$q_{1A} = \frac{F_0(k_2 - \omega^2 m_2)}{\det \mathbf{Z}}, \qquad q_{2A} = \frac{F_0 k_2}{\det \mathbf{Z}},$$

det
$$\mathbf{Z} = (k_1 + k_2 - \omega^2 m_1) \cdot (k_2 - \omega^2 m_2) - k_2^2$$
.

A kapott eredményből az alábbiak következnek. Ha

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2}$$

vagyis a gerjesztés frekvenciájával megegyezik a pótlólagos (m_2 , k_2) alkotta egyszabadságfokú alrendszer sajátfrekvenciája, akkor az 1-es test nem fog mozogni. Nagyon érdekes dolgot tapasztalunk. Az a tömeg (m_1), amelyre külső gerjesztés (erő) hat nem mozdul el, a pótlólagos rendszer $q_2 = -F_0/k_2 = -q_{statikus}$ amplitudójú harmonikus mozgást végez ellentétes fázisban a gerjesztő erővel. A pótlólagos rendszer konkrét kivitelezésénél (a szilárdságtani méretek meghatározásánál) erre nyílván valóan tekintettel kell lenni.

@@

6.9.2. Nem harmonikusan gerjesztett rendszerek vizsgálata a sajátvektorok ismeretében

Induljunk ki a csillapítatlan rendszer mozgásegyenletéből

$$\mathbf{M\ddot{q}} + \mathbf{Kq} = \mathbf{f} \,, \tag{6.185}$$

A q elmozdulást írjuk le a sajátrezgéskép szerinti sorbafejtés segítségével

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Phi}\mathbf{w} \tag{6.186}$$

Ekkor a (6.185) szokásos átalakítását elvégezve

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{w} = \mathbf{f}\,,\tag{6.187}$$

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} \mathbf{w} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{f} \equiv \overline{\mathbf{f}}$$
(6.188)

azaz

$$\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{S}^2 \mathbf{w} = \bar{\mathbf{f}} \,, \tag{6.189}$$

ami valójában

$$\ddot{w}_i + \alpha_i^2 w_i = \bar{f}_i \quad i = 1,...,n$$
 (6.190)

n darab egymástól független differenciálegyenletet jelent.

VEM alapjai	Csillapítás nélküli gerjesztett rezgő rendszerek
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 187 \triangleright$

Ilymódon az egyszabadságfokú rendszerre vonatkozó megoldást használhatjuk fel főkoordináta leírására - külön-külön:

$$w_i = w_{0i} \cos \alpha_i t + \frac{\dot{w}_{0i}}{\alpha_i} \sin \alpha_i t + \frac{1}{\alpha_i} \int_0^t \bar{f}_i(\tau) \sin \alpha_i (t-\tau) d\tau \quad i = 1, \dots, n$$
(6.191)

A kezdeti \mathbf{w}_0 és $\dot{\mathbf{w}}_0$ főkoordináta vektor értékeket az eredeti rendszer mozgásának leírására szolgáló q vektorra vonatkozó feltételből kell meghatározni.

Jelölésként bevezetve a

$$\sin \mathbf{S}t = \langle \sin \alpha_1 t, \quad \sin \alpha_2 t, \dots, \sin \alpha_i t, \dots, \sin \alpha_n t \rangle$$
(6.192)

diagonál mátrixot $(\sin\leftrightarrow\cos)$, a kezdeti feltételek fő koordinátákra vonatkozó

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0, \qquad \dot{\mathbf{w}}(0) = \dot{\mathbf{w}}_0 \tag{6.193}$$

vektorait, (6.191) tömörebben

$$\mathbf{w} = \cos \mathbf{S}t \ \mathbf{w}_0 + \mathbf{S}^{-1} \sin \mathbf{S}t \ \dot{\mathbf{w}}_0 + \int_0^t \mathbf{S}^{-1} \sin \mathbf{S}(t-\tau) \overline{\mathbf{f}}(\tau) d\tau \qquad (6.194)$$

alakban írható fel, majd ennek ismeretében az eredeti elmozdulási paraméterek (6.186) alapján. Ez könnyen megy, hiszen

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Phi}\mathbf{w}, \quad \mathbf{M}\mathbf{q} = \mathbf{M}\mathbf{\Phi}\mathbf{w}, \quad \mathbf{\Phi}\mathbf{M}\mathbf{q} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\mathbf{w} = \mathbf{w}, \quad (6.195)$$

ilymódon

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{w}}_0 = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0, \quad azaz \quad \mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M}.$$
(6.196)

Gyakorlati feladatokat vizsgálva, olyan megfigyelések voltak megtehetők, amelyek arra tényre hívták fel a figyelmet, hogy az eredeti (6.186) alatti n tagú sorbafejtés helyett elegendő – a terhelés időbeli lefutásától függően – a sorbafejtés néhány első tagját venni csak mivel a sorbafejtés magasabb sorszámú tagjainak a hatása egyre kisebb. Ezt figyelembevéve az alkalmazott transzformáció

$$\mathbf{q}_{(n,1)} = \frac{\tilde{\mathbf{\Phi}}}{(n,k)(k,1)} \tilde{\mathbf{w}}, \qquad 0 < k < n \tag{6.197}$$

VEM alapjai	Csillapítás nélküli gerjesztett rezgő rendszerek
Tartalom Tárgymutató	$\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 188 \triangleright$

A mozgásegyenletet ismételten át tudjuk transzformálni az új $\tilde{\mathbf{w}}$ korlátozott számú főkoordináták rendszerébe.

Ekkor a

$$\tilde{\Phi}^T \mathbf{M} \tilde{\Phi} \tilde{\mathbf{w}}^{\cdot \cdot} + \tilde{\Phi}^T \mathbf{K} \tilde{\Phi} \tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\Phi}^T \mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}}$$
(6.198)

egyenletből a

$$\tilde{w}^{\cdot \cdot} + \tilde{\mathbf{S}}^2 \tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{f}} \tag{6.199}$$

differenciálegyenlethez jutunk, am
ikszámú, egymástól független egyenletnek felel meg.

Az általános megoldás az i-dik koordinátája

$$\tilde{w}_i = \tilde{w}_{0i} \cos \alpha_i t + \frac{\tilde{w}_{0i}}{\alpha_i} \sin \alpha_i t + \frac{1}{\alpha_i} \int_0^t \tilde{f}_i(\tau) \sin \alpha_i (t-\tau) d\tau \qquad i = 1, \dots, k$$
(6.200)

ami tömörebben

$$\tilde{\mathbf{w}} = \cos \tilde{\mathbf{S}} t \cdot \tilde{\mathbf{w}}_{\mathbf{0}} + \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \sin \tilde{\mathbf{S}} t \cdot \tilde{\mathbf{w}}_{\mathbf{0}}^{\cdot} + \int_{0}^{t} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \sin \tilde{\mathbf{S}} (t-\tau) \cdot \tilde{\mathbf{f}}(\tau) d\tau \quad (6.201)$$

alakú, ahol

$$\tilde{\mathbf{S}} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle \tag{6.202}$$

$$\cos \tilde{\mathbf{S}}t = \langle \cos \alpha_i t, ..., \cos \alpha_k t \rangle \qquad (\cos \leftrightarrow \sin) \qquad (6.203)$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\mathbf{0}} = \tilde{\mathbf{\Phi}}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0, \qquad \tilde{\mathbf{w}}_0^{\cdot} = \tilde{\mathbf{\Phi}}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0^{\cdot}. \tag{6.204}$$

Lényeges előnye a (6.197) megoldásnak az, hogy a $\tilde{\Phi}$ mátrix (n,k) mérete miatt, csak k számú sajátértékproblémát kell előzetesen megoldani, és nem n számút. Bonyolult $\mathbf{f}(t)$ terhelésnél a $\tilde{\mathbf{w}}$ megoldásban szereplő időintegrálást általában numerikusan szokás elvégezni. Természetesen a numerikus időintegrálásnál t-nek különböző diszkrét értéket kell adni, ami általában a lezajló jelenség felhasználót érdeklő időintervallumtól függ.

6.9.3. Csillapított gerjesztett rendszerek vizsgálata

A megvizsgálandó rendszer mozgásegyenlete

$$\mathbf{M\ddot{q}} + \mathbf{C\dot{q}} + \mathbf{Kq} = \mathbf{f}, \tag{6.205}$$

ahol a csillapítások hatását hordozó ${\bf C}$ mátrix

VEM alapjai	Csillapítás nélküli gerjesztett rezgő rendszerek
Tartalom Tárgymutató	$\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 189 \triangleright$

1. a tömeg és a merevségi mátrixszal arányos

$$\mathbf{C} = c_M \mathbf{M} + c_K \mathbf{K}$$

2. azoktól független.

Nyilvánvalóan ebbe a csoportba tartoznak azok a rendszerek, ahová különböző csillapító elemeket építenek be, amelyeknek mérete és így kihatása semmiképpen nem lehet arányos az eredeti rendszer tömegével és merevségével.

6.9.4. Arányos csillapítás

A címben jelzett fogalom a csillapítási mátrix

$$\mathbf{C} = c_M \mathbf{M} + c_K \mathbf{K} \tag{6.206}$$

felépítésre utal.

Áttérve a

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Phi}\mathbf{w} \tag{6.207}$$

transzformációval a w főkoordináták rendszerébe, az eredeti mozgásegyenlet a Φ^T -vel balról történő beszorzás után, a tömegmátrix és a merevségi mátrix ortogonalítási tulajdonságának felhasználásával

$$\left(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Phi} = c_M \mathbf{E} + c_K \mathbf{S}^2\right) \tag{6.208}$$

$$\ddot{\mathbf{w}} + (c_M \mathbf{E} + c_K \mathbf{S}^2) \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{S}^2 \mathbf{w} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{f} = \overline{\mathbf{f}}.$$
(6.209)

alakba írható át, vagyis egy széteső differenciálegyenlet-rendszerhez jutottunk, amelynek *j*-dik egyenlete

$$\ddot{w}_j + (c_M + c_K \alpha_j^2) \dot{w}_j + \alpha_j^2 w_j = \bar{f}_j \quad j = 1, \dots, n,$$
 (6.210)

amelyben a

$$c_M + c_K \alpha_j^2 = 2\xi \alpha_j \tag{6.211}$$

összefüggés a ξ a *Lehr-féle* csillapítás definicióját szolgáltatja.

A főkoordináták rendszerébe áttranszformált differenciálegyenlet megoldását közvetlen fel tudjuk írni:

$$w_j(t) = e^{-\beta_j t} \left(w_{oj} \cos \nu_j t + \frac{\beta_j w_{0j} + w_{0j}}{\nu_j} \sin \nu_j t \right)$$

Tartalom | Tárgymutató

$$+\frac{1}{\nu_{j}}\int_{0}^{t}\bar{f}_{j}(\tau) \ e^{-\beta_{j}(t-\tau)} \ \sin\nu_{j}(t-\tau) \ d\tau$$
 (6.212)

ahol $w_{0j} = w_j(0), w_{0j}^{\cdot} = w_j^{\cdot}(0)$ a kezdeti elmozdulás és sebesség, és $\nu_j = \sqrt{\alpha_j^2 - \beta_j^2}, \beta_j = \alpha_j \xi.$

Bevezetve a kezdeti feltételek vektorait $\mathbf{w}_0, \dot{\mathbf{w}}_0$ a

$$\beta^T = \langle \beta_1, \dots, \beta_j, \dots, \beta_n \rangle, \qquad \nu^T = \langle \nu_1, \dots, \nu_j, \dots, \nu_n \rangle$$
(6.213)

$$\cos \nu t = \langle \cos \nu_1 t, ..., \cos \nu_n t \rangle \quad (\cos \leftrightarrow \sin) \tag{6.214}$$

$$\exp(-\beta(t-\tau)) = \left\langle e^{-\beta_1(t-\tau)}, \dots, e^{-\beta_j(t-\tau)}, \dots, e^{-\beta_n(t-\tau)} \right\rangle$$
(6.215)

diagonálmátrixokat, a (6.212) alattiak tömörebb formában is felírhatók:

$$\mathbf{w}(t) = \exp(-\beta t) \left[(\cos \nu t + \beta \nu^{-1} \sin \nu t) \mathbf{w}_0 + \nu^{-1} \sin \nu t \, \dot{\mathbf{w}}_0 \right] + \nu^{-1} \int_0^t \exp\left(-\beta (t-\tau)\right) \sin \nu (t-\tau) \overline{\mathbf{f}}(\tau) d\tau \quad . \quad (6.216)$$

A kezdeti értékek a \mathbf{q}_0 és $\dot{\mathbf{q}}_0$ -án keresztül

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0, \qquad \dot{\mathbf{w}}_0 = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0 \tag{6.217}$$

a szokásos összefüggések alapján számolhatók. A megoldásban szereplő integrált különböző időpontokhoz tartozóan numerikus integrálással szokás meghatározni.

Megjegyzés 1.: Hasonlóan mint a csillapításnélküli esetben, a leképzésnél a transzformációt elegendő véges k méretre korlátozni. Így a (6.207) helyett

$$\mathbf{q}_{(n,1)} = \frac{\tilde{\mathbf{\Phi}}_{(n,k)(k,1)}}{\tilde{\mathbf{w}}}$$
(6.218)

fog szerepelni. Ekkor a (6.218) j = 1,...,k számú. Formailag a megoldás megegyezik az előbb ismertetettel, azzal a különbséggel, hogy a mérték n-ről k-ra csökkentek, továbbá a (6.217) -ban Φ helyett $\tilde{\Phi}$ szerepel.

VEM alapjai

Tartalom | Tárgymutató

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 191 \triangleright$

6.11. feladat: Az arányos csillapítási tényezőket c_M és c_K értékeket két sajátfrekvenciához tartozó (6.210) alatti ζ_s érték megadásával szokásos meghatározni:

$$c_M + c_K \alpha_s^2 = 2\xi_s \alpha_s. \tag{6.11-a}$$

Megoldás: A két ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerből

$$c_K = 2(\zeta_2 \alpha_2 - \xi_1 \alpha_1) / (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)$$
(6.11-b)

$$c_M = 2\alpha_1 \alpha_2 (\xi_1 \alpha_2 - \xi_2 \alpha_1) / (\alpha_2^2 - \alpha_1^2).$$
(6.11-c)

A 6.8. ábrán kritikus csillapítási tényező ξ változását szemlélhetjük az α függvényeként. A merevséggel arányos csillapításnál

$$\xi = \frac{c_K \alpha}{2}, \quad c_M = 0, \tag{6.11-d}$$

míg a tömeggel arányos csillapításnál

$$\xi = \frac{c_M}{2\alpha}, \quad c_K = 0. \tag{6.11-e}$$

A kettő együttes hatása szolgáltatja a

$$\xi = \frac{c_M + c_K \alpha^2}{\alpha} \tag{6.11-f}$$

függvényt. Az eredmények jól mutatják, hogy a kritikus csillapítási tényező $\xi = \xi(\alpha)$ frekvenciafüggő. Általában az α_1 és α_2 értékeket a szerkezet üzemeltetési frekvencia tartománya jelöli ki.





Legyen $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, továbbá követeljük meg, hogy ezen frekvenciáknál a kritikus csillapítás 2 % és 10 %-os legyen, azaz $\xi_1 = 0.02$, $\xi_2 = 0.10$. Az (a) egyenlet a megadott értékeknél felírva, nyerjük, hogy

$$c_M - c_K 4 = 0.08$$

 $c_M + c_K 9 = 0.60$

amiből

$$c_M = -0,336, \quad c_K = 0,104,$$

 $\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 192 \triangleright$

Tartalom | Tárgymutató

azaz a *Rayleigh-féle* csillapítási mátrix

 $\mathbf{C} = -0,336\mathbf{M} + 0,104\mathbf{K}.$

@@

6.10. A mozgásegyenlet közvetlen integrálása

A lineáris rezgőrendszerek mozgásegyenleteinek megoldását, mint egy lehetséges út, jól szolgálja a mozgásegyenlet közvetlen integrálása. Az eljárások többségére általában jellemző, hogy az eljárás elején egy együtthatómátrix invertálása után a megoldást mátrix-vektor szorzásokkal lépésrőllépésre állítjuk elő. A módszerek alkalmazásának lényeges kérdése, az időlépés nagyságának megválasztása.

A korábbiakban már láttuk, hogy a mozgásegyenlet egy másodrendű differenciálegyenlet rendszer:

$$\mathbf{M\ddot{q}} + \mathbf{C\dot{q}} + \mathbf{Kq} = \mathbf{f}(t). \tag{6.219}$$

A szóbanforgó megoldási eljárásoknak két nagy pillére van. Egyik a differenciálegyenletet diszkrét időpillanati kielégítése, a másik, az időlépések közötti gyorsulás megváltozásának feltétele. Így a megoldás fontosabb tulajdonságai:

- időlépésenként elégítjük ki az egyenletet (azaz időben is diszkrét pontokat nézünk)

Az eljárások nagy számítási igényeik miatt előnyösen számítógéppel hajthatók végre. Ezzel kapcsolatban további kérdések merülnek fel:

- mennyi a megoldás időszükséglete?
- milyen a kapott megoldás pontossága?
- milyen az eljárás stabilitása?

Az elmondottakból következően az időlépéstől, azaz a Δt -től lényegesen függ a megoldás. Általánosságban az mondható el, hogy Δt -től függetlenül

VEM alapjai	A mozgásegyenlet közvetlen integrálása
Tartalom Tárgymutató	$\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 193 \triangleright$

lehet, hogy korlátos a q amplitúdó, vagyis stabil az eljárás, de ettől még lehet, sőt van is hibája a megoldásnak.

Konkrét számításoknál a megoldáshoz a vizsgált időintervallumot $0 \le t \le T$ egyenközűen felosztjuk *n* számú időszakaszra $\Delta t = \frac{T}{n}$, ahol a *T* a vizsgált időtartomány. A megoldást lépésről-lépésre állítjuk elő az egyes időpontokban:

$$0 \Delta t \ 2\Delta t \ 3\Delta t \ 4\Delta t \ \dots \ T \tag{6.220}$$

a megoldáshoz felhasználjuk az előző lépésben, vagy lépésekben már meghatározott mennyiségeket.

6.10.1. Differencia módszer

Az egyik legismertebb numerikus integrálási eljárás a differencia módszer, amelyet szokás *középponti differencia módszernek* is nevezni. Az eljárás másodrendűen pontos és feltételesen stabil.



6.9. ábra. Az elmozdulás-idő függvényének a közelítése

Sebesség, gyorsulás közelítése

Az eljárás alapgondolata, hogy elmozdulás-idő függvényt két időlépés tartományán parabola ívvel közelítjük (6.9. ábra). Mivel parabola szelője és a parabola felező pontjához tartozó érintő párhuzamos, ebből a geometriai megfontolásból felírhatjuk a felező pontban az időszerinti első deriváltat, azaz a sebességet:

$${}^{t}\dot{q} = \frac{{}^{t+\Delta t}q - {}^{t-\Delta t}q}{2\Delta t} \tag{6.221}$$

VEM alapjai	A mozgásegyenlet közvetlen integrálása
Tartalom Tárgymutató	$\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 194 \triangleright$

A gyorsulást hasonló megfontolás szerint állíthatjuk elő. Az intervallumok felező pontjaiban lévő sebességek (6.221) -hoz hasonlóan írhatók fel, ezek egy időlépésre eső különbsége szolgáltatja a gyorsulás képletét:

$${}^{t}\ddot{q} = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{t + \Delta t q - {}^{t}q}{\Delta t} - \frac{{}^{t}q - {}^{t-\Delta t}q}{\Delta t} \right] = \frac{1}{\Delta t^{2}} \left[{}^{t+\Delta t}q - 2 {}^{t}q + {}^{t-\Delta t}q \right]$$
(6.222)

A *t* időpillanatra vonatkoztatjuk a mozgásegyenletet:

$$\mathbf{M}^{t}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^{t}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{t}\mathbf{q} = {}^{t}\mathbf{f}, \qquad (6.223)$$

majd a (6.221), (6.222) képleteket értelemszerűen alkalmazzuk a több szabadságfokú rendszer sebesség ${}^{t}\dot{\mathbf{q}}$ és gyorsulás ${}^{t}\ddot{\mathbf{q}}$ vektoraira. A (6.223)-ba történő behelyettesítés és átrendezés után az alábbi lineáris algebrai egyenletrendszert kapjuk meg az ismeretlen ${}^{t+\Delta t}\mathbf{q}$ elmozdulásra

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\,\Delta t}\mathbf{C}\right)^{t+\Delta t}\mathbf{q} = {}^{t}\mathbf{f} - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)^{t}\mathbf{q} - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} - \frac{1}{2\,\Delta t}\mathbf{C}\right)^{t-\Delta t}\mathbf{q}$$
(6.224)

Ebből formálisan kifejezhető az ismeretlen elmozdulás a $t+\Delta t$ időpillanatban a korábban meghatározott elmozdulás vektorok függvényeként

$$^{t+\Delta t}\mathbf{q} = f\left(...,^{t}\mathbf{q},^{t-\Delta t}\mathbf{q}\right)$$
(6.225)

mely alapján az eljárást explicit-módszernek nevezzük.

Az eljárás indítása

A számítás elindításához a t=0illetve a $t=-\Delta t$ helyen a ${\bf q}$ elmozdulás vektor ismerete szükséges

$${}^{0}\mathbf{q}, \quad {}^{-\Delta t}\mathbf{q} = ? \tag{6.226}$$

melyek a kezdeti feltételekből, ill. azok felhasználásával határozhatók meg.

A kezdeti feltételből adódóan ismert az elmozdulás és a sebesség a megfigyelés kezdetén

$$t = 0$$
 : $\mathbf{q}(t = 0) = {}^{0}\mathbf{q}, \quad \dot{\mathbf{q}}(t = 0) = {}^{0}\dot{\mathbf{q}}$ (6.227)

Felírva
at=0időpillanatra vonatkozóan a mozgásegyenletet, abból a gyorsulás kiszámolható

$$\mathbf{M}^{0}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^{0}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{0}\mathbf{q} = {}^{0}\mathbf{f} \rightarrow {}^{0}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1} \left({}^{0}\mathbf{f} - \mathbf{C}^{0}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}^{0}\mathbf{q} \right) \quad (6.228)$$

VEM alapjai	A mozgásegyenlet közvetlen integrálása
Tartalom Tárgymutató	$\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 195 \triangleright$

A (6.221) és a (6.222) nek a t = 0 időpontra vonatkozó felírásából bennük a $^{-\Delta t}\mathbf{q}$ és a $^{\Delta t}\mathbf{q}$ szerepelnek ismeretlenként.

$${}^{0}\dot{\mathbf{q}} = \frac{\Delta t_{\mathbf{q}-} -\Delta t_{\mathbf{q}}}{2\Delta t} \rightarrow \Delta t_{\mathbf{q}} = 2\Delta t^{0}\dot{\mathbf{q}} + -\Delta t_{\mathbf{q}}$$
$${}^{0}\ddot{\mathbf{q}} = \frac{1}{\Delta t^{2}} \left(\Delta t_{\mathbf{q}} - 2^{0}\mathbf{q} + -\Delta t_{\mathbf{q}} \right)$$

Az elsőből kifejezett Δt **q**-t betéve a másodikba végső soron a $-\Delta t$ **q** ismeretlen elmozdulás vektor a $t = -\Delta t$ időpontban meghatározható

$${}^{0}\ddot{\mathbf{q}}\,\Delta t^{2} = {}^{\Delta t}\mathbf{q} - 2{}^{0}\mathbf{q} + {}^{-\Delta t}\mathbf{q} = 2\,\Delta t{}^{0}\dot{\mathbf{q}} + {}^{-\Delta t}\mathbf{q} - 2{}^{0}\mathbf{q} + {}^{-\Delta t}\mathbf{q}$$
$$\rightarrow {}^{-\Delta t}\mathbf{q} = {}^{0}\mathbf{q} - \Delta t{}^{0}\dot{\mathbf{q}} + {}^{\underline{\Delta t^{2}}}_{2}{}^{0}\ddot{\mathbf{q}}$$

(6.229)

Egy speciális helyzet áll elő, ha C = 0 továbbá M diagonális, akkor ezáltal a feladat könnyen kezelhetővé válik.

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)^{t+\Delta t}\mathbf{q} = {}^{t}\mathbf{f} - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right) {}^{t}\mathbf{q} - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right) {}^{t-\Delta t}\mathbf{q} \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{q} = {}^{t}\tilde{\mathbf{f}}$$
(6.230)

Mivel a tömegmátrix diagonális

$$\mathbf{M} = \langle m_{11} \, m_{22} \, \dots \, m_{nn} \rangle \,, \quad m_{ii} > 0 \tag{6.231}$$

az ismeretlen elmozdulás vektor i-dik koordinátája könnyen kifejezhető

$${}^{t+\Delta t}q_i = {}^t \tilde{f}_i \frac{\Delta t^2}{m_{ii}} \tag{6.232}$$

Az eljárás nagy előnye, hogy a **K** merevségi mátrixot nem kell invertálni, sőt összeszerkeszteni sem szükséges, mert a szorzás az elem szintjén is végrehajtható:

$$\mathbf{K}^{t}\mathbf{q} = \sum_{e} \mathbf{K}^{e t}\mathbf{q}^{e} \tag{6.233}$$

Az eljárás feltételesen stabil, ez azt jelenti, hogy az időlépés kisebb kell legyen mint a csillapítatlan rezgőrendszer legnagyobb sajátrezgéshez tartozó periódus idő π -ed része

$$\Delta t < \frac{T_n}{\pi} \tag{6.234}$$

ahol T_n a legnagyobb sajátrezgés periódus ideje

$$T_n = \frac{2\pi}{\alpha_n}, \qquad [\alpha_n] = \frac{rad}{s}.$$
(6.235)

VEM alapjai	A mozgásegyenlet közvetlen integrálása
Tartalom Tárgymutató	$\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 196 \triangleright$

A Δt -re nagyobb értéket megválasztva a kitérések egyre növekednek, a megoldás nem adja vissza a fizikai valóságot. Az időlépés megválasztásának fontosságára látunk számítást a Példa 6.12-ben.

6.10.2. Newmark-féle módszer

Az eljárás alapváltozata az intervallumonkénti súlyozott gyorsulás feltételezésére épül. Nem részletezve a levezetést a sebességre és az elmozdulásra az alábbi két összefüggést kapjuk:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{q}} = {}^{t}\dot{\mathbf{q}} + (1-\gamma) \ (\Delta t) \ {}^{t}\ddot{\mathbf{q}} + \gamma \,\Delta t \,{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{q}}, \quad \gamma \ge \frac{1}{2}$$
(6.236)

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{q} = {}^{t}\mathbf{q} + \Delta t {}^{t}\dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) (\Delta t)^{2} {}^{t}\ddot{\mathbf{q}} + \beta (\Delta t)^{2} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{q}}, \quad \beta \ge \frac{1}{4}$$
(6.237)

A számítás a választott súlyozó β , γ tényezőktől függően feltételesen stabil avagy feltételnélkülien stabil. Maga a módszer *implicit*.

6.10.3. Az eljárások stabilitása

Az integráló eljárások stabilitása azért vetődik fel, mert az időlépésenkénti előrehaladás során, elképzelhető, hogy egyre távolabb kerülve a pontos megoldástól, a számítógép számábrázolását is figyelembe véve, a számok túlcsordulhatnak.

Az explicit eljárások formálisan felírhatók a következő alakban is

$${}^{t+\Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{t} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \mathbf{L}^{t+\Delta t} \mathbf{f}$$
(6.238)

ahol A az integrálás módjától függ.

Ha a terhelés hatásától eltekintünk, akkor az integrálás a megoldás vektor ismételt transzformációjaként interpretálható

$$^{t+\Delta t}\mathbf{\hat{q}} = \mathbf{A}^{t}\mathbf{\hat{q}} \tag{6.239}$$

A transzformáció a megoldási vektort akkor nagyítja, ha van olyan sajátértéke, amelyik nagyobb, mint 1, és akkor kicsinyíti a megoldást, ha minden sajátérték kisebb mint 1. A numerikus integráló eljárás tehát stabil, ha

$$\rho\left(\mathbf{A}\right) \le 1 \tag{6.240}$$

azaz az együttható mátrix sajátértékei kisebbek vagy határhelyzetben egyenlő, mint 1.

A *Newmark módszer* stabilitása a választott γ és β tényezőktől függ. A stabilitás kérdése a 6.10. ábra alapján áttekinthető. Ennek értelmében a $\gamma = \frac{1}{2}$ és $\beta = \frac{1}{4}$ trapéz formula feltétel nélkül stabil és energia konzervatív, azaz megőrzi a bevitt energiát. $\gamma < \frac{1}{2}$ -nél a számítás instabil. A feltételesen stabil altartományban áll:

$$(\gamma + 0.5)^2 - 4\beta \le \frac{4}{\alpha_n^2 \,\Delta t^2}$$

illetve a határgörbén

$$\beta = \frac{1}{16} + \frac{\left(\gamma^2 + \gamma\right)}{4}.$$

Vizsgálatok folytathatók az amplitudó és a rezgésperiódikus idejének pontatlansága tárgyában is. A következő táblázat összegzi az eredményeket, ahol α_n jelöli a vizsgált rendszer legnagyobb sajátkörfrekvenciájának az értékét, T a harmónikus rezgésidő exakt értékét, ΔT az eltérés értékét.



6.10. ábra. Newmark-módszer stabilitási diagram

Láthatóan a centrális differencia módszer feltételesen stabil, rövidebb periódus időt szolgáltatva, míg a tarpéz féle módszer feltételnélküli számítást tesz lehetővé, hosszabb periódus időt adva. A tiszta explicit módszer habár feltétel nélkül stabil, de az eredmények jelentős amplitudó hibával lesznek terhelve.

A bemutatott módszerek akkor is alkalmazhatók, ha a merevségi mátrix változik. Ilyen esetekkel találkozunk alakítástechnikai kérdéseknél a gépgyártástechnológiában. A választandó igen kicsiny időlépések miatt a

Algoritmus	γ	β	Időlépés hossz határa $\alpha_n \Delta t$	Amplitudó hiba	Periodicitási hiba $\frac{\Delta T}{T}$
Tiszta explicit explicit	0	0	0	$\frac{\alpha_n^2 \ \Delta t^2}{4}$	0
Centrális diff. m.	0.5	0	2	0	$-\frac{\alpha_n^2 \Delta t^2}{24}$
Lineáris gyorsulás	0.5	1/6	3.46	0	$\frac{\alpha_n^2 \Delta t^2}{24}$
Trapéz-m. (átlag gyorsulás)	0.5	0.25	∞	0	$\frac{\alpha_n^2 \Delta t^2}{12}$

6.3. táblázat. Megoldási módszerek összefoglalása

számítások tekintélyes időt követelnek, továbbá az eredmények értékeléshez számos időpontbeli állapotok (elmozdulás, feszültség) feltérképezése és ezek grafikai megjelenítése szükséges.

6.12. feladat: Adott egy háromszabadságfokú csillapítatlan rezgőrendszer **K** merevségi mátrixa és **M** tömegmátrixa:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
(6.12-a)

Ismert továbbá a rezgőrendszer három sajátkörfrekvenciája $\alpha_1 = \sqrt{2}$, $\alpha_2 = 2$ és $\alpha_3 = \sqrt{6}$. A legkisebb és legnagyobb sajátértéket a Példa 6.7-ben alsó és felső iterációval is meghatároztuk. A gerjesztett rezgéseket leíró mozgásegyenlet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}_A \,\sin\omega t \quad \text{ahol} \quad f_A^T = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}, \quad \omega = 5 \tag{6.12-b}$$

megoldását a középponti differenciamódszer és a Newmark módszer segítségével állítjuk elő.

Megoldás: Négy ($\Delta t = T_3/\pi$, $T_3/10$, $T_3/20$, $T_3/50$) különböző időlépésnél hasonlítjuk össze a második szabadságfokhoz tartozó elmozdulás kitérésre kapott eredményeket.



VEM alapjai

Tartalom | Tárgymutató

 $\Rightarrow \triangleleft 199 \triangleright$



6.11. ábra. A $dt = \Delta t$ időlépés a megoldás pontosságra gyakorolt hatása

Amint az a 6.11. ábrán is látható a középponti differencia módszer a $\Delta t = T_3/\pi$ időlépésnél időben növekvő, azaz instabil megoldást eredményez. Ugyanakkor a Newmark-féle megoldás habár pontatlan, de stabil. Az időlépés csökkentésével a két megoldás egymásra simul. @@

6.11. Tömegmátrixok előállítása

Az elemek tömegmátrixa az

$$\mathbf{M}^{e} = \int_{V} \mathbf{N}^{T} \ \rho \ \mathbf{N} \ dV \tag{6.241}$$

összefüggés alapján számolható. Ezt a mátrixot ún. konzisztens tömegmátrixnak nevezi az irodalom. Láthatóan integrálást kell végrahajtani. A merevségi mátrixhoz hasonlóan ebben az esetben is numerikus integrálást hajtunk végre. Általában a Gauss- féle integrálást alkalmazzák. Ennek értelmében izoparametrikus elemet feltételezve

$$\mathbf{M}^{e} = \sum_{i=1}^{NG} \sum_{j=1}^{NG} \sum_{k=1}^{NG} \mathbf{N}^{T} \left(\xi_{i}, \eta_{j}, \zeta_{k}\right) \ \rho\left(\xi_{i}, \eta_{j}^{*}, \zeta_{k}\right) \ \mathbf{N}\left(\xi_{i}, \eta_{j}, \zeta_{k}\right) \ \det \mathbf{J}\left(\xi_{i}, \eta_{j}, \zeta_{k}\right) \ W_{i} W_{j} W_{k}$$

$$(6.242)$$

ahol (ξ_i, η_j, ζ_k) a helyi koordinátarendszer Gauss pontbeli értékei, W_i súlyfaktorok.

6.11.1. Síkbeli tartó esete.

Tartók esetén, a Kirchhoff-féle hipotézisnél, síkbeli esetet vizsgálva, az elemenbelüli (középvonalhoz) tartozó sebesség

$$\dot{\mathbf{u}}^{T}\left(\xi\right) = \begin{bmatrix} \dot{u} & \dot{w} & \dot{\varphi}_{\eta} = -\dot{w'} \end{bmatrix}$$
(6.243)

Feltételezve, hogy az $\eta,\ \zeta$ tengelyek a keresztmet
szet főtengelyei, kapjuk, hogy

1. *Longitudinális rezgés*kor az ismeretlen paraméterek vektorára tekintettel:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T & \dot{\mathbf{a}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}_i & \dot{u}_j & \dot{\ddot{a}}_{u1} & \dot{\ddot{a}}_{u2} \end{bmatrix}$$
(6.244)

$$\mathbf{M} = \rho A \begin{bmatrix} \frac{L}{3} & \frac{L}{6} & \frac{-5L^3}{60} & \frac{-7L^4}{60} \\ & \frac{L}{3} & \frac{-L^3}{12} & \frac{-2L^4}{15} \\ & & \frac{L^5}{30} & \frac{L^6}{20} \\ & & Szimmetrikus & \frac{8L^7}{105} \end{bmatrix}$$
(6.245)

2. míg a $\xi - \zeta$ síkbeli hajlításnál

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T & \dot{\mathbf{a}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{w}_i & -\dot{w}'_i & \dot{w}_j & -\dot{w}'_j & \dot{\ddot{a}}_{w1} & \dot{\ddot{a}}_{w2} \end{bmatrix}$$
(6.246)

$$\mathbf{M} = \rho \ A \begin{bmatrix} \frac{156 \ L}{420} & \frac{-22 \ L^2}{420} & \frac{54 \ L}{420} & \frac{13 \ L^2}{420} & \frac{L^5}{60} & \frac{101 \ L^6}{2520} \\ \frac{4 \ L^3}{420} & \frac{-13 \ L^3}{420} & \frac{-3 \ L^3}{420} & \frac{-2 \ L^6}{280} & \frac{-11 \ L^7}{1260} \\ \frac{156 \ L}{420} & \frac{22 \ L^2}{420} & \frac{L^5}{60} & \frac{109 \ L^6}{2520} \\ Szimmetrikus & \frac{4 \ L^3}{420} & \frac{L^6}{280} & \frac{23 \ L^7}{2520} \\ & & \frac{L^9}{630} & \frac{L^{10}}{252} \\ & & \frac{23 \ L^{11}}{2310} \end{bmatrix}$$
(6.247)

Diagonális mátrix esetén a tartó tömegét a csomópontokra szétosztjuk. Pótlólagos állandók hatását nem vizsgálva (6.245) helyett

$$\mathbf{M} = \frac{\rho \, AL}{2} \left[\begin{array}{cc} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{array} \right] \tag{6.248}$$

írandó, ill. hajlításnál

$$\mathbf{M} = \frac{\rho AL}{2} \left\langle 1 \quad v \frac{L^2}{210} \quad 1 \quad v \frac{L^2}{210} \right\rangle \tag{6.249}$$

ahol a szögelfordulásnál jelentkező fél tartó tehetetlenségi nyomatéka a tartó szélső pontjain áthaladó tengelyre $I = \frac{\rho A L}{2} \frac{(L/2)^2}{3}$ és így $\upsilon = 17.5$.

6.11.2. Néhány síkbeli elem tömegmátrixa.

Háromszögletű elemnél, ha a csomóponti elmozdulások vektora

$$\mathbf{q}^{e,T} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix},$$

akkor az e-dik elem tömegmátrixa

$$\mathbf{M}^{e} = \langle \mathbf{J} \quad \mathbf{J} \rangle, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{J} = \frac{\rho^{e} A^{e} b^{e}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
(6.250)

Négycsomópontú bilineáris elmozdulásmező közelítéssel, ha a csomóponti elmozdulások vektora

$$\mathbf{q}^{e,T} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 & v_2 & v_3 & u_4 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{M}^{e} = \langle \mathbf{J} \ \mathbf{J} \rangle, \text{ ahol } \mathbf{J} = \frac{\rho^{e} A^{e} b^{e}}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$
(6.251)

6.12. Intelligens szerkezetek

A mindennapos életben számos olyan esettel találkozunk, amikor a mechanikai rendszerre ható különböző hatások, erők, támaszok mozgása, hőhatás kedvezőtlen mozgásokat idéz elő, aminek a csillapítása hasznos volna. Pl. a gépkocsik, repülőgépek utasterében kialakuló zaj mértékét oly módos lehet csökkenteni, hogy a piezoelektromos hatást elv alapján dolgozó bélyegek elektromos feszültségét visszavezetjük, általában számítógépen keresztül szabályozva egy másik bélyegre, ahol az mechanikai nyúlást kapva a mechanikai rendszerre terhelést ad át, annak mozgását befolyásolva. Példaként említhetjük a nagypontosságú antennák mozgásának hasonló elv szerinti szabályozását is.

Az elmondottakból következik, hogy a kérdés megválaszolása több tudomány terület közös művelésével oldható meg, a mechanika mellett, az irányítástechnika, a méréstechnika, az informatika is jelentős szerephez jut. Az ún. mechatronikai szerkezeteknél a mechanikai rendszer vezérélése együttesen szolgáltatja a kívánt mozgás biztosítását.

A mechanikai rendszer szilárdságtani és rezgéstani viszonyainak tisztázására kiválóan alkalmasnak bizonyul a végeselem-módszer alkalmazása bonyolult alakzatoknál, terheléseknél. A vizsgált rendszer mozgásának befolyásolása attól függ, hogy hány helyről veszünk információt (pl. elmozdulást, sebességet), és ezeket felerősítve, átalakítva hány helyen avatkozunk be, azaz, hány helyre viszünk be erőket. Az információ gyűjtésére a jeladók, az erő bevezetésére a végrehajtó eszközök szolgálnak. Ezek kifejlesztése, egy külön tudomány, iparági kutatás-fejlesztés eredménye. Ezek az eszközök, mechanikus, elektromos, vagy elekro-mechanikai elven működnek.

Megjelentek olyan anyagok is (*smart materials*) amelyek magában a szerkezeti elemekkel együttesen mozognak, deformálódnak. Ilyen anyagok

- 1. Emlékező anyagok 5%-os nyúlást tudnak elszenvedni a hőmérséklet változás hatására. Alacsony frekvenciáknál és pontosság elérésénél használatosak pl. NITIOL
- 2. Piezoelektromos anyagok amelyek 0.1%-os nyúlásig dolgoznak, egyrészt mérőeszközként (a nyúlás hatására az anyagban elektromos feszültség alakul ki), ill. végrehajtóként (az elektromos feszültség hatására az anyag deformálódik). A Polimer és kerámia anyagok szolgálnak e célra, így *polyvinylidene fluo*ride (*PVF*₂). A kerámiák közül a Zirconat és Titánból készült (*PZT*) jelzésű anyagok magas frekvenciáknál és nagy pontosságnál előnyösen használhatók.
- Mágnesen anyagok amelyek 0.15% os nyúlásig képesek dolgozni, főképp nyomásnak kitett tartományokban. A legjobbak egyike a *TERFENOL – D*.

Az elmozdulások mérésére induktív, kapacitív, optikai elven működő eszközök a legelterjedtebbek, a nyúlások mérésére a nyúlásmérő bélyegek, a piezo-kerámiák, piezo-polymerek, optikai szálak szolgálnak.

6.12.1. Rezgőrendszer vezérlése visszacsatolással

A vizsgált mechanikai rendszer mozgását a végeselemes diszkretizálás után a (6.46) alatti másodrendű differenciál-egyenletrendszer írja le

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f} = \mathbf{F}\mathbf{u} \tag{6.252}$$

ahol irányítástechnikai fogalmakkal **F** a bemenet (input) hatásmátrixa, **u** a vezérelt bemeneti (input) vektor

Az

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \tag{6.253}$$

állapotvektor bevezetésével a másodrendű mozgásegyenletünk elsőrendűre vezethető vissza

$$\underbrace{\mathbf{\dot{x}}}_{(2n,1)} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{\dot{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{\dot{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \end{bmatrix} \mathbf{u} = \\ = \underbrace{\mathbf{A}}_{(2n,2n)} \underbrace{\mathbf{x}}_{(2n,1)} + \underbrace{\mathbf{B}}_{(2n,2m)} \underbrace{\mathbf{u}}_{(2m,1)} \quad (6.254)$$

ahol a A,B a jobb és baloldal összevetéséből nyilvánvaló.

Az állapotvektorra kapott elsőrendű differenciálegyenlet ismeretlenjeinek száma kétszerese az eredetinek. A megnövekedett méret hátrányait a számítógépek jelenlegi kapacitása és sebessége lényegesen csökkenti.

Grafikailag a rendszert a 6.12. ábra szemlélteti.

Ez ideig nem szóltunk arról, hogy a bemeneti u vektor miképp függ az állapotvektortól. Nyilvánvalóan a rendszer mozgásában beálló kedvezőtlen hatást csak úgy lehet csökkenteni, ha az állapotvektorból nyerünk információkat és azt feldolgozva, hatunk vissza a rendszerre. Tehát bevezetve egy ún. kimeneti (mérő, szenzor) vektort y-t, a dinamikai rendszerünket az alábbi egyenletrendszer fogja jellemezni:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \, \mathbf{x} + \mathbf{B} \, \mathbf{u}, \mathbf{y} = \mathbf{Y}_x \, \mathbf{x}$$
(6.255)

továbbá

$$\mathbf{u} = -\mathbf{G}\,\mathbf{y} = -\mathbf{G}\,\mathbf{Y}_x\mathbf{x} \tag{6.256}$$

vagy

$$\mathbf{u} = -\mathbf{G} \, \mathbf{x} \quad (\mathbf{Y}_x = \mathbf{E}) \tag{6.257}$$



6.12. ábra. Állapotegyenlet sémája

A (6.256) alatti esetben a kimeneti, mért jellemzőkből megyünk vissza a rendszerre, míg a (6.257) –nál az állapotvektor összes elemét figyelembe vesszük a visszacsatolásnál. Ez utóbbit az *állapot teljes visszacsatolásá*nak nevezzük.

A rendszer stabilitásához (az egyensúlyi helyzetből kismértékű kitérítéssel a kitérések nem növekednek, hanem a külső hatás megszűnésével a zérushoz tartanak, azaz a rendszer visszatér egyensúlyi helyzetébe) szükséges, hogy a

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\,\mathbf{G}\mathbf{Y}_x)\mathbf{x} \tag{6.258}$$

rendszer sajátértékei negatívak legyenek. Ennek biztosítása további, itt nem részletezett megfontolásokat igényel.

A teljes visszacsatolásnál

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\,\mathbf{G})\mathbf{x} \tag{6.259}$$

az erősítő **G** mátrix meghatározására *a pólus elhelyezési* technikát és a Lineáris Kvadratikus Regulátor (LQR) módszert szokás használni. [6].

Szokásos az állapotegyenletet és a kimeneti (output) egyenletet bővíttet formában értelmezni

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}_x \mathbf{x}(t) + \mathbf{Y}_u \mathbf{u}(t)$$
(6.260)

A (6.260) –hez tartozó rendszer blokkdiagramját a 6.13. ábra tartalmazza. Ez ebben az esetben egy nyitott hurkú szabályozást jelent, hisz a bemeneti jelekre az állapotvektor nem hat vissza, sőt még a kimeneti jelek sem befolyásolják azt.. Ekkor a bemenet értéke lényegében egy elvárt, korábban meghatározott és nem függ a rendszer pillanatnyi állapotától.

Gyakran azonban jobb megoldás érhető el, ha a bemenet értékének meghatározásánál a rendszer pillanatnyi állapota is befolyást gyakorol.



6.13. ábra. Nyitott hurkú szabályozás

Kétfajta visszacsatolásról beszélünk. Az első esetben a bemenet függ az állapotvektortól és egy ún. előrejelző értéktől

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{G} \mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_{r} \mathbf{r}(t)$$
(6.261)

ahol **G** - az erősítő mátrix, \mathbf{F}_r - előrejelző mátrix, $\mathbf{r}(t)$ - a referencia bemenet vektora. Ezt a szabályozást állapot visszacsatolású szabályozásnak nevezik (lásd. 6.14. ábra).

A második esetben

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{G}_{y} \mathbf{y}(t) + \mathbf{F}_{r} \mathbf{r}(t)$$
(6.262)

a szabályozás kimeneti jelek visszacsatolásával valósul meg (lásd 6.15. ábra).



6.14. ábra. Visszacsatolt állapotra alapozott szabályozás

A (6.261), vagy a (6.262) kifejezések (6.260)-be történő behelyettesítésével áll elő az a rendszer aminek a megoldást kell végső soron keresni, azzal a feltétellel, hogy a rendszer kielégítse a megfigyelhetőség, és szabályozhatóság általános feltételeit, továbbá a rendszer stabil legyen. Ezekre a nem egyszerű kérdésekre a irányítástechnika szakirodalma ad feleletet pl. [6,7]

Tartalom | Tárgymutató



6.15. ábra. Visszacsatolt kimenetre alapozott szabályozás

6.12.2. Modálanalízis felhasználása

Korábbi fejezetekben már láttuk, hogy a **q** változókra felírt kapcsolt mozgásegyenletet (6.252)-t arányos csillapításnál át lehettet transzformálni a főkoordináták rendszerébe, ahol már az egyenletrendszer szétesővé vált, az egyes egyenletek egy szabadságfokúvá váltak. A tárgyalás egyszerűsítésére a belső csillapítást elhanyagoljuk.

$$\mathbf{M\ddot{q}} + \mathbf{Kq} = \mathbf{f} = \mathbf{Fu} \tag{6.263}$$

A transzformáció a (6.112) alapján

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Phi} \, \mathbf{w} \tag{6.264}$$

A sajátvektorok tömegmátrixra vonatkozó ortonormált tulajdonságára való tekintettel

$$\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{S}^2 \, \mathbf{w} = \mathbf{\Phi}^T \, \mathbf{F} \, \mathbf{u} \tag{6.265}$$

ahol S^2 a (6.106) alatt bevezetett mátrix.

Az input vektor nem csak az elmozdulás, hanem a sebességtől is függhet.

Feltételezzük, hogy

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}_q \, \mathbf{q} + \mathbf{G}_{\dot{q}} \, \dot{\mathbf{q}} \tag{6.266}$$

és így (6.264)-re is tekintettel

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}_q \, \mathbf{\Phi} \, \mathbf{w} + \mathbf{G}_{\dot{q}} \, \mathbf{\Phi} \, \dot{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{G}}_q \, \mathbf{w} + \tilde{\mathbf{G}}_{\dot{q}} \, \dot{\mathbf{w}} \tag{6.267}$$

Ezekután a dinamikai rendszerünk egyenlete

$$\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{S}^2 \,\mathbf{w} = \mathbf{\Phi}^T \,\mathbf{F} \,\left(\tilde{\mathbf{G}}_q \,\mathbf{w} + \tilde{\mathbf{G}}_{\dot{q}} \,\dot{\mathbf{w}} \right) \tag{6.268}$$

VEM alapjai	Intelligens szerkezetek
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 207 \triangleright$

ami sajnos a jobboldala miatt már nem széteső. Az egyes harmonikusok egymásra hatnak. Azért van egy előnye a kapottaknak, hisz ha csak néhány harmonikust szeretnénk "vezérelni, irányítani", akkor a w mérete már lényegesen kevesebb lesz az eredeti q méretétől. Általában az input vektor mérete jóval úgyszintén kevesebb mint a rendszer mozgását leíró elmozdulási paraméterek száma.

6.12.3. Piezoelektromos hatások figyelembevétele, az állapotegyenlet származtatása végeselem-módszer esetén

Elméleti villamosságtani ismeretek birtokában piezoelektromos anyagoknál áll [7], hogy a villamos eltolás $d \left[As/m^2\right]$ vektora ki kell elégítse a

$$\nabla \cdot \boldsymbol{d} = 0 \tag{6.269}$$

egyenletet, a villamos térerősség e [V/m] pedig, az $\varepsilon [As/Vm]$ dielektromos állandón keresztül van kapcsolatban a villamos eltolással

$$\boldsymbol{d} = \varepsilon \boldsymbol{e} \tag{6.270}$$

A villamos térerősség ψ [V] potenciálon keresztül számolható, azaz

$$\boldsymbol{e} = -\nabla\psi \tag{6.271}$$

amiből következik, hogy

$$\nabla \times \boldsymbol{e} = 0, \quad \Delta \psi = 0 \tag{6.272}$$

A ψ -re és a *d*-re az alábbi peremfeltételek állnak fenn:

$$\psi = \psi_0 \qquad \boldsymbol{r} \in A_{\psi} \tag{6.273}$$

$$\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{n} = -\bar{Q} \quad \boldsymbol{r} \in A_Q \tag{6.274}$$

ahol a teljes A felület az elektromos feladat szempontjából két részre van szétosztva, egyiken a ψ_0 potenciál, míg a másik részen a \bar{Q} [As/m^2] töltés van megadva, előírva.

A mechanikai mezők vonatkozásában állnak a korábbi mezőegyenletek és peremfeltételek.

Az állapotegyenletek vonatkozásában (hőhatást elhanyagolva) áll:

$$T = D \cdot \cdot A - E_p \cdot e$$

$$d = E_p^T \cdot \cdot A + K_D \cdot e$$
(6.275)

VEM alapjai	Intelligens szerkezetek
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 208 \triangleright$

ahol *T*, *A* a mechanikai feszültségi és alakváltozási tenzor, *D*, *E*_p a mechanikai anyagállandók 4-ed rendű tenzora, ill. a piezoelektromos kapcsoló 3-ad rendű tenzor, *K*_D a dielektromos állandók másodrendű tenzora.

A (6.275) első egyenletéből az alakváltozás

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}^{-1} \cdot \boldsymbol{T} + \boldsymbol{D}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_p \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{D}^{-1} \cdot \boldsymbol{T} + \boldsymbol{D}_p \cdot \boldsymbol{e}$$
(6.276)

ahol \boldsymbol{D}_p piezorugalmassági állandók 3-ad rendű tenzora, míg a második egyenlet

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{E}_{p}^{T} \cdot \boldsymbol{D}^{-1} \cdot \boldsymbol{T} + \left(\boldsymbol{E}_{p}^{T} \cdot \boldsymbol{D}_{p} + \boldsymbol{K}_{D}\right) \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{D}_{p}^{T} \cdot \boldsymbol{T} + \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e} \qquad (6.277)$$

ahol P a permittivitási 2-d rendű tenzor.

A *Bubnov-Galjorkin*-féle módszer alkalmazásával a mechanikai részre vonatkozó (6.17)-et egy testre felírva

$$\int_{V} \delta \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \nabla + \rho \boldsymbol{k} - \rho c_M \dot{\boldsymbol{u}} - \rho \ddot{\boldsymbol{u}}) \, dV - \int_{A_p} \delta \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} - \bar{\boldsymbol{p}}) dA = 0 \quad (6.278)$$

továbbá az elektromos mezők esetén a (6.269) és (6.274) alapján írható

$$\int_{V} \delta \psi \, (\boldsymbol{d} \cdot \nabla) \, dV - \int_{A_Q} \delta \psi \, (\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{n}) \, dA = 0 \tag{6.279}$$

A szokásos szorzatderiválási és integrál átalakítási szabályok alkalmazásával, az állapotegyenletekre is tekintettel az alábbiakhoz jutunk

$$\int_{V} \delta \boldsymbol{A} \cdot \cdot \left[\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}_{p} \cdot \boldsymbol{e} \right] \, dV - \int_{V} \delta \boldsymbol{u} \cdot \left[\rho \boldsymbol{k} - \rho \, c_{M} \dot{\boldsymbol{u}} - \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \right] \, dV - \int_{A_{p}} \delta \boldsymbol{u} \cdot \bar{\boldsymbol{p}} \, dA = 0$$

$$-\int_{V} (\delta\psi\,\nabla) \cdot \left[\boldsymbol{E}_{p}^{T}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{K}_{D}\cdot\boldsymbol{e}\right] \, dV - \int_{A_{Q}} \delta\psi\,\bar{Q}\,dA = 0 \quad (6.280)$$

Amint látjuk, kétfajta mezőt kell közelíteni, egyik az
 uelmozdulásmező, a másik a ψ potenciál.

A végeselemes apporoximációs technikát felhasználva, írhatjuk, hogy

$$\mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{q}, \quad \mathbf{A} \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_u \mathbf{q}, \quad \boldsymbol{\psi} = -\mathbf{N}_{\psi} \boldsymbol{\psi}$$
 (6.281)

Tartalom | Tárgymutató

Behelyettesítések révén a megoldandó differenciálegyenletrendszer

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_{uu}\mathbf{q} + \mathbf{K}_{u\psi}\boldsymbol{\psi} &= \mathbf{f}_{u}, \\ \mathbf{K}_{\psi u}\mathbf{q} + \mathbf{K}_{\psi\psi}\boldsymbol{\psi} &= \mathbf{f}_{\psi} \end{aligned} \tag{6.282}$$

Itt

$$\mathbf{M} = \int_{V} \mathbf{N}_{u}^{T} \rho \, \mathbf{N}_{u} \, dV, \quad \mathbf{C} = \int_{V} \mathbf{N}_{u}^{T} c_{M} \, \mathbf{N}_{u} \, dV, \quad \mathbf{K}_{uu} = \int_{V} \mathbf{B}_{u}^{T} \mathbf{D} \mathbf{B}_{u} \, dV,$$

$$\mathbf{K}_{u\psi} = \int_{V} \mathbf{B}_{u}^{T} \mathbf{E}_{p} \mathbf{B}_{\psi} \, dV = \mathbf{K}_{\psi u}^{T}, \quad \mathbf{K}_{\psi \psi} = \int_{V} \mathbf{B}_{\psi}^{T} \mathbf{K}_{D} \mathbf{B}_{\psi} \, dV,$$

$$\mathbf{f}_{u} = \int_{V} \mathbf{N}_{u}^{T} \rho \mathbf{k} \, dV + \int_{A_{p}} \mathbf{N}_{u}^{T} \, \bar{\mathbf{p}} \, dA, \quad \mathbf{f}_{\psi} = \int_{A_{Q}} \mathbf{N}_{\psi}^{T} \, \bar{Q} \, dA,$$

$$\underbrace{\mathbf{D}}_{(6,6)}, \quad \underbrace{\mathbf{E}_{p}^{T}}_{(3,6)}, \quad \underbrace{\mathbf{K}_{D}}_{(3,3)}$$
(6.283)

A (6.282) alatti kapcsolt rendszert kell megoldani. A ψ -nek a (6.273) alatti peremfeltételt automatikusan ki kell elégíteni, hasonlóan q-nak a kinematikai peremfeltételt. A (6.282) második egyenletéből kifejezett ψ vektort az elsőbe behelyettesítve, a végső egyenletben ismeretlenként csak az elmozdulás q paraméterei fognak szerepelni. Ezt az egyenletet numerikusan a 6.10 fejezetben ismertetett módszerekkel oldhatjuk meg.

A piezo anyagból készült elemek (bélyegek) kétfajta szerepet töltenek be. Egyikük jeladóként szolgál, a másik pedig végrehajtóként (aktuátorként). Az első szerepben az alakváltozás hatására elektromos feszültség keletkezik, aminek felerősítésével, visszacsatolásával a végrehajtó szerepet vivő piezo elemre rávitt elektromos feszültségen keresztül lehet a rendszert szabályozni. Külön kérdés, hogy hova helyezzék a jeladókat és a végrehajtókat az optimális szabályozás elérése céljából. Ezek megválaszolása azonban már meghaladja e kurzus kereteit.

6.12.4. Piezoelektromos hatások egyszerű esetekben

A végeselemes tárgyalásmódnak megfelelően a (6.276) és (6.277) helyett

$$\boldsymbol{\varepsilon} = D^{-1}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{D}_p \mathbf{e} \tag{6.284}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{D}_p^T \,\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{P} \,\mathbf{e} \tag{6.285}$$

Itt

$$\mathbf{D}_{p}^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{25} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$$
(6.286)

VEM alapjai	Intelligens szerkezetek
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 210 \triangleright$

A (6.284) alapján egydimenziós esetben a *b* vastagságú piezotárcsa alsó és felső felülete közzé a poliarizációs iránnyal megegyező U_{fesz} -t téve, a fajlagos nyúlás (legyen ez a 3-dik irány),

$$\varepsilon_z = \varepsilon_3 = d_{33} U_{fesz} / b \tag{6.287}$$

amiből a piezotárcsa vastagságának megváltozása

$$\Delta b = d_{33} U_{fesz} \tag{6.288}$$

A feszültség sarkainak megváltoztatása rövidülést fog okozni.

Ha veszünk egy piezo lapocskát, amire a feszültséget a polarizációs irányban a lapocska vastagsága mentén helyezzük el, akkor a vastagságra merőleges irányban a lap *L* hosszának megváltozása

$$\Delta L = d_{31} \frac{U_{fesz}}{b} L \tag{6.289}$$

Végezetül vizsgáljunk egy téglalap keresztmetszetű prizmatikus tartóra elhelyezett változó $b_p(x)$ szélességű piezobélyeget. A tartó hossztengelye x, a vastagság irányába mutasson a z tengely. A tartó magassága h a piezobélyeget h_p . A piezobélyegre U_{fesz} hat. (6.16. ábra)



6.16. ábra. Tartóra elhelyezett piezoelektromos végrehajtó

A hosszirányba mutató mechanikai feszültség (6.275) alapján a piezobélyegben és a tartóban

$$\sigma_x = \sigma_1 = E_{piezo}\varepsilon_x - E_{piezo}d_{31}\frac{U_{fesz}}{h_p}, \quad \sigma_x = E\varepsilon_x \tag{6.290}$$

Hivatkozások az 6. fejezethez $\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 211 \triangleright$

Tartalom | Tárgymutató

ahol $E_{piezo}, \quad E$ a bélyeg és a tartó Young-féle modulusa, U_{fesz} a bélyegre adott feszültség.

A tartó mozgásegyenlete a Példa 6.2 szerint

$$(I_y E w_0'')'' + A \rho \ddot{w}_0 - p = 0$$

ahonnan p = 0 esetén

$$A\rho\ddot{w}_0 = M_y'' \tag{6.291}$$

A hajlítónyomaték most két részből tevődik össze, egyik része a tartó vastagsága mentén lineárisan megoszló σ_x feszültségből származik, a másik része a piezobélyegben keletkező (6.290) alatt bemutatott feszültségből.

Az elmodottakat figyelembe véve a hajlítónyomaték

$$M_{y} = \int_{A} \sigma_{x} z \ dA = -\left(I_{y}E + I_{y,piezo}E_{piezo}\right) w''_{0} + E_{piezo}d_{31}\frac{U_{fesz}}{h_{p}}\left(h_{p}b_{p}\left(x\right)\right)h$$

ami rövidebben

$$M_{y} = -(I_{y}E)_{red} w''_{0} + E_{piezo} d_{31} \frac{U_{fesz}}{h_{p}} (h_{p}b_{p}(x)) h$$
(6.292)

Ezek után a mozgásegyenlet

$$A\rho\ddot{w} + \left((I_y E)_{red} \, w''_0 \right)'' = E_{piezo} d_{31} \frac{U_{fesz}}{h_p} h_p h \, \left(b_p \left(x \right) \right)'' \tag{6.293}$$

ami a jobboldalon megjelenő tag szerint egy megoszló nyomatékkal terhelt tartót mozgását fogja leírni. Állandó szélességű piezobélyegnél a nyomaték koncentráltan jelenik meg a bélyeg végeken. Látható, hogy az U_{fesz} megfelelő változtatásával befolyásolható a mozgásegyenlet megoldása.

6.13. Hivatkozások az 6. fejezethez

- 1. Mechanika mérnököknek, Mozgástan, Szerkesztette *M. Csizmadia Béla, Nándori Ernő*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, **1997.**
- 2. Király B.: Dinamika, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, 2000.
- 3. *Hughes, T. J. R.*: The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, **1987**.

- 4. *Bathe, K.J.*: Finite Element Procedures, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, **1996.**
- 5. *Géradin, M.- Rixen, D.*: Mechanical Vibrations, John Wiley & Sons Inc., New York, **1997.**
- 6. *Meirovitch, L*.: Dynamics and Control of Stuctures, John Wiley & Sons Inc., New York, **1990.**
- 7. *Preumont, A*.: Vibration Control Active Structures, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, **1997.**

7. I-DEAS program használata

Az I-DEAS tervező rendszer olyan különböző alkalmazások együttese, melyeket a tervezési folyamat különböző fázisainak megkönnyítésére alkalmazhatunk. Minden egyes gépészeti feladat elvégzése, más-más szoftverrész aktiválását kívánja. A program elindítása után több ablakot nyit meg, melyek közül a jobb szélső menüsora alatt találhatjuk meg a különböző alkalmazások kiválasztását segítő listaablakot. Ilyenek a *Design, Simulation, Test, Manufacturing,* stb. melyek különböző feladatok elvégzésére szolgálhatnak, mint

Design: (Modeller, Assembly, Drafting Setup) Ezen a szoftverrészen belül a gépelemek létrehozását tehetjük meg, az egyszerűbb alkatrészektől kezdve a bonyolult több elemből álló összetett szerkezetekig.

Simulation: (Boundary Conditions, Meshing, Model Solution) Az I-DEAS végeselemes modulja. Célunk elsősorban ennek a résznek a rövid bemutatása.

Test: (Time History, Histogram, Model Preparation, Signal Processing, Modal) A programrendszer dinamikai eleme. Ennek segítségével vizsgálhatjuk az időben lezajló folyamatokat.

Manufacturing: (Modeller, Generative Machining, Assembly Setup, GNC Setup) A gyártás szimulációját célzó szoftverrész.

Általános jellemzők

- 1. A parametrikus modellezés. A tervezés során először egy vázlatot kell készíteni, mely nagy vonalakban hasonlít majd az elkészítendő darabhoz, és a méreteket ezután kell pontosan beállítani az igényeknek megfelelően. De természetesen a geometriaielemek pontos koordináták segítéségével is megrajzolhatóak.
- 2. **Tulajdonság alapú modellezés.** A bázis alak létrehozása után egyszerűen lehet definiálni kivágást, furatot, beszúrást, stb.
- Párhuzamos alkatrész fejlesztés. Az alkatrészek közös könyvtárakban helyezhetőek el, melyek a megfelelő tervezők által elérhetők módosíthatók.

7.1. A szoftver elindítása

Az I-DEAS elindítható a parancssorból, menüből vagy ikonnal. Előfordulhat hogy a program használata speciális *account*-ot is igényel. A szoftver használatához ki kell választani a rendszerünk által támogatott - lehetőleg a legjobb - grafikai drivert, pl. OpenGL, PEX.

Az elindítás után egy indító ablak nyílik ki, ahol a következő adatokat lehet, kell megadni:

- 1. **Project neve:** mely az adott munkát rendszerezi. Ezt ki is lehet választani a felkínált listából. Vagy behívható egy kiválasztó ablak, az ikon kiválasztásával.
- 2. **Model file:** a munka során létrehozott objektumhoz tartozó adatok itt tárolódnak el. Ezt segíti egy előhívható lista, mely a file megnyitáshoz, mentéshez hasonló ablakot jelent. A megfelelő ikon kiválasztásával.
- A használni kívánt alkalmazás kiválasztása: Alapértelmezésként felkínálja a program az utoljára használtat, illetve a *Design* csomagot. Ez alatt található az adott alkalmazáson belüli feladat kiválasztására szolgáló legördülő listaablak.

Ha az I-DEAS-t parancssorból indítottuk el, akkor lehetőség van megadni különböző paramétereket is.

- -h az indításhoz használható opciókat jeleníti meg.
- -d device a grafikus drivert lehet vele megadni indításkor. Ha nem adjuk meg a device nevet, akkor egy listát kínál fel amiből lehet választani.
- -g a legutóbb végzett munka folytatását teszi lehetővé.
- -l language a használni kívánt nyelvet lehet megadni. Ha nem adjuk meg akkor egy listát kínál fel az elérhető nyelvekkel.

7.2. Kapcsolattartás a szoftverrel

7.2.1. Ablakok

A szoftver elindítása után rögtön szembetűnik, hogy több kisebb-nagyobb ablak nyílik meg különböző tartalommal.

• *Grafikus ablak:* A legnagyobb, a bal felső sarokban található, ablak. Használat során itt hozzuk létre a vázlatrajzot, itt készülnek az alkatrészek, és az összeállítási rajzok.

- Ikon panel: A jobb szélső oldalon található az ikon paletta. Három főbb ikoncsoporttal rendelkezik, melyek az adott alkalmazás függvényében változnak. A legfelső 6x3 db ikon, a továbbiakban A mátrixként hivat-kozunk rá, a középső 4x3 db ikon a továbbiakban B mátrix, és az alsó 4x3 db ikon, melyet C mátrixnak nevezünk. Illetve itt találjuk a különböző alkalmazások, feladatok között váltást lehetővé tevő legördülő listákat is.
- *Lista ablak:* A bal alsó kis ablak az információ megjelenítésre szolgál. Itt kapunk tájékoztatást az alkatrészekről, illetve az összeszerelésekről. Továbbá itt jelenik meg a futó folyamat jellemzője, az esetleges hiba üzenetekkel.
- *Prompt ablak:* Vagy más néven a parancssor. A lista ablak melletti hasonló méretű ablak. Ez is megjelenít információkat az elindított parancsról, de itt lehet billentyűzetről adatokat bevinni. Használd ezt az ablakot az I-DEAS kezelése során!

7.2.2. Egér gombok

A program használatához a három gombos egér az ideális, ahogy ezt már egy átlagos tervező szoftvertől elvárhatjuk. Minden egérgomb saját funkcióval bír.

- *bal gomb:* parancskiválasztást, és geometriai alakzatok kijelölését szolgálja a képernyőn, ha a Shift billentyűvel együtt nyomjuk le, akkor több elem kiválasztása lehetséges (pl. törléskor hasznos...)
- *középső gomb:* ez a gomb az Enter vagy Return billentyű szerepét tölti be, az éppen futó parancs lezárását szolgálja. Használni kell ezt a gombot!
- *jobb gomb:* A különböző feladatoknál használható ún. *popup* (felugró) menüt jeleníti meg.

7.2.3. Ikon panel használata

Az ikonok és a menük a jobb szélső ablakon helyezkednek el. Használatuk nem sok magyarázatot igényel. Egy kis gyakorlással könnyen elsajátítatható a kezelésük. Az ikonokról annyit el kell mondani, hogy a legtöbb ikon több feladat elvégzését is lehetővé tesz. Erre utal, az ikon jobb alsó sarkában egy kis háromszög, jelezve hogy további funkciók érhetőek el az adott ikongyűjtő kinyitásával.

VEM alapjai	Új rajz készítése
Tartalom Tárgymutató	$\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 216 \triangleright$

- Gyors egérkattintással az ikon kiválasztásra kerül és inverz színben jelenik meg. Ezzel aktiválható a jelzett funkció.
- Ha egy ikonon lenyomva tartjuk az egérgombot és egy ikon gyűjtőről van szó akkor felnyílik egy kiválasztó lista, melyek közül tetszőleges parancsot lehet elindítani.
- Az egér ikonra pozícionálása megjeleníti az adott elem funkcióját a státuszsorban, mely a grafikus ablak legalsó sorában van.

Fontos: Mikor az ikonokat, menüket használjuk érdemes figyelni az üzeneteket, a tájékoztató ablakokban. Figyelni kell az egér középső gombjának használatára is, ez az Enter vagy Return billentyűt helyettesíti és a használata egy rossz pillanatban esetleg a parancs idő előtti befejezését jelentheti.

7.3. Új rajz készítése

Üj rajz megnyitása a File menü Open parancsának kiválasztásával történik. Meg kell adni a létrehozandó új file nevét. Üj modell file megnyitása előtt a program mindig figyelmeztet, hogy az esetlegesen módosított rajzot mentsük el.

Megjegyzés:

- Használjuk gyakran a mentés funkciót, sok felesleges munkát lehet megspórolni ezzel.
- Mielőtt megnyitunk egy új file-t azelőtt mindig mentsünk.

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

- Ha azonban vissza akarunk térni egy előző mentéshez akkor az újranyitás előtt nem szabad a elmenteni változtatott rajzot.
- Használható a Ctrl-Z billentyű kombináció is, a legutóbbi mentéshez való visszatérésre. Ehhez az egérkurzort egy I-DEAS ablakra kell pozícionálni és lenyomni a billentyű kombinációt.

A rajzoláshoz használt grafikus ablak tetszőlegesen átméretezhető, de átméretezés után használjuk mindig a Redisplay parancsot. Ezt az ikon panel legalsó csoportjában találhatjuk azon belül is az első elem a legfelső sorban C(1,1). Egyébként ebben az alsó részben találhatjuk meg az összes nézetállítással és megjelenítéssel kapcsolatos parancs ikonját. Az első sorban egymás után vannak elhelyezve az újrarajzoláshoz kapcsolódó,
VEM alapjai	Új rajz készítése
Tartalom Tárgymutató	$\iff \ \ \triangleleft \ 217 \ \triangleright$

a vonalas megjelenítésért felelős és az árnyalt ábrázolást segítő ikonok gyűjtői.

7.3.1. Rajzolás

A *Design* rész *Master Modeler* alkalmazását használva hozhatjuk létre a különböző geometriájú alkatrészeket, illetve egyéb objektumokat, a különböző CAD rendszerek által alkalmazott módon. Azonban mindenkinek feltűnik, a rajzolást segítő *Dinamikus Navigátor*, mely minden geometriai elem elkészítésekor a segítségünkre van. Például a vonalak rajzolása során, jelzi a nevezetes pontokat – kezdő, illetve végpontok, vagy illeszkedés – továbbá a nevezetes helyzeteket, úgymint merőlegesség párhuzamosság.

A rajzolás során ahogy mozgatjuk az egeret úgy változik a koordináták kijelzése, a bal felső sarokban található kijelzőn. Az aktuális műveletet a parancsablakban is nyomon lehet követni.

A jobb egérgombbal számtalan funkció aktivizálható. Például a vonalak pontos helyének, hosszának a megadásához, az Options menüpont használandó a jobb egér gombjára előugró menüből.

Az aktuális parancs lezárása a középső egér gombbal történik.

Törlés: A törlés parancs a középső ikoncsoport bal alsó sarkában található Delete ikonnal érhető el B(4,1). Először a törölni kívánt objektumokat kell kijelölni, melyet lehet egyesével vagy csoportosan megtenni. Azt, hogy mikor mit jelölünk ki törlésre a Grafikus ablakon látható visszacsatolás mutatja, hogy él, felület vagy tulajdonság kerül-e kijelölésre. Ha több elemet akarunk kijelölni törlésre akkor a Shift gombot kell lenyomva tartani a következő elem törlésre jelöléséhez. Csoportos kijelölést ablak rajzolásával lehet kiváltani. A törlés véglegesítése előtt azonban érdemes mindig elolvasni az üzeneteket a Lista ablakban illetve a parancssor fölött. A lezárás a középső egérgombbal történik itt is, de felnyílik egy popup menü melyben a véglegesítés mellett a visszalépés vagy a parancsmegszakítás is választható. A jobb egérgomb lenyomására előugró menü itt is számtalan lehetőséget kínál.

7.3.2. Rajzolást könnyítő funkciók

Számtalan előre definiált billentyű kombináció van az I-DEAS-ban, melyek felsorolása itt hosszú lenne, most csak néhány fontosabbra hívjuk fel a figyelmet. Természetesen ezek szerepe átdefiniálható (lásd az ideas.ini állományt).

F1-F5: eltolás, nagyítás, forgatás, kívánt nézet, reset.

VEM alapjai	Új rajz készítése
Tartalom Tárgymutató	$\iff \ \triangleleft \ 218 \ \triangleright$

F6: az előző 5 funkcióbillentyű szerepét határozhatjuk meg vele, különböző feladatbankok kiválasztásával. Az aktív feladatbankot a rajzterület jobb alsó sarkában jelzi a program.

F7: teljes méretűre állítja a létrehozott rajzot (Ctrl-A)

F8: egymáshoz közel fekvő rajzelemek közötti választást segíti.

F9: rajzelemek kijelöltségét szünteti meg.

F10: Munkasíkba hozza az alkatrészt.

F12: a rajzterület újrarajzolását végzi el (Ctrl-R).

Az F1-F3 billentyűk által definiált műveletek elvégzéséhez a kívánt funkcióbillentyűt lenyomva tartjuk és az egér mozgatásával érjük el a transzformáció mértékét.

A *Menü* elérése a Ctrl-M kombinációval történik, mely ki/be kapcsolja a menü megjelenítését. *Kilépés*: a parancssorba írt exit utasítással, vagy a menüből kiválasztva, vagy a Ctrl-E billentyűkombinációval.

Dynamic Navigator – Dinamikus navigátor, mely az alkatrészrajz készítése során nyújt támogatást. A már létező rajzelemekhez viszonyított tulajdonságokat jelzi a program az alábbi táblázatban felsorolt jelzésekkel.

Rajzolás közben az egér jobb billentyűje segítségével további funkciókat aktivizálhatunk, pl. az Align, vagy a Focus parancsokat, melyek egy-egy korábban létrehozott görbéhez való kapcsolást tesznek lehetővé.



A rajz készítése közben hasznos a ki/be kapcsolható Grid háló, vagy Snap funkció. A Grid egy általunk definiált diszkrét ponthálót jelenít meg, mellyel a mérethelyes rajzolást könnyíti a program. Bekapcsolt Snap a létrehozandó rajzelemek pontjait, csak a meghatározott diszkrét pontokba engedi elhelyezni. Mindkét parancsot a *B mátrix* második sorának utolsó oszlopában találjuk a Workplane Appearence parancsot, vagy röviden

VEM alapjai	Új rajz készítése
Tartalom Tárgymutató	$\iff \ \triangleleft \ 219 \ \triangleright$

B(2,1) helyen.

7.3.3. Az ikongyűjtőkről

A rajzterületen elindítás után egy kijelölt rajzsíkot látunk, alapértelmezés szerint az x-y sík, de meg lehet változtatni az igényektől függően. A *Master Modeler*-ben elérhető funkciók a jobb szélső ikon panel felső csoportjában – az *A* mátrixban, lásd a 7.1. ábrán – találhatók. Ezek tulajdonképpen a rajzelemek létrehozását végzik. Háromszor hat darab gyűjtő ikonból áll, de minden gyűjtőben további funkciók aktivizálhatók.



7.1. ábra. Az A, a B és a C mátrixok a Master Modeler alakalmazásban

Az A mátrixban elérhető funkciók felsorolása:

- Rajzsík kijelölő menü: egy tetszőleges sík kiválasztása, munka
asztal kijelölés ${\cal A}(1,1)$
- Koordináta rendszer menü: referencia sík, pont, vonal A(1,2)
- Metszetek menü A(1,3)
- Vonalak menü: poligon, vonal, négyszög, pont létrehozása A(2,1)
- Körív menü: különböző körívek rajzolás
a ${\cal A}(2,\!2)$
- 3D-s menü: háromdimenziós rajzelemek létrehozásáho
z ${\cal A}(2,3)$
- Kör menü: Teljes kör rajzolása, különböző módszerekkel ${\cal A}(3,1)$
- Görbevonal parancsok: spline-ok, ellipszisek A(3,2)
- Leképzés menü: eltolás, leképzések készítése ${\cal A}(3,3)$

- Méretező parancsok: *A*(4,1)
- Lekerekítés, letörés menü: trimm-elés, szétvágás, sarkok készítése ${\cal A}(4,\!2)$
- Felület menü: felület kiterjesztés, metszés, stb. A(4,3)
- Extrud-álás menü: felületek létrehozása, testek extrud-álás
a ${\cal A}(5,1)$
- 3D-s lekerekítés, letörés menü: A(5,2)
- Halmaz műveletek: metszés, unió, különbség, stb. A(5,3)
- Kiosztás menü: négyszög kiosztás, körkiosztás, skálázás, ${\cal A}(6,1)$
- Szabad felület, él menü *A*(6,2)
- Jellemzők menü: A(6,3)

A középső 12 ikon, illetve ikongyűjtő funkciója elsősorban a rajzelemek módosításával, szabályozásával kapcsolatos. A *B mátrix*ban elhelyezkedő parancsokat az alábbiak szerint találjuk, ha a *Simulation/Master Modeler* alkalmazást használjuk:

- Történeti faB(1,1)
- Mozgatás, elforgatás, elrendezés, stb. B(1,2)
- Megjelenítés szabályozása, elrejtés, stb. B(1,3)
- Módosítás, Undo B(2,1)
- Informácók lekérdezése B(2,2)
- Megjelenés szabályozása, munkaterület mérete B(2,3)
- Újrarajzolás vezérlése B(3,1)
- Mérés, jellemzők, anyagok, stb. *B*(3,2)
- Alkatrészek, jellemzők, *B*(3,3)
- Törlés B(4,1)
- Alkatrész katalógus kezelése, elnevezés, csoportosítás, st
b. ${\cal B}(4,\!2)$
- Alkatrész könyvtár kezelés B(4,3)

A modell létrehozása során, az I-DEAS minden egyes lépést egy *történeti fa* segítségével tárol, mely megtekinthető és szerkeszthető. A történeti fa csomópontokat tartalmaz, melyek két gyermekből és egy szülőből épülnek fel. A csomópontok kiválasztásával a grafikus ablakon nyomon lehet

VEM alapjai	Végeselemes analízis
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 221 \triangleright$

követni, hogy melyik elemről van szó. A történeti fa elsődleges szerepe az alapelemek módosíthatósága.

A *módosítás* parancsot a B(2,1) ikonnal indítjuk el, a méretszámok kiválasztása után pedig a felnyíló dialógusablakban módosíthatjuk. Ha nincsenek kint méretek, akkor tetszőleges méretet el tudunk helyezni a méretező segítésével.

A *C mátrix*ban elhelyezett parancsok minden modulnál egységesen megtalálhatóak, ezek a következő megjelenítéssel kapcsolatos feladatokat látják el:

- Újrarajzolás parancs C(1,1)
- Vonalas ábrázolás ikongyűjtő C(1,2)
- Árnyalt megjelenítés *C*(1,3)
- Teljes méret ikongyűjtő C(2,1)
- Nagyítás-kicsinyítés parancsok C(2,2)
- Rajzfelület menü C(2,3)
- Nézet ikongyűjtők *C*(3,1), *C*(3,2), *C*(4,1), *C*(4,2)
- Leállító parancsikon C(3,3)
- Nyomtatás parancsok *C*(4,3)

7.4. Végeselemes analízis

Az I-DEAS program végeselemes modulja a *Simulation* alkalmazás. Ebben a programrészben lehetősége van a felhasználónak tetszőleges peremértékfeladat felállítására, megoldására és a megoldás elemzésére. Itt most csak röviden utalunk rá, hogy melyik feladat elvégzése, melyik programrészben lehetséges.

Elsősorban a következő alrészek áttekintését tűzzük ki:

- Simulation/Boundary Conditions, a peremfeltételek definiálása,
- Simulation/Meshing, a végeselemes háló kialakítása,
- Simulation/Model Solution, a peremértékfeladat megoldása,
- Simulation/Post Processing, a kapott megoldások vizsgálata.

7.4.1. Peremértékfeladat megadása

A *Simulation* modul *Boundary Conditions* alkalmazás kiválasztása után az *A mátrix* a 7.2. ábrán jelzett formában jelenik meg.

A peremértékfeladat típusának kiválasztása az A(1,1) parancsok segítségével történik. Dinamikai peremfeltételeket az A(2,1) és A(2,2) ikongyűjtőben található utasításokkal írhatunk elő. Az A(3,2) parancsgyűjtőben találhatók a hőmérsékletmező előírását szolgáló parancsok. A modell szabadságfokainak rögzítését az A(4,2)-ben található ikonok szolgálják.

A peremfeltételek nyilvántartását és kezelését szolgáló két utasítás a Sets... és Boundary Conditions... az A(6,2) és A(6,1)helyen van elhelyezve.



7.2. ábra. Az A mátrix a Boundary Conditions alkalmazásban

7.4.2. Végeselemes háló definiálása

A végeselemes háló létrehozása egyik fontos lépése a végeselemes analízisnek. Ez azonban megelőzheti a peremfeltételek előírását, mint látni fogjuk a gyakorlatban.

A végeselemes hálózat nem csak egy parancskiválasztást jelent, mivel lényeges paraméterek beállítását el kell végezni, úgymint elemtípusok, anyagjellemzők, geometriaijellemzők (pl. héjak esetén falvastagság), csomópontok, elemek konkrét helyen történő definiálása stb.

A *Simulation/Meshing* modul elindításával az *A mátrix*a 7.3. ábrán jelzett formában jelenik meg. Az itt kirajzolt ikonok mindegyike további parancsokat takar, melyek elérése a szokásos módon történik.

Lényeges parancsok az A(5,1) Materials... vagyis anyagjellemzők, A(5,2) Physical Properties... vagyis fizikai tulajdonságok továbbá a

 $\begin{array}{c} \hline \bullet & \hline \bullet &$

hálózást segítő parancsok az A mátrix első sorában.

7.3. ábra. Az A mátrix a Meshing alkalmazásban

7.4.3. Feladat megoldása

A *Simulation/Model Solution* alkalmazás választásával jutunk a peremértékfeladat megoldását segítő parancsokhoz. Ez a modul végzi tulajdonképpen a végeselemes számítást, a korábbi lépesek során létrehozott végeselemes modellen.

A számítás elindítása előtt néhány beállítást el kell végezni, úgymint az eredmények tárolására alkalmas hely kijelölését, a megoldás módját. Erre szolgál a Solution Set... A(1,2) parancs. Itt állíthatjuk be a megoldás során szükséges ideiglenes tárolási helyet, a megoldás során alkalmazandó pontossági elvárásokat.

A végeselemes feladat kapcsán előállított lineáris algebrai egyenletrendszert az I-DEAS alapvetően kétféle – a felhasználó által választható – egyenletrendszer megoldóval, pontosabban direkt és iteratív technikával képes megoldani. A program dokumentációja szerint a direkt megoldó szinte minden jól előírt feladatot pontosan képes kiszámolni, bár egy kicsit lassabban, mint az iteratív technikával dolgozó egyenletrendszer megoldó.

7.4.4. Eredmények megjelenítése

Lehetőség van még a *Model Solution* alkalmazás keretein belül is megtekinteni a kapott megoldást, az A(6,2)alatt található Visualiser segítségével, azonban az eredmények mélyebb elemzése megkívánja egy újabb alkalmazás a *Simulation/Post Processing* kiválasztását.

VEM alapjai	Egy egyszerű példa
Tartalom Tárgymutató	$\iff \mathrel{\triangleleft} 224 \mathrel{\triangleright}$

A megjelenő *A mátrix* (lásd a 7.4. ábrán) ebben az esetben csak az eredmények kezelésének megfelelő parancsokat tartalmazza. Az A(1,1) Results... ikon a megjeleníteni kívánt eredmény kiválasztását segíti. A felhasználó tetszés szerinti eredményskálát, színezési vagy festési módot állíthat be. Akár elemenkénti eredmény kirajzolást is előírhat. A program képes arra, hogy a kiszámított eredményeket animálja A(3,1), mely jelentheti a kialakuló végső alak elérésének szemléltetését, vagy a feszültségállapot létrejöttét.



7.4. ábra. Az A mátriPost Processing alkalmazásban

A különböző eredmények együttesen különböző skálázással is megtekinthetők, a felhasználói igények szerint. Természetesen a program az eredmények kirajzolása során támogatja a különböző transzformációkat is. Figyelembe kell azonban venni, hogy a viszonylag sűrű végeselemes hálózat, illetve a túl sok csomópont a kirajzolást korlátozhatja.

7.5. Egy egyszerű példa

Feltételezzük, hogy a modell létrehozás nem okoz különösebb nehézséget, annak részleteit itt nem közöljük. Elsősorban a végeselemes modul – *Simulation* – egyes lehetőségeit mutatjuk be, egy példa segtségével.

A végeselemes analízis három fő lépésből épül fel

1. *Pre-processing*: A számítások előkészítése, azaz, a geometriai modell felépítése, peremfeltételek megfogalmazása, végeselemes háló generálása.

VEM alapjai	Egy egyszerű példa
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 225 \triangleright$

- 2. *Megoldás*: A tényleges végeselemes számítások elvégzése.
- 3. *Post-processing*: A kapott eredmények megtekintése és kiértékelése, összevetése az esetlegesen várt eredménnyel, elmélettel.

Ennek megfelelelően haladunk végig, és egy szilárdsági számításon keresztül mutatjuk be az analízis elvégzését.

7.5.1. Modell előkészítése, a pre-processing fázis

Nyissunk meg egy új modell file-t, adjunk neki egyedi, eddig még nem használt nevet. Győződjünk meg róla, hogy a *Simulation/Master Modeler*-t nyitottuk-e meg. Majd állítsuk be a megfelelő mértékegységeket. Ehhez az Options menü Units elemét kell kiválasztani és itt a mm (milli newton)-t kell beállítani.

Készítsünk egy L szelvényt, tetszés szerinti méretekkel. A 7.5. ábra a modellt kétdimenzióban, míg a 7.6. ábra a modellt extrudálás utáni izometrikus nézetben mutatja. Az extrudálás elvégzése után, a háromdimenziós modell elkészült, ezt az alkatrészt nevezzük el egy egyedi néven. A mentést lehetővé tevő ikont a középső ikoncsoport negyedik sorának második gyűjtőjében találhatjuk A(4,2) Name Parts... megnevezéssel.



7.5. ábra. A modell kétdimenzóban

Ezt követően a peremfeltételek megadása következik. Váltsunk át a *Simulation/Boundary Conditions* alkalmazásra. A kinematikai peremfeltételek előírásához a felső ikoncsoportbeli Displacement Restraint A(4,2)parancs szükséges. Kiválasztása után a kívánt pontot, élt, vagy felületet kell kijelölni, ahol kinematikai peremfeltételt kívánunk előírni, majd



7.6. ábra. A modell háromdimenzióban

az egér középső gombjával, vagy az Enter billentyűvel elfogadjuk a kiválasztást. Az ezt követően felnyíló dialógus ablakban, az adott geometriai elemre előírjuk a peremfeltételt. Különböző lehetőségek közül választhatunk, melyek attól függnek, hogy milyen a geometriai elem, amelyre peremfeltételt adunk meg. Alapvetően megadható az elmozdulás jellege, iránya és mértéke.

A dinamikai peremfeltételek előírása hasonló módon történik. Válasszuk ki a Pressure... A(2,2) parancsot. Ezután a kívánt geometriai elemet vagy elemeket kell megjelölni, majd pedig ezeket elfogadni – ismét az egér középső gombjával, vagy az Enter billentyűvel –, és a felnyíló dialógus ablakban a terhelések konkrét értékét beírni. A terhelés megadásakor, előírhatjuk az intenzitásával, vagy az eredő nagyságával. Természetesen a végeselemes analízis elindításakor megadott mértékegységek tekintetbe vételével.

Megjegyzés: A kis nyilakon feltüntetett körök azt jelzik, hogy a terhelés az alkatrész geometriájára van előírva. A megjelenő kis nyilak száma pedig arányban van az előírt megfogási móddal.

Ez után a **végeselemes háló** előállítása következik, mely a megfelelő csomópontok és elemek létrehozását jelenti. Ehhez váltsunk át a *Simulation/Meshing* alkalmazásra, mellyel az *A mátrix* elemei megváltoznak a



7.7. ábra. A végeselemes modell

hálózás elvégzését szolgáló ikonokra.

Az I-DEAS eszközöket ad, mind kézi mind automatikus hálózáshoz. Most először használjuk az automatikus hálózást, mely esetben csak viszonylag kevés paraméter pontos beállítására van szükség. Válasszuk ki a Define Solid Mesh... A(1,1) parancsot.

Megjegyzés: Ügyeljünk arra, hogy a parancsot nem az első pozícióban találjuk, az A(1,1) ikongyűjtőt le kell nyitni és abból kell választani a kívánt elemet.

Ezzel a paranccsal tudjuk a végeselemes hálót létrehozni az alkatrészre. Egy tetszőleges, de alkatrészhez tartozó, geometriai elem kijelölése, és annak elfogadása – az egér középső gombja, vagy Enter billentyű lenyomása – után, egy dialógus ablak jelenik meg, várva, hogy elfogadjuk, vagy megváltoztatjuk az alapértelmezés szerinti paramétereket.

Fontos: Az elemméret nem megfelelő beállítása túlságosan nagy feladathoz vezethet, illetve pontatlan megoldást eredményezhet!

A lineáris és a kvadratikus elem közötti váltást az elemméret megadása utáni listaablak segítségével tehetjük meg. A dialógusablakon található "szemes" ikon választásával válik láthatóvá a generálandó végeselemes háló, melyet még tovább finomíthatunk a felkínált parancsokkal. Végül ennek



7.8. ábra. Az eredmények ábrázolása

eredményeképpen a program generálja a végeselemes hálót, mely láthatóvá is válik, ha ezt elfogadhatónak tartjuk akkor a megjelenő kérdésre Yes-szel kell válaszolni. A kész modellt a 7.7. ábra mutatja.

Ezzel a modellt előkészítettük a végeselemes analízis számára, ezt követi a számítás végrehajtása.

7.5.2. A végeselemes modell megoldása

A megoldási módszer számtalan paraméterrel állítható be, de most erre nem térünk ki részletesen. Az ilyen egyszerűbb feladatok esetében az alapértelmezésként felkínált opciók alkalmasak a számítás megfelelő végrehajtásához.

Első teendő az, hogy átváltunk a *Simulation/Model Solution* alkalmazásra. Ezzel megjelennek a végeselemes számítás elvégzéséhez szükséges parancsok ikonjai. Válasszuk ki az első ikon csoportból az első ikont A(1,1), és győződjünk meg róla, hogy a Linear típusú feladat van-e bejelölve. Ha igen akkor hozzunk létre egy megoldás halmazt. Ehhez a második ikont kell aktivizálni, melynek hatására megjelenik egy dialógus ablak, mely a megoldás halmazok kezelésére szolgál.

A megoldás halmaz tulajdonképpen egy olyan tároló terület, mely minden elem minden csomópontjára tartalmazza, a feladat egy-egy konkrét megoldását. A különböző elemekhez, más-más peremfeltételeket lehet előírni, más-más megoldási módszereket lehet választani. Továbbá ki lehet jelölni, hogy milyen eredményekre vagyunk kíváncsiak, stb.

VEM alapjai	Egy egyszerű példa
Tartalom Tárgymutató	$\iff \triangleleft 229 \triangleright$

A megoldás halmaz létrehozásához a Solution Set... A(1,2) parancsot indítsuk el, ahol most fogadjunk el mindent alapértelmezésben. Így csak a Create gomot kell kiválasztani, majd a felnyíló újabb dialógus ablakban is csak az OK gomra kell kattintani. Ezzel létrehoztunk az eredmények előállítására szolgáló gyűjtőt. A Dismiss gombbal zárjuk le ezt a műveletsort.

Ezután már elérhetővé válik a számítást elindító ikon is A(2,1), mely a második sor első ikonja (Manage solve). Kiválasztása egy dialógus ablak megjelenését váltja ki, melyen beállítható opciók sokaságát lehet módosítani, azonban most hagyjunk mindent úgy, ahogy a program felkínálja. A Solve gomb kiválasztása után a program megoldja a feladatot.

A végrehajtás során számtalan üzenetet küld a program, melyeket, kinyíló dialógus ablakokon, illetve a Lista ablakban követhetünk nyomon. Ha minden rendben zajlott, akkor a program a "*No warnings or errors encountered in last run*" üzentet adja a Lista ablakba.

7.5.3. A számítási eredmények megtekintése

A legegyszerűbb módja az eredmények megvizsgálásának, azok grafikus megjelenítése. Erre a számítások elvégzésére szolgáló feladatrészben – a *Simulation/Model Solution*-ban – van egy egyszerű lehetőségünk.

Indítsuk el az I-DEAS Visualizer-t, melyhez válasszuk ki az első ikon csoport legalsó sorának középső ikongyűjtőjében a Start New Visualizer A(6,2) parancsot. Ez maga után vonja egy dialógus ablak megjelenését, melyen elfogadhatjuk az alapértelmezett adatokat és így a program nyit egy grafikus ablakot, melyben mutatja a deformált alakot, és az egyes elemekre vonatkozó feszültségek értékét – természetesen a választásunknak megfelelően – színezés segítségével.

Az ablakhoz kapcsolódó ikonok egy külön ikon gyűjtőben jelennek, meg. Ezek segítségével többek között olyan műveleteket tudunk elvégezni, mint például a tetszőleges kiszámított jellemző megjelenítése, két illetve három dimenzióban. A panel a segítségével tudjuk az eredményeket tetszőleges formátumba kinyomtatni, természetesen a nyomtatási paraméterek széles skálán változtathatóak.

Ezzel röviden áttekintettünk egy végeselemes módszer segítségével megoldott számítási feladatot, azonban ennél még jóval több lehetőség rejlik a programban, aminek teljes megismeréséhez sok gyakorlásra és rengeteg időre van szükség.

7.6. Simulation alkalmazás

7.6.1. A Simulation alkalmazáshoz tartozó programrészek

A különböző programok, melyeket a *Simulation* modulon keresztül lehet elérni, elsősorban azt a célt szolgálják, hogy végeselemes számításokat végezzünk. Az analízis minden fázisának megfeleltethető egy-egy alkalmazás, például ahogy azt már korábban láthattuk a geometriai modell megtervezése a *Master Modeler* segítésével történik. De ugyanígy a peremfeltételek előírását, vagy a háló generálását is egy külön alkalmazás segíti.

A következőkben a modulhoz tartozó különböző alkalmazásokban elérhető parancsokat soroljuk fel. Figyelembe véve azt, hogy az ikon ablak felső ikoncsoportja (*A mátrix*) az, amely az adott alkalmazásra jellemző, így csak ezek leírását adjuk meg. Következetesen az ikonparancsok soronként és balról jobbra tartva lettek felsorolva, tehát nem írjuk fel a mátrixbeli helyüket.

Master Modeler

Ez az alkalmazás az előzőekben már ismertetésre került. A program célja a geometriai modellek létrehozása, az esetleges későbbi felhasználás miatt. A *Master Modeler*-hez kapcsolódó ikoncsoportok és ikongyűjtők már felsorolva megjelentek egy korábbi részben.

Master Assembly

Az alkalmazás elsődleges célja az összeállítások elkészítése a *Master Modeler*-ben létrehozott alkatrészekből. Az ehhez kapcsolódó parancsokat tartalmazza. De ez az alkalmazás a *Simulation* modulban nem használt, illetve nem szükséges, mivel a *Modeler* elegendő arra, hogy az elemezni kívánt geometriát létrehozzuk.

Boundary Conditions

Ez az programrész ad lehetőséget arra, hogy a végeselemes modellt a környezeti feltételekkel kiegészítsük. Azaz előírást adhatunk a kinematikai és a dinamikai peremfeltételekre vonatkozóan. Az előírható peremfeltételek köre attól függően változik, hogy milyen jellegű analízist hajtunk végre. Ezért mindig azzal a lépessel kell kezdeni a peremfeltételekre vonatkozó előírást, hogy kiválasszuk az analízis típusát.

 $\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 231 \triangleright$

A *Boundary Conditions* alkalmazáshoz tartozó felső ikoncsoport ikongyűjtőinek parancsai:

- Linear Statics, Nonlinear Statics, Normal Mode Dynamics, Response Dynamics, Forced Response, Superelement Creation, Linear Buckling, Heat Transfer, Potential Flow
- Force..., Radial Toward Point, Radial From Point, Radial From Point, Beam Mid-Point Load
- Pressure..., Hydrostatic Pressure, Distributed Beam Load
- Data Surface..., Modify Attributes..., Modify Definition..., Check at Points, Check Sum
- Heat Flux..., Heat Source..., Heat Generation..., Radiation..., Convection...
- Temperature..., Beam Temperature
- Data Edge by Function..., Data Edge by Results..., Manage..., Check at Points, Check Sum
- Modify...
- Displacement Restraint..., Temperature Restraint..., Degree of Freedom..., Coupled DOF..., Constraint Equation...
- Gravity, Translation, Rotatation, Delete, List
- Contact Set
- Scaled Sketch, Check Points, Check Sum
- Boundary Condition...
- Sets...
- Coordinate Systems, Hierarchy, List, Modify

Meshing

A végeselemes modell csomópontok és elemek hálóját is tartalmazza. A háló készítése ezen alkalmazás segítségével lehetséges. A *Meshing* alkalmazás a következő eszközökkel segíti a háló generálását:

Geometriai ellenőrző, mely a geometria egészét tekinti át, azért hogy eldöntse kész-e a modell a háló generálásához.

A hálóhoz paraméterek rendelhetőek, olyanok mint, háló típus (mapped, free), elem típus és hossz, elem fizikai és anyagi jellemzői. A háló megtekinthető a csomópontok és az elemek generálása előtt. A háló generálható az előzetesen beállított paraméterek segítségével. A háló finomsága, pontossága ellenőrizhető, vagy lekérdezhető, hogy milyen az elemek mérete és alakja.

Tetszőlegesen módosítható a háló, akár egy-egy elemre csomópontra vonatkozóan is. Például a pontosabb számítás érdekében. Az egyes eszközökkel kapcsolatban bővebb információt az on-line súgóban találhatunk. A *Meshing* alkalmazáshoz kapcsolódó felső ikoncsoport ikongyűjői, illetve az azokban elhelyezett parancsok:

```
- Define Shell Mesh..., Define Solid Mesh..., Tetrahedral Meshing
 Options..., Define Beam Mesh..., Anchor Node Create, Define Other
 Elements, Section Create, Define Free Local, Surface Dependency
- Modify Mesh Preview..., Local Lengths
- Shell Mesh, Solid Mesh, Solid From Shell, Beam Mesh, Generate Other
 Elements, Mesh on Part
- Wireframe Tools, Surface Tools, Meshablity Check, Show Unmeshed
 Geometrv
- Quality Checks, Quality Statistics, Coincident Nodes, Coincident
 Elements, Free Element Edges, Shell Element Normals, Element Collapse
- Auto Settings
- Delete: Mesh, Mesh Definition, Free Local, Surface Dependency
- Remesh, Modify Free Local, Modify Element Definition, Adaptive
 Settings
- Move Mid Nodes, Straighten Edge, Tetra Fix, Plump
- Create: Node, Modify, Copy, Drag, Reflect, Between Nodes, Deform All
Nodes, On Points
- Create: Element, Modify, Manual Meshing, Copy to Existing Nodes, Copy
 and Orient, Reflect
- Material Orientation, Modify, Sketch, Defaults
- Materials
- Physical Property
- Beam Data, Modify, Delete, Subdivide Beams, Check Length/Depth, Check
Depth
- Solid Properties, Mesh Definition Info, Node Info, Element Info, Beam
 Data Info
- Surface Thickness, Modify, Scaled Sketch, Check at Points, Create
 Thickness Results
```

```
- Coordinate Systems, Hierarchy, List, Modify
```

Model Solution

Az alkalmazás a végeselemes modell megoldását végzi. Ez számítja ki és tárolja el az eredményeket, melyeket később a *Post Processing* alkalmazás segítségével megtekinthetünk. A *Model Solution* alkalmazáshoz kapcsolódó ikonparancsok.

- Linear, Nonlinear, Variational Analysis,
- Solution Set

```
- VAN Tools
```

- Megoldás (elérhető a Solution Set létrehozása után): Manage Solve, Solve
- Report Errors/Warnings
- Absolute Strain Energy History, Relative Strain Energy History
- Variational Analysis Post-Processing
- Eredmények megtekintése (elérhető a sikeres megoldás után): Start New

```
Visualizer, Visualizer, Visualizer Options
- Coordinate Systems, Hierarchy, List, Modify
```

Post Processing

Egy végrehajtott számítás után a számítási eredményeket elmentve lehetőség van a későbbi adatfeldolgozásra, ennek az alkalmazásnak a segítéségével lehetséges az adatok értelmezése, összevetése.

A *Post Processing* alkalmazában használható ikonparancsok a következők, melyek szintén a felső ikoncsoportban helyezkednek el.

```
- Results...
```

```
- Display Template...
```

```
- Calculation Domain...
```

- Display, Next, Previous, First, Options...

- Color Bar...
- Probe

```
- Animate, Next, Previous, First, Options...
```

- Create Results, Rename, Delete, List
- Report Writer, Options...
- Energy Error Norm, Strain Energy Density, Gradient
- XY Graph, XY Overlay, Setup XY Graph, XY Gallery, Grid Options..., Data Options...
- XYZ Graph, Setup XYZ Graph, XYZ Gallery, Grid Options..., Data Options...
- Beam Post Processing
- Window, No Axes Windowed
- Tag, Grid Note
- Execute Datamap, Add To Datamap, Remove From Datamap, Delete Datamap, Datamap Info
- Start Visualizer, Visualizer, Visualizer Options
- Coordinate Systems, Hierarchy, List, Modify

A középső ikoncsoportról

A *Master Modeler*-nél már írtunk a középső ikoncsoportról. Azonban itt újra meg kell említeni, mert a *Boundary Conditions, Meshing*, stb. alkalmazásoknál ez a rész egy kicsit módosul a végeselemes analízisnek megfelelően. Tulajdonképpen néhány újabb ikonnal bővülnek ki.

```
- Labels, Label Nodes, Label Elements
```

```
- Move, Rotate, Align
```

- Display Filter..., Display Selected, Display All, Hide Except Selected, Hide, Show
- FEM Groups

 $\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 234 \triangleright$

Tartalom | Tárgymutató

- Info, World Wide Web, Query Annotation
- Workplane Appearance...
- Entities, Nodes, Elements, Workplane, Parts
- Measure, Local/Global Sw
- Delete FE Entities, Delete Geometric Entities
- Create FE Model, Create FEM from Assembly, Manage FE Model, Put Away, Get..., Name Parts..., Manage Bins..., Groups...
- Check in, Get From Library..., Manage Libraries..., Manage Projects..., FEM Tem Options

7.7. A végeselemes modell előkészítése, egyedi alkalmazásokban

A *Simulation* alkalmazás használatát kell tanulmányozni. A geometria felépítése és az ehhez kapcsolódó probléma megoldása most nem célunk, itt feltételezzük, hogy az már adott. Most azzal kezdjük a feladat végrehajtását, hogy a végeselemes modell jellemzőit (anyagjellemzők, fizikai tulajdonságok, csomópontok, elemek) állítjuk be, és a probléma jellegzetességeit figyeljük meg.

Az analízis megkezdése előtt legfontosabb cél, hogy tudjuk milyen megoldási módszert válasszunk ki, illetve állítsunk be. Ez elsősorban a terhelés mikéntjétől, valamint egyéb fontos jellemzőktől függ, mint például:

Hogyan változik, illetve változik-e a terhelés az idő függvényében?

Lineáris eredményt várunk-e a megoldáskor?

Ilyen és ehhez hasonló kérdések megválaszolása lényeges momentum, a végeselemes modell előkészítésekor.

A következő teendő az, hogy létrehozunk egy végeselemes modellt, mely mindig egy létező alkatrészhez kapcsolódik, ahogy azt már az előző példa kapcsán említettük. Egy elkészített geometriai modellhez több végeselemes modellt lehet hozzárendelni. Ez azért lehet fontos, mert különböző elemekkel számolva más-más pontosságú eredményeket kapunk, melyek később összehasonlíthatóak, módosíthatóak.

Az anyagjellemzők beállítása is egy kihagyhatatlan lépés, bár a program alapértelmezésként mindig felkínál egy általános acél jellemzőivel beállított anyagot.

A legegyszerűbb módja az anyag létrehozásnak, ha a *Simulation/Meshing* alkalmazás Materials... A(5,1) parancsát használjuk. Egy dialógusablak nyílik ki, melynek listaablakában a beállított anyagok jelennek meg. Ezeknek a kezelésére szolgál a dialógusablak. Anyag létrehozása és beillesztése a listába a Quick Create parancs segítségével történik.

Anyag létrehozásakor, meg kell adni egy anyag nevét, mely majd a listaablakban jelenik meg. Ezután ki kell választani az anyag típusát, például izotróp, anizotróp anyagról van-e szó, melynek hatására változnak a megadható jellemzők. Ilyen anyagjellemzők, például a *rugalmassági modulus, Poisson szám, sűrűség*, de itt állíthatjuk be az anyagra megengedett maximális feszültségi értékeket is. Az anyagjellemzők tetszőlegesen megváltoztathatóak, úgy hogy a jellemző kiválasztása után, a szöveg mezőben átírható az értéke, és ezt a Modify Value parancsal tudjuk érvényesíteni.

Fontos: Figyeljünk a megváltoztatott értékek helyes bevitelére, a tizedes vessző itt a .-ot jelenti! (pl. 2E8 vagy a 0.3 helyes értékek, de 0,3 sem vezet szintaktikai hibához, hanem nulla érték bevitelét okozza)

A bevitt adatokat az Examine... parancs elindítása ellenőrzi, és megjeleníti őket egy kinyíló dialógus ablak segítségével. A létrehozott anyag definícióját a program a végeselemes modellhez rendeli, és vele együtt tárolja el. Lehetőség van több anyag létrehozására is, és a számítások egymás után minden anyagra elvégezhetőek.

Fontos a fizikai jellemzők helyes bevitele a végeselemes módszer alkalmazásakor. Például egy héj elem alkalmazásakor tudni kell, hogy milyen a héj elem vastagsága.

Az anyag létrehozása ikon mellett találhatjuk a Physical Property A(5,2) parancsot. Használhatjuk például az ikont arra, hogy beállítsunk 5mm-es lemezvastagságot.

A kinyíló dialógus ablak tartalmaz egy listát, melyben a létrehozott táblázatok vannak felsorolva. Egy új elem létrehozása a New Table... ikon segítségével lehetséges, mely a bal felső ikon a nyitott dialógus ablakon. Egy következő ablakon, a különböző elemcsoportok közül kiválasszunk egyet, a példánál maradva, jelöljük ki a 2D-s csoportba tartozó Thin Shellelemet. Ezután egy újabb dialógus ablakban az adott táblázat kitöltését végezhetjük el, megadva a táblázat nevét, és a vastagság (Thickness) opciót, de itt számtalan egyéb tulajdonság is előírható.

A csomópontok létrehozása a következő lépés. A csomópontok elmozdulásai jelentik az ismeretlen változókat a végeselemes számítás során. A háromdimenziós térben gondolkodva, minden csomópontnak van három irányban elmozdulási, illetve három irányban forgási lehetősége, tehát minden csomópont hat darab szabadságfokkal rendelkezik.

Most hozzunk létre négy csomópontot. Ehhez a Node parancsot kell kiválasztani, mely az első ikoncsoport, negyedik sorának első gyűjtőjében található. A kinyíló dialógus ablakot, melyet fogadjuk el alapértelmezésben. Ezután adjuk meg négy pont koordinátáit, mondjuk legyen az a 10x10

VEM alapjai	A modell megoldása
Tartalom Tárgymutató	$\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 236 \triangleright$

méretű négyzet, itt a parancs ablakot kell használni a koordináták pontos bevitelére. Ha megadtuk a négy pont koordinátáit, akkor ezt a középső egér gombbal tudjuk véglegesíteni.

Egy elem létrehozása a csomópontok összekapcsolásával lehetséges. Miért van erre szükség? Lényegében a fő ok az, hogy az I-DEAS lehetőséget ad arra, hogy bizonyos felületeken, illetve felületrészeken, saját elemeket definiáljunk a pontosabb számítás miatt. Tehát nem haszontalan egy kis energiát fektetni a kisebb elemek generálásának módszerébe, hogy jobb eredményeket kapjunk az analízis után.

Elem definiálásához, szükség van az elem típus kiválasztására, mely lehet 1D, 2D, vagy 3D, attól függően milyen feladat esetén alkalmazzuk. Ezt követi az anyag- illetve fizikai tulajdonságok előírása, majd végül az elemet felépítő csomópontokat kell megadni.

Ezért még továbbra is a *Solution/Meshing* alkalmazásban maradva válasszuk ki az Element parancsot. Ezt az ikont a Node parancsot tartalmazó gyűjtő mellett találjuk. A kinyíló dialógus ablak segítségével készíthetjük el az elemet, a megfelelő információk megadásával. A 2D-s Thin Shell elem kiválasztása után ne felejtsük el megadni a megfelelő anyagot, és fizikai tulajdonságot, melyet korábban már definiáltunk. Majd a négy darab csomópontot kell az egér segítségével kiválasztani. Itt lényeges a csomópontok megadásának sorrendje, az elem irányítása miatt!

Ezt követően a peremfeltételek megadása következik a manuálisan létrehozott elemen. Itt váltsunk át a *Simulation/Boundary Conditions* alkalmazásra, és válasszuk ki a Displacement Restraint... A(4,2) parancsot. Válasszuk ki a kívánt csomópontot, – mondjuk a bal felsőt –, és fogadjuk el az egér középső gombjával. A kinyíló dialógusablakban a kinematikai peremfeltétel előírását adhatjuk meg, itt írjunk elő teljes megfogást. Ismételjük meg ezt a lépést a bal alsó csomópontra is, azzal a különbséggel, hogy engedjük Y irányban elmozdulni.

A dinamikai peremfeltételeket, az első ikoncsoport, második sorában található parancsokkal írhatjuk elő. Most koncentrált terhelést alkalmazzunk a fennmaradt két csomópontra, ugyanolyan értékkel, és egyformán x irányba.

7.8. A modell megoldása

A modell megoldása jelenti mindig az egyik kritikus részét az analízisnek. A megoldáskor legtöbb esetben a lineáris analízist használjuk – mikor a program a modellt állandósult állapotában vizsgálja –, de számtalan feladnál nem-lináris problámákat kell megoldani. Az I-DEAS-nak a megoldás egy mátrix egyenlet kielégítését jelenti.

$\mathbf{K}\,\mathbf{q}=\mathbf{f}$

Azaz minden egyes csomópontban, minden szabadságfokra, vagy az elmozdulást, vagy ott ahol az elmozdulás elő van írva, a reakcióerőket, kell kiszámítania a programnak.

A megoldáshoz először egy megoldás halmazt kell definiálni (Solution Set... parancs), ahogy ezt már a korábbi részben leírtam. Ezután pedig a modell megoldható, melyhez a Solve ikont kell kiválasztani.

7.9. Az eredmények értelmezése

A számítások elvégzése után az analízis következik az eredmények értelmezése. Itt két fontos kérdést kell mindig megválaszolni:

- Helyesek-e a kapott eredmények a modell szempontjából?
- Mit jelent a kapott eredmény?

Ilyenkor hasznos lehet, ha korábban, vagy akár az elemzés közben kézzel kiszámítunk egy-két egyszerűbben elemezhető feladatot, vagy feladatrészt. Ez növelheti az eredmények értelmezésének a hatékonyságát, illetve magabiztosabban tudjuk majd állítani, hogy a kapott eredményekkel valami nincs rendben, vagy, hogy ez igen, valami ilyesminek kell lenni az eredménynek!

Az előzőekben utaltunk rá, hogy az eredmények megtekintésének egyik leghatékonyabb eszköze a Visualizer. Ennek az alkalmazása most is kielégítő. Az elem feszültségképének megtekintése után mindenki láthatja, hogy a kapott eredmény nem meglepő. Mivel egyenletes terhelés volt az elemen ezért a feszültség minden helyen ugyanolyan értékkel bír. Az alakváltozás mértéke jelzi, hogy a lináris analízis használata megfelelő feltételezés volt.

Ennél az egyszerű példánál mindenki el tudja végezni kézzel is az elemre vonatkozó feszültség kiszámítását, mely megegyezik a program által meghatározottal. Esetleges probléma abból adódhat, hogy rosszul visszük be a csomópontok koordinátáit, vagy rosszul adjuk meg az terhelő erő nagyságát.

Megjegyzés: A kapott eredmények egy file-ba írva is megjelennek a rendszeren, a modellhez kapcsolódó .lis file-ban.

Az egy jó gyakorlat, hogy először az elmozdulásmezőt elemezzük. Ugyanis arról előbb el lehet dönteni, hogy a valóságos állapotoknak megfelelő-e. Ezért javasoljuk előbb mindig az elmozdulásmező kirajzolását, illetve megvizsgálását, mielőtt a feszültségképpel kapcsolatban hoznánk elhamarkodott döntéseket. Természetesen itt minden pontnak más-más lesz az elmozdulása. Azonban, hogy hol van a megfogás, illetve hol volt legnagyobb a szabadság az könnyen látható ha kirajzoltatjuk az elmozdulásmezőt az elemre vonatkozóan.

A Visualiser-hez kapcsolódó ikoncsoportok

A felső csoport, különböző jellemzők kiválasztását segíti, az alsó csoport pedig a megjelenítést szabályozza. Ennek megfelelően a egyes ikongyűkben található parancsok a következők.

```
- Create Display..., Save Template..., Apply Template..., Copy Display
 Settings
- Select Results..., Manage Result Collections...
- Current Display..., Display Settings..., Delete Display
- Previous, Previous All
- Color Bar
- Next, Next All
- Undeformed, Deformed, Deformed_Undeformed, Derformed/Undeformed
 Options...
- Contour, Element, Arrow, No Results, Element Options..., Arrow
 Options...
- Free Face, Volume, Cutting Plane Setup, Cutting Plane
- Iso-Cursor..., Two Color Cursor..., Criteria Cursor...
- Top, Bottom, Top_Bottom, Shell Layer Options...
- Header..., Text..., Display Quality...
- Animation
- Groups..., Display Groups, Display All
- AutoDisplay On, AutoDisplay Off, Redisplay
- Zoom All
- Top View, Bottom View
- Isometric View, Eye Direction
- One Viewport, Two Viewport, Three Viewport, Four Viewport
- Front View, Back View
- Left View, Right View
- Print..., Movie...
```

Az eredményeket természetesen ki lehet íratni a képernyőre, vagy egy tetszőleges file-ba is. Ehhez nyissuk meg a *Simulation/Post Processing* alkal-mazást. Válasszuk az első ikon csoportból a harmadik sor utolsó gyűjtőjét.

VEM alapjai	A súgó rendszerről
Tartalom Tárgymutató	$\Leftrightarrow \Rightarrow \triangleleft 239 \triangleright$

Itt pedig nyissuk meg az Options... dialógus ablakot. Itt lehet kiválasztani, hogy milyen jellemzőt hová szeretnénk kiíratni, ezután még meg ki kell választani, hogy mely elemnek a jellemzőire vagyok kiváncsi. A képernyőre való kiíratás azt jelenti, hogy az eredményeket a Listaablak fogja tartalmazni, melyet a kiíratás után tetszőlegesen át lehet böngészni.

7.10. A súgó rendszerről

Az I-DEAS rendszerről készült dokumentáció csak elektronikus formában érhető el. Természetesen a súgó (Help) rendszer nyelvezete angol, azonban már számtalan modulhoz, van elérhető magyar fordítás is. Ez elsősorban a *Master Modeler* alkalmazásra igaz. A súgó rendszer HTML-ben készült, Java, illetve JavaScript támogatásával. Ennek bemutatására most nem térünk ki, mivel használata más szoftverek esetében megszokott módon történik. Tartalmaz a különböző modulokhoz tartozó általános ismertetők mellett, keresési lehetőséget. Mellyel kapcsolatban talán azt megemlíteném, hogy figyelni kell arra, hogy pontosan milyen modult használunk, és ennek megfelelően állítsuk be a szűkítési opciókat.

A szoftver minden moduljához tartozik nagyon jó *Tutorial* – vagy tanpélda –, amelyek végigtekintése nagyon hasznos lehet a szoftver megismerése céljából. A *Master Modeler*-hez kapcsolódóan találhatunk magyarra fordított anyagokat is. A magyar nyelvű tanítópéldák elérése az I-DEAS magyarországi forgalmazójának honlapjáról lehetséges. Az internet lap címe:

http://www.i-deas.hu

Tárgymutató

abszolút minimum 41 adott elmozdulás 77, 120, 129, 130 al- és főcsomópontok 132, 133 alakváltozási energia 38, 53, 62, 75, 89, 90, 120, 125, 144, 146, 160, 162 alakváltozási tenzormező 31, 32, 35, 73, 89–91, 116, 208 alakváltozási vektor 99–101, 155 alsó iteráció 173, 176 alszerkezettechnika 127 A mátrix 215 amplitudó 140 analitikus 121 anyagegyenlet 33, 38, 61, 112 approximációs mátrix 64, 73 arányos csillapítás 189 ÁSF 91, 101 átmeneti elemek 118 autonom 138, 157 Bernoulli 45, 46, 60, 61 bilineáris 28, 30, 93, 201 Bubnov-Galjorkin 10, 143 C⁰ osztályú 24, 117, 154 C¹ osztályú 117 csillapítási mátrix 155 csillapítás nélküli 157, 164, 182 csillapított gerjesztett 161 csomóponti elmozdulás 56-59, 72-74, 76, 77, 82, 83, 201 csomóponti elmozdulásvektor 155 csomóponti redukált terhelés 58, 60, 76 csomóponti terhelési vektor 157

D'Alambert-elv 140 determináns 23, 96, 164, 169, 173 diadikus szorzás 18–20, 34 diagonál mátrix 21 differencia-módszer 193 dinamikai merevség 182 dinamikai peremfeltétel 34, 35, 40, 44, 46, 51, 63, 143, 147, 148, 226, 236 direkt eljárás 80 Dunkeley 173 egyenletrendszer 9, 11, 22, 23, 35–37, 42, 45, 47, 48, 59, 60, 72, 78, 80, 82, 83, 85-87, 124, 129, 130, 134, 136, 137, 164, 165, 169, 185, 191, 194, 203, 206, 209, 223 egyensúlyi egyenlet 33, 40, 51, 130 egyváltozós feladat 43, 53, 60 elemek illesztése 75 élerő 113 elfajuló mátrix 75 eljárás stabilitása 177, 192, 196 elmozdulásmező 10, 31, 32, 35–38, 40, 41, 50, 51, 53, 56, 57, 59, 63, 66, 72, 73, 75, 84, 85, 89, 96, 109, 110, 117, 118, 123, 238 élnyomaték 113, 114 eltolás 176, 177, 207 explicit-módszer 194 fajlagos hőtágulási együttható 41, 67

felső iteráció 175 ferdehatásvonalú támasz 134

Tartalom | Tárgymutató

 $\frac{\text{TÁRGYMUTATÓ}}{\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 241}$

feszültségi hipotézis 60, 110 feszültségi tenzor 20, 32, 34, 89, 91, 138, 140, 208 feszültségi tenzormező 31, 32, 35, 51 feszültségi vektor 73, 123, 154 fő koordináták 166–168, 170, 183, 187 Fourier-féle sor 139 funkcionál 26–28, 31

Gauss-féle koordináta 104 Gauss-féle súlyfaktor 104 Gauss-Osztogradszkij 144 geometriai 16, 33, 60, 89, 93, 98, 117, 131, 217, 226, 227, 230, 234 geometriai hipotézis 110 geometriai peremfeltétel 34 gerjesztett rendszer 7, 157 gerjesztett rezgés 138, 182 globális 66, 67, 93, 99, 102, 103, 135 Gramm-Smidt 171

gyenge megoldás 29

h-verziójú 12, 121, 122 Hamilton-féle variációs elv 146 harmónikus rezgés 139 háromcsomópontú elem 70, 98 hatcsomópontú elem 98 Hermite-féle polinom 85 hibaanalízis 120 hibabecslő összefüggés 122 hiba norma 120, 123, 124 hőhatás 67, 68, 74, 201, 207 hőmérséklet 67, 68, 86, 182 Hooke-törvény 33, 57, 69, 74 hp-verziójú 12, 121, 122 húzott rúdelem 69

I-DEAS 7, 10, 213, 214

illesztési feltétel 51, 53, 63, 76, 131, 143, 147 implicit-módszer 196 intelligens szerkezetek 7 iterációs eljárás 80 ívhossz 102 izoparametrikus elem 109

Jacobi-mátrix 96, 100, 108

karakterisztikus polinom 164 keresztmetszet 45, 46, 57, 60, 61, 80, 84, 136, 146, 148, 200 kétszeres skaláris szorzás 19, 33, 34 kezdeti fázis 140 kezdeti feltétel 24, 143, 168, 187, 190, 194 kezdeti feszültség 40, 74, 154 kezdeti hézag 131 kezdeti peremérték 8 kezdeti peremérték feladat 23 kinematikai hipotézis 60 kinematikai illesztési feltétel 50, 134, 140, 147 kinematikailag lehetséges 34 kinematikai peremfeltétel 34, 73, 75, 82, 137, 236 Kirchhoff-féle hipotézis 116 kompatibilis 72 kompatibilitási egyenlet 35 koordinátafüggvények 53, 56, 57, 60 Krülov 150 külső erők munkája 38, 58, 115, 146

Lagrange 37, 54, 70, 117, 121 Legendre 121 Lehr-féle csillapítás 189 lemezelem 110 logaritmikus dekrementum 162 lokális 56, 57, 73, 104 lokális approximáció 11, 53, 56

TÁRGYMUTATÓ

Tartalom | Tárgymutató

 $\Leftarrow \Rightarrow \triangleleft 242 \triangleright$

224, 226, 230, 237 mátrix algebra 7 mátrix inverze 100, 128, 184 merevségi mátrix 58-60, 65-68, 72, 75-78, 82, 101, 117, 121, 127-130, 132, 136, 155 mezőegyenlet 36, 40, 49, 62, 63 mező variációja 37 modellezési kérdések 127 mozgásegyenlet 147-149, 153, 156, 157, 161, 163, 164, 167, 182, 185, 186, 188, 189, 198, 203, 206, 211 mozgásegyenlet közvetlen integrálása 192

Navier 36 négycsomópontú elem 93 nem harmónikusan gerjesztett 186 Newmark-féle módszer 196 numerikus integrálás 101

nyolccsomópontú elem 96

ortogonalitási tétel 165

p-verziójú 10, 121, 122 partikuláris megoldás 64, 84 peremfeltétel 23, 24, 27, 29, 62 periódikus szerkezet 137 piezoelektromos hatások 207 potenciális energia 37-43, 45, 47, 48, 50, 51, 56, 63, 65, 68, 72, 74, 75, 77, 82, 101, 115, 117, 120, 127, 129, 130 pótlólagos állandók 64, 66, 69 pozitív definit 23 pozitív szemidefinit 23

mátrix 21–23, 57, 65, 74, 78–80, 105, Rayleigh-féle hányados 166 Rayleigh-féle iteráció 170 redukált csomóponti 66-68, 101, 102, 104, 128, 133 redukált terhelési vektor 58, 65, 75, 101 Reissner-Mindlin 110, 115–117 rendszer merevségi mátrixa 177 rezgés amplitudója 139, 140 rezgés fázisszöge 139, 140 Ritz 10, 41, 53, 56, 57, 60

> SA 88, 101 sajátérték 164–167, 177 sajátvektor 164, 165, 167, 171, 174 sávszélesség 78, 137 SF 89, 91 síkalakváltozás 88 síkbeli elemek 93 skaláris szorzás 16–18 stacionaritási feltétel 40 statikailag lehetséges 35 Sturm-féle sorozat 177 sűrítési paraméter 125

szabad csillapításos 157 szabad rendszer 157 szabad rezgés 164 szakadás 131, 132 szalagszerkezetű 53,78 száraz súrlódás 158, 159 szinguláris 121

tengelyszimmetrikus 91 tenzorszámítás 7, 16, 31, 33 térbeli elemek 117 több test 51 tömegmátrix 155, 156 transzformációs mátrix 100

Rayleigh 10

Tartalom | Tárgymutató

TÁRGYMUTATÓ

 $\iff \ \ \, \triangleleft \ 243 \ \, \triangleright$

variációs egyenlet 31, 41, 44, 51, 61, 63, 85, 185 variációs elv 37, 50, 51, 77, 117 variálás 27 vektor iteráció 173 veszteségtényező 160, 162 viszkózus 154, 160, 162 visszacsatolás 203, 204