Értékünk az ember
Humánerőforrás- fejlesztési Operatív Program

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM, GYŐR

MISKOLCI EGYETEM

VÉGESELEM-MÓDSZER ALAPJAI

Páczelt István és Baksa Attila
ME, Mechanikai Tanszék

Szabó Tamás
SZE, Gépszerkezettan
és Mechanika Tanszék

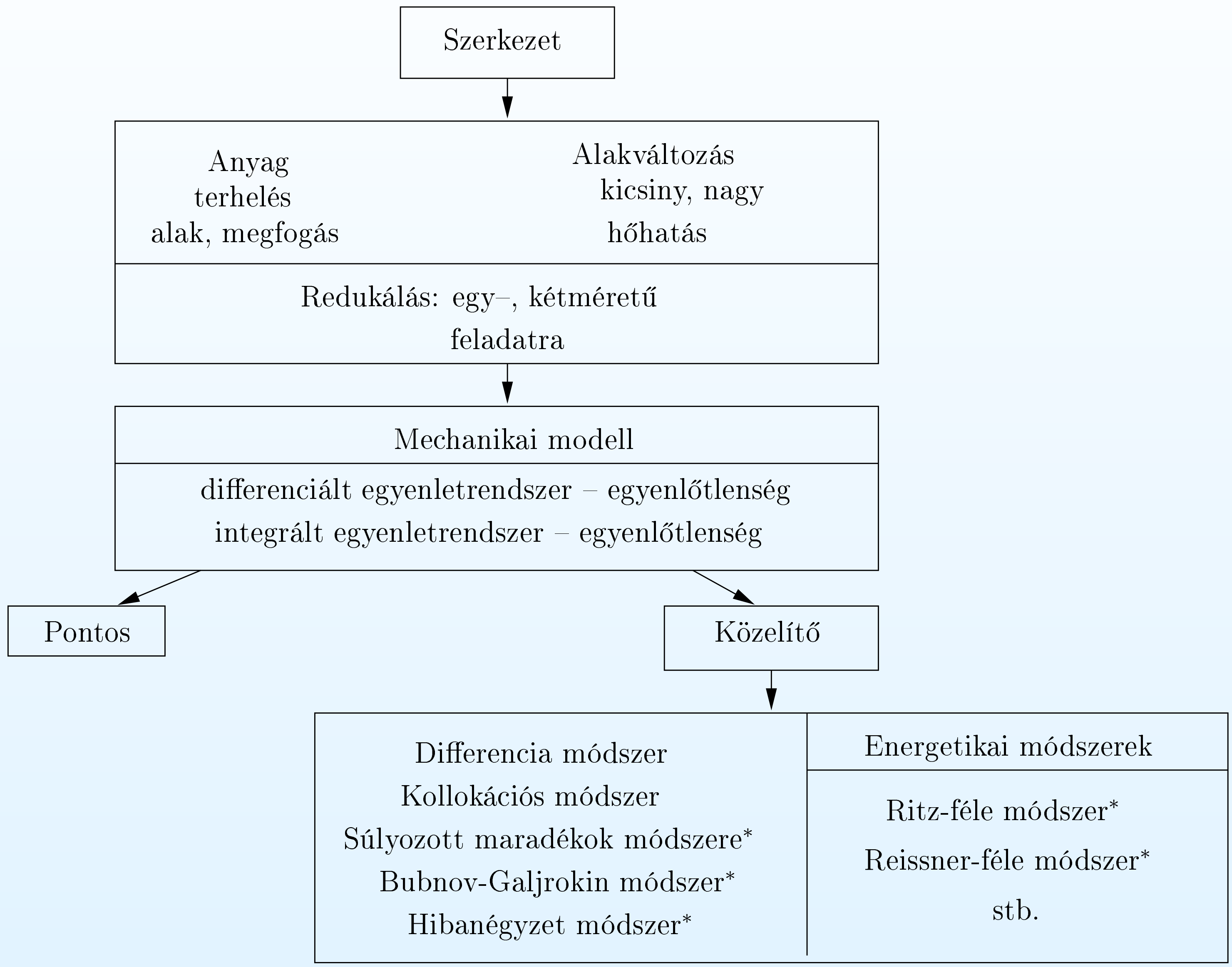
ⓒ Prof. Dr. Páczelt István, 2007.

Európa itt épül
Európa Terv

Készült a HEFOP 3.3.1-P.-2004-09-0102/1.0 pályázat támogatásával

Bevezetés

A módszerek


Szerkezet
Anyag
terhelés
alak, megfogás
Alakváltozás
kicsiny, nagy
hőhatás
Redukálás: egy–, kétméretű feladatra
Mechanikai modell
differenciált egyenletrendszer – egyenlőtlenség
integrált egyenletrendszer – egyenlőtlenség
Pontos
Közelítő
Differencia módszer
Kollokációs módszer
Súlyozott maradékok módszere*
Bubnov-Galjrokin módszer*
Hibanégyzet módszer*
Energetikai módszerek
Ritz-féle módszer*
Reissner-féle módszer*
stb.

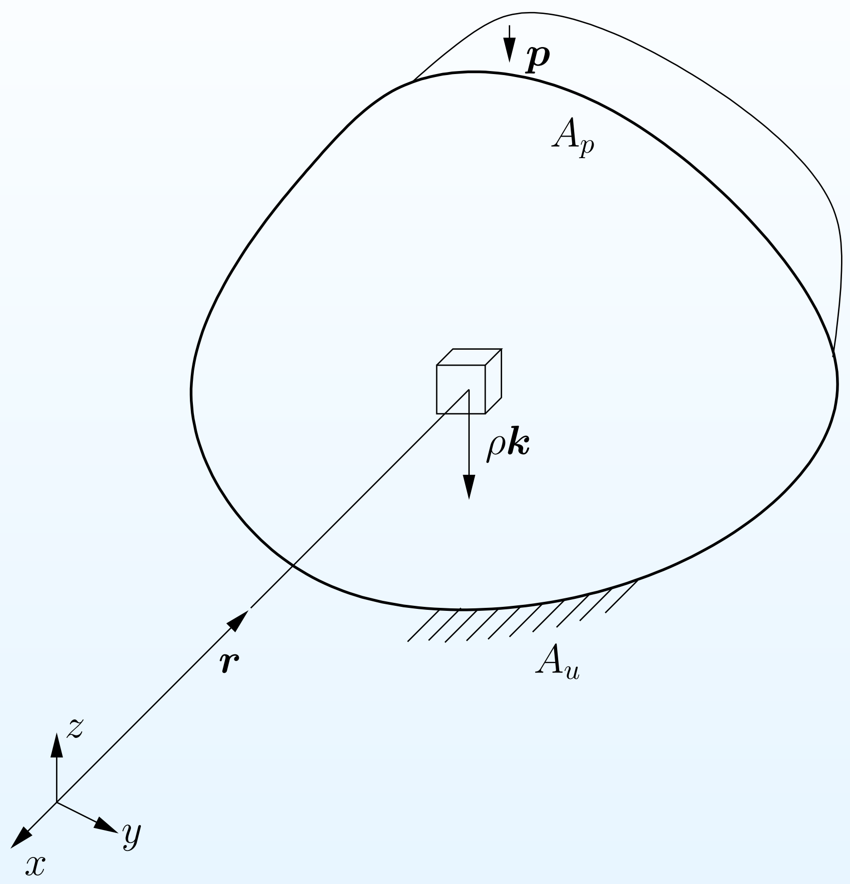
A tárgy célja

A végeselem-módszer oktatás célja a műszaki mechanika alaptantárgyaira és a numerikus módszerek ismeretére alapozva, illetve építve olyan ismeret elsajátítása, amely az érdeklődőt képessé teszi

1. a módszer mechanikai alapjainak elsajátítására,
2. különféle elemek előállítására,
3. a modellezési kérdések behatóbb elemzésére,
4. a nagyméretű rendszerek numerikus kezelésére,
5. a kapott eredmények szakszerű értékelése,
6. végeselem-programrendszerek használatára.

1. Fogalmak

Mechanikai rendszer



$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z.$$

A mechanikai rendszer

Elmozdulásmező $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = u\boldsymbol{e}_x + v\boldsymbol{e}_y + w\boldsymbol{e}_z$

Alakváltozási tenzormező $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{r})$

Feszültségi tenzormező: $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{T}^T(\boldsymbol{r})$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \ \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \ , \ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

A mechanikai rendszer

Geometriai egyenlet

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u} \circ \nabla + \nabla \circ \boldsymbol{u})$$

Egyensúlyi egyenlet

$$\boldsymbol{T} \cdot \nabla + \rho\, \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$$

Anyagegyenlet

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{D} \cdot\cdot \boldsymbol{A}$$

mely homogén, izotróp anyag esetén

$$\boldsymbol{T} = 2G\left(\boldsymbol{A} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \boldsymbol{I}\right)$$

KPF:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 \qquad \boldsymbol{r} \in A_u$$

DPF:

$$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{p} \qquad \boldsymbol{r} \in A_p$$

Kinematikailag lehetséges

Definíció 1.

Kinematikailag lehetséges (megengedett) elmozdulásmezőnek nevezünk minden olyan $\boldsymbol{u}^*$ mezőt, amely folytonos, véges deriváltakkal rendelkezik és kielégíti a KPF-t, azaz

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}_0 \qquad \boldsymbol{r} \in A_u$$

$$\boldsymbol{A}^* = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}^* \circ \nabla + \nabla \circ \boldsymbol{u}^*) \qquad \boldsymbol{r} \in V$$

Statikailag lehetséges

Definíció 2.

Statikailag lehetséges feszültségmezőnek nevezünk minden olyan $\bar{\boldsymbol{T}}$ tenzormezőt, mely kielégíti az egyensúlyi egyenletet és a dinamikai peremfeltételt, azaz

$$\bar{\boldsymbol{T}} \cdot \nabla + \rho\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{r} \in V$$

$$\bar{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{p} \qquad \boldsymbol{r} \in A_p$$

Funkcionál

Funkcionál alatt az Ω értelmezési tartományon értelmezett függvénytől, annak különböző rendű deriváltjaitól függő skalár mennyiséget értünk, azaz

$$F = F\left(\boldsymbol{r},\, \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{u}',\, \ldots\right)$$

ami egyváltozós esetben

$$F = F\left(x,\;\; u(x),\;\; \frac{du}{dx}\cdots\right) = F(x,\;\, u,\;\, u'\cdots)$$

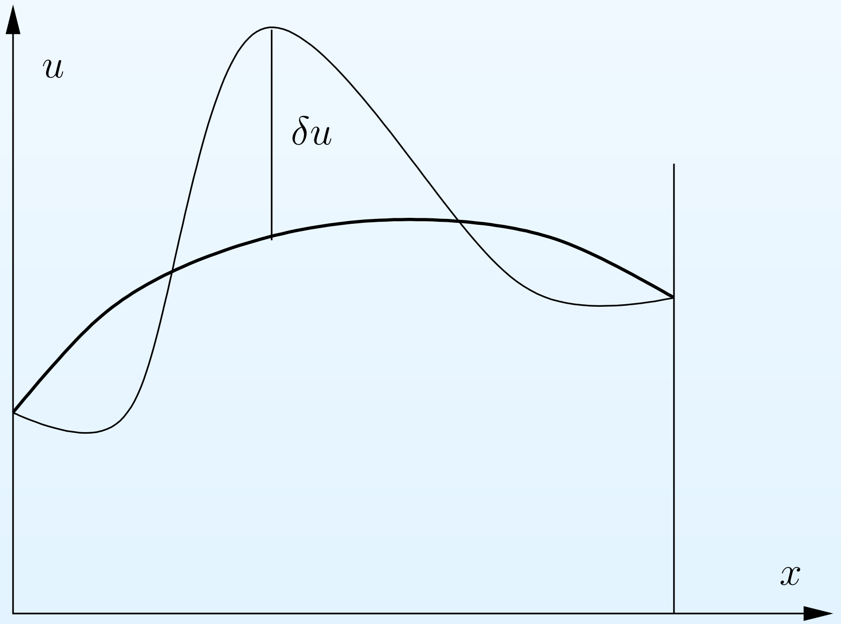
Például

$$F(x,u) = \int\limits_0^1 a\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \int\limits_0^1 updx$$

A fizikai feladathoz rendelten az F-ben szereplő $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ függvény az ismeretlen, ennek meghatározása a cél.

Variálás

A függvény variációja alatt, annak kismértékű megváltoztatását értjük. Általában a megváltoztatott függvénytől meg szokás követelni a folytonosságot és deriválhatóságot, illetve feladattól függően bizonyos peremfeltételek kielégítését is.
A variálás jeleként $\delta-$t szokás használni. Így u variációja alatt δu -t értjük.



© 2007. Páczelt-Szabó-Baksa: VEM alapjai

Variálás

A funkcionál első variációját $F = F\,(x, u, u')$ esetén

$$\delta F = \frac{\partial\, F}{\partial\, u}\delta\, u' + \frac{\partial\, F}{\partial\, u'}\delta\, u'$$

jelenti, míg az F teljes differenciálja

$$dF = \frac{\partial\, F}{\partial\, x}d\,x + \frac{\partial\, F}{\partial\, u}d\,u' + \frac{\partial\, F}{\partial\, u'}d\,u'$$

Állnak az alábbi összefüggések

$$\delta\,(F_1 + F_2) = \delta\,F_1 + \delta\,F_2$$

$$\delta\,(F_1 \cdot F_2) = \delta\,F_1 \cdot F_2 + F_1 \cdot \delta\,F_2$$

$$\delta F^n = n\; F^{n-1}\;\delta F$$

$$\delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \frac{\delta\,F_1 \cdot F_2 - F_1 \cdot \delta\,F_2}{(F_2)^2}$$

Variálás

Az u függvény megváltoztatását egy α állandó és $v(x)$ függvényen keresztül kifejezve $\delta u = \alpha v$, ahol α paraméter, amely a különböző variációknál más és más, $v(x)$ egy másik függvény. Az u függvény variációjának deriváltja

$$\frac{d}{dx}(\delta u) = \frac{d}{dx}(\alpha v) = \alpha \frac{dv}{dx} = \alpha v' = \delta u' = \delta \left(\frac{du}{dx} \right)$$

vagyis a deriválás és a variálás sorrendje felcserélhető. Integrálásnál pedig áll

$$\delta \int\limits_{\Omega} u(x) dx = \int\limits_{\Omega} \delta u(x) dx.$$

2. Variációs elvek

Variációs elvek előnye

1. A vizsgált variációs elvhez kapcsolódó funkcionál nagyon gyakran fizikai tartalommal bír.
2. A funkcionál alacsonyabb rendű deriváltakat tartalmaz mint ami az eredeti feladat differenciál-egyenletrendszerében szerepel.
3. Variációs elvek révén bonyolult peremfeltételek, illesztési feltételek, mezőegyenletek vezethetők le, ill. igazolni lehet a megoldás létezését és egyértékűségét.
4. A számítás közelítésének jóságára a funkcionálban szereplő mezők ,,*a priori*" ki nem elégített perem és illesztési feltételeinek kielégülési mértékén keresztül kapunk szemléletes képet. A közelítés egyetlen skalárral, a funkcionál értékével minősíthető.
5. A variációs elvekre alapozva numerikusan stabil és konvergens eljárások származtathatók.
6. A közelítő mezők alkalmas megválasztásával jól kondicionáltságú algebrai egyenletrendszernyerhető, amelynek számítógépes megoldására jól ismert hatékony eljárások használhatók.

Jelölések

Legyen az elmozdulásmező kinematikailag lehetséges. Ekkor az elmozdulás mező variációja (virtuális elmozdulás) alatt

$$\delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{u},$$

ahol $\boldsymbol{u}$ az egzakt elmozdulás. Nyilvánvalóan teljesül: $\delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, ha $\boldsymbol{r} \in A_u$.
Hasonlóan értelmezhető az alakváltozás variációja:

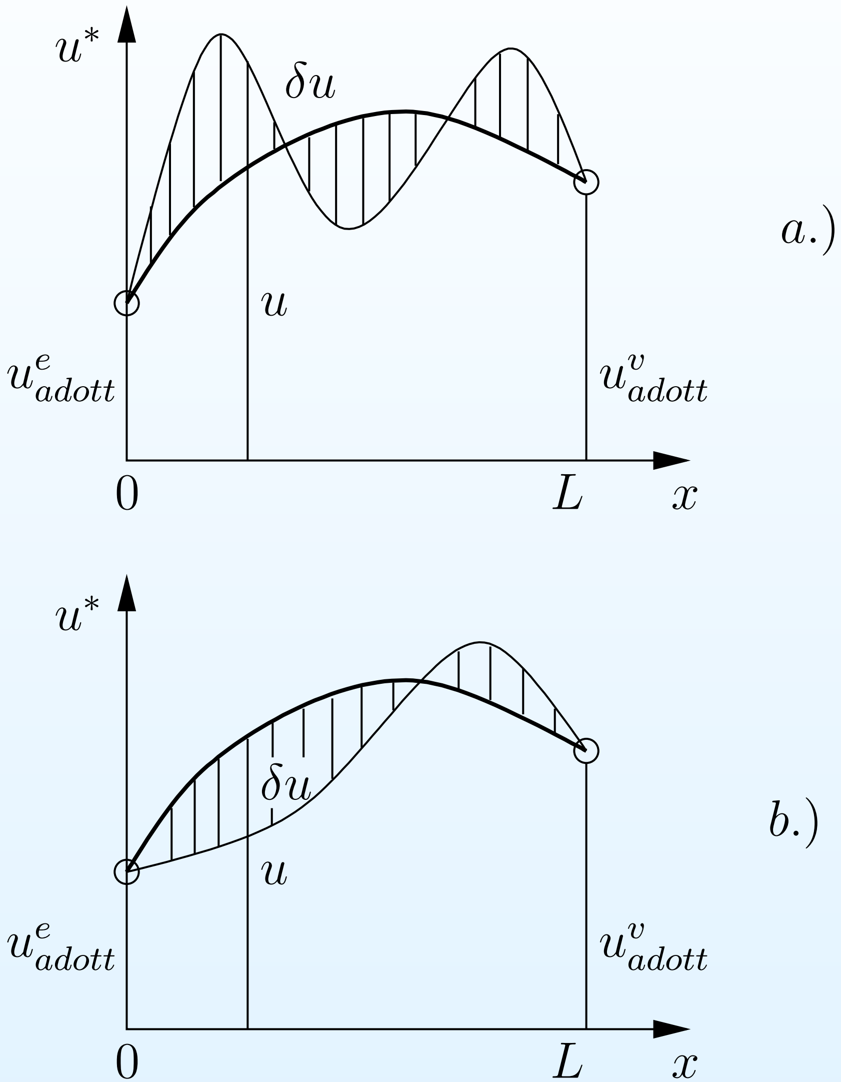
$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}^*) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}) \circ \nabla + \nabla \circ (\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u})\right] =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{u} \circ \nabla + \nabla \circ \boldsymbol{u})}_{\boldsymbol{A}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\delta\boldsymbol{u} \circ \nabla + \nabla \circ \delta\boldsymbol{u})}_{\delta\boldsymbol{A}}$$

azaz

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A} + \delta\boldsymbol{A}$$

Elmozdulásmező variációja



Teljes potenciális energia

A teljes potenciális energia rugalmas anyagú testre

$$\Pi_p = \Pi_p(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{A}\cdot\cdot\boldsymbol{D}\cdot\cdot\boldsymbol{A}\,dV - \int_V \boldsymbol{u}\cdot\rho\boldsymbol{k}\,dV - \int_{A_p} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}\,dA$$

mely kifejezésében az első tag az alakváltozási energia

$$\frac{1}{2}\int \boldsymbol{A}\cdot\cdot\boldsymbol{D}\cdot\cdot\boldsymbol{A}\,dV = U_{alakv}.$$

míg a második a külső erők munkája

$$W_k = \int_{A_p} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}\,dA + \int_V \boldsymbol{u}\cdot\rho\boldsymbol{k}\,dV$$

$\min \Pi_p$ **elv**

$$\Pi_p\,(\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\int\limits_V (\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})\cdot\cdot\boldsymbol{D}\cdot\cdot(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})\ dV -$$

$$-\int\limits_V (\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u})\cdot\rho\,\boldsymbol{k}\,dV - \int\limits_{A_p} (\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{p}\,dA =$$

$$\underbrace{= \frac{1}{2}\int\limits_V \boldsymbol{A}\cdot\cdot\overbrace{\boldsymbol{D}\cdot\cdot\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{T}}dV - \int\limits_V \boldsymbol{u}\cdot\rho\,\boldsymbol{k}\,dV - \int\limits_{A_p} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}\,dA +}_{\Pi_p(\boldsymbol{u})\text{: egzakt értékhez tartozó}}$$

$$\underbrace{+\int\limits_V \delta\boldsymbol{A}\cdot\cdot\overbrace{\boldsymbol{D}\cdot\cdot\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{T}}\,dV - \int\limits_V \delta\boldsymbol{u}\cdot\rho\,\boldsymbol{k}\,dV - \int\limits_{A_p} \delta\boldsymbol{u}\cdot p\,dA +}_{\delta\Pi_p\text{: a potenciális energia első variációja}}$$

$$\underbrace{+\frac{1}{2}\int\limits_V \delta\boldsymbol{A}\cdot\cdot\overbrace{\boldsymbol{D}\cdot\cdot\delta\boldsymbol{A}}^{\delta\boldsymbol{T}}\,dV}_{\delta^2\Pi_p\geq 0}$$

$\min \Pi_p$ elv

$$\Pi_p(\boldsymbol{u}^*) = \Pi_p(\boldsymbol{u} + \delta\,\boldsymbol{u}) = \Pi_p(\boldsymbol{u}) + \delta\,\Pi_p + \delta^{\,2}\Pi_p$$

ahol

$$\delta^{\,2}\Pi_p = \frac{1}{2}\int\limits_V \delta\boldsymbol{A} \cdot \cdot\, \boldsymbol{D} \cdot \cdot\, \delta\boldsymbol{A}\; dV \geq 0$$

hisz ez utóbbi kifejezés alakváltozási energiát fejez ki. Az első variáció zérus értéke $\delta\Pi_p = 0$ a potenciális energia stacionér pontját jelöli ki, amelyben a potenciális energia abszolút minimummal rendelkezik. A kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőnél a potenciális energia mindig nagyobb, mint a tényleges mezőhöz tartozóé.

$$\Pi_p\left(\boldsymbol{u}^*\right) \geq \Pi_p\left(\boldsymbol{u}\right)$$

$\min \Pi_p$ elv

A $\delta \Pi_p = 0$ feltétel a $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{D} \cdot \cdot \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u})$ jelöléssel

$$\delta \Pi_p = \int\limits_V \delta \boldsymbol{A} \cdot \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})\, dV - \int\limits_V \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho\, \boldsymbol{k} dV - \int\limits_{A_p} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p}\, dA = 0$$

Az első integrál átalakításával

$$\underline{\int\limits_V (\delta \boldsymbol{u} \circ \nabla) \cdot \cdot \boldsymbol{T}\, dV} = \int\limits_V (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \nabla)\, dV - \int\limits_V \delta \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \nabla)\, dV$$

majd a Gauss-Osztrogradszkij tétel felhasználásával

$$-\int\limits_V \delta \boldsymbol{u} \cdot [\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) \cdot \nabla + \rho\, \boldsymbol{k}]\, dV + \int\limits_{A_p} \delta \boldsymbol{u} \cdot [\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}]\, dA = 0$$

írható, mivel $\delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ az A_u felületen. Mit is mond ez az egyenlet?

$\min \Pi_p$ elv

Tétel:
A teljes potenciális energia minimumát meghatározó $\delta \Pi_p = 0$ *stacionaritási feltétel által kijelölt pontban olyan elmozdulásmező alakul ki a testben, amely az eredetileg ,,a priori" előírt kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőre kirótt feltételeket betartva, kielégíti az előzetesen nem biztosított egyensúlyi egyenletet, mint mezőegyenletet és a dinamikai peremfeltételt,vagyis szolgáltatja a rugalmasságtani feladat egzakt megoldását.*

A tételből következik, hogy közelítő számítás felépítésekor miután $\boldsymbol{u}$ helyett $\boldsymbol{u}^*$-ot használunk, az egyensúlyi egyenlet és a DPF már nem fog pontosan kielégülni.

Ritz-féle módszer

A tényleges mezőnél a potenciális energia abszolút minimummal rendelkezik. A közelítést speciális hatványfüggvények alkotta sorral képzik. Így az $\boldsymbol{u}^*$ mezőt az alábbi módon közelítjük:

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}_0^*(\boldsymbol{r}) + \sum_{i=1}^{N} \left(c_i \varphi_i(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{e}_x + c_{i+N} \psi_i(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{e}_y + c_{i+2N} \chi_i(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{e}_z \right)$$

ahol $\boldsymbol{u}_0^*(\boldsymbol{r})$ kinetikai peremfeltételt kielégítő mező $\boldsymbol{u}_0^*(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{r})$ $\boldsymbol{r} \in A_u$, $\varphi_i(\boldsymbol{r})$, $\psi_i(\boldsymbol{r})$, $\chi_i(\boldsymbol{r})$ általunk felvett közelítő függvények, amelyek eleget tesznek a $\varphi_i(\boldsymbol{r}) = \psi_i(\boldsymbol{r}) = \chi_i(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \boldsymbol{r} \in A_u$ homogén peremfeltételnek, folytonosak, deriválhatók, N a közelítő sorban felvett tagok száma, $c_i \quad (i = 1, \dots, 3N)$ ismeretlen állandók, paraméterek.

Ritz-féle módszer

Az $\boldsymbol{u}^*$ mező variációja

$$\delta \boldsymbol{u}^* = \sum_{i=1}^{N} (\delta c_i \varphi_i(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_x + \delta c_{i+N}\psi_i(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_y + \delta c_{i+2N}\chi_i(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_z)$$

A potenciális energia az ismeretlen paraméterek függvényeként áll elő

$$\Pi_p = \Pi_p(c_1, ..., c_{3N})$$

$$\delta \Pi_p = 0 = \delta c_1 \frac{\partial \Pi_p}{\partial c_1} + \ldots + \delta c_i \frac{\partial \Pi_p}{\partial c_i} + \ldots + \delta c_{3N} \frac{\partial \Pi_p}{\partial c_{3N}}$$

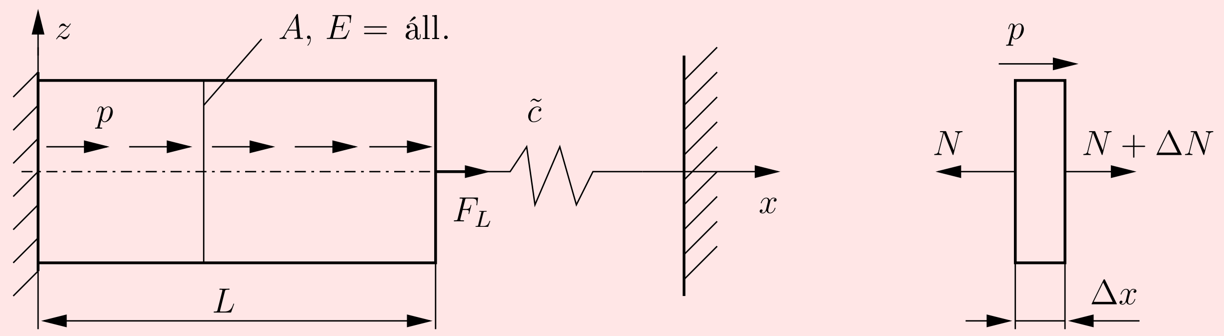
stacionaritási (minimum) feltételből

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial c_i} = 0 \qquad i = 1, \ldots, 3N$$

algebrai egyenletrendszert nyerjük a c_i állandók meghatározására.

Példa: Húzott-rúd

2.1. feladat: A változó $A = A(x)$ keresztmetszetű rúd hossztengelye mentén megoszló terhelés intenzitása legyen p. A rúd $x = 0$ helyen megfogott, míg az $x = L$ végén F_L koncentrált erő hat, továbbá $\tilde{c}$ állandójú rugón keresztül csatlakozik a talajhoz.



Megoldás: A teljes potenciális energia

$$\Pi_p = \underbrace{\frac{1}{2}\int_V \sigma_x \, \varepsilon_x \, dV}_{\text{rúd belső alakváltozási energiája}} \underbrace{- \int_L u \, p \, dx - u_L \, F_L}_{\text{külső terhelés munkája}} + \underbrace{\frac{1}{2}\tilde{c} \, (u_L)^2}_{\text{rúgóenergia}} \qquad \text{(2.1-a)}$$

Példa: Húzott-rúd

A rudaknál használt hipotézis szerint a keresztmetszetben $\sigma_x = E\varepsilon_x =$ áll. feszültség keletkezik, ahol $\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \equiv u'$, E Young féle rugalmassági modulus. Így

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\int_L AE(u')^2 dx - \int_L pu\,dx - F_L\,u_L + \frac{1}{2}\tilde{c}u_L^2 \tag{2.1-b}$$

A variációszámítás szabálya szerint

$$\delta u^2 = 2u \cdot \delta u \tag{2.1-c}$$

és így

$$\delta\Pi_p = \int_L AEu'\delta u'\,dx - \int_L \delta u\,p\,dx - \delta u_L F_L + \tilde{c}u_L\delta u_L = 0$$

Az első integrált a szorzatintegrálási szabály szerint átalakítva

$$\delta\Pi_p = AEu'\delta u\Big|_o^L - \int_L [(AEu')' + p]\delta u\,dx - \delta u_L(F_L - \tilde{c}u_L) = 0$$

$$\delta\,\Pi_p = \delta\,u_L \cdot [AEu'\,|_L - F_L + \tilde{c}u_L] - \int_L [(AEu')' + p]\,\delta\,u\,dx = 0 \tag{2.1-d}$$

variációs egyenlethez jutunk.

© 2007. Páczelt-Szabó-Baksa: VEM alapjai

Példa: Húzott-rúd

Az első tag eltűnéséből a

$$N_L \equiv (AEu)'_L = F_L - \tilde{c}u_L \qquad \text{(2.1-e)}$$

dinamikai peremfeltételt, míg az integrál eltűnéséből az

$$(AEu')' = -p, \qquad (N' = -p) \qquad \text{(2.1-f)}$$

egyensúlyi egyenletet nyertük. Ez utóbbit hagyományos úton is megkaphatjuk. Véve a rúd elemi részét, a reá ható tengelyirányú erők egyensúlyi feltételéből $dN + p\Delta x = 0$, illetve $N' = -p$ következik, ami egybeesik a $\delta\Pi_p = 0$ feltételnél kapottal.
Legyen $AE =$ áll. Közelítsük az u mezőt négyzetes hatvány függvényen keresztül.

$$u = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \qquad \text{(2.1-g)}$$

Mivel $x = 0$-nál $u = 0$, $c_0 = 0$ következik. A (2.1-g) alatti közelítéssel $u' = c_1 + 2c_2 x$, továbbá

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\int_L AE(c_1 + 2c_2 x)^2\, dx - \int p(c_1 x + c_2 x^2)\, dx -$$

$$- F_L(c_1 L + c_2 L^2) + \frac{1}{2}\tilde{c}(c_1 L + c_2 L^2)^2$$

illetve

Példa: Húzott-rúd

$$\delta\,\Pi_p = \int\limits_L AE(c_1 + 2c_2 x)(\delta\,c_1 + 2\delta\,c_2 x)\,dx - \int\limits_L p(\delta\,c_1 x + \delta\,c_2 x^2)\,dx -$$
$$- F_L(\delta\,c_1 L + \delta\,c_2 L^2) + \tilde{c}(c_1 L + c_2 L^2)(\delta\,c_1 L + \delta\,c_2 L^2)$$

Rendezve az egyenletet

$$\delta\,\Pi_p = 0 = \delta\,c_1 \left[\int\limits_L AE(c_1 + 2c_2 x)\,dx - \int\limits_L px\,dx - F_L \cdot L + \tilde{c}(c_1 L + c_2 L^2)L \right] +$$
$$+ \delta\,c_2 \left[\int\limits_L AE(c_1 + 2c_2 x)\,2x dx - \int\limits_L px^2\,dx - F_L \cdot L^2 + \tilde{c}(c_1 L + c_2 L^2)L^2 \right]$$

ami rövidebben

$$\delta\,\Pi_p = \delta\,c_1 \frac{\partial\,\Pi_p}{\partial\,c_1} + \delta\,c_2 \frac{\partial\,\Pi_p}{\partial\,c_2} = 0 \qquad \text{(2.1-h)}$$

alakban is felírható.

Példa: Húzott-rúd

Mivel $\delta c_i,\ (i=1,2)$ tetszőleges, $\partial\,\Pi_p/\partial\,c_i=0$ egyenleteket nyerjük. Ezek jelen esetben

$$\left\{\int\limits_L AE[1\,;2x]\,dx+[\tilde{c}L^2;\tilde{c}L^3]\right\}\left[\begin{array}{c}c_1\\c_2\end{array}\right]-\int\limits_L px\,dx-F_L\cdot L=0$$

$$\left\{\int\limits_L AE[2x\,;4x^2]\,dx+[\tilde{c}L^3;\tilde{c}L^4]\right\}\left[\begin{array}{c}c_1\\c_2\end{array}\right]-\int\limits_L px^2\,dx-F_L\cdot L^2=0$$

$p=$ áll. érték mellett a végső megoldandó egyenletrendszer

$$\left(AE\left[\begin{array}{cc}L & L^2\\L^2 & \frac{4}{3}L^3\end{array}\right]+\tilde{c}\left[\begin{array}{cc}L^2 & L^3\\L^3 & L^4\end{array}\right]\right)\left[\begin{array}{c}c_1\\c_2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}F_L L+p\frac{L^2}{2}\\F_L L^2+p\frac{L^3}{3}\end{array}\right] \qquad \text{(2.1-i)}$$

Példa: Húzott-rúd

Alesetek

1.
$$p = 0 \qquad \tilde{c} = 0 \;\; (\textit{húzott rúd esete}) \;\Rightarrow\; c_1 = \frac{F_L}{AE}, \qquad c_2 = 0$$

2.
$$p = p_0 = \text{áll.}, \quad F_L = 0, \quad \tilde{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{p_0}{AE} L, \quad c_2 = -\frac{p_0}{2AE}$$

3.
$$p = p_0 = \text{áll.}, \quad F_L = 0, \quad \tilde{c} = 0 \quad \textit{a megoldást az előző két eset}$$
$$\textit{szuperponálásából kapjuk} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{AE}\left(F_L + p_0 L\right), \quad c_2 = \frac{p_0}{2AE}$$

4.
$$p = 0, \quad AE = 0, \quad F_L \neq 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{F_L}{\tilde{c}}, \quad u_L = \frac{F_L}{\tilde{c}}$$

@@

Példa: Hajlított-nyírt tartó

2.2. feladat: Vizsgáljuk az xz síkban elhelyezkedő hajlított-nyírt tartót. A tartó keresztmetszetének főtengelyei essenek egybe az xz síkra merőleges y tengellyel, ill. a z tengellyel. A keresztmetszetek súlypontjain áthaladó tengely ílymódon az x tengelynek felel meg. A tartóra z tengely irányába p sűrűségű megoszlóterhelés, az $x = L$ keresztmetszetben F_L^z nyíróerő és M_L^Y hajlítónyomaték működik. Ezen terhelések hatására a tartó az xz síkban deformálódik. A tartó középvonalának elmozdulás koordinátája z irányában w_0.

Megoldás: A Bernoulli-féle hipotézis szerint a tartó keresztmetszete az alakváltozás után is merőleges marad a meggörbült középvonalra, a középvonal nem nyúlik meg. Ilymódon az xz koordinátájú P pont x irányú elmozdulása

$$u = -w_0' z \tag{2.2-a}$$

amiből az x irányú fajlagos nyúlás

$$\varepsilon = u' = -w_0'' z \tag{2.2-b}$$

és a keletkező normál feszültség

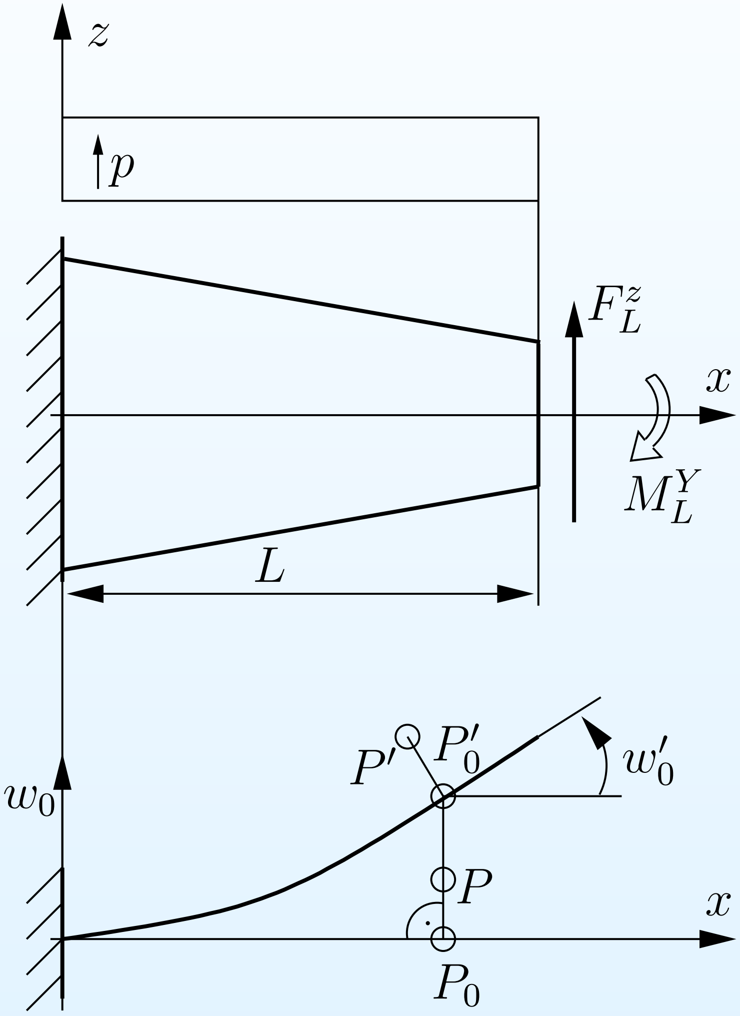
$$\sigma = E\varepsilon = -E w_o'' z \tag{2.2-c}$$

A teljes potenciális energia

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\int_V \sigma\varepsilon \, dV - \int_L p w_o \, dx - w_L F_L^z + w_{oL}' M_L^Y \tag{2.2-d}$$

ahol $w_{0L} = w_0(L), \quad w_{0L}' = w_0'(L)$.

Példa: Hajlított-nyírt tartó



Példa: Hajlított-nyírt tartó

A (2.2-b), (2.2-c) egyenletek behelyettesítésével, a keresztmetszetbeli integrálás elvégzésével

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\int_L I_y E (w_0'')^2\, dx - \int_L p w_0\, dx - w_{0L} F_L^z + w_{0L}' M_L^Y \tag{2.2-e}$$

A Π_p első variációját képezve, kapjuk azt, hogy

$$\delta\Pi_p = \int_L I_y E w_0'' \delta w_0'\, dx - \int_L p \delta w_0\, dx - \delta w_{0L} F_L^z + \delta w_{0L}' M_L^Y \tag{2.2-f}$$

A szorzatintegrálási szabály kétszeri alkalmazásával, a tagok rendezésével stacionér helyzetben

$$\begin{aligned}\delta\Pi_p = {} & [I_y E w_0''|_L + M_L^Y]\,\delta w_{0L}' - [(I_y E w_0'')'|_L + F_L^z]\,\delta w_{oL} + \\ & + \int_L [I_y E w_0'')' - p]\delta w_0\, dx = 0\end{aligned} \tag{2.2-g}$$

hisz az $x = 0-$nál lévő befalazás miatt $\delta w_0(0) = 0, \quad \delta w_0'(0) = 0$.

Példa: Hajlított-nyírt tartó

A variációk függetlenségéből adódóan egyrészt a dinamikai peremfeltételeket kapjuk meg:

$$M_L^Y = -I_y E w_0''{}_L \qquad \Rightarrow \qquad M_y = -I_y E w_0'' \tag{2.2-h}$$

$$F_L^z = -(I_y E w_0'')'_L \qquad \Rightarrow \qquad F^z = -T_z = -(I_y E w_0'')' \tag{2.2-i}$$

ahol T_z a nyíróerő, másrészt az

$$(I_y E w_o'')'' = p \tag{2.2-j}$$

egyensúlyi egyenlethez jutunk.
A (2.2-h) és (2.2-i) alatt egyúttal az M_y hajlítónyomatékra és T_z nyíróerőre is kapunk összefüggéseket. Prizmatikus tartónál $I_y =$ áll.
Az alábbiakban építsük fel a közelítő megoldást $F_L^z = M_L^Y = 0$ esetén.
A közelítőfüggvény

$$w_0 = \sum_{n=2}^{N} c_n x^n \quad \text{mivel} \quad w_0(0) = w'{}_0(0) = 0 \quad \text{kell legyen.} \tag{2.2-k}$$

Példa: Hajlított-nyírt tartó

Továbbá a lehajlás másodrendű deriváltja

$$w_0'' = \sum_{n=2}^{N} n\,(n-1)\,c_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{N} g_n\,(x)\,c_n = [g_2 \ldots g_N] \begin{bmatrix} c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \mathbf{g}^T \mathbf{c} \tag{2.2-l}$$

A w_0 és w_0''-nek (2.2-e)-be helyettesítésével a potenciális energia

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\,\mathbf{c}^T \underbrace{\int_L \begin{bmatrix} g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix} I_y E\,[g_2 \ldots g_N]\;dx}_{\mathbf{Q}}\;\mathbf{c} - \mathbf{c}^T \underbrace{\int_L \begin{bmatrix} x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} p\,dx}_{\mathbf{b}}$$

a $\mathbf{c}$ paraméterek függvényeként áll elő, vagyis

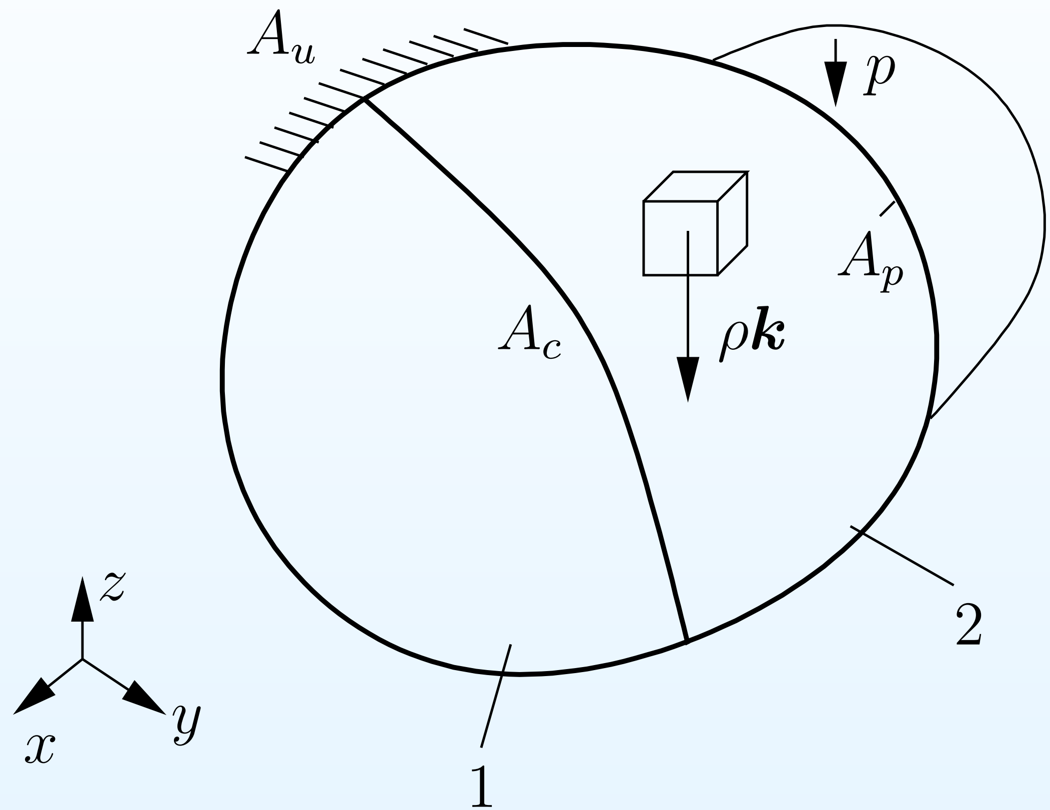
$$\Pi_p = \frac{1}{2}\mathbf{c}^T \mathbf{Q}\,\mathbf{c} - \mathbf{c}^T \mathbf{b} \tag{2.2-m}$$

ahonnan a minimumfeltételből a

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial\,\mathbf{c}} = \mathbf{0} = \mathbf{Q}\,\mathbf{c} - \mathbf{b} \tag{2.2-n}$$

algebrai egyenletrendszert nyerjük a $\mathbf{c}$ állandók meghatározására.
@@

Több testből álló rendszerre felírt $\min \Pi_p$ elv



Több testből álló rendszerre felírt $\min \Pi_p$ elv

Mindkét testre érvényesek a rugalmasságtan egyenletei, azaz

$$\boldsymbol{A}^e = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{u}^e \circ \nabla + \nabla \circ \boldsymbol{u}^e\right) \quad \boldsymbol{r} \in V^e$$

$$\boldsymbol{T}^e = \boldsymbol{D}^e \cdot\cdot \boldsymbol{A}^e \quad \boldsymbol{r} \in V^e$$

$$\boldsymbol{T}^e \cdot \nabla + \rho \boldsymbol{k}^e = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{r} \in V^e$$

mint mezőegyenlet, továbbá érvényesek a peremfeltételek

$$\boldsymbol{u}^e = \boldsymbol{u}_0 \quad \boldsymbol{r} \in A_u^e$$

$$\boldsymbol{T}^e \cdot \boldsymbol{u}^e = \boldsymbol{p}^e \quad \boldsymbol{r} \in A_p^e$$

Több testből álló rendszerre felírt $\min \Pi_p$ elv

A testek csatlakozó A_c^e közös felületén, az eddig nem ismert illesztési feltételek állnak fenn. Feltételezésünk értelmében a közös felületi pontok együtt mozognak, nem válnak el egymástól, azaz a testek között kétoldalú érintkezési feltételek állnak fenn. A felületen lévő feszültségek egyensúlyban vannak.
Ily módon a KIF (kinematikai illesztési) és a DIF (dinamikai illesztési) feltételek az alábbiak:

$$\boldsymbol{u}^1 = \boldsymbol{u}^2 \qquad \boldsymbol{r} \in A_c$$

$$\boldsymbol{T}^1 \cdot \boldsymbol{n}^1 = -\boldsymbol{T}^2 \cdot \boldsymbol{n}^2 \quad \boldsymbol{r} \in A_c$$

Itt $\boldsymbol{n}^1$ és $\boldsymbol{n}^2$ a testekből kifelé mutató normálvektorok.

Több testből álló rendszerre felírt $\min \Pi_p$ elv

A vizsgált rendszer teljes potenciális energiája a két testre külön-külön felírható potenciális energiák összegeként áll elő:

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^{2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{V^e} \boldsymbol{A} \cdot\cdot \boldsymbol{D} \cdot\cdot \boldsymbol{A} \, dV - \int_{V^e} \boldsymbol{u} \cdot \rho \boldsymbol{k} \, dV - \int_{A_p^e} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p} \, dA \right\}$$

A két testre vonatkozó variációs elv felépítéséhez induljunk ki a teljes potenciális energiák variációjából:

$$\delta\Pi_p = \sum_{e=1}^{2} \delta\Pi_p^e = \sum_{e=1}^{2} \{\delta U^e_{alakv.} - \delta W_k^e\} = 0$$

$$\sum_{e=1}^{2} \Big\{ \underbrace{\frac{1}{2} \int_{V^e} \delta \boldsymbol{A}^e \cdot\cdot \boldsymbol{T}^e \, dV}_{\delta U^e_{alakv.}} \underbrace{- \int_{V^e} \delta \boldsymbol{u}^e \cdot \rho \boldsymbol{k} \, dV - \int_{A_p^e} \delta \boldsymbol{u}^e \cdot \boldsymbol{p} \, dA}_{-\delta W_k^e} \Big\}$$

Több testből álló rendszerre felírt $\min \Pi_p$ elv

Az első integrál az egy testre vonatkozó vizsgálatnál bemutatottak szerint átalakítható

$$\int_{V^e} \delta\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \nabla)^e \, dV = \int_{V^e} (\delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \nabla)^e \, dV - \int_{V^e} (\underbrace{\delta\boldsymbol{u} \circ \nabla}_{\delta\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{\Psi}}) \cdot\cdot \, T^e \, dV =$$

$$= \int_{A^e} \delta\boldsymbol{u}^e \cdot \boldsymbol{T}^e \cdot \boldsymbol{n}^e \, dA - \int_{V^e} \delta\boldsymbol{A}^e \cdot\cdot \, \boldsymbol{T}^e \, dV$$

innen

$$\int_{V^e} \delta\boldsymbol{A}^e \cdot\cdot \boldsymbol{T}^e dV = \int_{A^e} \delta\boldsymbol{u}^e \cdot \boldsymbol{T}^e \cdot \boldsymbol{n}^e \, dA - \int_{V^e} \delta\boldsymbol{u}^e \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \nabla)^e \, dV$$

ahol $A^e = \underbrace{A_u^e}_{\delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}} + A_c^e$

Több testből álló rendszerre felírt $\min \Pi_p$ elv

A kapott formulákat visszaírva és a tagokat átrendezve:

$$\sum_{e=1}^{2} \left\{ \int\limits_{V^e} \delta \boldsymbol{u}^e \cdot [\boldsymbol{T} \cdot \nabla + \rho \boldsymbol{k}]^e \, dV - \int\limits_{A_p^e} \delta \boldsymbol{u}^e \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{p})^e \, dA \right\} -$$

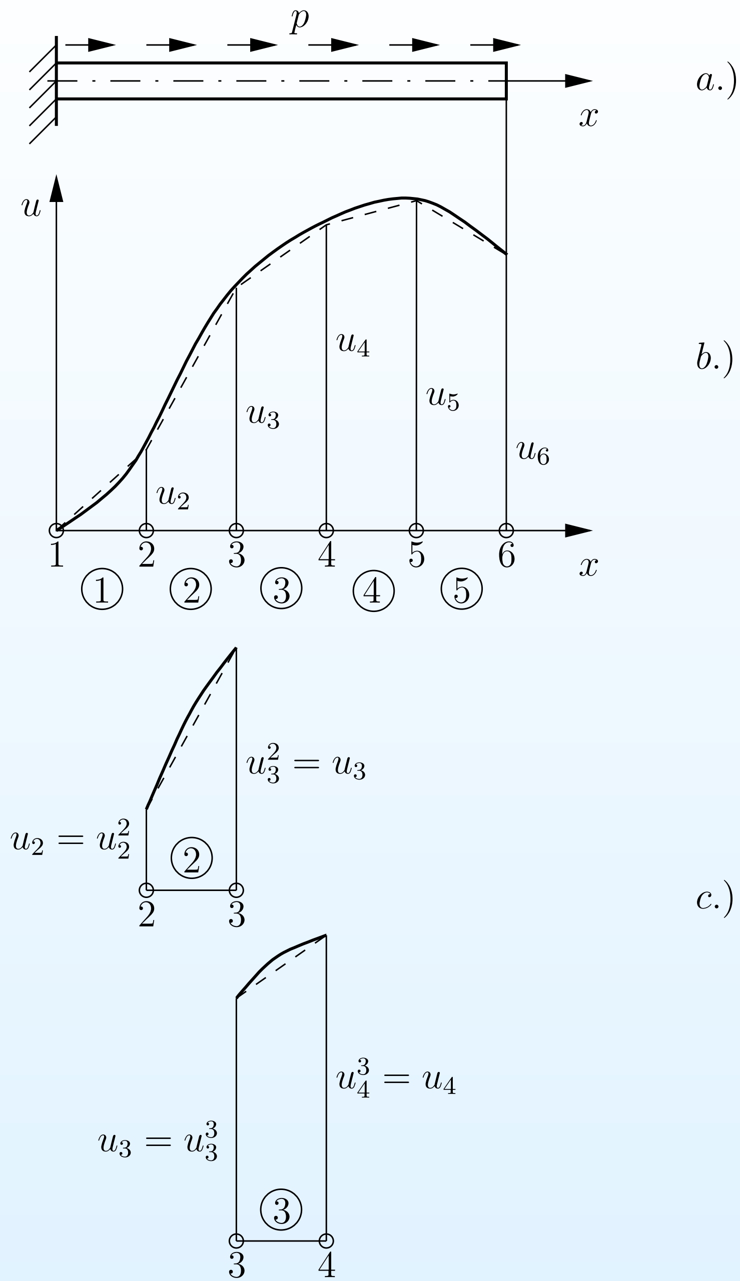
$$- \int\limits_{A_c^{12}} \delta \boldsymbol{u}^1 \cdot \left(\boldsymbol{T}^1 \cdot \boldsymbol{n}^1 + \boldsymbol{T}^2 \cdot \boldsymbol{n}^2 \right) \, dA = 0$$

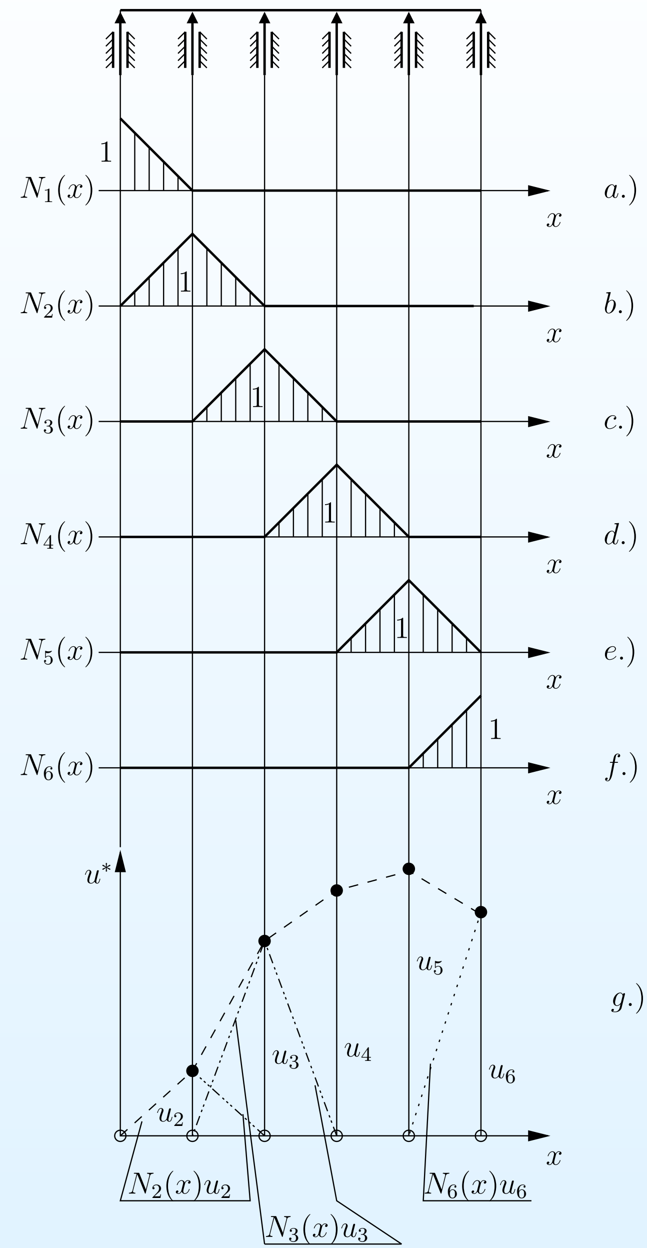
variációs egyenlethez jutunk.

Nyilvánvalóan, ha a KIF nem állna fenn, akkor e fennti egyenlet utolsó integrálja két részre esne, ami a belső felület feszültségmentességét fejezné ki. Ez pedig a megfigyelésekkel ellentétes eredményt szolgáltatna. A levezetett variációs egyenlet, vagyis a variációs elv biztosítja az egyensúlyi egyenlet, a dinamikai perem-, és illesztési feltétel teljesülését.

3. Elemmodell

Lokális approximáció elve egyváltozós feladatnál





Lokális approximáció elve egyváltozós feladatnál

A közelített elmozdulásmező

$$u^*(x) = \sum_{i=2}^{6} N_i(x)\, u_i = [N_2(x) \;\; N_3(x) \cdots N_6\;(x)] \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_6 \end{bmatrix} = \mathbf{N}(x)\,\mathbf{q}$$

Ehhez képezzük az i, j csomópontokat tartalmazó elemen belüli elmozdulásmezőt

$$u^e(x) = \left[\frac{x_j - x}{L^e}, \quad \frac{x - x_i}{L^e}\right] \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix}$$

ami a $\xi = x - x_i$ változó bevezetésével

$$u^e(\xi) = \left[1 - \frac{\xi}{L}, \frac{\xi}{L}\right]^e \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} =$$

$$= \left[N_i^e(\xi)\, N_j^e(\xi)\right] \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} = \mathbf{N}^e(\xi)\,\mathbf{q}^e = \mathbf{q}^{eT}\,\mathbf{N}^{eT}(\xi)$$

Diszkretizált potenciális energia

A húzott rúdban kialakuló fajlagos nyúlás

$$\varepsilon^e = \frac{du^e}{dx} = \varepsilon^e(\xi) = \frac{du^e(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{L}\,[-1,\; 1]\;\mathbf{q}^e = \mathbf{B}^e\mathbf{q}^e$$

illetve a normál feszültség a Hooke törvényalapján

$$\sigma^e = E\varepsilon^e = \sigma^e(\xi) = E\,\varepsilon^e(\xi) = E\,\mathbf{B}^e\mathbf{q}^e$$

$$U^e = \frac{1}{2}\int\limits_L \sigma\,\varepsilon\,A\;d\xi = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{eT}\int\limits_{L^e}\mathbf{B}^{eT}A^eE\;\mathbf{B}^e\,d\xi\;\mathbf{q}^e =$$

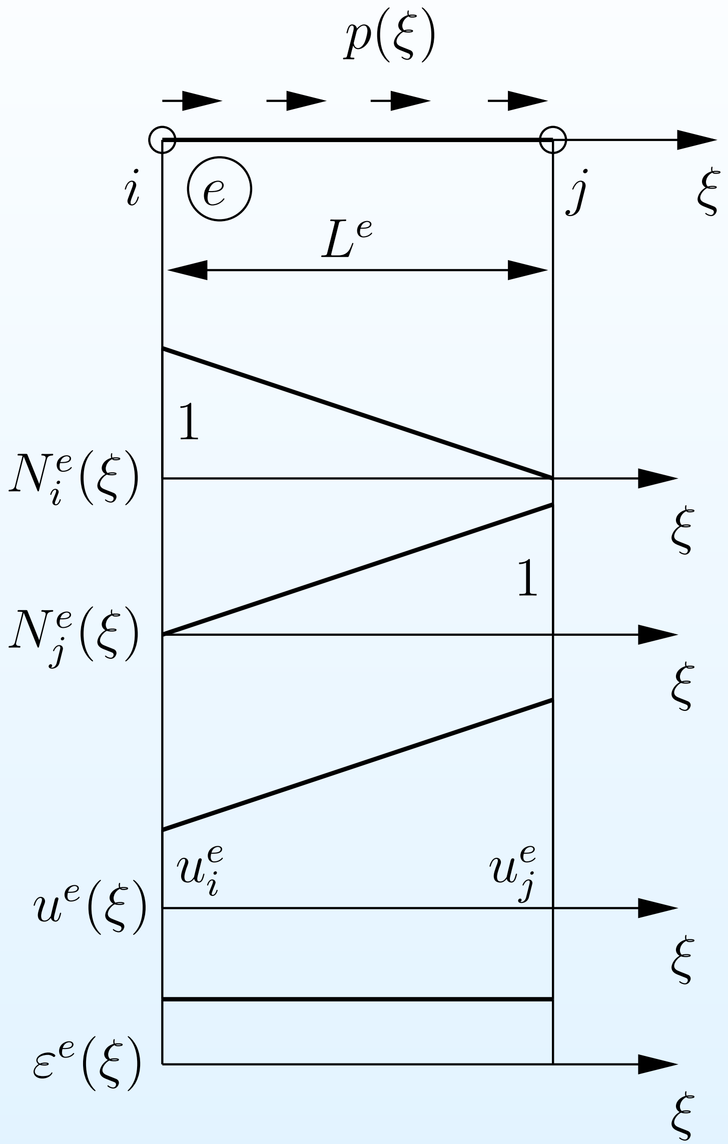
$$= \frac{1}{2}\mathbf{q}^{eT}\,\frac{A^eE}{L^e}\left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right]\mathbf{q}^e \equiv \frac{1}{2}\mathbf{q}^{eT}\,\mathbf{K}^e\,\mathbf{q}^e,$$

$$W_k^e = \int\limits_{L^e} u\,p\,d\xi = \mathbf{q}^{eT}\int\limits_{L^e}\mathbf{N}^{eT}(\xi)\,p\,d\xi \equiv \mathbf{q}^{eT}\,\mathbf{f}^e$$

Teljes potenciális energia

$$\Pi_p^e = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{eT}\mathbf{K}^e\,\mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{eT}\,\mathbf{f}^e$$

Egydimenziós végeselem, lokális koordinátafüggvények



Diszkretizált potenciális energia

A kapott merevségi mátrixot almátrixokra felbontva

$$\Pi_p^e = [\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j^T]^e \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_j \end{bmatrix}^e - 2 \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_j \end{bmatrix}^e \right)$$

Jelen esetben

$$\mathbf{q}_i^e = u_i^e, \quad (i \longleftrightarrow j), \quad \mathbf{K}_{ii}^e = \left(\frac{AE}{L}\right)^e \text{ stb.})$$

Bevezetve az összes csomópontielmozdulások vektorát

$$\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_2^T \ldots \mathbf{q}_6^T]$$

a rúd teljes potenciális energiája

$$\Pi_p = \frac{\mathbf{q}^T}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^1 & \mathbf{K}_{12}^1 & & & & \\ \mathbf{K}_{21}^1 & \mathbf{K}_{22}^1 + \mathbf{K}_{22}^2 & \mathbf{K}_{23}^2 & & & \\ & \mathbf{K}_{32}^2 & \mathbf{K}_{33}^2 + \mathbf{K}_{33}^3 & & & \\ & & \mathbf{K}_{43}^3 & \ldots & \mathbf{K}_{45}^4 & \\ & & & & \mathbf{K}_{55}^4 + \mathbf{K}_{55}^5 & \mathbf{K}_{56}^5 \\ & & & & \mathbf{K}_{65}^5 & \mathbf{K}_{66}^5 \end{bmatrix} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^1 \\ \mathbf{f}_2^1 + \mathbf{f}_2^2 \\ \mathbf{f}_3^2 + \mathbf{f}_3^3 \\ \mathbf{f}_4^3 + \mathbf{f}_4^4 \\ \mathbf{f}_5^4 + \mathbf{f}_5^5 \\ \mathbf{f}_6^5 \end{bmatrix}$$

Csomóponti terhelés

Állandó intenzítású hosszmenti p megoszló terhelésnél

$$\mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_j \end{bmatrix}^e = \int_{L^e} \mathbf{N}^{eT}(\xi)\, p \, d\xi = \int_{\xi=0}^{L^e} \begin{bmatrix} N_i(\xi) \\ N_j(\xi) \end{bmatrix}^e p \, d\xi = \frac{pL^e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vagyis a lineáris elmozdulásmező miatt a rúdelemen ébredő pL^e nagyságú erő a két csomópontra fele-fele arányban van szétosztva, azaz redukálva.

A megoldandó feladat

Mivel az 1-es pontban a rúd elmozdulása zérus, úgy $\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$. A $\delta\Pi_p = 0$ variációs egyenlet értelmében

$$\delta\Pi_p = \sum_{i=2}^{5} \delta\mathbf{q}_i^T \frac{\partial\Pi_p}{\partial\mathbf{q}_i} = 0,$$

azaz a megoldandó algebrai egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & & & \\ \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} & & \\ & \mathbf{K}_{43} & \mathbf{K}_{44} & \mathbf{K}_{45} & \\ & & \mathbf{K}_{54} & \mathbf{K}_{55} & \mathbf{K}_{56} \\ & & & \mathbf{K}_{65} & \mathbf{K}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \\ \mathbf{q}_5 \\ \mathbf{q}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \\ \mathbf{f}_5 \\ \mathbf{f}_6 \end{bmatrix}$$

ahol $\mathbf{K}_{22} = \mathbf{K}_{22}^1 + \mathbf{K}_{22}^2, \quad \mathbf{K}_{23} = \mathbf{K}_{23}^2, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_2^1 + \mathbf{f}_2^2$ stb.
Tömören

$$\mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{f}$$

4. Egyváltozós feladat

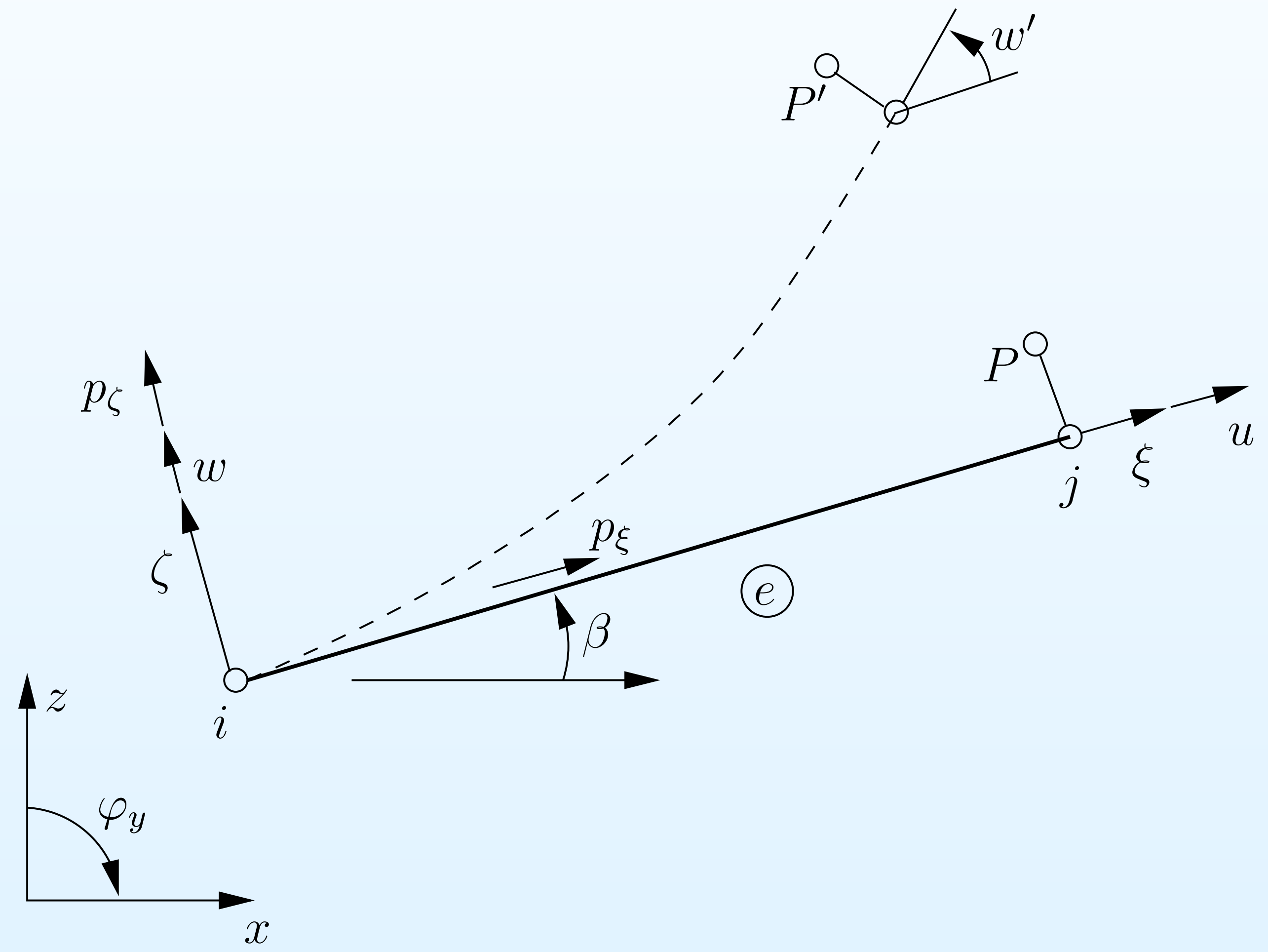
Síkbeli rúdszerkezetek

Rúdnak nevezzük azokat a testeket, amelyeknél a test egy kitüntetett térgörbére merőleges geometriai méretei lényegesen kisebbek a térgörbe irányában mérthez képest. Ha a térgörbe egyenes, akkor egyenes rudakról beszélünk. A test ,,merőleges metszetei” a rúd keresztmetszetét jelölik ki. Feltételezésünk szerint a keresztmetszet súlypontja a térgörbén helyezkedik el, amit tömören középvonalnak nevezünk.

Vizsgálatainkat egyenes középvonalú és állandó keresztmetszetű(prizmatikus) húzott-nyomott, hajlított-nyírt rudakra korlátozzuk. A nyírási energia elhanyagolásával az. ún. *Bernoulli-hipotézisű* rudakhoz jutunk.

Bernoulli-hipotézis

A rúd elmozdulásánál feltételezzük, hogy a rúd keresztmetszete merőleges marad a meggörbült középvonalra.



Elmozdulás

A keresztmetszet mentén húzás-nyomásból állandó, hajlításból lineárisan megoszló lefutású feszültség keletkezik. Ehhez tartozóan a rúdirányú elmozdulás a keresztmetszet egy tetszőleges P pontjában

$$u_P = u_P(\xi,\eta,\zeta) = u(\xi) - w'(\xi)\,\zeta,$$

ahol $(\;)' = \frac{d}{d\xi}(\;)$, $u(\xi)$, $w(\xi)$ a ξ ill. ζ irányú elmozdulás.

Alakváltozás, feszültség

A tengelyirányú fajlagos nyúlás

$$\varepsilon_\xi(\xi,\zeta) = \varepsilon(\xi,\zeta) = u'(\xi) - w''(\xi)\,\zeta,$$

míg az egyszerű Hooke-féle anyagegyenlet alapján a normál feszültség

$$\sigma(\xi,\zeta) = E\,\varepsilon(\xi,\zeta),$$

ahol E a Young modulus.

Potenciális energia

Jelölje a rúdon ható megoszló terhelést, hosszirányban p_ξ, keresztirányban p_ζ, melyeknek mértékegysége $[N/mm]$.
A rúd végein $-F_{\xi 0},\ F_{\xi L}$ rúderő, $-F_{\zeta 0},\ F_{\zeta L}$ nyíróerő és $-M_{\eta 0},\ M_{\eta L}$ hajlítónyomaték hat.
A fenti terheléseket figyelembevéve, továbbá tekintettel arra, hogy alakváltozási energiacsak a $\sigma\left(\xi\right)$ feszültségből származik, a rúd teljes potenciális energiája két integrálon keresztül és a rúdvégeken ható koncentrált erők és nyomatékok terhelési munkájából áll össze.

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\int\limits_L\int\limits_A \varepsilon_\xi\, E\, \varepsilon_\xi\, dA\, d\xi \;-\; \int\limits_L \left(u\, p_\xi \;+ w\, p_\zeta\right) d\xi -$$
$$-\left(u\left(L\right)\ F_{\xi L} - u\left(0\right) F_{\xi 0} + w\left(L\right)\ F_{\zeta L} - w\left(0\right)\ F_{\zeta 0}\ \right) -$$
$$-\left(\ -w'\left(L\right)\ M_{\eta L} + w'\left(0\right)\ M_{\eta 0}\ \right)$$

Minimum feltételből

$$\delta_u \Pi_p = 0 = \int\limits_L \int\limits_A \delta u' \; E \left(u' - w''\zeta\right) dA \, d\xi \; - \int\limits_L \delta u \, p_\xi \, d\xi -$$

$$- \left(\delta u \left(L\right) \; F_{\xi L} - \delta u \left(0\right) F_{\xi 0} \; \right) = \int\limits_L \delta u' \; AE \; u' \; d\xi - \int\limits_L \delta u \; p_\xi \; d\xi$$

$$- \left(\delta u \left(L\right) \; F_{\xi L} - \delta u \left(0\right) F_{\xi 0} \; \right) =$$

$$= \left[\left(\; AEu' - F_{\xi \; i} \; \right) \; \delta u \right]_0^L - \int\limits_L \delta u \; \left[\left(AEu'\right)' + p_\xi \right] \; d\xi$$

amiből

$$A \; E \; u'' \; + \; p_\xi \; = 0,$$

és

$$\left(N - F_{\xi \, i}\right) \; \delta \, u \; \Big|_0^L \; = 0, \quad N = \; A \, E \, u'$$

Alapegyenlet

A részletek mellőzésével a keresztirányú w elmozdulás vonatkozásában, az egyensúlyt kifejező alapegyenlet

$$I_\eta \, E \, w^{IV} \; - \; p_\zeta \; = 0,$$

és a dinamikai peremfeltételt adó variációs egyenletek

$$(F_\zeta - F_{\zeta\, i}) \;\, \delta w \, |_0^L \; = 0, \quad (M_\eta - M_{\eta\, i}) \;\, \delta w' \, |_0^L \; = 0,$$

azaz

$F_\zeta \; = \; - \, I_\eta \, E \, w'''$, és $M_\eta \; = \; - \, I_\eta \, E \, w''$

Elmozdulásmező közelítése

A fenti levezetésből következik, hogy az elemen belüli elmozdulásmező $u, \ w$. Ezeket polinomok segítségével közelítjük. A polinomok tagjainak egy részénél az együtthatókat csomópontonként felvett két elmozdulási és egy szögelfordulási értékkel tudjuk kifejezni, ill. az inhomogén differenciálegyenletek partikuláris megoldásaihoz tartozó tagokat pótlólagos állandóként, paraméterként fogjuk a továbbiakban szerepeltetni. Definiálva az elem helyi koordinátarendszerben értelmezett $\bar{\mathbf{q}}^e$ általánosított csomóponti vektorát, az $\breve{\mathbf{a}}^e$ pótlólagos állandók vektorát, a felsorolt műveletek végrehajtása után az alábbi approximációhoz jutunk. Vagyis az elemen belüli elmozdulásvektor

$$\mathbf{u}^e(\xi\ ) = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}^e = \bar{\mathbf{N}}^e(\xi)\ \bar{\mathbf{q}}^e + \breve{\mathbf{N}}^e(\xi)\ \breve{\mathbf{a}}^e,$$

Elmozdulásmező közelítése

A csomóponti elmozdulásvektorhoz tartozó approximációs mátrix

$$\bar{\mathbf{N}}^e(\xi) = \left[\bar{\mathbf{N}}_i(\xi) \quad \bar{\mathbf{N}}_j(\xi)\right]^e,$$

$$\bar{\mathbf{N}}_i^e(\xi) = \begin{bmatrix} 1-\bar{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\bar{\xi}^2 + 2\bar{\xi}^3 & -L\left(\bar{\xi} - 2\,\bar{\xi}^2 + \bar{\xi}^3\right) \end{bmatrix}^e,$$

$$\bar{\mathbf{N}}_j^e(\xi) = \begin{bmatrix} \bar{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 3\bar{\xi}^2 - 2\bar{\xi}^3 & L\left(\bar{\xi}^2 - \bar{\xi}^3\right) \end{bmatrix}^e, \qquad \bar{\xi} = \frac{\xi}{L^e}.$$

A pótlólagos állandókkal megszorzott approximációs mátrix

$$\breve{\mathbf{N}}^e(\xi) = \begin{bmatrix} L^2\left(\bar{\xi}^2 - \bar{\xi}\right) & L^3\left(\bar{\xi}^3 - \bar{\xi}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L^4\left(\bar{\xi}^4 - 2\,\bar{\xi}^3 + \bar{\xi}^2\right) & L^5\left(\bar{\xi}^5 - 3\,\bar{\xi}^3 + 2\bar{\xi}^2\right) \end{bmatrix}^e$$

$$= \begin{bmatrix} \underbrace{\breve{\mathbf{N}}_u^e(\xi)}_{(1,2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underbrace{\breve{\mathbf{N}}_w^e(\xi)}_{(1,2)} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{q}}^{e,T} = \left[\bar{\mathbf{q}}_i^T \quad \bar{\mathbf{q}}_j^T\right]^e, \quad \breve{\mathbf{a}}^{e,T} = \left[\breve{\mathbf{a}}_u^T \quad \breve{\mathbf{a}}_w^T\right]^e, \quad \bar{\mathbf{q}}_i^{e,T} = \left[u\,,\, w,\, -w'\right]_i^e.$$

Merevségi mátrix

Diszkretizálás után véges dimenziójú feladatot kapunk

$$\Pi_p = \Pi_p\left(\bar{\mathbf{q}}^e,\ \breve{\mathbf{a}}^e\right) = \frac{1}{2}\left[\bar{\mathbf{q}}^{e,T}\ \breve{\mathbf{a}}^{e,T}\right]\ (\ \left[\begin{array}{cc} \bar{\mathbf{K}}^e_{qq} & \bar{\mathbf{K}}^e_{qa} \\ \bar{\mathbf{K}}^e_{aq} & \bar{\mathbf{K}}^e_{aa} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \bar{\mathbf{q}}^e \\ \breve{\mathbf{a}}^e \end{array}\right] - 2\left[\begin{array}{c} \bar{\mathbf{f}}^e_{q(p)} \\ \bar{\mathbf{f}}^e_{a(p)} \end{array}\right]\ )$$

$$\bar{\mathbf{f}}^e_{q(p)} = \int_{L^e} \bar{\mathbf{N}}^{e,T}(\xi)\left[\begin{array}{c} p_\xi \\ p_\zeta \end{array}\right] d\xi, \quad \bar{\mathbf{f}}^e_{a(p)} = \int_{L^e} \breve{\mathbf{N}}^{e,T}(\xi)\left[\begin{array}{c} p_\xi \\ p_\zeta \end{array}\right] d\xi$$

$$\bar{\mathbf{K}}^e_{qq} = \int_{L^e} \mathbf{B}^{e,T}(\xi)\left[\begin{array}{cc} AE & 0 \\ 0 & I_\eta E \end{array}\right]^e \mathbf{B}^e(\xi)\ d\xi,$$

$$\bar{\mathbf{K}}^e_{aa} = \int_{L^e} \breve{\mathbf{B}}^{e,T}(\xi)\left[\begin{array}{cc} AE & 0 \\ 0 & I_\eta E \end{array}\right]^e \breve{\mathbf{B}}^e(\xi)\ d\xi.$$

Merevségi mátrix

$$\bar{\mathbf{B}}^e(\xi) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\bar{\xi}-6}{L^2} & \frac{4-6\bar{\xi}}{L} & 0 & \frac{6-12\bar{\xi}}{L^2} & \frac{2-6\bar{\xi}}{L} \end{bmatrix}^e$$

$$\underbrace{\breve{\mathbf{B}}^e(\xi)}_{(2,4)} = \begin{bmatrix} 2\xi - L & 3\xi^2 - L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12\left(\xi^2 - \xi L\right) + 2L^2 & 20\xi^3 - 18\xi L^2 + 4L^3 \end{bmatrix}^e$$

$$= \begin{bmatrix} \underbrace{\breve{\mathbf{B}}_u(\xi)}_{(1,2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underbrace{\breve{\mathbf{B}}_w(\xi)}_{(1,2)} \end{bmatrix}^e$$

A potenciális energiában szereplő, a helyi koordinátarendszerben értelmezett vegyes indexű merevségi mátrix, jelen esetben $\bar{\mathbf{K}}^e_{aq} = \bar{\mathbf{K}}^{e,T}_{qa} = \mathbf{0}$.
A teljes potenciális energia variációja

$$\delta\Pi_p = \delta\sum_e \Pi^e_p = \sum_e \delta\bar{\mathbf{q}}^{eT}\frac{\partial\Pi^e_p}{\partial\bar{\mathbf{q}}^e} + \sum_e \delta\breve{\mathbf{a}}^{eT}\frac{\partial\Pi^e_p}{\partial\breve{\mathbf{a}}^e} = 0$$

Redukált csomóponti elmozdulásvektor

A számítások elvégzése után a pótlólagos állandók vektora a két mező vonatkozásában

$$\breve{\mathbf{a}}_u^{e,T} = \left[-\frac{p_{\xi\ i}}{2AE} \quad \frac{1}{6AEL}\left(p_{\xi\ i} - p_{\xi\ j}\right) \right]^e ,$$

$$\breve{\mathbf{a}}_w^{e,T} = \left[\frac{p_{\zeta\ i}}{24 I_\eta E} \quad \frac{1}{120 I_\eta E L}\left(p_{\zeta\ j} - p_{\zeta\ i}\right) \right]^e .$$

A szimmetrikus $\bar{\mathbf{K}}_{qq}^e$ merevségi mátrix az alábbi

$$\bar{\mathbf{K}}_{qq}^e = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & -AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 12I_\eta E/L^3 & -6I_\eta E/L^2 & 0 & -12I_\eta E/L^3 & -6I_\eta E/L^2 \\ 0 & -6I_\eta E/L^2 & 4I_\eta E/L & 0 & 6I_\eta E/L^2 & 2I_\eta E/L \\ -AE/L & 0 & 0 & AE/L & 0 & 0 \\ 0 & -12I_\eta E/L^3 & 6I_\eta E/L^2 & 0 & 12I_\eta E/L^3 & 6I_\eta E/L^2 \\ 0 & -6I_\eta E/L^2 & 2I_\eta E/L & 0 & 6I_\eta E/L^2 & 4I_\eta E/L \end{bmatrix}^e$$

Koordinátarendszerek közötti transzformáció

A helyi koordinátarendszerben felírt diszkretizált potenciális energiát az x, z globális koordinátarendszerben értelmezett U, W elmozdulásokkal és a síkra merőleges φ_η szögelforduláson keresztül lehet kifejezni.

$$\bar{\mathbf{q}}_i^e = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_\eta = -w' \end{bmatrix}_i^e = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} U \\ W \\ \varphi_Y \end{bmatrix}_i^e \equiv \mathbf{T}_0^e\, \mathbf{q}_i^e,$$

vagyis az elem csomóponti általánosított elmozdulásvektora

$$\bar{\mathbf{q}}^e = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_i \\ \bar{\mathbf{q}}_j \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_0 \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_j \end{bmatrix}^e \equiv \mathbf{T}^e\, \mathbf{q}^e,$$

ahol $\mathbf{T}^e$ az elem transzformációs mátrixa.

Transzformált merevségi mátrix

Ezek után az elem teljes potenciális energiája

$$\Pi_p = \Pi_p\left(\bar{\mathbf{q}}^e,\ \breve{\mathbf{a}}^e\right) = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{q}}^{e,T}\ \bar{\mathbf{K}}^e_{qq}\bar{\mathbf{q}}^e - \mathbf{q}^{e,T}\mathbf{f}^e_{q(p)} + \ldots = \Pi_p\left(\mathbf{q}^e,\ \breve{\mathbf{a}}^e\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{q}^{e,T}\left(\ \mathbf{T}^{e,T}\ \bar{\mathbf{K}}^e_{qq}\mathbf{T}^e\mathbf{q}^e - 2\mathbf{T}^{e,T}\bar{\mathbf{f}}^e_{q(p)}\ \right) + \ldots = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{e,T}\ \mathbf{K}^e_{qq}\mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{e,T}\mathbf{f}^e_{q(p)} + \ldots,$$

ahol

$$\mathbf{K}^e_{qq} = \mathbf{T}^{e,T}\ \bar{\mathbf{K}}^e_{qq}\mathbf{T}^e$$

a globális rendszerbeli merevségi mátrix

$$\mathbf{f}^e_{q(p)} = \mathbf{T}^{e,T}\ \bar{\mathbf{f}}^e_{q(p)}$$

a globális rendszerbeli redukált csomóponti általánosított terhelési vektor.

5. Kompatibilis elemek

Végeselemek

Legyen az e jelű i, j, k csomópontokkal rendelkező elem csomóponti elmozdulásainak vektora a következő:

$$\mathbf{q}^{eT} = \left[\mathbf{q}_i^{eT} \quad \mathbf{q}_j^{eT} \quad \mathbf{q}_k^{eT} \ldots\right], \quad \mathbf{q}_i^{eT} = [u_i \quad v_i \quad w_i]^e$$

Az elmozdulásmező közelítését az alábbi összefüggés írja le

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{u}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\mathbf{q}^e = \mathbf{N}^e\mathbf{q}^e$$

ahol az $\mathbf{N}^e$ mátrixot az elem approximációs mátrixának nevezzük. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{N}^e$ a csomópontok szerint felbontható, partícionálható:

$$\mathbf{N}^e = \left[\ \mathbf{N}_i \quad \mathbf{N}_j \quad \mathbf{N}_k \quad \ldots\ \right]^e$$

ahol $\mathbf{N}_i$ az i-dik csomóponthoz tartozó approximációs mátrix.
Az elmozdulásmező közelítéséből kiindulva származtathatók az elem további szilárdsági jellemzői.

Alakváltozás-, feszültségi vektor

$$\boldsymbol{A}(x,y) \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^e = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}^e =$$

$$= \partial\, \mathbf{u}^e\left(\mathbf{x}\right) = \partial \mathbf{N}^e\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{q}^e = \mathbf{B}^e\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{q}^e$$

ahol a $\mathbf{B}^e$ mátrix is felbontható a csomópontok szerint:

$$\mathbf{B}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i^e & \mathbf{B}_j^e & \mathbf{B}_k^e & \dots \end{bmatrix}$$

Feszültségmező leírására hasonlóan értelmezhető a 3 méretű feszültségvektor:

$$\boldsymbol{T} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}^{eT} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^e$$

illetve felírható a csomóponti elmozdulásvektorral is:

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_0^e\right) + \boldsymbol{\sigma}_0^e = \mathbf{D}\left(\mathbf{B}^e\mathbf{q}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_0^e\right) + \boldsymbol{\sigma}_0^e$$

ahol $\mathbf{D}$ az anyagjellemzők mátrixa.

Terhelési vektorok, elem potenciális energiája

A későbbiek miatt érdemes a terhelési vektorokat is oszlopvektorba rendezni. A peremen és a térfogaton megoszló terhelések oszlopvektorai a következők:

$$\boldsymbol{p} \Rightarrow \mathbf{p}^e = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}^e \quad , \quad \rho\boldsymbol{k} \Rightarrow \rho\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} \rho k_x \\ \rho k_y \end{bmatrix}^e$$

A potenciális energia az előbbi mennyiségekkel felírva

$$\Pi_p^e = \frac{1}{2}\int_{V^e} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{eT} - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{eT}\right) \mathbf{D}^e \left(\boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_0^e\right) dV \\ - \int_{A_p^e} \mathbf{u}^{eT}\mathbf{p}^e dA - \int_{V^e} \mathbf{u}^{eT}\rho\mathbf{k}\, dV + \int_{V^e} \boldsymbol{\varepsilon}^{eT}\, \boldsymbol{\sigma}_0^e\, dV$$

Potenciális energia

Véges dimenzióban felírt potenciális energia

$$\Pi_p^e = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{eT}\mathbf{K}^e\mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{eT}\mathbf{f}^e$$

melyben $\mathbf{K}^e$ elemi merevségi mátrix és $\mathbf{f}^e$ elemi terhelési vektor az alábbi

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^{eT}\mathbf{D}^e\mathbf{B}^e dV =$$

$$= \int_{V^e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i^{eT} \\ \mathbf{B}_j^{eT} \\ \vdots \end{bmatrix} \mathbf{D}^e \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i^e & \mathbf{B}_i^e & \dots \end{bmatrix} dV = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^e & \mathbf{K}_{ij}^e & \dots \\ \mathbf{K}_{ji}^e & \mathbf{K}_{jj}^e & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_p^e + \mathbf{f}_{\rho\mathbf{k}}^e + \mathbf{f}_{\varepsilon 0}^e + \mathbf{f}_{\sigma 0}^e$$

$$\mathbf{f}_p^e = \int_{A_p^e} \mathbf{N}^{eT}\mathbf{p}^e dA \quad , \quad \mathbf{f}_{\rho\mathbf{k}}^e = \int_{V^e} \mathbf{N}^{eT}\rho\mathbf{k}^e dV \quad ,$$

$$\mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}0}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^{eT}\mathbf{D}^e\boldsymbol{\varepsilon}_0^e dV \quad , \quad \mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}0}^e = -\int_{V^e} \mathbf{N}^{eT}\boldsymbol{\sigma}_0^e dV$$

Elemek csatolása

A potenciális energia minimum elv alkalmazhatóságánál az elemek közötti elmozdulásmező folytonosságát az approximációnak biztosítani kell. Tételezzük fel, hogy ez fennáll, és ily módon az elemek csatolásánál, az elemek illesztésénél a közös csomópontba eső elmozdulások azonosságát elegendő már csak megkövetelni.

Legyen példaként az i jelű csomópontokba befutó elemek jele rendre e, $e+1$ illetve s. Ekkor az elmondottak szerint az illesztésnél

$$\mathbf{q}_i^e = \mathbf{q}_i^{e+1} = \mathbf{q}_i^s = \mathbf{q}_i$$

vagyis azt is mondhatjuk, hogy a megkülönböztető felső index elhagyható!

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^{N_e} \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K} \mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{eT} f^e \right) - W^k = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f}$$

Elemek csatolása

A terhelés munkáját képezve, a szerkezet csomóponti terhelési és elmozdulási vektora az illesztési feltétel alapján

$$\sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{q}^{eT}\mathbf{f}^e + W^K = \ldots + \mathbf{q}_i^{eT}\mathbf{f}_i^e + \mathbf{q}_i^{e+1\,T}\mathbf{f}_i^{e+1\,T} + \mathbf{q}_i^{s\,T}\mathbf{f}_i^s + \cdots + \mathbf{q}_i^T\mathbf{f}_i^K =$$

$$= \ldots + \mathbf{q}_i^T \left(\underbrace{\mathbf{f}_i^e + \mathbf{f}_i^{e+1} + \mathbf{f}_i^s + \mathbf{f}_i^K \mathbf{f}_i}_{\mathbf{f}_i} \right)$$

alakban képezhető, azaz a rugalmas rendszer csomóponti redukált terhelési vektorának i-dik csomópontra vonatkozó része

$$\mathbf{f}_i = \sum_{e \in i} \mathbf{f}_i^e + \mathbf{f}_i^K$$

Látható, hogy az összegzést mindazon elemekre el kell végezni, amelyek az i jelű csomópontot tartalmazzák és hozzá kell adni a csomópontban ható koncentrált terhelés $\mathbf{f}_i^K$ vektorát.

Elemek csatolása

A szerkezet merevségi mátrixa az alakváltozási energiával kapcsolatos:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{q}^{eT}\mathbf{K}^e\mathbf{q}^e = \mathbf{q}^e\mathbf{K}\mathbf{q}^e$$

ahol

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_{ij}] \quad i,\ j = 1,\ \ldots,\ ncs \quad \mathbf{K}_{ij} = \sum_{e\in i,\, j} \mathbf{K}_{ij}^e$$

Az összegzés alapján ij indexű blokk mindazon elemeknél szerepel, amelyek tartalmazzák egyidejűleg az i és a j jelű csomópontot.

Adott elmozdulás hatása

Legyen $\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_{ju}$ adott csomóponti elmozdulás, mely azt jelenti, hogy $\delta\mathbf{q}_j = \mathbf{0}$ Ekkor a j-edik blokksor 0-val szorzódik.
Az adott elmozdulás hatása a –$\mathbf{K}_{ij}\mathbf{q}_{ju}$ taggal a jobboldalon kinematikai teherként jelenik meg.
Az egyenletek számát megtartva az alábbi struktúra is szolgáltatja a megoldást:

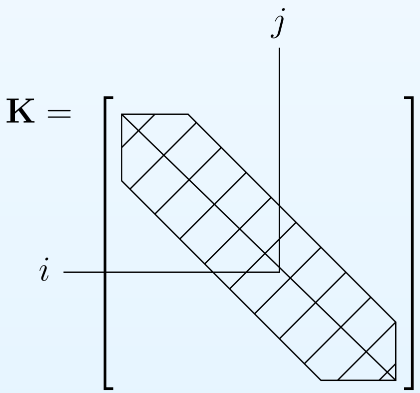
$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \dots & \mathbf{0} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \\ \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{E} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \\ \mathbf{K}_{1,ncs} & \dots & \mathbf{0} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_j \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{ncs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 - \mathbf{K}_{1j}\mathbf{q}_{ju} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{ju} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{ncs} - \mathbf{K}_{ncs,j}\mathbf{q}_{ju} \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer

A csomóponti paraméterek megkötése révén, figyelembevéve a kinematikai előírásokat, megszűnik a merevtestszerű mozgás lehetősége. A megoldandó egyenletrendszert ekkor is

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}$$

alakban írjuk fel, azzal a megjegyzéssel, hogy az együttható mátrix és terhelési vektor már tartalmazza a kinematikai előírásokat is.

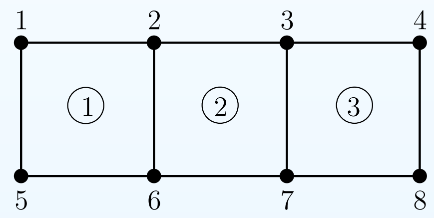


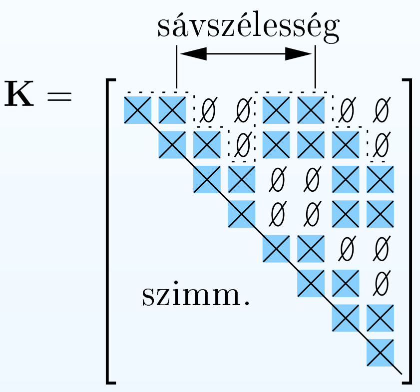
Az egyenletrendszer jellemzői közül a nagy méretek miatt fontos az együttható mátrix zérustól különböző elemeinek elhelyezkedése. Az egyenletrendszer, az összegzési szabály miatt szalagszerkezetű.

Példa: Sávszélesség

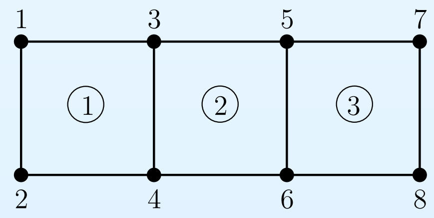
5.1. feladat: Példaként tekintsük a következő végeselem felosztást és konstruáljuk meg a hozzá tartozó sematikus merevségi mátrixot

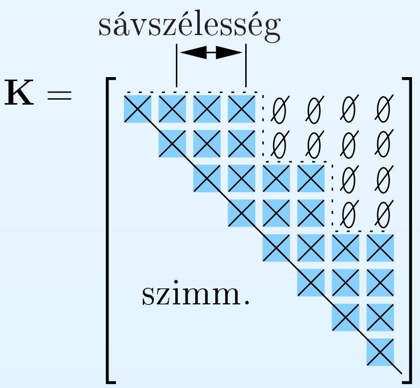
Megoldás:





Itt látható, hogy a sávszélesség: főátló +5 elem. Ennél van kedvezőbb számozás is, mely egyúttal optimális számozást jelent.

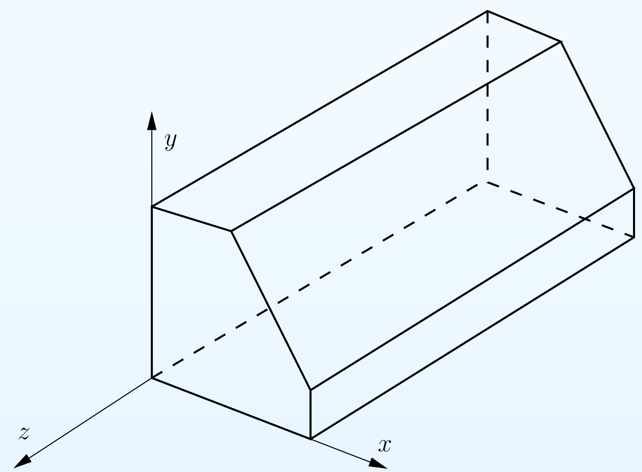




6. Kétváltozós feladatok

Síkalakváltozás (SA)

Amennyiben a vizsgált test geometriája és terhelése következtében létezik egy olyan irány, amely mentén a test pontjai nem mozdulnak el, valamint ezen kitüntetett irányhoz tartozó helykoordinátától, a reá merőleges síkban fellépő elmozdulásvektor koordinátái függetlenek, síkalakváltozásról szokás beszélni.



Legyen a kitüntetett $\boldsymbol{e}_z$ irányban mért helykoordináta a z. Ekkor a szóbanforgó állapot csak akkor tud kialakulni, ha a térfogaton megoszló $\rho\boldsymbol{k}$ terhelésnek és az A_p felületen megoszló $\boldsymbol{p}$ terhelésnek nincs z irányú összetevője.

Síkalakváltozás (SA)

Az elmozdulásmező és a terhelési függvények

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x,y) = u\boldsymbol{e}_x + v\boldsymbol{e}_y$$
$$\rho\boldsymbol{k} = \rho\boldsymbol{k}(x,y) = \rho(k_x\boldsymbol{e}_x + k_y\boldsymbol{e}_y)$$
$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(x,y) = p_x\boldsymbol{e}_x + p_y\boldsymbol{e}_y$$

Az $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzor a geometriai egyenlet értelmében

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x,y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

míg a $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzor

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(x,y) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

ahol izotróp esetben $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$

Síkalakváltozás (SA)

Az $\varepsilon_z \equiv 0$ miatt az alakváltozási energia számításánál csak a $\boldsymbol{T}$ tenzor síkbeli részével kell dolgozni, tehát

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \sigma_z & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

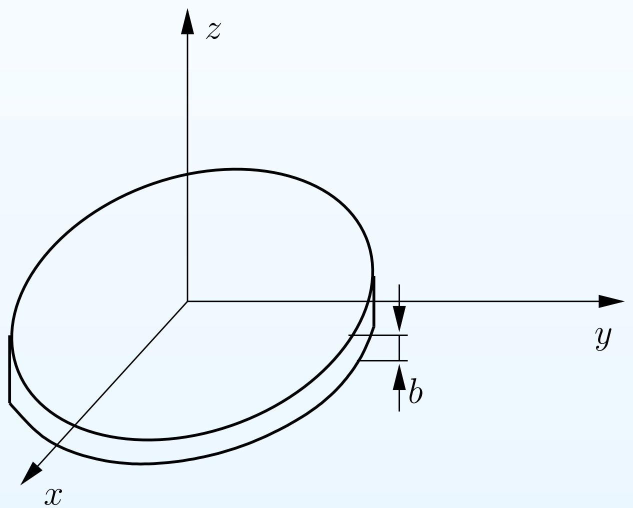
Így végül is, síkalakváltozás esetén

$$\boldsymbol{T} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Síkfeszültségi állapot (SF)

A síkfeszültségi állapotot az jellemzi, hogy most a kitüntetett z irányra merőleges síkokon nem keletkezik $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ feszültség. Ehhez az szükséges, hogy a $\rho\boldsymbol{k}$ és $\boldsymbol{p}$ terhelési függvényeknek ne legyen z irányú összetevője.



Fentiek alapján a feszültségi tenzornak csak a síkbeli része lehet zérustól különböző

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}(x, y)$$

Síkfeszültségi állapot (SF)

Ismét homogén, izotróp anyagot tételezünk fel, így a z irányú fajlagos nyúlás

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

míg az $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzor

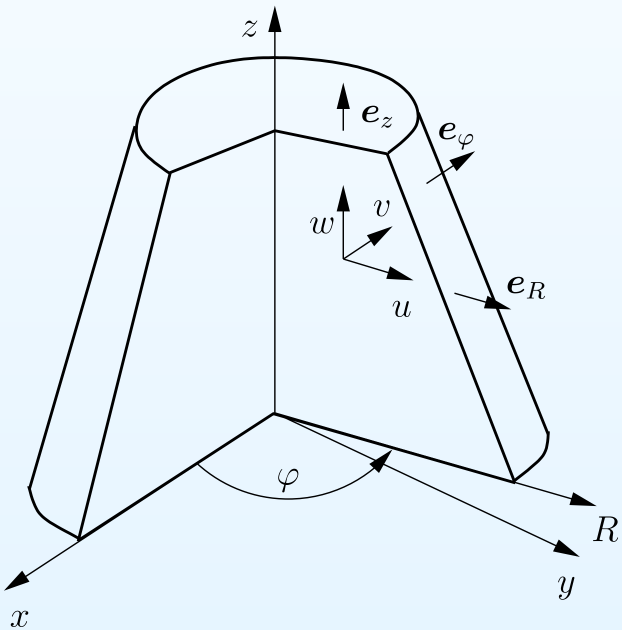
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}(x,y) \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Tekintettel megint az alakváltozási energia kiszámítási módjára elegendő csak a tenzorok síkbeli részét megtartani. Homogén, izotróp anyagnál áll:

$$\boldsymbol{T} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Tengelyszimmetrikus feladatok (TSz)

Számos esetben találkozunk a mérnöki gyakorlatban forgástestekkel (tengelyek, tartályok stb.). Ezek egy része a geometriai tengelyszimmetria mellett, a megfogás és terhelés vonatkozásában is forgásszimmetriával, tengelyszimmetriával rendelkezik. Ez esetben a látható z tengelyű forgástest terhelése és megfogása független a kerületi irányban mért φ koordinátától.



$$\boldsymbol{u} = u(R,z)\boldsymbol{e}_R + w(R,z)\boldsymbol{e}_z$$

Tengelyszimmetrikus feladatok (TSz)

Az alakváltozási és feszültségi vektorok

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_R \\ \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{Rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial R} \\ \frac{u}{R} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial R} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_R \\ \sigma_\varphi \\ \sigma_z \\ \tau_{Rz} \end{bmatrix}$$

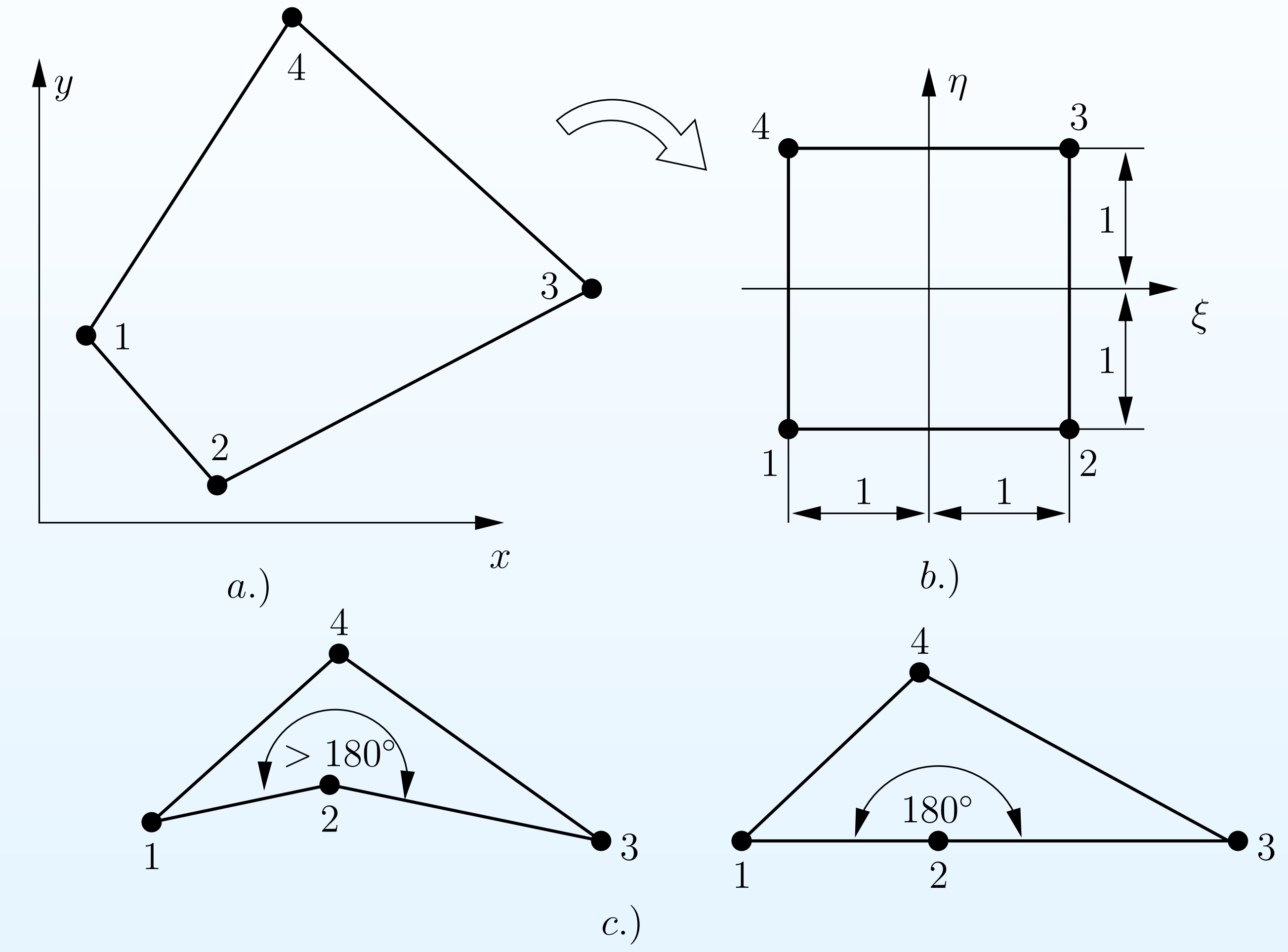
között homogén izotróp anyagra az anyagállandók mátrixa

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

teremt kapcsolatot.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Négycsomópontú elem



Négycsomópontú elem

Az előző ábra egy konvex egyenesoldalú, négycsomópontú elemet mutat az xy globális koordináta-rendszerben, amelyet egy két egység élű négyzet-tartományra kívánunk leképezni. Ennek érdekében az $x\,(\xi,\eta)$ és $y\,(\xi,\eta)$ leképező függvényeket bilineáris alakban írjuk fel:

$$x(\xi,\eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta]\,\mathbf{a} = \boldsymbol{\varphi}^T(\xi,\eta)\mathbf{a}$$
$$y(\xi,\eta) = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta]\,\mathbf{b} = \boldsymbol{\varphi}^T(\xi,\eta)\mathbf{b}$$

melyben a_i és b_i állandókat a csomópontok, azaz a sarokpontok

$$x(\xi_i,\eta_i) = x_i, \quad y(\xi_i,\eta_i) = y_i$$

koordinátái alapján lehet meghatározni. Az előző ábrából kiolvashatóan a négy pont ξ,η koordinátájának behelyettesítésével

Négycsomópontú elem

Tömörebben

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\,\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}$$

Hasonlóképpen $\mathbf{y}$-ra áll

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\,\mathbf{b} \quad \mathbf{b} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{y}$$

Az állandókat visszaírva a leképezés

$$x(\xi,\eta) = \boldsymbol{\varphi}^T(\xi,\eta)\mathbf{G}^{-1}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)x_i \quad (x \leftrightarrow y)$$

alakban áll elő, ahol az $N_i\,(\xi,\eta)$ ún. alakfüggvények felépítése a következő:

$$\begin{aligned} N_1 &= \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad & N_3 &= \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_2 &= \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \qquad & N_4 &= \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned}$$

Négycsomópontú elem

Könnyen ellenőrizhető, hogy az alakfüggvények összege:

$$\sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta) = 1$$

A leképezést alkalmazva az elem j-dik csomópontjára

$$x(\xi_j,\eta_j) = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi_j,\eta_j) x_i$$

amiből következik, hogy

$$N_i(\xi_j,\eta_j) = \begin{cases} 1, & ha \quad i = j \\ 0, & ha \quad i \neq j \end{cases}$$

Az izoparametrikus elemeknél

$$u = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta) u_i \qquad \text{és} \qquad v = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta) v_i$$

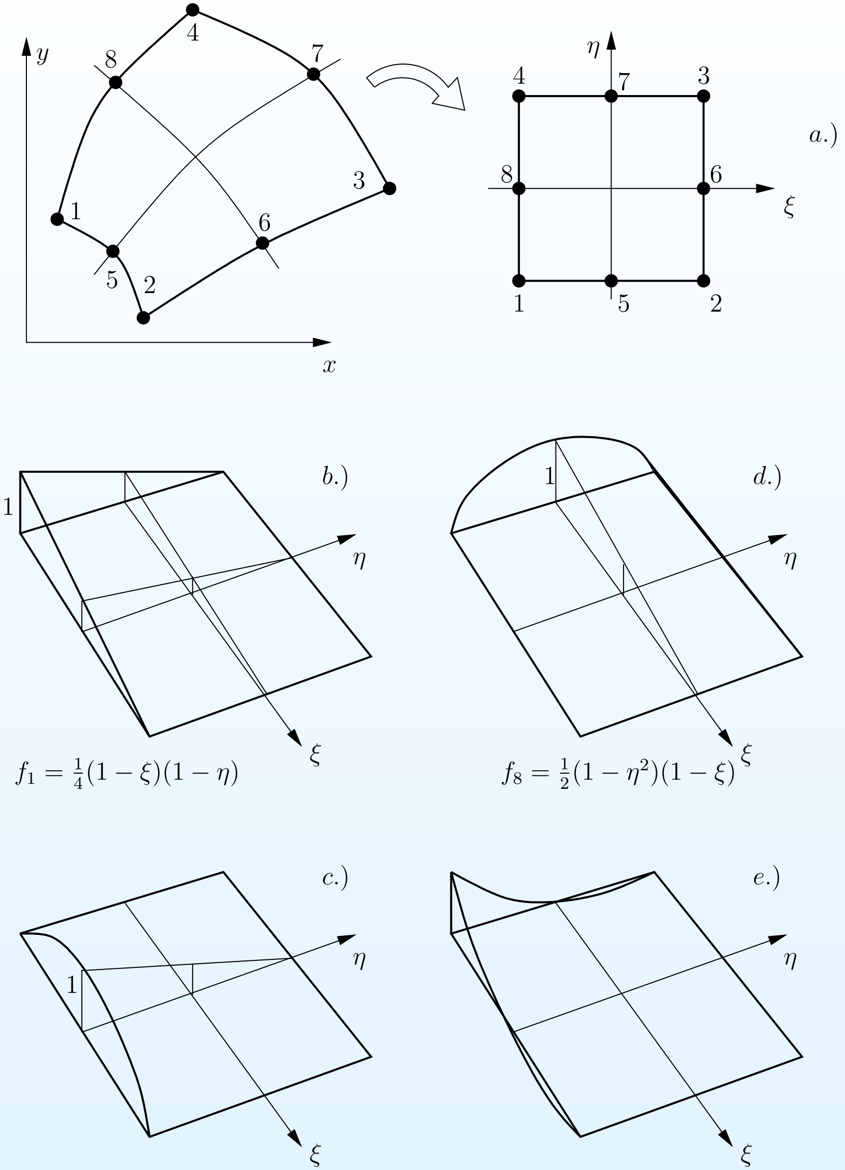
Kölcsönösen egyértelmű leképzés

A végeselem ténylegesen az $x,\ y$ rendszerben létezik, vagyis a mezők simaságához az $N_i\left(\xi(x,y)\,,\ \eta(x,y)\right)$ függvénynek is simának kell lennie. Az $N_i(\xi,\eta)$ függvények simák (folytonos deriváltakkal rendelkeznek a ξ,η rendszerben). Azonban, ha az elem valamelyik csomópontjánál az oldalak közötti szög 180^o, vagy annál nagyobb (a belső szög tompa), akkor az $x,\ y$ és ξ,η koordinátarendszerek közötti leképezés már nem lesz egyértelmű, amelyet a $\mathbf{J}$ *Jacobi-mátrix* determinánsának nem pozitív volta is jelez. Az $x,\ y$ és a ξ,η koordináta-rendszerek közötti egyértelmű leképzéshez szükséges, hogy

$$\det\mathbf{J} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi} \\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta} \end{bmatrix} > 0,$$

azaz a $\mathbf{J}$ Jacobi-mátrix determinánsának pozitívnak kell lennie.

Nyolccsomópontú elem



$f_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$

$f_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi)$

$f_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$

$N_1(\xi,\eta) = f_1 - \frac{f_5}{2} - \frac{f_8}{2}$

© 2007. Páczelt-Szabó-Baksa: VEM alapjai

Nyolccsomópontú elem

Az előző ábra egy nyolccsomópontú, görbeperemű izoparametrikus elemet mutatat, melynek nyolc alakfüggvényét így írhatjuk fel

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi)$$

Elmozdulásmező

A két koordináta-rendszer közötti leképezést az előzőekkel összhangban

$$x = \sum_{i=1}^{n_{cs}} N_i(\xi, \eta) x_i \quad y = \sum_{i=1}^{n_{cs}} N_i(\xi, \eta) y_i$$

formulák adják, ahol n_{cs} az adott elemmodell csomópontjainak száma. Kétváltozós feladatok esetén az elmozdulás koordináták közelítése

$$u = \sum_{i=1}^{n_{cs}} N_i(\xi, \eta) u_i \quad v = \sum_{i=1}^{n_{cs}} N_i(\xi, n) v_i$$

A szokás szerinti tömör felírás

$$\mathbf{u} = \left[\begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \ldots & N_{n_{cs}} & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & & 0 & N_{n_{cs}} \end{array} \right] \mathbf{q}^e \equiv \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{q}$$

ahol $\mathbf{q}^{eT} = [u_1, v_1, \ldots u_i, v_i, \ldots u_{n_{cs}}, v_{n_{cs}}]$ az elem $2 \cdot n_{cs}$ méretű elmozdulás-vektora.

Deriváltak előállítása

A globálrendszerbeli alakváltozási vektor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_i \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i \\ \sum\limits_i \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \\ \sum\limits_i \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i \right) \end{bmatrix}$$

amiből látszik, hogy a ehhez szükséges az alakfüggvények globál koordináta-rendszerbeli $\frac{\partial N_i}{\partial x}$, $\frac{\partial N_i}{\partial y}$ parciális deriváltjai

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Tömörebben felírva

$$(\boldsymbol{\partial}_G N_i) = \mathbf{J}^{-1} (\boldsymbol{\partial}_L N_i) = \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} \\ J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} \end{bmatrix} (\boldsymbol{\partial}_L N_i)$$

ahol $\mathbf{J}^{-1}$ a Jacobi-mátrix inverze, $(\boldsymbol{\partial}_G \cdot)$ a globálrendszerbeli deriváltak vektora, $(\boldsymbol{\partial}_L \cdot)$ a lokálrendszerbeli deriváltak vektora.

Deriváltak előállítása

A ξ, η rendszerbeli parciális deriváltakra

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{\partial}_L N_i) = \mathbf{J}\,(\boldsymbol{\partial}_G N_i) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} (\boldsymbol{\partial}_G N_i)$$

így a Jacobi-mátrix felhasználásával

$$\underset{(2,2)}{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \sum\limits_i N_i}{\partial \xi} x_i & \dfrac{\partial \sum\limits_i N_i}{\partial \xi} y_i \\ \dfrac{\partial \sum\limits_i N_i}{\partial \eta} x_i & \dfrac{\partial \sum\limits_i N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \dots \\ \dots \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_i & y_i \\ x_{n_{cs}} & y_{n_{cs}} \end{bmatrix}$$

módon számítható.

Deriváltak előállítása

Látjuk tehát, hogy a két koordinátarendszerben értelmezett deriváltak között a Jacobi-mátrix, vagy annak inverze teremt kapcsolatot.

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = J_{11}^{-1}\frac{\partial Ni}{\partial \xi} + J_{12}^{-1}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$
$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = J_{21}^{-1}\frac{\partial Ni}{\partial \xi} + J_{22}^{-1}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$

Ez azt jelenti, hogy így előállítható a következő formula által definiált $\mathbf{B}$ elmozdulás-alakváltozás transzformációs mátrixszal felírható

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_i \\ v_i \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{B}(\xi,\eta)\mathbf{q}^e$$

Merevségi mátrix

Az előző pontokban ismertetett kétdimenziós feladattípusok sajátosságait figyelembe véve az elem teljes potenciális energia kifejezése mátrixos formában

$$\Pi_p^e = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{eT} \int\limits_{(A^e)} \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\, b\, dA\, \mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{eT}(\mathbf{f}_\varepsilon^e + \mathbf{f}_p^e + \mathbf{f}_{qk}^e)$$

ahol

$\mathbf{K}^e = \int\limits_{A^e} \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\, b\, dA$ az elemi merevségi mátrix,

$\mathbf{f}_\varepsilon^e = \int\limits_{Ae} \mathbf{B}^T\mathbf{D}\varepsilon_0\, bdA$ a kezdeti alakváltozásból,

$\mathbf{f}_p^e = \int\limits_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T\mathbf{p}b\, d\Gamma$ a felületi terhelésből, és

$\mathbf{f}_{\rho k}^e = \int\limits_{A^e} \mathbf{N}^T\rho\mathbf{k}b\, dA$ a térfogati terhelésből

számítandó redukált csomóponti terhelési vektor.

Numerikus integrálás

Egy dimenziónál egy $F(x)$ függvény a, b intervallumbeli integrálját

$$\int_a^b F(x)\,dx = S_1 F(x_1) + ...S_{NG} F(x_{NG}) + R_{NG}$$

kifejezés szolgáltatja, ahol S_i súlyfaktor, x_i később ismertetett koordináta, R_{NG} maradék tag, NG a felvett pontok száma. Kimutatható, hogy ezzel a közelítéssel $2 * NG - 1$-ed fokú polinom még pontosan integrálható. Az a, b intervallumból, amint azt már az elemeknél láttuk, a $-1 \leq \xi \leq 1$ intervallumba térünk át a leképezésnél használatos

$$x = \sum_j N_j(\xi)\, x_j \qquad dx = \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial \xi} x_j d\xi$$

összefüggéssel, míg a súlyfaktorra $S_i = \det \mathbf{J}(\xi_i)\, W_i$ fog fennállni, ahol W_i ún. Gauss-féle súlyfaktor, míg ξ_i a Legendre polinomok belső zérus helyeit kijelölő ún. Gauss-féle koordináta.

Numerikus integrálás

Ily módon az $\int_a^b F(x)dx$ integrál numerikus integrálással

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_{-1}^{1} F(\xi)\,\det \mathbf{J}(\xi)\,d\xi = \sum_{i=1}^{NG} W_i\,\det \mathbf{J}(\xi_i)\,F(\xi_i)$$

Kétdimenziós esetben

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta)\det\mathbf{J}(\xi,\eta)d\xi\,d\eta = \sum_{i=1}^{NG}\sum_{j=1}^{NG} W_i\,W_j\det\mathbf{J}(\xi_i,\eta_j)\,F(\xi_i,\eta_j)$$

Numerikus integrálás

A korábban szereplő mátrix-szorzatot $\mathbf{F}^e\,(x,y)$-el jelölve a

$$\mathbf{K}^e = \int\limits_{A^e} \mathbf{B}^T(x,y)\mathbf{D}(x,y)\mathbf{B}(x,y)b(x,y)dA \equiv \int\limits_{A^e} \mathbf{F}^e(x,y)dA =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \mathbf{F}(x(\xi,\,\eta), y(\xi,\,\eta)\det \mathbf{J}(\xi,\eta)d\xi d\eta =$$

$$= \sum_{i=1}^{NG}\sum_{j=1}^{NG} W_i W_j \det \mathbf{J}(\xi_i,\,\eta_j)\mathbf{F}(\xi_i,\,\eta_j)$$

míg például a perem menti integrál

$$\mathbf{f}_p^e = \int\limits_{\Gamma e} \mathbf{N}^T \mathbf{p} b d\Gamma = \int\limits_{-1}^{1} \mathbf{N}^T(\xi,\,\eta=1)\,\mathbf{p}(\xi)\,b(\xi,\eta=1)\det \mathbf{J}^\Gamma(\xi,\,\eta=1)\,d\xi$$

$$= \sum_{j=1}^{NG} W_i \det \mathbf{J}^\Gamma(\xi_i,\,\eta=1)\,\tilde{\mathbf{f}}^e(\xi_i,\,\eta_j)$$

formában számolható, ahol $\tilde{\mathbf{f}}^e\,(\xi) = \mathbf{N}^T\,(\xi_i,\,\eta=1)\,\mathbf{p}(\xi_i)b(\xi_i,\,\eta=1)$

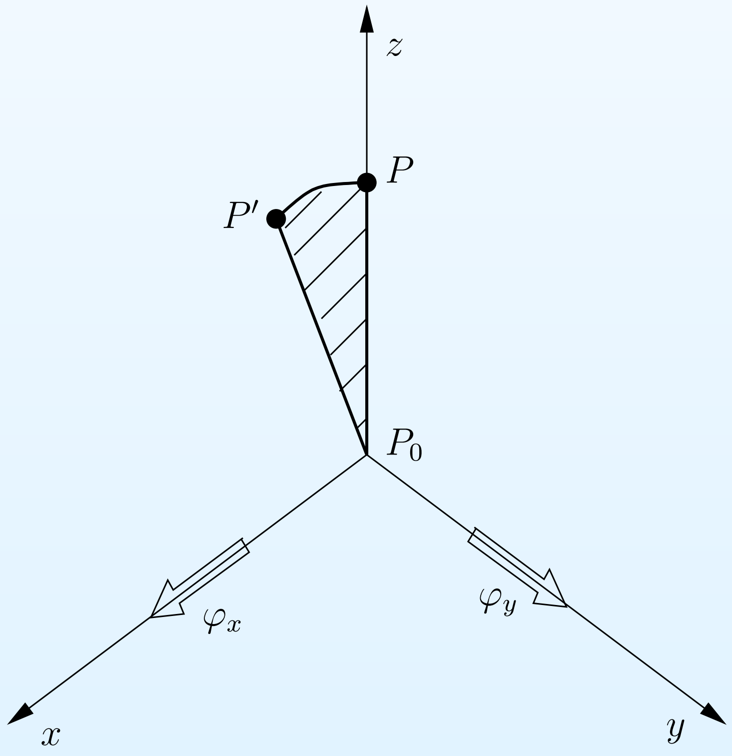
7. Lemezelemek

Geometriai hipotézis

Tételezzük fel, hogy a b vastagságú lemez középfelülete az xy síkban fekszik. A középfelületet jelölje A, míg peremét Γ. Az elmozdulásmező

$$\left.\begin{array}{c} u = u(x,y,z) = \varphi_y(x,y)z, \quad v = v(x,y,z) = -\varphi_x(x,y)z \\ w = w(x,y,z) = w_0(x,y) \end{array}\right\}$$

ahol $w_0, \quad \varphi_x, \quad \varphi_y$ a lemez középfelületén lévő pontok z irányú elmozdulása és a pont környezetének x és y tengelykörüli szögelfordulása.



Geometriai hipotézis

A fajlagos nyúlások

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z\varphi_y' = z \cdot \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

és a szögtorzulások

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \cdot \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right), \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_y$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_x$$

A fentiek alapján a lemez középfelületére merőleges egyenes szakasz a terhelés után is egyenes marad, hossza nem változik.

Geometriai hipotézis

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = z \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\kappa}} = z\boldsymbol{\kappa}$$

ahol $\boldsymbol{\kappa}$ a görbületek oszlopvektora:

$$\boldsymbol{\kappa} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

A z-től független szögtorzulások pedig a következő kételemű vektorba rendezhetők:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\partial}_{\gamma}} \begin{bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix} = \boldsymbol{\partial}_{\gamma}\mathbf{u}$$

Feszültségi hipotézis

A klasszikus lemezelmélet másik hipotézise a feszültségállapottal kapcsolatos, nevezetesen, tapasztalatok alapján nem követünk el nagy hibát, ha a σ_z feszültséget elhanyagoljuk a σ_x és σ_y mellett

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}\,, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}\,, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

ahol $G = E/2(1+\nu)$. Nyilvánvaló az $\varepsilon_z = \sigma_z = 0$ feltételek egyidejűsége ellentmond a Hooke-féle anyagegyenletnek.

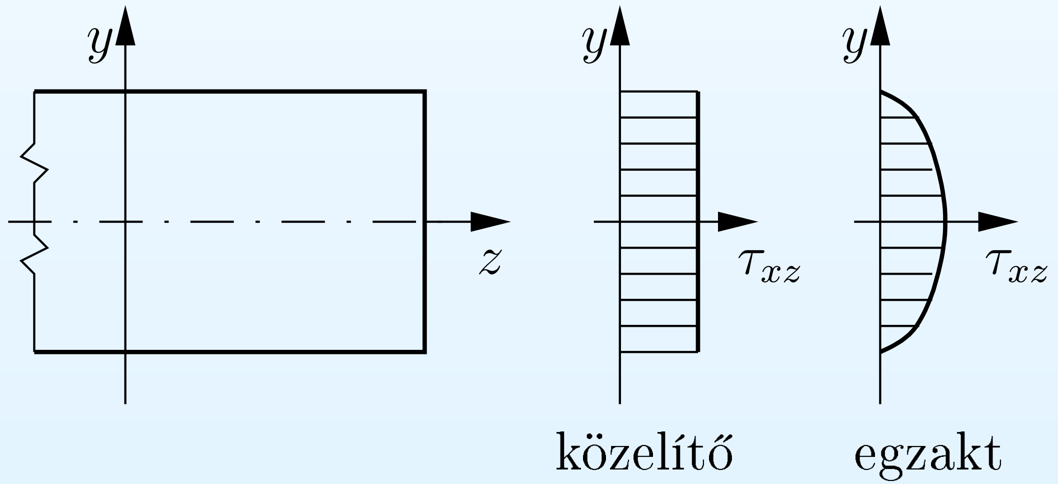
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \widetilde{\mathbf{D}}\boldsymbol{\varepsilon} = z\widetilde{\mathbf{D}}\boldsymbol{\kappa}$$

Feszültségi hipotézis

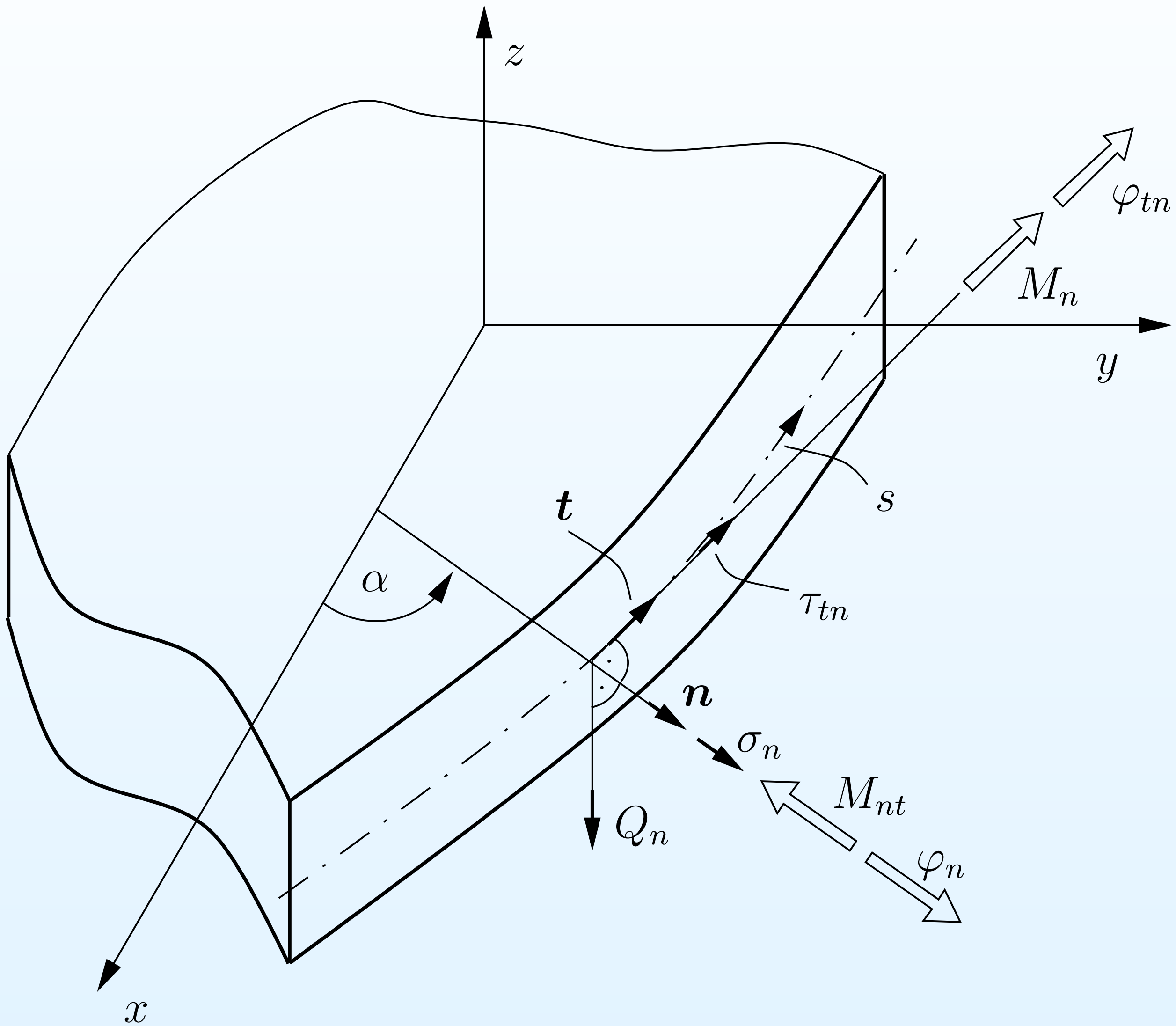
A z-től független nyírófeszültségeket mátrixosan írva:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = kG\boldsymbol{\gamma}$$

A nyírófeszültségekben szereplő k az ún. nyírási tényező, mely abból a feltételezésből határozható meg, hogy a közelítő konstans nyírófeszültséghez és az egzakt nyírófeszültséghez tartozó alakváltozási energia megegyezik. Értéke: $\frac{5}{6}$.



Erők, Nyomatékok



Erők, Nyomatékok

Értelmezve a vastagság mentén megoszló feszültségek eredőit, nyomatékait, írhatjuk, hogy

$$Q_x = -\int_{(b)} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = -\int_{(b)} \tau_{yz} dz.$$

Továbbá

$$M_x = \int_{(b)} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{(b)} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{(b)} \tau_{xy} z dz$$

amiből a felületi feszültségek (élerők)

$$Q_x = -\,k\,G\,b\left(\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad Q_y = -k\,G\,b\left(-\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Erők, Nyomatékok

A felületi feszültségpárok (élnyomatékok)

$$M_x = \frac{Eb^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial\,\varphi_y}{\partial\,x} - \nu\frac{\partial\,\varphi_x}{\partial\,y}\right), \quad M_y = \frac{Eb^3}{12(1-\nu^2)}\left(\nu\frac{\partial\,\varphi_y}{\partial\,x} - \frac{\partial\,\varphi_x}{\partial\,y}\right)$$

$$M_{xy} = Gb^3\,\frac{1}{12}\left(\frac{\partial\,\varphi_y}{\partial\,y} - \frac{\partial\,\varphi_x}{\partial\,x}\right)$$

amelyekhez az

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} M_x & M_{xy} \\ M_{yx} & M_y \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}$$

tenzor, illetve vektor is rendelhető.

Erők, Nyomatékok

A tetszőleges $\boldsymbol{n}$ normálisú és $\boldsymbol{t}$ érintőirányú síkon keletkező σ_n normál irányú és τ_{tn}, τ_{zn} csúsztató feszültség $(\boldsymbol{t} = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n})$:

$$\sigma_n = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y$$

$$\tau_{tn} = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} = (\sigma_y - \sigma_x) n_x n_y + \tau_{xy}(n_x^2 - n_y^2)$$

$$\tau_{zn} = \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y$$

$$\boldsymbol{n} = n_x \boldsymbol{e}_x + n_y \boldsymbol{e}_y \;, \quad \boldsymbol{t} = -n_y \boldsymbol{e}_x + n_x \boldsymbol{e}_y$$

ahol $n_x = \cos\alpha$, $n_y = \sin\alpha$ a felület normálisának koordinátája.

Erők, Nyomatékok

Az élnyomatékok értelmezése alapján

$$M_n = \int_{(b)} \sigma_n z dz = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{n}$$

míg

$$M_{tn} = M_{nt} = \int_{(b)} \tau_{tn} z dz = (M_y - M_x) n_x n_y + M_{xy}(n_x^2 - n_y^2) = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{n}$$

továbbá

$$Q_n = -\int_{b} \tau_{zn} dz = Q_x n_x + Q_y n_y \equiv \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{n}$$

Reissner-Mindlin féle lemez

A teljes potenciális energia

$$\pi_p = \frac{1}{2}\int\limits_A \int\limits_b \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\, dz\, dA + \frac{1}{2}\int\limits_A \int\limits_b \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\tau}\, dz\, dA - W_k$$

ahol a külső erők munkája

$$W_k = \int\limits_A wp\, dA + \int\limits_{\Gamma_p} M_n^0 \varphi_{tn} ds - \int\limits_{\Gamma_p} M_{nt}^0 \varphi_n ds - \int\limits_{\Gamma_p} Q_n^0 w_0 ds$$

mely kifejezésben p a középfelületre redukált megoszló z irányú terhelés intenzitása, $M_n^0, \quad M_{nt}^0, \quad Q_n^0$ a Γ_p^e peremen megadott értékek. A perem φ_n és φ_{tn} szögelfordulása a $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_x\, \boldsymbol{e}_x + \varphi_y\, \boldsymbol{e}_y$ vektor bevezetésével

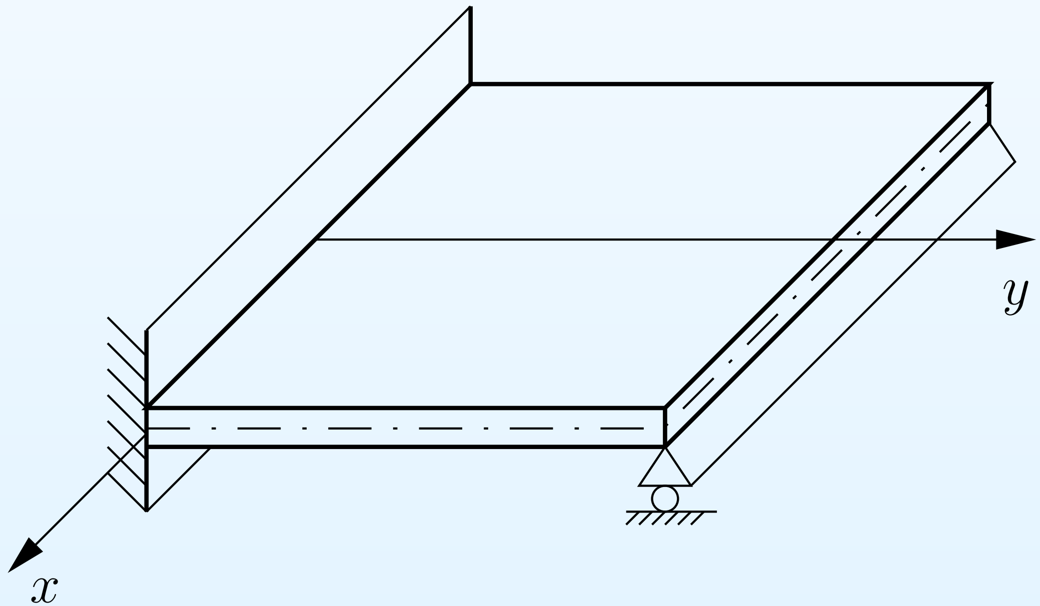
$$\varphi_n = \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{n}, \quad \varphi_{tn} = \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{t}$$

alakban állítható elő.

Peremfeltételek

A lemez megtámasztásától függően az alábbi peremfeltételeket szokás megkülönböztetni

Befogás esetén:	$w = 0, \varphi_t = \varphi_n = 0$
szabad perem esetén:	$M_n = M_{tn} = Q_n = 0$
egyszerű alátámasztás esetén:	$w = 0\ ,\ M_n = M_{tn} = 0$
vagy pedig:	$w = \varphi_n = 0\ ,\ M_n = 0$



Kirchhof-féle hipotézis, technikai lemezelmélet

Amennyiben $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x}\, z, \qquad v = -\frac{\partial w}{\partial y}\, z$$

összefüggéseket kapjuk, ami a *Kirchhoff*-féle hipotézisnek felel meg. Ebben az esetben az alakváltozási tenzor zérustól különböző elemei

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z\,, \quad \varepsilon_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z\,, \quad \gamma_{xy} = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z\,.$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = z\widetilde{\mathbf{D}}\boldsymbol{\kappa} \equiv z\tilde{\mathbf{D}} \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{D}} = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix}$$

Hibabecslés

Az elmozdulási mező alapján

$$\mathbf{u} \text{ elmozdulás} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}\,\mathbf{u} \text{ alakváltozás,} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon} \text{ feszültség.}$$

Az elmozdulás normája

$$||\mathbf{u}||_E = \sqrt{U_{alakv.}} = \left(\frac{1}{2}\int\limits_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\, dV\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\int\limits_V (\boldsymbol{\partial}\mathbf{u})^T\,\mathbf{D}\,(\boldsymbol{\partial}\mathbf{u})\;\, dV\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Legyen $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ex}$ az egzakt megoldás, $\mathbf{u}_{VEM}$ a közelítő véges elemes megoldás

$$\mathbf{e} = \mathbf{u}_{VEM} - \mathbf{u}_{ex}.$$

Az $\mathbf{e}$ hiba pontszerű értelmezése a gyakorlatban ritkán határozható meg, de a norma alapján

$$||\mathbf{e}||_E = \left[\frac{1}{2}\int\limits_V (\boldsymbol{\partial}\,\mathbf{e})\,\mathbf{D}\,(\boldsymbol{\partial}\,\mathbf{e})\;\, dV\right]^{\frac{1}{2}}$$

már léteznek matematikai megalapozottságú becslések.

Peremérték feladatok csoportjai

A peremérték feladatokat az irodalomban három csoportba szokás sorolni:

A.) típusról beszélünk, ha megoldás elegendően sima, vagyis a vizsgált tartomány szingularitásokat nem tartalmaz, azaz *analitikus* jellegű.

B.) típus esetén *szingularitásokat* tartalmaz a feladat, de ez a szinguláris hely az elem csomópontjába esik

C.) típusnál a szingularitások tetszőlegesen helyezkednek el, azaz nem esnek csomópontokba.

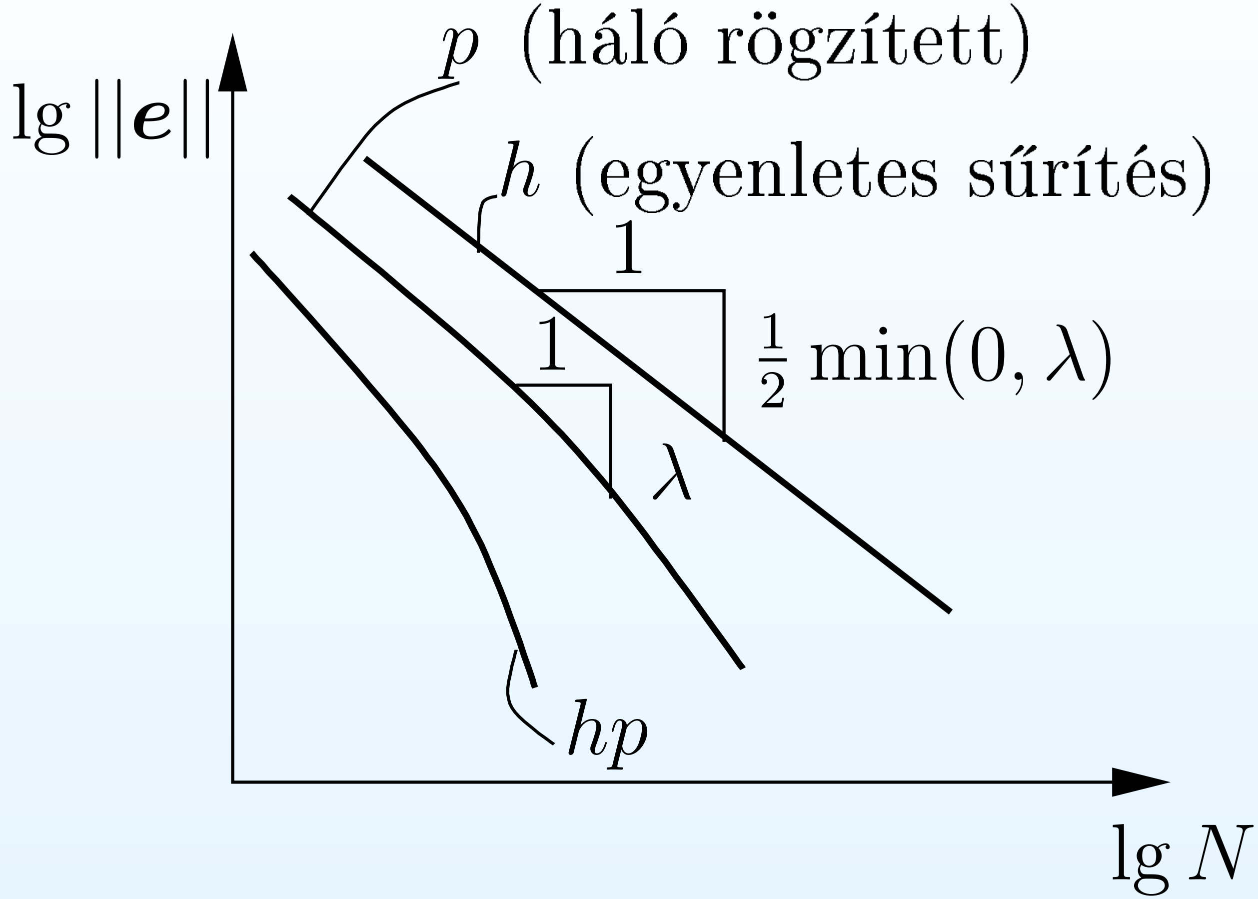
Hibabecslő összefüggések

	A	B	C
p	$\|\|\mathbf{e}\|\|_E =\leq k \cdot N^{-\frac{p}{2}}$	$\|\|\mathbf{e}\|\|_E \leq k \cdot N^{-\frac{1}{2}\min(p,\lambda)}$	$\|\|\mathbf{e}\|\|_E \leq k \cdot N^{-\frac{1}{2}\min(p,\lambda)}$
h	$\|\|\mathbf{e}\|\| \leq \left[\exp\left(-\gamma N^{\delta}\right)\right] \cdot k$ $\delta > \frac{1}{2}$	$\|\|\mathbf{e}\|\| \leq k \cdot N^{-\lambda}$	$\|\|\mathbf{e}\|\| \leq k \cdot N^{-\frac{1}{2}\lambda}$
hp		$\|\|\mathbf{e}\|\| \leq \left[\exp\left(-\gamma N^{\delta}\right)\right] \cdot k$ $\delta > \frac{1}{3}$	

A táblázatban szereplő N az ismeretlenek számát, p a közelítő polinom fokszámát, λ a szingularitás mértékét jelenti, k konstans érték.

A táblázatból látható, hogy a p-verziós közelítés gyorsabb konvergenciával rendelkezik, mint a h-verziós. A hp-verziós eljárás exponenciálisan gyors konvergenciájú még B-típusú feladatok esetén is. Ekkor a felosztást a szingularitás közelében geometria sor szerint szükséges sűríteni.

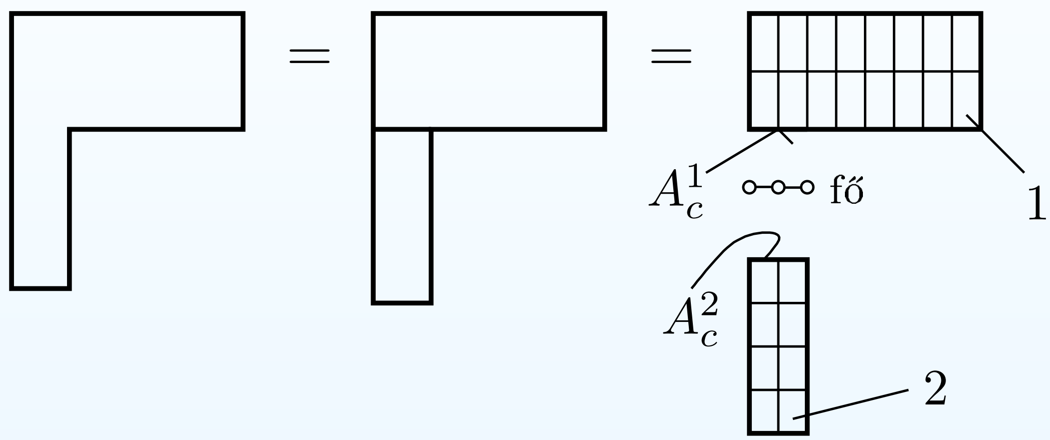
A h-, p és hp-verziós számítások konvergenciája



8. Modellezés

Alszerkezettechnika

Bonyolult szerkezetek számítására alkalmas



A teljes potenciális energia minimuma elv szerint

$$\frac{\partial \Pi_p^i}{\partial \mathbf{q}^i} = \mathbf{K}^i\,\mathbf{q}^i - \mathbf{f}^i - \mathbf{r}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bc} \\ \mathbf{K}_{cb} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_c \end{bmatrix}^i - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_c \end{bmatrix}^i - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{r}} \end{bmatrix}^i = \mathbf{0},$$

ahol $\mathbf{K}^i$ az i-edik alszerkezet merevségi mátrixa, $\mathbf{f}^i$ csomóponti redukált terhelési vektor, $\tilde{\mathbf{r}}^i$ a csatlakozásnál fellépő belső erőből (hatás-ellenhatás törvénye szerint keletkező) csomóponti vektor.

Alszerkezettechnika

A kapott mátrixegyenlet első blokksora

$$\frac{\partial \Pi_p^i}{\partial \mathbf{q}_b^i} = \mathbf{K}_{bb}^i\,\mathbf{q}_b^i + \mathbf{K}_{bc}^i\,\mathbf{q}_c^i - \mathbf{f}_b^i = \mathbf{0},$$

a belső csomópontok egyensúlyát fejezi ki, amiből

$$\mathbf{q}_b^i = \left(\mathbf{K}_{bb}^i\right)^{-1}\mathbf{f}_b^i - \left(\mathbf{K}_{bb}^i\right)^{-1}\mathbf{K}_{bc}^i\,\mathbf{q}_c^i.$$

$$\frac{\partial \Pi_p^i}{\partial \mathbf{q}_c^i} = \mathbf{K}_{cb}^i\,\mathbf{q}_b^i + \mathbf{K}_{cc}^i\,\mathbf{q}_c^i - \mathbf{f}_c^i - \tilde{\mathbf{r}}^i = \mathbf{0}$$

$$\left\{\mathbf{K}_{cc}^i - \mathbf{K}_{cb}^i\left(\mathbf{K}_{bb}^i\right)^{-1}\mathbf{K}_{bc}^i\right\}\mathbf{q}_c^i = \mathbf{f}_c^i - \mathbf{K}_{cb}^i\left(\mathbf{K}_{bb}^i\right)^{-1}\mathbf{f}_b^i + \tilde{\mathbf{r}}^i,$$

$$\mathbf{K}_{red}^i\,\mathbf{q}_c^i = \mathbf{f}_{red}^i + \tilde{\mathbf{r}}^i \quad i = 1, 2$$

Alszerkezettechnika

A hatás-ellenhatás értelmében $\tilde{\mathbf{r}}^1 = -\tilde{\mathbf{r}}^2$, továbbá a csatlakozási csomópontokban az elmozdulások azonosak, azaz

$$\mathbf{q}_c^1 = \mathbf{q}_c^2 = \mathbf{q}_c$$

A csatlakozó pontok egyensúlyát kifejező egyenletek összegzésével a következő végső egyenlethez jutunk a csatlakozó csomóponttokbeli elmozdulás meghatározására:

$$\left(\sum_i \mathbf{K}_{red}^i \right) \mathbf{q}_c = \sum_i \mathbf{f}_{red}^i$$

vagyis megkaptuk az ún. főszerkezet egyensúlyi egyenletét.

Alszerkezettechnika

A módszer előnyei: egyszerűbb az adatelőkészítés, a tipizált alkatrészek, szerkezeti egységek merevségi mátrixait, terhelési vektorait előre ki lehet számolni, azokat el lehet raktározni és újbóli számításnál a teljes rendszerbe könnyen be lehet illeszteni. Az alrészek számításánál a többprocesszorú, párhuzamos számítás technikáját is fel lehet használni jelentős időt megtakarítva. Az algebrai egyenletrendszerek megoldási idejét jelentősen befolyásoló sávszélesség minimalizálása egyszerűbb alszerkezeti szinten, mint a teljes rendszer vonatkozásában. A számítási eredmények birtokában azon részeken, ahol nem kell változtatást végrehajtani, az elraktározott $\mathbf{K}^i_{red}$, $\mathbf{f}^i_{red}$ mennyiségek újból felhasználhatók, az újraszámítást csak azon részeken kell végrehajtani, ahol a geometriában, anyagban, esetleg a terhelésben álltak be változások. Ezzel gyorsítani lehet a végső tervek elérését. Az alszerkezetekkel kezelt rendszereknél az I/O műveletek száma csökken. Gyakran a számítógépi memória korlátja miatt is előnyös használata, mivel nem kell egyszerre a teljes egyenletrendszert tárolni. A gyakorlatban, nagybonyolultságú szerkezeteknél többszintű alszerkezeti struktúra felépítése is javasolt.

Adott elmozdulás figyelembevétele

Feltételezéseink értelmében az A_u felületre kifutó végeselemek csomópontjainak elmozdulásával a teljes felületen megadott elmozdulás függvényt leírjuk. Így az elem szintjén nagyon egyszerű az adott elmozdulás figyelembevétele.
A teljes potenciális energia

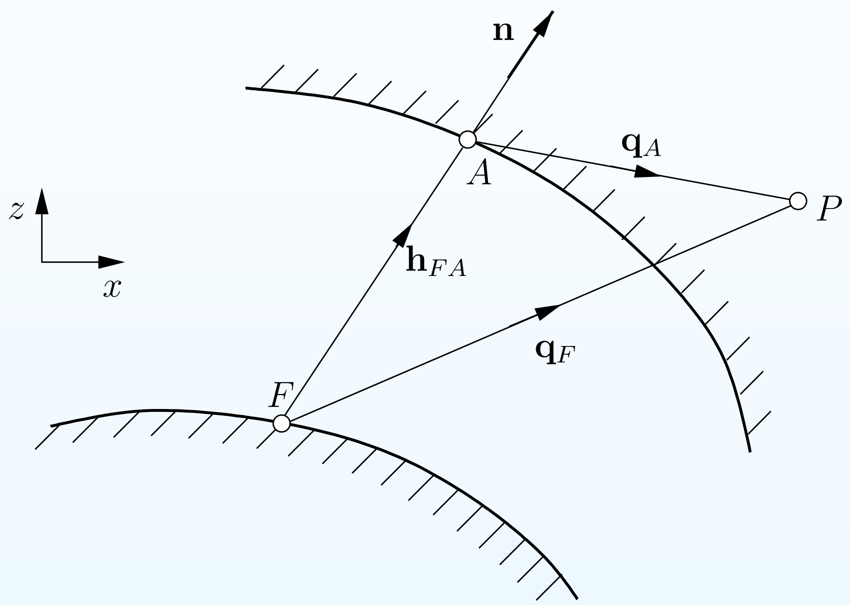
$$\Pi_p^e = \Pi_p^e\left(\mathbf{q}^e\right) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{q}_s^{e,T}\ \mathbf{q}_u^{e,T}\right]\ \left(\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{ss}^e & \bar{\mathbf{K}}_{su}^e \\ \bar{\mathbf{K}}_{us}^e & \bar{\mathbf{K}}_{uu}^e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{q}_s^e \\ \mathbf{q}_u^e \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} \mathbf{f}_s^e \\ \mathbf{f}_u^e \end{bmatrix}\right)$$

ahol $\mathbf{q}_u^e$ a $\mathbf{q}^e$csomóponti elmozdulásvektor azon része, amelynél az elmozdulások adottak, míg a $\mathbf{q}_s^e$ -el jelöljük, a szabad elmozdulásokat.
A minimalizálandó energia

$$\Pi_p = \sum_e \Pi_p^e\left(\mathbf{q}_s^e\right) = \sum_e \frac{1}{2}\mathbf{q}_s^{e,T}\ \left(\bar{\mathbf{K}}_{ss}^e\ \mathbf{q}_s^e\ - 2\left(\mathbf{f}_s^e - \mathbf{K}_{su}^e\mathbf{q}_u^e\right)\right),$$

vagyis az adott elmozdulás egy kinematikai terhelést jelent, ami arányos az adott elmozdulással $-\mathbf{K}_{su}^e\mathbf{q}_u^e$.

Adott elmozdulásmezőben fennálló szakadás, kezdeti hézag



Tételezzük fel, hogy az A és az F párbaállított csomópontok általánosított csomóponti elmozdulása között fennáll

$$\mathbf{q}_F = \mathbf{q}_A + \mathbf{h}_{FA}$$

Az A csomópontot magába foglaló e jelű elem teljes potenciális energiája

$$\Pi_p^e = \Pi_p^e\left(\mathbf{q}_A^e,\ \mathbf{q}_m^e\right) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{q}_A^{e,T}\ \mathbf{q}_m^{e,T}\right]\left(\mathbf{K}^e\begin{bmatrix}\mathbf{q}_A^e\\ \mathbf{q}_m^e\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}\mathbf{f}_A^e\\ \mathbf{f}_m^e\end{bmatrix}\right),$$

© 2007. Páczelt-Szabó-Baksa: VEM alapjai

Adott elmozdulásmezőben fennálló szakadás, kezdeti hézag

Továbbá

$$\Pi_p^e = \frac{1}{2}\left[\mathbf{q}_F^T - \mathbf{h}_{FA}^T,\ \mathbf{q}_m^{e,T}\right]\left(\mathbf{K}^e \begin{bmatrix} \mathbf{q}_F - \mathbf{h}_{FA} \\ \mathbf{q}_m^e \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} \mathbf{f}_A^e \\ \mathbf{f}_m^e \end{bmatrix}\right).$$

A merevségi mátrixot az elmozdulásvektor szerint felbontva

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{Am} \\ \mathbf{K}_{mA} & \mathbf{K}_{mm} \end{bmatrix}^e .$$

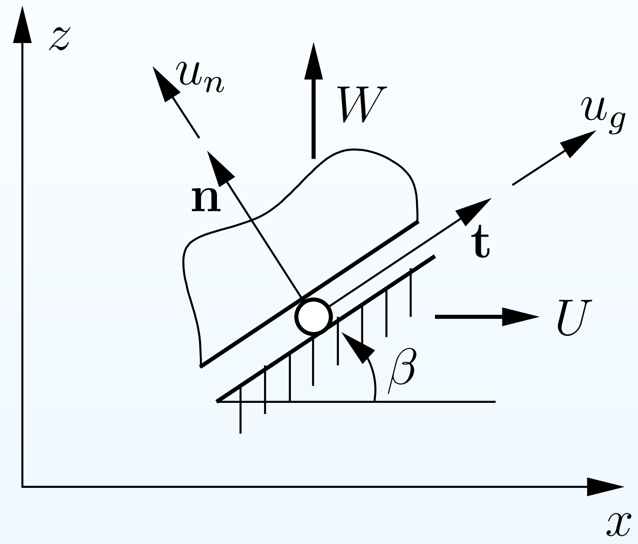
Ennek felhasználásával

$$\Pi_p^e = \Pi_p^e\left(\mathbf{q}_F,\ \mathbf{q}_m^e\right) - \left[\mathbf{q}_F^T,\ \mathbf{q}_m^{e,T}\right]\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} \\ \mathbf{K}_{mA} \end{bmatrix}^e \mathbf{h}_{FA},$$

vagyis az A pontbeli ismeretlenek F pontba való áthelyezésével az e-edik elem merevségi mátrixa nem módosul, a csomóponti terhelésé azonban igen:

$$\mathbf{f}^e_{\text{mód}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_A^e \\ \mathbf{f}_m^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} \\ \mathbf{K}_{mA} \end{bmatrix}^e \mathbf{h}_{FA}$$

Ferde hatásvonalú támasz



Az alábbi összefüggések fennállnak

$$\mathbf{q}_{Gi} = \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_g \\ u_n \end{bmatrix}$$

Mivel a görgő elmozdulásának irányára merőlegesen az $u_n = 0$, úgy az előbbi egyenlet

$$\mathbf{q}_{Gi} = \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix} [u_g] = \mathbf{T}_{Gi}\bar{\mathbf{q}}_{Gi}$$

Ferde hatásvonalú támasz

A $\mathbf{q}_G$ globális elmozdulásvektor

$$\mathbf{q}_G = \mathbf{T}_G \bar{\mathbf{q}}_G.$$

Az elem csomóponti elmozdulási vektorának két részre bontásával

$$\mathbf{q}^{e,T} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_G^{e,T} & \mathbf{q}_m^e \end{bmatrix}$$

$$\Pi_p^e = \Pi_p^e\left(\mathbf{q}_G^e,\ \mathbf{q}_m^e\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbf{q}_G^{e,T} & \mathbf{q}_m^{e,T} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{GG}^e & \mathbf{K}_{Gm}^e \\ \mathbf{K}_{mG}^e & \mathbf{K}_{mm}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_G^e \\ \mathbf{q}_m^e \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \mathbf{f}_G^e \\ \mathbf{f}_m^e \end{bmatrix} \right)$$

$$\Pi_p^e = \Pi_p^e\left(\bar{\mathbf{q}}_G^e,\ \mathbf{q}_m^e\right) =$$

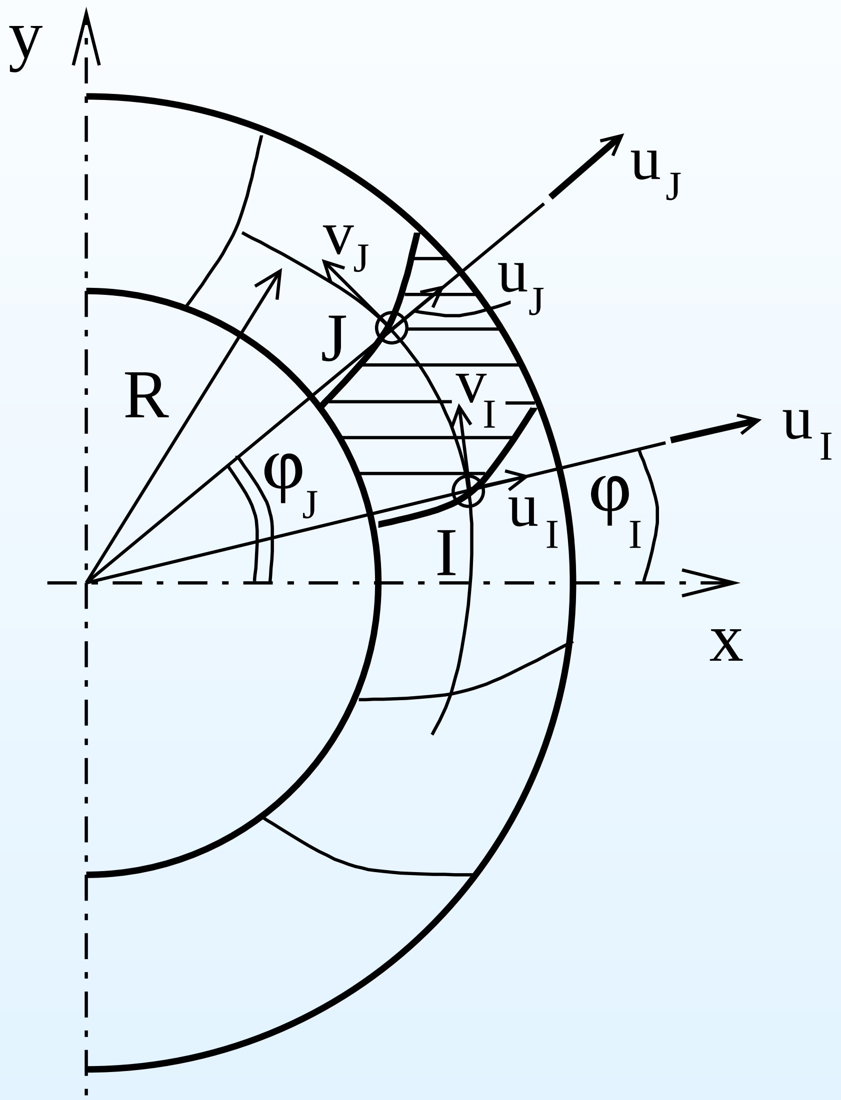
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_G^{e,T} & \mathbf{q}_m^{e,T} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{T}_G^T \mathbf{K}_{GG}^e \mathbf{T}_G & \mathbf{T}_G^T \mathbf{K}_{Gm}^e \\ \mathbf{K}_{mG}^e \mathbf{T}_G & \mathbf{K}_{mm}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_G^e \\ \mathbf{q}_m^e \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_G^T \mathbf{f}_G^e \\ \mathbf{f}_m^e \end{bmatrix} \right),$$

Periódikus szerkezet

A szimmetria és az ismétlődésből származó periodicitás figyelembevétele a számítási igények lényeges csökkenéséhez vezet, mivel a teljes szerkezet viselkedését egy kisebb rész vizsgálatával is tisztázni lehet.

Pl. egy szivattyú járókereke. A lapátok közötti rész ismétlődik. Egy felvett R sugáron a lapátokat F és A pontban metsszük el. Ehhez a pontokhoz rendre a φ_F és φ_A hengerkoordinátarendszerbeli szögek tartoznak. E szögekkel kijelölt helyi koordinátarendszerben a radiális és tangenciális elmozdulások páronként azonosak, azaz $\bar{u}_F = \bar{u}_A$ és $\bar{v}_F = \bar{v}_A$.
Jelen esetben az A és F pontok sorszámainak nagyobb távolsága miatt a végső egyenletrendszerben a sávszélesség megnő, de az ismeretlenszám lényeges csökkenése e negatívumot kompenzálja.

Periódikus szerkezet



9. Rezgéstan

Alapfogalmak

MIT IS ÉRTÜNK REZGÉSEN?

A mechanikai rendszernek az egyensúlyi helyzet környezetében ide-oda történő váltakozó mozgását rezgésnek nevezzük.

Stacionérnak nevezzük a rendszert, ha annak tulajdonságai nem változnak a vizsgált időintervallumban.

Autonom a rendszer, ha a gerjesztés explicite az időt nem tartalmazza. Rezgések ebben az esetben csak akkor lépnek fel, ha a rendszer kezdeti megzavarásával a rendszer belső energiaforrással tud rendelkezni.

Alapfogalmak

A rezgéstani folyamatokat az alábbi módon szokásos osztályozni:

- *Szabad rezgés:* Azt a rezgést, amely oly módon zajlik le, hogy külső hatás nem éri a rendszert, szabad rezgésnek nevezik. Az autonom rendszereket ez jellemzi.
- *Gerjesztett rezgés:* Külső hatás következtében előálló rezgést gerjesztett rezgésnek szokás nevezni. A nem autonom rendszereket ez jellemzi.
- *Parametrikus rezgés:* A rezgést parametrikusnak szokás nevezni, ha a rezgést a rendszer paramétereinek változása okozza. Ilyen rezgés csak nemstacionér rendszereknél állhat elő.
- *Öngerjesztő rezgés:* A rezgés által keltett energia felszabadulása által okozott rezgést öngerjesztett rezgésnek nevezik.

Alapfogalmak

A rezgés periódikus, ha a kitérés bármely értéke ismétlődik T idő eltelte után, vagyis áll $u(t+T) = u(t) \quad [mm]$, ahol T [s] a rezgés periódus ideje. Ennek reciproka a mozgás frekvenciája $f = 1/T \left[s^{-1}\right]$. A körfrekvencia

$$\alpha = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad [rad/s]$$

A rezgés frekvenciáját $[Hz]$ Hertz-ben szokás megadni.
Harmónikus rezgésnél a kitérés

$$u(t) = A\cos(\alpha t + \psi)\,,$$

ahol A, α, ψ állandó értékű paraméterek. A a rezgés amplitudója, ψ a fázisszög. A fellépő sebesség

$$v(t) = \frac{du}{dt} = -\alpha\sin(\alpha t + \psi)\,[mm/s]$$

a gyorsulás

$$a(t) = \frac{d^2u}{dt^2} = -\alpha^2 A\cos(\alpha t + \psi) \quad \left[mm/s^2\right]\,,$$

Variációs elv

D'Alambert-elv felhasználásával a test elemi részének egyensúlyát az alábbi egyenlet fejezi ki:

$$\boldsymbol{T}^e \cdot \nabla + \rho^e \left(\boldsymbol{k}^e - c_M^e \dot{\boldsymbol{u}}^e - \ddot{\boldsymbol{u}}^e\right) = 0 \qquad \boldsymbol{r} \in V^e$$

$$\boldsymbol{u}^e = \bar{\boldsymbol{u}} \qquad \boldsymbol{r} \in A_u^e$$

$$\boldsymbol{T}^e \cdot \boldsymbol{n}^e = \bar{\boldsymbol{p}} \qquad \boldsymbol{r} \in A_p^e \,.$$

$$\boldsymbol{T}^e \cdot \boldsymbol{n}^e + \boldsymbol{T}^j \cdot \boldsymbol{n}^j = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{r} \in A_c^{ej}$$

Továbbá teljesülnek az ún. kezdeti feltételek

$$u^e(t=0) = {}^0u^e \qquad \boldsymbol{r} \in V^e$$

$$\dot{u}^e(t=0) = {}^0v^e \qquad \boldsymbol{r} \in V^e$$

Variációs elv

A *Bubnov-Galjorkin*-elv alapján, a – az elmozdulásmezőktől megkövetelve a kinematikai perem- és illesztési feltétel kielégítését – írhatjuk

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{V^e} \delta\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{T}\cdot\nabla + \rho\boldsymbol{k} - \rho c_M \dot{\boldsymbol{u}} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}})\, dV - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{A_p^e} \delta\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n} - \bar{\boldsymbol{p}})dA -$$

$$- \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{A_c^{ej}} \delta\boldsymbol{u} \cdot \left(\boldsymbol{T}^e \cdot \boldsymbol{n}^e + \boldsymbol{T}^j \cdot \boldsymbol{n}^j\right)\, dA = 0$$

ahol $(\delta\,\boldsymbol{u}^2 = \delta\,\boldsymbol{u}^1 = \delta\,\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{r} \in A_c)$.
Az alábbi szorzat deriválási szabály

$$(\delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\nabla) = (\delta\boldsymbol{u}\circ\nabla)\cdot\cdot\boldsymbol{T} + \delta\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{T}\cdot\nabla)$$

és a Gauss-Osztrogradszkij tétel

$$\int_V \boldsymbol{B}\cdot\nabla dV = \int_A \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\, dV$$

segítségével

Variációs elv

Egyszerű lépések megtétele után nyerjük, hogy

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{A^e} \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}\; dA - \underline{\int_{V^e} (\delta\boldsymbol{u}\circ\nabla) \cdot\cdot\, \boldsymbol{T}\; dV} - \int_{V^e} \delta\boldsymbol{u}\cdot\rho\ddot{\boldsymbol{u}}\; dV - \int_{A_p^e} \delta\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n} - \bar{\boldsymbol{p}})\; dA +$$

$$\left. + \int_{V^e} \delta\boldsymbol{u}\cdot\left(\rho\boldsymbol{k} - \rho c_M \dot{\boldsymbol{u}}\right)\; dV - \int_{A_c^{ej}} \delta\boldsymbol{u}\cdot\left(\boldsymbol{T}^e\cdot\boldsymbol{n}^e + \boldsymbol{T}^j\cdot\boldsymbol{n}^j\right)\; dA \right\} = 0$$

Variációs elv

Tekintettel a DPF-re, az aláhúzott integrál integranduszának $\delta \boldsymbol{A}..\boldsymbol{T}$-vel való helyettesítésére, továbbá figyelembevéve, hogy az elem határoló felülete három részből tevődik össze $A^e = A^e_u + A^e_p + A^e_c$, a variációs egyenlet helyett

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{A^e_p} \delta \boldsymbol{u} \cdot \overline{\boldsymbol{p}}\, dA + \int_{V^e} \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \boldsymbol{k}\, dV \right\} - \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{V^e} \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho c_M \dot{\boldsymbol{u}} dV \right\} -$$

$$- \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{V^e} \delta \boldsymbol{A}..\boldsymbol{T} dV + \int_{V^e} \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \ddot{\boldsymbol{u}} dV \right\} = 0$$

írható.

Variációs elv

A külső terhelés virtuális munkájával

$$\delta W_k = \sum_{e=1}^{n_{el}} \{ \int_{A_p^e} \delta u \cdot \bar{p} dA + \int_{V^e} \delta u \cdot \rho k dV \}$$

a negatív belső csillapító erő virtuális munkájával

$$\delta C = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{V^e} \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho c_M \dot{\boldsymbol{u}} \, dV$$

a belső alakváltozási energia variációjával

$$\delta U_{alakv.} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{V^e} \delta \boldsymbol{A} \cdot \cdot \boldsymbol{T} \, dV$$

végezetül az előbbi egyenlet

$$\delta U_{alakv.} - \delta W_k + \delta C + \sum_e \int_{V^e} \rho \, \delta \boldsymbol{u} \cdot \ddot{\boldsymbol{u}} \, dV = 0$$

Variációs elv

A ρ sűrűség állandósága mellett áll a

$$\delta u \cdot \rho\, \ddot{\boldsymbol{u}} = \delta u \cdot \rho \frac{d\dot{\boldsymbol{u}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \dot{\boldsymbol{u}}\right) - \frac{d}{dt}(\delta \boldsymbol{u}) \cdot \rho \dot{\boldsymbol{u}}$$

azonosság. Ezt felhasználva, a $\frac{d}{dt}(\delta \boldsymbol{u}) = \delta \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \delta \dot{\boldsymbol{u}}$ variálási szabályra is tekintettel, a térfogati integrál helyett

$$\left.\begin{aligned} \int_V \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \ddot{\boldsymbol{u}} dV &= \frac{d}{dt}\int_V \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \dot{\boldsymbol{u}} dV - \int_V \delta \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \rho \dot{\boldsymbol{u}} dV \\ &= \frac{d}{dt}\int_V \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \dot{\boldsymbol{u}} dV - \delta \int_V \frac{1}{2}\rho \dot{\boldsymbol{u}}^2 dV \\ &= \frac{d}{dt}\int_V \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \dot{\boldsymbol{u}} dV - \delta E\ , \end{aligned}\right\} ,$$

írható, ahol

$$E = \frac{1}{2}\int_V \rho \dot{\boldsymbol{u}}^2 dV$$

a test kinetikus energiája.

Variációs elv

$$\delta U_{alakv.} - \delta W_k + \delta C - \delta E + \frac{d}{dt} \int \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \dot{\boldsymbol{u}} \, dV = 0,$$

Amennyiben a kapott kifejezést tetszőleges t_1 és t_2 időhatárok között integráljuk, az alábbi kifejezéshez jutunk

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U_{alakv.} - \delta W_k + \delta C - \delta E) dt - \int_{V t_1} \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \dot{\boldsymbol{u}} dV = 0$$

Megkövetelve azt, hogy az $\boldsymbol{u}$ elmozdulásmező elégítse ki a t_1 és t_2 pontbeli tényleges értékeket, azt nyerjük, hogy $\delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ a tetszőlegesen választott időintervallum határoknál, vagyis

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U_{alakv.} - \delta W_k + \delta C - \delta E) dt = 0$$

A kapott variációs egyenlet a *kiterjesztett Hamilton-féle variációs elv*hez tartozó egyenletnek felel meg.

Végeselemes modell

Az elemenbelüli elmozdulás

$$\boldsymbol{u}^e \Rightarrow \mathbf{u}^e(\mathbf{x},t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\mathbf{q}^e(t)$$

a sebesség és a gyorsulás

$$\dot{\boldsymbol{u}}^e \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}^e(\mathbf{x},t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\dot{\mathbf{q}}^e(t), \quad \ddot{\boldsymbol{u}}^e \Rightarrow \ddot{\mathbf{u}}^e(\mathbf{x},t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{q}}^e(t)$$

az alakváltozási vektor

$$\mathbf{A}^e \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x},t) = \boldsymbol{\partial}\mathbf{u}^e(\mathbf{x},t) = \mathbf{B}^e(\mathbf{x})\mathbf{q}^e(t),$$

a feszültségi vektor rugalmas anyag és viszkózus belső csillapítás feltételezésével (a kezdeti feszültséget elhanyagoljuk)

$$\mathbf{T}^e \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x},t) = \mathbf{D}^e(\boldsymbol{\varepsilon} + c_K\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)^e$$

ahol c_K belső csillapítási tényező, $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ kezdeti alakváltozási vektor, $\mathbf{D}^e$ anyagállandók mátrixa.

Végeselemes modell

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \delta \mathbf{q}^{eT} \{\mathbf{M}^e\, \ddot{\mathbf{q}}^e + \mathbf{C}^e\, \dot{\mathbf{q}}^e + \mathbf{K}^e\, \mathbf{q}^e - \mathbf{f}^e\} = 0$$

$$\mathbf{M}^e = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV\,, \qquad \mathbf{C}^e = c_M \mathbf{M}^e + c_K \mathbf{K}^e\,,$$

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}\, dV\,,$$

$$\mathbf{f}^e_{\varepsilon_0} = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \varepsilon_0 dV, \quad \mathbf{f}^e_{\rho_k} = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{k}\, dV, \quad \mathbf{f}^e_p = \int_{A^e_p} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}}\, dA$$

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}^e_{\varepsilon_0} + \mathbf{f}^e_{\rho k} + \mathbf{f}^e_p.$$

A tömeg-és a merevségi mátrixszal arányos $\mathbf{C}^e$ csillapítási mátrixot *Rayleigh-féle csillapítási mátrixnak* is szokás nevezni.

Végeselemes modell

Az elemek illesztésére vonatkozó szabály figyelembevételével rendszerre értelmezett elmozdulási paraméterek **q** vektorával

$$\delta \mathbf{q}^T \left\{ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\,\mathbf{q} - \mathbf{f} \right\} = 0$$

Az $\mathbf{M}^e$, ... mátrixok felépítése hasonló, mint a már korábban megismert $\mathbf{K}^e$ merevségi mátrixé. Vagyis, ha pl. az elem i, j ... jelű csomópontokkal, összességében n^e_{cs} számú csomóponttal rendelkezik, és csomóponti elmozdulásvektora $\mathbf{q}_i^{eT} = [u, v, w]$ három elmozduláskoordinátát tartalmaz, akkor

$$\underset{(3*n^e_{cs},3*n^e_{cs})}{\mathbf{M}^e} = \begin{bmatrix} \underset{(3,3)}{\mathbf{M}_{ii}} & \mathbf{M}_{ij} & \dots \\ \mathbf{M}_{ji} & \mathbf{M}_{jj} & \dots \\ \vdots & & \end{bmatrix}^e$$

Végeselemes modell

Végül a teljes rendszerre vonatkozó tömegmátrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \dots & M_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \sum_{e \in i,j} \mathbf{M}_{ij}^e , \quad \mathbf{M}_{ij}^e = \begin{cases} \mathbf{0} & ha\ e \notin i,j \\ \neq \mathbf{0} & ha\ e \in i,j \end{cases}$$

összefüggéssel számolható. Ugyanez áll fenn a többi mátrixra is.

Regzések osztályozása

A feladatok egyik osztálya az *autonom* rendszerrel kapcsolatos, vagyis amikor a rendszerre gerjesztés nem hat. Ekkor

$$\mathbf{f} = \mathbf{0}$$

Amennyiben $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, a rendszert *szabad, csillapítás nélkülinek* nevezzük, azaz

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

ellenkező esetben *szabad csillapításos* rendszerről beszélünk

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Amennyiben a gerjesztés is hat, a rendszert *gerjesztett* rendszernek nevezzük.

Regzések osztályozása

1. *Determenisztikus*. Az időben lejátszódó folyamatot egyértelmű függvénykapcsolat írja le.

   (a) Egyik nagy osztálya a harmónikusan változó terhelések esete. Pl.

   $$\mathbf{f} = \mathbf{f}_A \sin \omega t$$

   (b) Másik esetben a terhelések tetszőlegesen változnak időben

   $$\mathbf{f} = \mathbf{f}(t)$$

2. *Sztohasztikus* terhelések többek között gépjárműveknél, forgácsoló szerszámgépeknél, veszélyes zónában lévő épületek, létesítmények földrengéseinél fordulnak elő. A rendszer válaszadása is nyílván sztohasztikus jelleggel rendelkezik. Ezek vizsgálatával kurzusunk keretében nem fogunk foglakozni.

Szabadrezgések

Tekintsük a következő diff. egyenletrendszert

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}\,.$$

A lineáris, homogén differenciálegyenletrendszer megoldását

$$\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}} \sin \alpha t$$

alakban keressük. Ekkor a behelyettesítés után

$$(-\alpha^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

homogén algebrai egyenletrendszerhez jutunk, aminek triviálistól eltérő megoldása az együttható mátrix determinánsának eltűnésekor áll fenn, azaz

$$\det(-\alpha^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = p(\alpha^2) = 0\,.$$

A determinánst kifejtve $p(\alpha^2)$ karakterisztikus polinomhoz jutunk, λ^2-nek n a legnagyobb hatványa, azaz a kapott polinom $2n$ -ed fokú.

Szabadrezgések

A karakterisztikus egyenlet i-edik gyökét jelölje α_i, a hozzá tartozó sajátvektort $\boldsymbol{\varphi}^i$

$$(\alpha_1,\ \boldsymbol{\varphi}^1),\ (\alpha_2,\ \boldsymbol{\varphi}^2),\ldots,(\alpha_n,\ \boldsymbol{\varphi}^n)$$

sajátértékpárok meghatározása jelenik meg.
Sajátérték problémánál a megoldást

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\varphi}\sin\alpha t$$

alakban keressük. Sajátvektor a kitérés amplitúdó vektorának felel meg. Így a

$$(\mathbf{K} - \alpha_i^2\mathbf{M})\boldsymbol{\varphi}^i = \mathbf{0} \equiv \mathbf{D}(\alpha_i^2)\boldsymbol{\varphi}^i = 0$$

homogén algebrai egyenletrendszerhez jutunk, aminek triviálistól különböző megoldása a α_i determináns eltűnéséből adódik.

Szabadrezgések

Ortogonalitási tétel:
A sajátvektorok egymásra merőlegesek, amit az ún. ortogonalitási tétel fejez ki. A tétel kimondja, hogy az egymástól eltérő sajátfrekvenciákhoz tartozó sajátvektorok a tömegmátrixon belül egymásra merőlegesek.

Bizonyítás:
Induljunk ki az i-dik sajátértékre vonatkozó

$$(\mathbf{K} - \alpha_i^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\varphi}^i = \mathbf{0}$$

egyenletből. Ugyanezt α_j^2 -nél is felírva

$$(\mathbf{K} - \alpha_j^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\varphi}^j = \mathbf{0}$$

majd az egyenleteket $\boldsymbol{\varphi}^{jT}$ és $\boldsymbol{\varphi}^{iT}$-vel külön, külön megszorozva

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}^{jT}\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}^i &= \alpha_i^2\boldsymbol{\varphi}^{jT}\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}^i \, , \\ \boldsymbol{\varphi}^{iT}\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}^j &= \alpha\boldsymbol{\varphi}^{iT}\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}^j \, ,\end{aligned}$$

Szabadrezgések

a $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ szimmetria tulajdonságokat figyelembevéve, a két egyenlet különbségéből

$$0 = (\alpha_i^2 - \alpha_j^2)\boldsymbol{\varphi}^{jT}\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}^i$$

származik, amiből $\alpha^i \neq \alpha^j$ esetén $\boldsymbol{\varphi}^{jT}\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}^i = 0$ adódik, azaz

$$\boldsymbol{\varphi}^{jT}\mathbf{M}\varphi^i = \begin{cases} 0 & ha \quad i \neq j \\ 1 & ha \quad i = j \end{cases} .$$

továbbá

$$\boldsymbol{\varphi}^{jT}\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}^i = \begin{cases} 0 & ha \quad i \neq j \\ \alpha_i^2 & ha \quad i = j \end{cases} .$$

Főkoordináták

Az egyes sajátértékekhez tartozó egyenleteket egymásután sorban felírhatjuk

$$\begin{aligned}\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}^1 &= \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}^1\alpha_1^2\,,\\ \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}^2 &= \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}^2\alpha_2^2\,,\\ &\vdots\\ \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}^n &= \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}^n\alpha_n^2\,.\end{aligned}$$

Ezeket egy mátrixegyenletbe is bele tudjuk foglalni, nevezetesen

$$\mathbf{K}\left[\boldsymbol{\varphi}^1,\ \boldsymbol{\varphi}^2, ..., \boldsymbol{\varphi}^n\right] = \mathbf{M}\left[\boldsymbol{\varphi}^1\alpha_1^2,\ \boldsymbol{\varphi}^2\alpha_2^2, ..., \boldsymbol{\varphi}^n\alpha_n^2\right]$$

$$= \mathbf{M}\left[\boldsymbol{\varphi}^1,\ \boldsymbol{\varphi}^2, ..., \boldsymbol{\varphi}^n\right]\begin{bmatrix}\alpha_1^2 & & \\ & \alpha_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \alpha_n^2\end{bmatrix},$$

Főkoordináták

Bevezetve a

$$\boldsymbol{\Phi} = \left[\boldsymbol{\varphi}^1,\ \boldsymbol{\varphi}^2, ..., \boldsymbol{\varphi}^n\right] \qquad \text{és} \qquad \mathbf{S}^2 =< \alpha_1^2\,,\ \alpha_2^2\,, ..., \alpha_n^2 >$$

mátrixokat, írhatjuk

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{M}\Phi\mathbf{S}^2$$

Az egyenletet $\boldsymbol{\Phi}^T$ -vel megszorozva és felhasználva az ortogonalitást kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}^2 = \mathbf{E}\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}^2$$

vagyis az áttranszformált merevségi mátrix

$$\bar{\mathbf{K}} = \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}$$

továbbá

$$\bar{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{E}\,.$$

Főkoordináták

Képezzük az eredeti elmozdulást a sajátrezgések sorbafejtésével

$$\mathbf{q} = \sum \boldsymbol{\varphi}^i w_i = \boldsymbol{\Phi}\,\mathbf{w}$$

ahol $\mathbf{w}^T = [w_1, ..., w_i, ..., w_n]$ - vektor elemeit az elmozdulás *fő koordinátáinak* nevezzük, míg a vektort a fő koordináták vektorának.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{w} = \mathbf{0}\,, \quad \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\mathbf{w}} + \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

$$\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{S}^2\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

differenciálegyenletre vezet, amely n darab egymástól független egyenletnek felel meg az $\mathbf{S}^2$ diagonális mátrix miatt. Vagyis sikerült, a sajátrezgések és sajátvektorok birtokában a rendszer szabad rezgésének tanulmányozását visszavezetni n db egyszabadságfokú rendszer elemzésére. Az eredeti kapcsolt differenciálegyenletrendszer széteső rendszerré alakult át.

Főkoordináták

Az i -dik egyenletének megoldása

$$w_i = A_i \cos \alpha_i t + B_i \sin \alpha_i t \,, \quad i = 1, ..., n$$

amiben szereplő A_i, B_i állandókat a *kezdeti feltételekből* tudjuk meghatározni.
A vizsgálat kezdetén az időt zérusnak tekintjük. A kezdeti feltételek a kitérésre és a sebességre vonatkoznak.
Így $t = 0$ -nál

$$w_i\,(t = 0) = w_{0i}, \quad \dot{w}_i\,(t = 0) = \dot{w}_{0i}$$

A megoldást a behelyettesítve a kérdéses állandók

$$A_i = w_{0i} \,, \qquad B_i = \frac{\dot{w}_{0i}}{\alpha_i} \,.$$

Főkoordináták

Mivel a fő koordinátákkezdő értékei nem ismertek, először azokat a $\mathbf{q}_0$ és $\dot{\mathbf{q}}_0$vektorokból kell kiszámolni. Ez nagyon egyszerűen mehet végbe, hisz

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Phi w},$$

$$\mathbf{Mq} = \mathbf{M\Phi w},$$

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{Mq} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M\Phi w} = \mathbf{w},$$

ily módon

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{Mq}_0,\ \dot{\mathbf{w}}_0 = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_0,$$

vagyis $\mathbf{\Phi}^{-1}$ inverz mátrixot két mátrix szorzataként tudjuk előállítani

$$\mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}$$

A $\mathbf{q} = \mathbf{\Phi w}$ transzformáció révén az eredeti koordinátákra vonatkozó megoldást is megkapjuk.

Sajátrezgések meghatározása

A feladat a

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

differenciálegyenlethez tartozó

$$(\mathbf{K} - \alpha^2 \mathbf{M})\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

általánosított sajátérték probléma megadása.
Mátrixalgebrai ismereteinkből következik, hogy a homogén algebrai egyenletrendszernek triviálistól eltérő megoldása csak akkor áll fenn, ha az együttható mátrix determinánsa zérus, azaz

$$p(\alpha^2) = \det(\mathbf{K} - \alpha^2 \mathbf{M}) = \det \mathbf{D}(\alpha^2) = 0$$

A kapott $p(\alpha^2) = 0$ polinom tényleges felírása, nagyméretű rendszereknél lehetetlen. Sokkal gyorsabb és járhatóbb út, bár csak kisméretű feladatoknál szokásos, hogy polinom gyökhelyeit keressük meg, iterációval, α konkrét értékeinek a felvételével.

Rayleigh-hányados

A következő kifejezést *Rayleigh-féle* hányadosnak szokás nevezni.

$$R\left(\varphi^i\right) = \alpha_i^2 = \frac{\boldsymbol{\varphi}^{iT}\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}^i}{\boldsymbol{\varphi}^{iT}\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}^i}$$

- nem negatív

$$\frac{1}{2}\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = U \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} \text{ pozitív szemidefinit}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{q}} = E > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \text{ pozitív definit}$$

- $\mathbf{q}$ hosszától független
- csak az iránytól függ
- korlátos (van alsó és felső korlátja is)
- $\mathbf{q}$ szerint deriválható

Rayleigh-féle hányadosra alapozott iteráció

Kiindulva a

$$R\left(\mathbf{q}\right) = \frac{\mathbf{q}^{iT}\mathbf{K}\mathbf{q}^{i}}{\mathbf{q}^{iT}\mathbf{M}\mathbf{q}^{i}}$$

hányadosból, a $(\mathbf{K} - \alpha^2\mathbf{M})\mathbf{q} = \mathbf{0}$ elmozdulásvektort a fő koordináták rendszerébe áttranszformálva ($(\mathbf{K} - \alpha^2\mathbf{M})\mathbf{q} = \mathbf{0}$), a hányados

$$R\left(\mathbf{w}\right) = \frac{\sum\limits_i w_i^2\ \alpha_i^2}{\sum\limits_i w_i^2} = \alpha_1^2 \frac{w_1^2 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 w_2^2 + \ldots + \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^2 w_n^2}{w_1^2 + w_2^2 + \ldots} = \alpha_1^2 Q_1 .$$

Mivel $\alpha_1^2 \leq \alpha_2^2 \leq \cdots \leq \alpha_n^2$ úgy a számláló nagyobb mint a nevező, vagyis $Q_1 > 1$, azaz $R(\alpha^2) > \alpha_1^2$. Amennyiben $w_2 = w_3 = \cdots = w_n$, úgy $R(\alpha^2) = \alpha_1^2$,vagyis

$$\alpha_1^2 \leq R\left(\mathbf{w}\right).$$

Rayleigh-féle hányadosra alapozott iteráció

Másrészt

$$R\left(\mathbf{w}\right)=\frac{\sum\limits_i w_i^2\ \alpha_i^2}{\sum\limits_i w_i^2}=\ \alpha_n^2\frac{w_n^2+\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right)^2 w_{n-1}^2+...+\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_n}\right)^2 w_1^2}{w_1^2+w_2^2+...}=\alpha_n^2 Q_n$$

ahonnan $Q_n<1$ következik, ami végezetül

$$\alpha_1^2\leq R\left(\mathbf{w}\right)\leq\alpha_n^2$$

egyenlőtlenséget jelöli ki. Ilymódon a *Rayleigh-féle* hányados a legkisebb és a legnagyobb sajátkörfrekvenciák négyzetei közötti értéket veszi fel. Ha a $\mathbf{q}$ vektor ortonormált a $j=1,\ 2,\ldots,r-1$ sajátvektorra, azaz

$$\mathbf{q}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}^j=\sum_{i=1}^n w_i\boldsymbol{\varphi}^{iT}\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}^j=0,\ j=1,...,r-1,$$

akkor

$$w_i=0,\quad i=1,...,r-1.$$

Rayleigh-féle hányadosra alapozott iteráció

Ebben az esetben a hányados értéke $\alpha_r^2 \leq R(\mathbf{w}) \leq \alpha_n^2$ intervallumban fog változni.
A fenti feltételt kielégítő $\mathbf{q}$ vektort az ún. *Gramm-Smidt-féle ortoganizálás*sal tudjuk előállítani.
A tetszőlegesen felvett $\mathbf{y}$ vektorból számított

$$\mathbf{q} = \mathbf{y} - \sum_{j=1}^{r-1} \left(\boldsymbol{\varphi}^{jT} \mathbf{M} \mathbf{y}\right) \boldsymbol{\varphi}^{i}$$

Jacobi-féle módszer

A

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \alpha^2 \mathbf{M}\mathbf{q}$$

általánosított sajátérték problémából

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \alpha^2 \mathbf{q}, \quad \text{vagy} \quad \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{q} = \lambda \mathbf{q}$$

sajátértékproblémák állíthatók elő. Itt $\mathbf{A}$ és $\tilde{\mathbf{A}}$ szimmetrikusak.
Az

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}^i = \alpha_i^2 \boldsymbol{\varphi}^i$$

sajátértékproblémát megoldva $i = 1, ..., n$ esetre, tömören

$$\mathbf{A}\left[\boldsymbol{\varphi}^1, \boldsymbol{\varphi}^2, ..., \boldsymbol{\varphi}^n\right] = \left[\boldsymbol{\varphi}^1, \boldsymbol{\varphi}^2, ..., \boldsymbol{\varphi}^n\right] < \alpha_1^2, \alpha_2^2, ..., \alpha_n^2 >$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{S}^2$$

egyenlet írható fel.

Jacobi-féle módszer

A sajátvektorok ortonormált tulajdonságaiból következően

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi} = \mathbf{E},$$

továbbá

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{A}\mathbf{\Phi} = \mathbf{S}^2.$$

Tehát, ha az $\mathbf{A}$ mátrixot oly módon tudjuk átalakítani, hogy csak a főátlójában legyenek elemek, akkor ezek a számok a sajátvektorok négyzeteinek fognak megfelelni, míg az átalakításnál ($\mathbf{A}$ mátrix jobbról, balról történő szorzásánál használt mátrixok szorzata a $\mathbf{\Phi}^T$ és $\mathbf{\Phi}$ mátrixokat fogják kijelölni. Vagyis olyan szorzásokat kell választani, amivel az $\mathbf{A}$ mátrix átalakításával előálló mátrix főátlón kívüli elemei zérusok legyenek.

Jacobi-féle módszer

A jobbról és balról történő szorzás után az új mátrix

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{P}^{(1)T}\mathbf{A}\mathbf{P}^{(1)} \equiv \mathbf{P}^{(1)T}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{P}^{(1)}$$

míg általánosan a k-dik szorzás elvégzésével

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{P}^{(k)T}\mathbf{A}^{(k)}\mathbf{P}^{(k)}$$

A $\mathbf{P}^{(k)}$ permutáló mátrixot úgy kell megválasztani, pl. a p, q elemek vonatkozásában, hogy

$$\mathbf{P}^{(k)} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & p & & q & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & c & & s & \\ & & 1 & & \\ & -s & & c & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ p \\ \\ q \\ \\ \end{array} \end{array}$$

mátrixban szereplő $c = \cos\theta, \quad s = \sin\theta$ szögek az $\mathbf{A}^{(k+1)}$ mátrix $\mathbf{A}_{pq}^{(k+1)}$ elemének zérus értéket adjanak.

Vektoriteráció, Alsó (inverz) iteráció

Induljunk ki egy $\mathbf{q}_1$ vektorból. Oldjuk meg a

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_2 = \mathbf{M}\mathbf{q}_1$$

egyenletet. A $\mathbf{q}_1$ elmozdulást sajátvektorok sorbafejtésével felírva

$$\mathbf{q}_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{\varphi}^i \,, \quad \alpha_i^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}^i = \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}^i \,, \quad \mathbf{M}\sum_{i=1}^{n} c_i^i \boldsymbol{\varphi}^i = \mathbf{K}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i^2} c_i^i \boldsymbol{\varphi}^i$$

eredményre jutunk, vagyis

$$\mathbf{q}_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i^2} c_i \boldsymbol{\varphi}^i \,.$$

Vektoriteráció, Alsó (inverz) iteráció

Az iteráció folytatásával $\mathbf{K}\mathbf{q}_3 = \mathbf{M}\mathbf{q}_2$, $\mathbf{K}\mathbf{q}_4 = \mathbf{M}\mathbf{q}_3, \ldots$

$$\mathbf{q}_{k+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{\varphi}^i \frac{1}{(\alpha_i^2)^k} = \frac{1}{(\alpha_1^2)^k} \left(c_1 \boldsymbol{\varphi}^1 + c_2 \boldsymbol{\varphi}^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} \right)^k + \ldots \right).$$

A lépéseket megismételve az egymást követő $\mathbf{q}_1$ vektorok elemeinek tagonkénti hányadosa, ill. a *Rayleigh-féle* hányados

$$\lim_{k\to\infty} R(\mathbf{q}_{k+1}) = \frac{(\mathbf{q}_{k+1})_{s=1,\ldots,n}}{(\mathbf{q}_k)_{s=1,\ldots,n}} = \alpha_1^2$$

míg maga a vektor

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{q}_{k+1} \to \varphi^1$$

az első saját vektort szolgáltatja. Konkrét megvalósításnál speciális iterációt szokás alkalmazni.

Vektoriteráció, Felső iteráció

Most induljunk ki egy $\mathbf{q}_1$ vektorból. Oldjuk meg az

$$\mathbf{M}\mathbf{q}_2 = \mathbf{K}\mathbf{q}_1$$

egyenletet. A $\mathbf{q}_1$ elmozdulást sajátvektorok sorbafejtésével felírva

$$\alpha_i^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}^i = \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}^i \,, \quad \mathbf{M}\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{\varphi}^i \alpha_i^2 = \mathbf{K}\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{\varphi}^i$$

eredményre jutunk, vagyis

$$\mathbf{q}_2 = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{\varphi}^i \alpha_i^2 \ .$$

Vektoriteráció, Felső iteráció

Az iteráció folytatásával $\mathbf{M}\mathbf{q}_3 = \mathbf{K}\mathbf{q}_2, \mathbf{M}\mathbf{q}_4 = \mathbf{K}\mathbf{q}_3, \ldots$.

$$\mathbf{q}_{k+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{\varphi}^i (\alpha_i^2)^k = (\alpha_n^2)^k \left(c_n \boldsymbol{\varphi}^n + c_{n-1} \boldsymbol{\varphi}^{n-1} \left(\frac{\alpha_{n-1}^2}{\alpha_n^2} \right)^k + \ldots \right).$$

A lépéseket megismételve

$$\lim_{k\to\infty} R(\mathbf{q}_{k+1}) = \alpha_n^2, \quad \lim_{k\to\infty} \mathbf{q}_{k+1} \to \boldsymbol{\varphi}^n$$

Ezt az iterációt *felső* iterációnak szokás nevezni, mivel a felső frekvenciák meghatározására alkalmas.

Gerjesztett rezgések

gépek, berendezések működésük során időben változó terheléssel terheltek. Ezek egy része külső erőhatásból (pl. futódarú terhet emel) származhat, technológiai folyamatból (pl. esztergálásnál keletkező forgácsoló erő), a környezetről átadódó mozgásokból (pl. gépek talajjal érintkező részei, a más gépekről a talajra átadódó erőhatások miatt mozognak) vagy akár a működés közbeni belső geometriai kapcsolatok, hőmérsékleti mezők változásaiból.

Tömören, csak a szabad paraméterek vonatkozásában felírható mozgásegyenlet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t)$$

Harmónikusan gerjesztett rendszer (csillapítás nélkül)

Vizsgálatainkat a harmonikus gerjesztés esetével kezdjük, ekkor

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_A \sin(\omega\, t + \psi)$$

terhelést feltételezve, ahol $\mathbf{f}_A$ a terhelés amplitudója, a megoldás

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_A \sin(\omega\, t + \psi).$$

A deriválások elvégzése után

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{q}_A = \mathbf{f}_A$$

algebrai egyenlethez jutunk, amiből a

$$\mathbf{Z}(\omega^2) = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$$

dinamikai merevségi mátrix.

Harmónikusan gerjesztett rendszer

Feltéve, hogy

$$\omega^2 \neq \alpha_i^2 \qquad (i = 1, ..., n) \quad \text{és} \qquad \det \mathbf{Z}(\omega^2) \neq 0$$

$$\mathbf{q}_A = (\mathbf{Z}(\omega))^{-1} \mathbf{f}_A \equiv \mathbf{H}(\omega)\mathbf{f}_A \,,$$

ahol $\mathbf{H}(\omega)$ dinamikai hatásmátrix.
A fő koordináták révén áll a

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Phi}\mathbf{w}$$

transzformáció. Az amplitudók vonatkozásában

$$\mathbf{q}_A = \mathbf{\Phi}\mathbf{w}_A$$

összefüggés van érvényben, mellyel

$$\left(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} - \omega^2\, \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi}\right) \mathbf{w}_A = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{f}_A \quad .$$

Harmónikusan gerjesztett rendszer

A sajátvektorok tömeg- és merevségi mátrixra vonatkozó ortogonalítás alapján

$$(\mathbf{S}^2 - \omega^2 \mathbf{E})\mathbf{w}_A = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{f}_A \quad .$$

A kapott diagonál mátrixot $\mathbf{\Lambda}$-val jelölve

$$\mathbf{\Lambda} = \left\langle \alpha_1^2 - \omega^2, \alpha_2^2 - \omega^2, ..., \alpha_n^2 - \omega^2 \right\rangle$$

annak inverze

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \left\langle \frac{1}{\alpha_1^2 - \omega^2}, \frac{1}{\alpha_2^2 - \omega^2}, ..., \frac{1}{\alpha_n^2 - \omega^2} \right\rangle$$

vagyis

$$\mathbf{w}_A = \mathbf{\Lambda}^{-1} \, \mathbf{\Phi}^T \mathbf{f}_A$$

amiből a kitérés amplitudó vektora

$$\mathbf{q}_A = \mathbf{\Phi} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{f}_A$$

Harmónikusan gerjesztett rendszer – Rezonancia

A kapott eredmény a dinamikai merevségi mátrix inverze, a dinamikai hatásmátrix

$$\mathbf{H}(\omega) = (\mathbf{Z}(\omega))^{-1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{\Phi}^T =$$

$$= \left[\boldsymbol{\varphi}^1, \boldsymbol{\varphi}^2, ..., \boldsymbol{\varphi}^n\right] \left\langle \frac{1}{\alpha_1^2 - \omega^2}, \frac{1}{\alpha_2^2 - \omega^2}, ..., \frac{1}{\alpha_n^2 - \omega^2} \right\rangle \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^{1T} \\ \boldsymbol{\varphi}^{2T} \\ \\ \boldsymbol{\varphi}^{nT} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{\varphi}^i \boldsymbol{\varphi}^{iT}}{\alpha_i^2 - \omega^2}$$

Ennek visszahelyettesítése után

$$\mathbf{q}_A = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\varphi}^i \frac{\boldsymbol{\varphi}^{iT} \mathbf{f}_A}{\alpha_i^2 - \omega^2} \equiv \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\varphi}^i g_i \quad .$$

A kapott eredmény jól mutatja, ha $\omega = \alpha_i \quad (i = 1, ..., n)$ rezonancia fog fellépni, ami idővel végtelen nagy kitéréshez, a szerkezet tönkremeneteléhez vezet.

Nem harmónikus gerjesztés vizsgálata

Kiindulva a csillapítatlan rendszer mozgásegyenletéből

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}\,,$$

A sorbafejtés segítségével

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Phi}\mathbf{w}$$

Ekkor a szokásos átalakítással

$$\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{K}\mathbf{\Phi}\mathbf{w} = \mathbf{f}\,,$$

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi}\mathbf{w} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{f} \equiv \bar{\mathbf{f}}$$

$$\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{S}^2\mathbf{w} = \bar{\mathbf{f}}\,,$$

ami valójában

$$\ddot{w}_i + \alpha_i^2 w_i = \bar{f}_i \quad i = 1, ..., n$$

Nem harmónikus gerjesztés vizsgálata

Tehát az egyszabadságfokú rendszer megoldása alapján

$$w_i = w_{0i}\cos\alpha_i t + \frac{\dot{w}_{0i}}{\alpha_i}\sin\alpha_i t + \frac{1}{\alpha_i}\int\limits_0^t \bar{f}_i(\tau)\sin\alpha_i(t-\tau)d\tau \quad i = 1, ..., n$$

A kezdeti $\mathbf{w}_0$ és $\dot{\mathbf{w}}_0$ főkoordináta vektor értékeket az eredeti rendszer mozgásának leírására szolgáló $\mathbf{q}$ vektorra vonatkozó feltételből kell meghatározni.

$$\sin\mathbf{S}t = \langle\sin\alpha_1 t, \quad \sin\alpha_2 t, ..., \sin\alpha_i t, ..., \sin\alpha_n t\rangle$$

diagonál mátrixot $(\sin\leftrightarrow\cos)$, a kezdeti feltételek fő koordinátákra vonatkozó

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0\,, \qquad \dot{\mathbf{w}}(0) = \dot{\mathbf{w}}_0$$

vektorait, tömörebben

$$\mathbf{w} = \cos\mathbf{S}t\;\mathbf{w}_0 + \mathbf{S}^{-1}\sin\mathbf{S}t\;\dot{\mathbf{w}}_0 + \int\limits_0^t \mathbf{S}^{-1}\sin\mathbf{S}(t-\tau)\bar{\mathbf{f}}(\tau)d\tau$$

alakban írható fel.

Nem harmónikus gerjesztés vizsgálata

Ennek ismeretében az eredeti elmozdulási paraméterek

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Phi w}\,, \quad \mathbf{Mq} = \mathbf{M\Phi w}\,, \quad \mathbf{\Phi Mq} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M\Phi w} = \mathbf{w}\,,$$

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{q}_0\,, \quad \dot{\mathbf{w}}_0 = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_0\,, \quad azaz \quad \mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\,.$$

De a gyakorlati megfigyelések alapján az n tagú sorbafejtés helyett elegendő – a terhelés időbeli lefutásától függően – a sorbafejtés néhány első tagját venni csak mivel a sorbafejtés magasabb sorszámú tagjainak a hatása egyre kisebb.

Ezt figyelembevéve az alkalmazott transzformáció

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{q}} = \underset{(n,k)}{\tilde{\mathbf{\Phi}}}\;\underset{(k,1)}{\tilde{\mathbf{w}}}\,, \qquad 0 < k < n$$

A mozgásegyenletet ismételten át tudjuk transzformálni az új $\tilde{\mathbf{w}}$ korlátozott számú főkoordináták rendszerébe.

Lényeges előnye ennek megoldásnak az, hogy a $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ mátrix (n,k) mérete miatt, csak k számú sajátértékproblémát kell előzetesen megoldani, és nem n számút.

Csillapított rendszerek esete

A vizsgálandó rendszer

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f},$$

ahol a csillapítások hatását hordozó $\mathbf{C}$ mátrix a tömeg és a merevségi mátrixszal arányos

$$\mathbf{C} = c_M\mathbf{M} + c_K\mathbf{K}$$

Áttérve a

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Phi}\mathbf{w}$$

főkoordináták rendszerébe, kapjuk, hogy

$$\left(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi} = c_M\mathbf{E} + c_K\mathbf{S}^2\right)$$

$$\ddot{\mathbf{w}} + (c_M\mathbf{E} + c_K\mathbf{S}^2)\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{S}^2\mathbf{w} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}}.$$

alakba írható át, vagyis egy széteső differenciálegyenlet-rendszerhez jutottunk,

Csillapított rendszerek esete

A j-dik egyenlet

$$\ddot{w}_j + (c_M + c_K\alpha_j^2)\dot{w}_j + \alpha_j^2 w_j = \bar{f}_j \quad j = 1, \dots, n,$$

amelyben a

$$c_M + c_K\alpha_j^2 = 2\xi\alpha_j$$

összefüggés a ξ a *Lehr-féle* csillapítás definicióját szolgáltatja.
A főkoordináták rendszerébe áttranszformált differenciálegyenlet megoldását közvetlen fel tudjuk írni:

$$w_j(t) = e^{-\beta_j t}\left(w_{oj}\cos\nu_j t + \frac{\beta_j w_{0j} + \dot{w}_{0j}}{\nu_j}\sin\nu_j t\right)$$

$$+\frac{1}{\nu_j}\int\limits_0^t \bar{f}_j\,(\tau)\;e^{-\beta_j(t-\tau)}\;\sin\nu_j\,(t-\tau)\;d\tau$$

ahol $w_{0j} = w_j(0)$, $\dot{w}_{0j} = \dot{w}_j(0)$ a kezdeti elmozdulás és sebesség, és $\nu_j = \sqrt{\alpha_j^2 - \beta_j^2}$, $\beta_j = \alpha_j\xi$.

Csillapított rendszerek esete

Bevezetve a kezdeti feltételek vektorait $\mathbf{w}_0, \dot{\mathbf{w}}_0$ a

$$\beta^T = \langle \beta_1, ..., \beta_j, ..., \beta_n \rangle , \qquad \nu^T = \langle \nu_1, ..., \nu_j, ..., \nu_n \rangle$$

$$\cos \nu t = \langle \cos \nu_1 \ t, ..., \cos \nu_n t \rangle \quad (\cos \ \leftrightarrow \sin)$$

$$\exp(-\beta(t-\tau)) = \left\langle e^{-\beta_1(t-\tau)}, ..., e^{-\beta_j(t-\tau)}, ..., e^{-\beta_n(t-\tau)} \right\rangle$$

$$\mathbf{w}(t) = \exp(-\boldsymbol{\beta} t) \left[(\cos \boldsymbol{\nu} t + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\nu}^{-1} \sin \boldsymbol{\nu} t) \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\nu}^{-1} \sin \boldsymbol{\nu} t \ \dot{\mathbf{w}}_0 \right] +$$

$$+ \nu^{-1} \int\limits_0^t \exp\left(-\boldsymbol{\beta}(t-\tau)\right) \sin \boldsymbol{\nu}(t-\tau) \bar{\mathbf{f}}(\tau) d\tau \quad .$$

A kezdeti értékek a $\mathbf{q}_0$ és $\dot{\mathbf{q}}_0$

$$\mathbf{w}_0 = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0, \qquad \dot{\mathbf{w}}_0 = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0$$

a szokásos összefüggések alapján számolhatók.

A mozgásegyenlet közvetlen integrálása

A mozgásegyenlet egy másodrendű differenciálegyenlet rendszer:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}\,(t)\,.$$

Cél a differenciálegyenletet diszkrét időpillanati kielégítése, és az időlépések közötti gyorsulás megváltozásának feltétele.

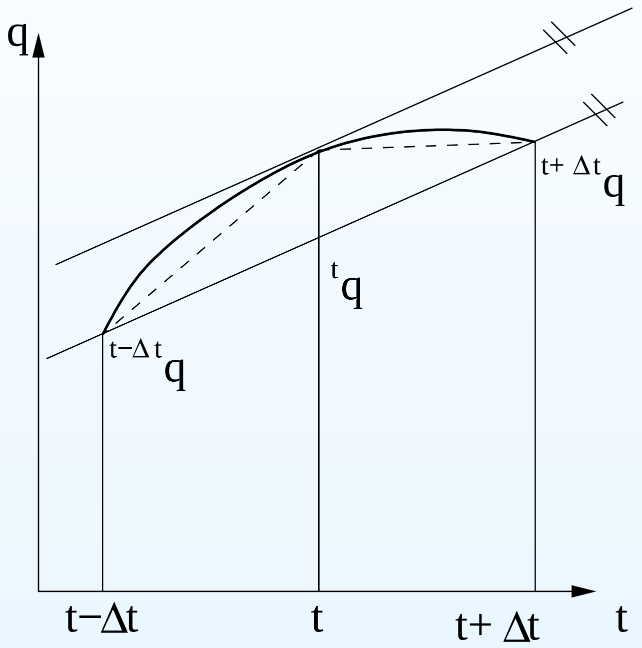
- időlépésenként elégítjük ki az egyenletet (azaz időben is diszkrét pontokat nézünk)
- a felvett feltételből következő időlépésen belüli vizsgálat. Ahhoz, hogy $\dot{\mathbf{q}}$ és $\ddot{\mathbf{q}}$ -t kiszámíthassuk, feltételezéseket kell tenni. Alapvetően ezek a hipotézisek, feltételezések szabják meg a megoldási módszert. Így beszélünk pl. *Differencia*- és *Newmark*-módszerről.

Az eljárások nagy számítási igényeik miatt előnyösen számítógéppel hajthatók végre. Ezzel kapcsolatban további kérdések merülnek fel:

- mennyi a megoldás időszükséglete?
- milyen a kapott megoldás pontossága?
- milyen az eljárás stabilitása?

Differencia módszer

Az eljárás másodrendűen pontos és feltételesen stabil.



$$ {}^{t}\dot{q} = \frac{{}^{t+\Delta t}q - {}^{t-\Delta t}q}{2\Delta t} $$

$$ {}^{t}\ddot{q} = \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{{}^{t+\Delta t}q - {}^{t}q}{\Delta t} - \frac{{}^{t}q - {}^{t-\Delta t}q}{\Delta t}\right] = \frac{1}{\Delta t^2}\left[{}^{t+\Delta t}q - 2\,{}^{t}q + {}^{t-\Delta t}q\right] $$

Differencia módszer

A t időpillanatra vonatkoztatjuk a mozgásegyenletet:

$$\mathbf{M}\,{}^{t}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\,{}^{t}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\,{}^{t}\mathbf{q} = {}^{t}\mathbf{f},$$

majd az alábbi lineáris algebrai egyenletrendszert kapjuk meg az ismeretlen ${}^{t+\Delta t}\mathbf{q}$ elmozdulásra

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\,\Delta t}\mathbf{C}\right)\,{}^{t+\Delta t}\mathbf{q} = {}^{t}\mathbf{f} - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\,{}^{t}\mathbf{q} - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} - \frac{1}{2\,\Delta t}\mathbf{C}\right)\,{}^{t-\Delta t}\mathbf{q}$$

Ebből formálisan kifejezhető az ismeretlen elmozdulás a $t + \Delta t$ időpillanatban a korábban meghatározott elmozdulás vektorok függvényeként

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{q} = f\left(\ldots,{}^{t}\,\mathbf{q},{}^{t-\Delta t}\mathbf{q}\right)$$

mely alapján az eljárást *explicit-módszer*nek nevezzük.

Differencia módszer – Az eljárás indítása

A $t = 0$ illetve a $t = -\Delta t$ helyen a $\mathbf{q}$ elmozdulás vektor ismerete szükséges

$$^{0}\mathbf{q}, \quad {}^{-\Delta t}\mathbf{q} = ?$$

A kezdeti feltételből adódóan ismert

$$t = 0 \quad : \qquad \mathbf{q}(t=0) = {}^{0}\mathbf{q}, \quad \dot{\mathbf{q}}(t=0) = {}^{0}\dot{\mathbf{q}}$$

A gyorsulás kiszámolható

$$\mathbf{M}\,{}^{0}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\,{}^{0}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\,{}^{0}\mathbf{q} = {}^{0}\mathbf{f} \;\;\rightarrow\;\; {}^{0}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\left({}^{0}\mathbf{f} - \mathbf{C}\,{}^{0}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}\,{}^{0}\mathbf{q}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} {}^{0}\dot{\mathbf{q}} = \frac{{}^{\Delta t}\mathbf{q} - {}^{-\Delta t}\mathbf{q}}{2\,\Delta t} \quad \rightarrow \quad {}^{\Delta t}\mathbf{q} = 2\,\Delta t\,{}^{0}\dot{\mathbf{q}} + {}^{-\Delta t}\mathbf{q} \\ {}^{0}\ddot{\mathbf{q}} = \frac{1}{\Delta t^2}\left({}^{\Delta t}\mathbf{q} - 2\,{}^{0}\mathbf{q} + {}^{-\Delta t}\mathbf{q}\right) \end{array}\right\}$$

Differencia módszer – Az eljárás indítása

$$ {}^{0}\ddot{\mathbf{q}}\,\Delta t^2 = {}^{\Delta t}\mathbf{q} - 2\,{}^{0}\mathbf{q} + {}^{-\Delta t}\mathbf{q} = 2\,\Delta t\,{}^{0}\dot{\mathbf{q}} + {}^{-\Delta t}\mathbf{q} - 2\,{}^{0}\mathbf{q} + {}^{-\Delta t}\mathbf{q} $$
$$ \rightarrow \quad {}^{-\Delta t}\mathbf{q} = {}^{0}\mathbf{q} - \Delta t\,{}^{0}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\Delta t^2}{2}\,{}^{0}\ddot{\mathbf{q}} $$

Egy speciális helyzet áll elő, ha $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ továbbá $\mathbf{M}$ diagonális, akkor ezáltal a feladat könnyen kezelhetővé válik.

$$ \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\,{}^{t+\Delta t}\mathbf{q} = {}^{t}\mathbf{f} - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\,{}^{t}\mathbf{q} - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\,{}^{t-\Delta t}\mathbf{q}\;\left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\,{}^{t+\Delta t}\mathbf{q} = {}^{t}\tilde{\mathbf{f}} $$

Mivel a tömegmátrix diagonális

$$ \mathbf{M} = \langle m_{11}\, m_{22}\, \ldots\, m_{nn} \rangle \;, \quad m_{ii} > 0 $$

az ismeretlen elmozdulás vektor i-dik koordinátája könnyen kifejezhető

$$ {}^{t+\Delta t}q_i = {}^{t}\tilde{f}_i \frac{\Delta t^2}{m_{ii}} $$

Differencia módszer – Időlépés megválasztása

Az eljárás nagy előnye, hogy a $\mathbf{K}$ merevségi mátrixot nem kell invertálni, sőt összeszerkeszteni sem szükséges, mert a szorzás az elem szintjén is végrehajtható:

$$\mathbf{K}\,{}^t\mathbf{q} = \sum_e \mathbf{K}^e\,{}^t\mathbf{q}^e$$

Az eljárás feltételesen stabil, ez azt jelenti, hogy az időlépés kisebb kell legyen mint a csillapítatlan rezgőrendszer legnagyobb sajátrezgéshez tartozó periódus idő π-ed része

$$\Delta t < \frac{T_n}{\pi}$$

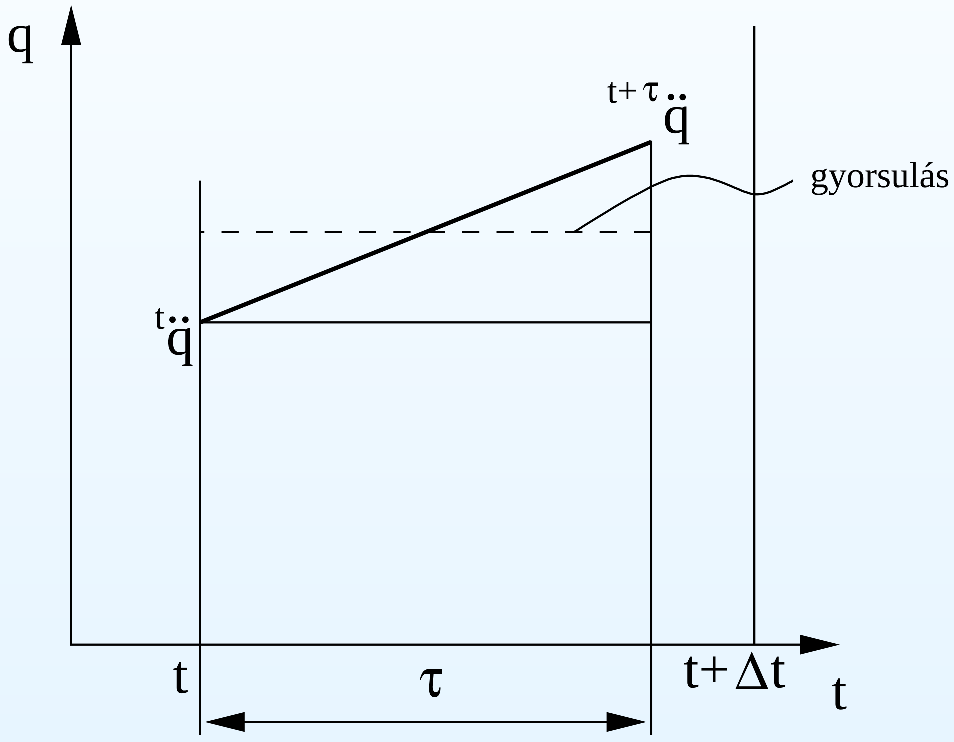
ahol T_n a legnagyobb sajátrezgés periódus ideje

$$T_n = \frac{2\pi}{\alpha_n}, \qquad [\alpha_n] = \frac{rad}{s}.$$

A Δt-re nagyobb értéket megválasztva a kitérések egyre növekednek, a megoldás nem adja vissza a fizikai valóságot.

Newmark-féle módszer

Az eljárás alapváltozata az intervallumonkénti súlyozott gyorsulás feltételezésére épül.



Newmark-féle módszer

Nem részletezve a levezetést a sebességre és az elmozdulásra az alábbi két összefüggést kapjuk:

$$^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{q}} = {}^{t}\dot{\mathbf{q}} + (1-\gamma)\,(\Delta t)\;{}^{t}\ddot{\mathbf{q}} + \gamma\,\Delta t\;{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{q}}, \quad \gamma \geq \frac{1}{2}$$

$$^{t+\Delta t}\mathbf{q} = {}^{t}\mathbf{q} + \Delta t\,{}^{t}\dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)(\Delta t)^2\;{}^{t}\ddot{\mathbf{q}} + \beta\,(\Delta t)^2\;{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{q}}, \quad \beta \geq \frac{1}{4}$$

A számítás a választott súlyozó β, γ tényezőktől függően feltételesen stabil avagy feltételnélkülien stabil. Maga a módszer *implicit*.

Stabilitás

Az integráló eljárások stabilitása azért vetődik fel, mert az időlépésenkénti előrehaladás során, elképzelhető, hogy egyre távolabb kerülve a pontos megoldástól, a számítógép számábrázolását is figyelembe véve, a számok túlcsordulhatnak.

Az explicit eljárások formálisan felírhatók a következő alakban is

$$
{}^{t+\Delta t}\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{t}\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \mathbf{L}\,{}^{t+\Delta t}\mathbf{f}
$$

Ha a terhelés hatásától eltekintünk, akkor az integrálás a megoldás vektor ismételt transzformációjaként interpretálható

$$
{}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\,{}^{t}\hat{\mathbf{q}}
$$

A transzformáció a megoldási vektort akkor nagyítja, ha van olyan sajátértéke, amelyik nagyobb, mint 1, és akkor kicsinyíti a megoldást, ha minden sajátérték kisebb mint 1. A numerikus integráló eljárás tehát stabil, ha

$$
\rho\left(\mathbf{A}\right) \leq 1
$$

Newmark módszer stabilitása

A választott γ és β tényezőktől függ. Ennek értelmében a $\gamma = \frac{1}{2}$ és $\beta = \frac{1}{4}$ trapéz formula feltétel nélkül stabil és energia konzervatív, azaz megőrzi a bevitt energiát. $\gamma < \frac{1}{2}$ -nél a számítás instabil. A feltételesen stabil altartományban áll:

$$(\gamma + 0.5)^2 - 4\beta \leq \frac{4}{\alpha_n^2 \, \Delta t^2}$$

illetve a határgörbén

$$\beta = \frac{1}{16} + \frac{(\gamma^2 + \gamma)}{4}.$$

Vizsgálatok folytathatók az amplitudó és a rezgésperiódikus idejének pontatlansága tárgyában is. A következő táblázat összegzi az eredményeket, ahol α_n jelöli a vizsgált rendszer legnagyobb sajátkörfrekvenciájának az értékét, T a harmónikus rezgésidő exakt értékét, ΔT az eltérés értékét.

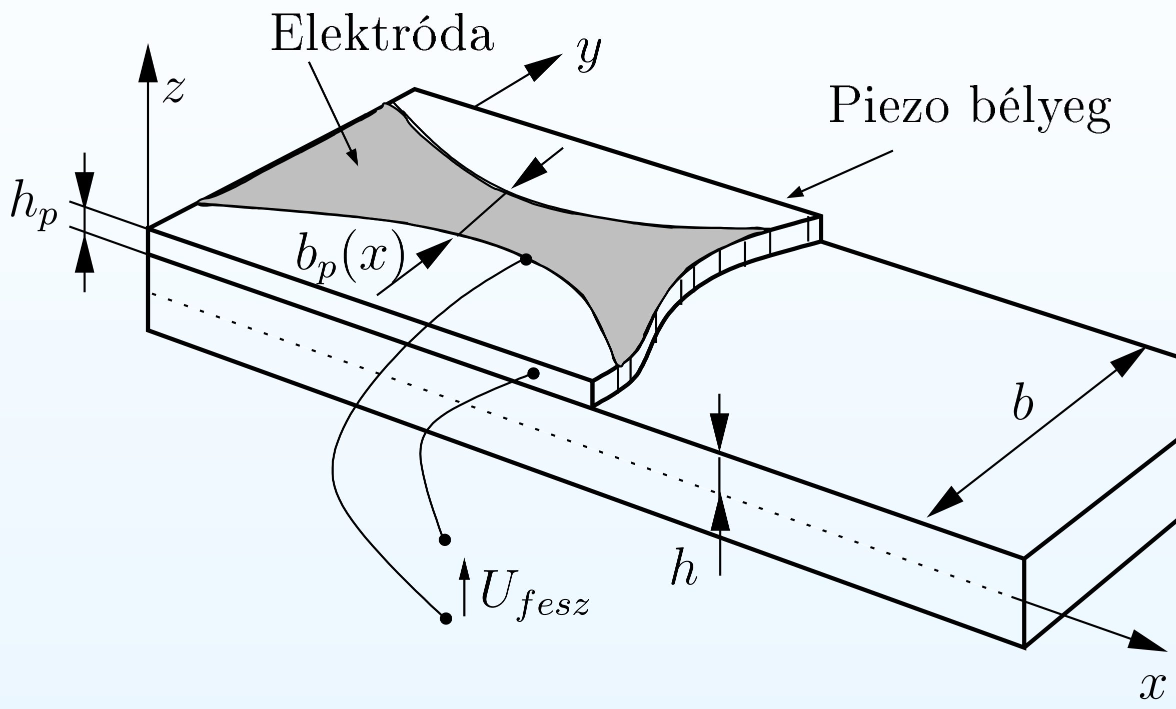
Megoldási módszerek összefoglalása

Algoritmus	γ	β	Időlépés hossz határa $\alpha_n \Delta t$	Amplitudó hiba	Periodicitási hiba $\frac{\Delta T}{T}$
Tiszta explicit explicit	0	0	0	$\frac{\alpha_n^2 \ \Delta t^2}{4}$	0
Centrális diff. m.	0.5	0	2	0	$-\frac{\alpha_n^2 \ \Delta t^2}{24}$
Lineáris gyorsulás	0.5	1/6	3.46	0	$\frac{\alpha_n^2 \ \Delta t^2}{24}$
Trapéz-m. (átlag gyorsulás)	0.5	0.25	∞	0	$\frac{\alpha_n^2 \ \Delta t^2}{12}$

Láthatóan a centrális differencia módszer feltételesen stabil, rövidebb periódus időt szolgáltatva, míg a tarpéz féle módszer feltételnélküli számítást tesz lehetővé, hosszabb periódus időt adva. A tiszta explicit módszer habár feltétel nélkül stabil, de az eredmények jelentős amplitudó hibával lesznek terhelve.

10. Intelligens szerk.

Példa



Smart materials

Léteznek olyan anyagok (*smart materials*) amelyek magában a szerkezeti elemekkel együttesen mozognak, deformálódnak.

1. Emlékező anyagok 5%-os nyúlást tudnak elszenvedni a hőmérséklet változás hatására. Alacsony frekvenciáknál és pontosság elérésénél használatosak pl. NITIOL
2. Piezoelektromos anyagok amelyek 0.1%-os nyúlásig dolgoznak, egyrészt mérőeszközként (a nyúlás hatására az anyagban elektromos feszültség alakul ki), ill. végrehajtóként (az elektromos feszültség hatására az anyag deformálódik). A Polimer és kerámia anyagok szolgálnak e célra, így *polyvinylidene fluo*ride (PVF_2). A kerámiák közül a Zirconat és Titánból készült (PZT) jelzésű anyagok magas frekvenciáknál és nagy pontosságnál előnyösen használhatók.
3. Mágnesen anyagok amelyek 0.15% os nyúlásig képesek dolgozni, főképp nyomásnak kitett tartományokban. A legjobbak egyike a $TERFENOL-D$.

Rezgőrendszer vezérlése visszacsatolással

A vizsgált mechanikai rendszer mozgását a végeselemes diszkretizálás után

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f} = \mathbf{F}\mathbf{u}$$

ahol $\mathbf{F}$ a bemenet (input) hatásmátrixa, $\mathbf{u}$ a vezérelt bemeneti (input) vektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

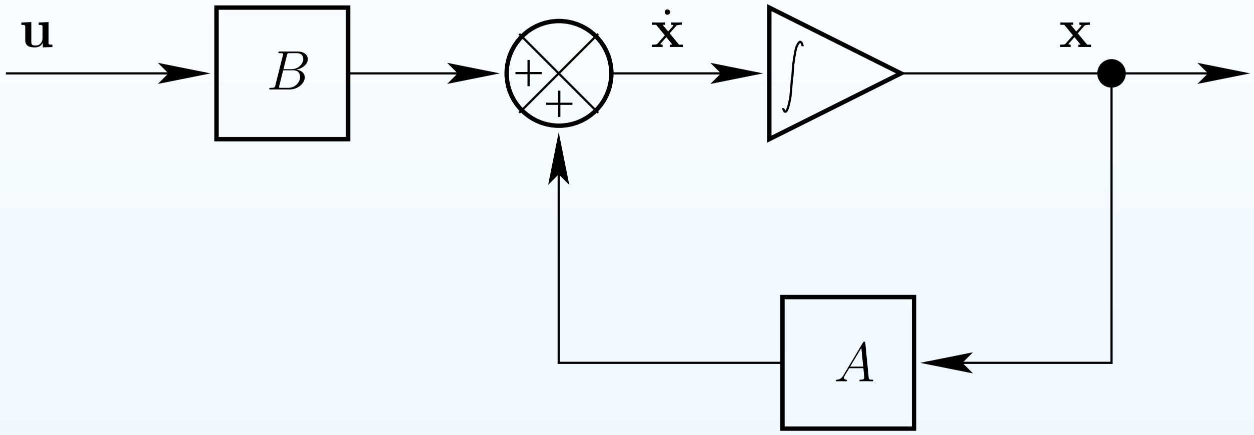
a másodrendű mozgásegyenletünk elsőrendűre vezethető

$$\underbrace{\dot{\mathbf{x}}}_{(2n,1)} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \end{bmatrix}\mathbf{u} =$$

$$= \underbrace{\mathbf{A}}_{(2n,2n)}\ \underbrace{\mathbf{x}}_{(2n,1)} + \underbrace{\mathbf{B}}_{(2n,2m)}\ \underbrace{\mathbf{u}}_{(2m,1)}$$

Állapotegyenlet sémája

Grafikailag a rendszert az alábbi ábra szemlélteti.



© 2007. Páczelt-Szabó-Baksa: VEM alapjai

Rezgőrendszer vezérlése visszacsatolással

Bevezetve egy ún. kimeneti (mérő, szenzor) vektort $\mathbf{y}$-t, a dinamikai rendszerünket az alábbi egyenletrendszer fogja jellemezni

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u},$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}_x\,\mathbf{x}$$

továbbá

$$\mathbf{u} = -\mathbf{G}\,\mathbf{y} = -\mathbf{G}\,\mathbf{Y}_x\mathbf{x}$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{G}\,\mathbf{x} \quad (\mathbf{Y}_x = \mathbf{E})$$

Ez utóbbit az *állapot teljes visszacsatolásá*nak nevezzük.

Rezgőrendszer vezérlése visszacsatolással

A teljes visszacsatolásnál

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u} = (\mathbf{A}\ - \mathbf{B}\,\mathbf{G})\mathbf{x}$$

az erősítő $\mathbf{G}$ mátrix meghatározására *a pólus elhelyezési* technikát és a Lineáris Kvadratikus Regulátor (LQR) módszert szokás használni. Szokásos az állapotegyenletet és a kimeneti (output) egyenletet bővíttet formában értelmezni

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}\,(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}\,(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}\,(t)\,,\\ \mathbf{y}\,(t) &= \mathbf{Y}_x\,\mathbf{x}\,(t) + \mathbf{Y}_u\,\mathbf{u}\,(t)\end{aligned}$$

Rezgőrendszer vezérlése visszacsatolással

Gyakran azonban jobb megoldás érhető el, ha a bemenet értékének meghatározásánál a rendszer pillanatnyi állapota is befolyást gyakorol. Kétfajta visszacsatolásról beszélünk. Az első esetben a bemenet függ az állapotvektortól és egy ún. előrejelző értéktől

$$\mathbf{u}\left(t\right) = -\mathbf{G}\,\mathbf{x}\left(t\right) + \mathbf{F}_r\,\mathbf{r}\left(t\right)$$

ahol $\mathbf{G}$ - az erősítő mátrix, $\mathbf{F}_r$ - előrejelző mátrix, $\mathbf{r}\left(t\right)$ - a referencia bemenet vektora. Ezt a szabályozást állapot visszacsatolású szabályozásnak nevezik.

Visszacsatolt állapotra alapozott szabályozás

Gyakran azonban jobb megoldás érhető el, ha a bemenet értékének meghatározásánál a rendszer pillanatnyi állapota is befolyást gyakorol. Kétfajta visszacsatolásról beszélünk. Az egyik esetben a bemenet függ az állapotvektortól és egy ún. előrejelző értéktől

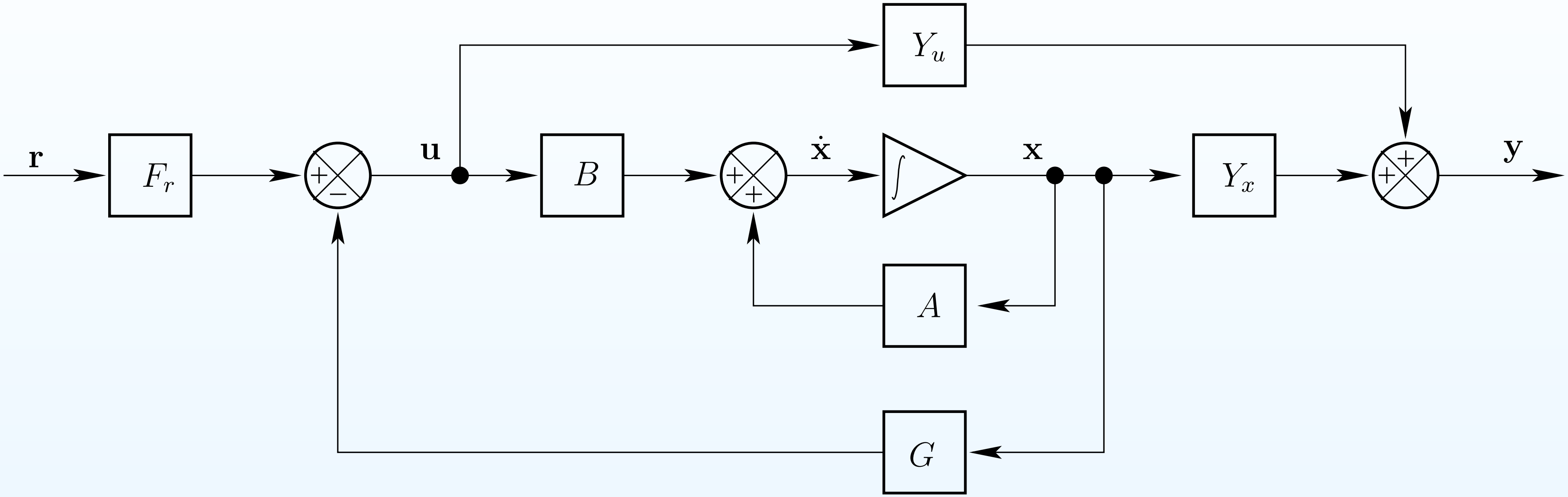
$$\mathbf{u}\left(t\right) = -\mathbf{G}\,\mathbf{x}\left(t\right) + \mathbf{F}_r\,\mathbf{r}\left(t\right)$$

ahol $\mathbf{G}$ - az erősítő mátrix, $\mathbf{F}_r$ - előrejelző mátrix, $\mathbf{r}\left(t\right)$ - a referencia bemenet vektora. Ezt a szabályozást állapot visszacsatolású szabályozásnak nevezik.
A másik esetben

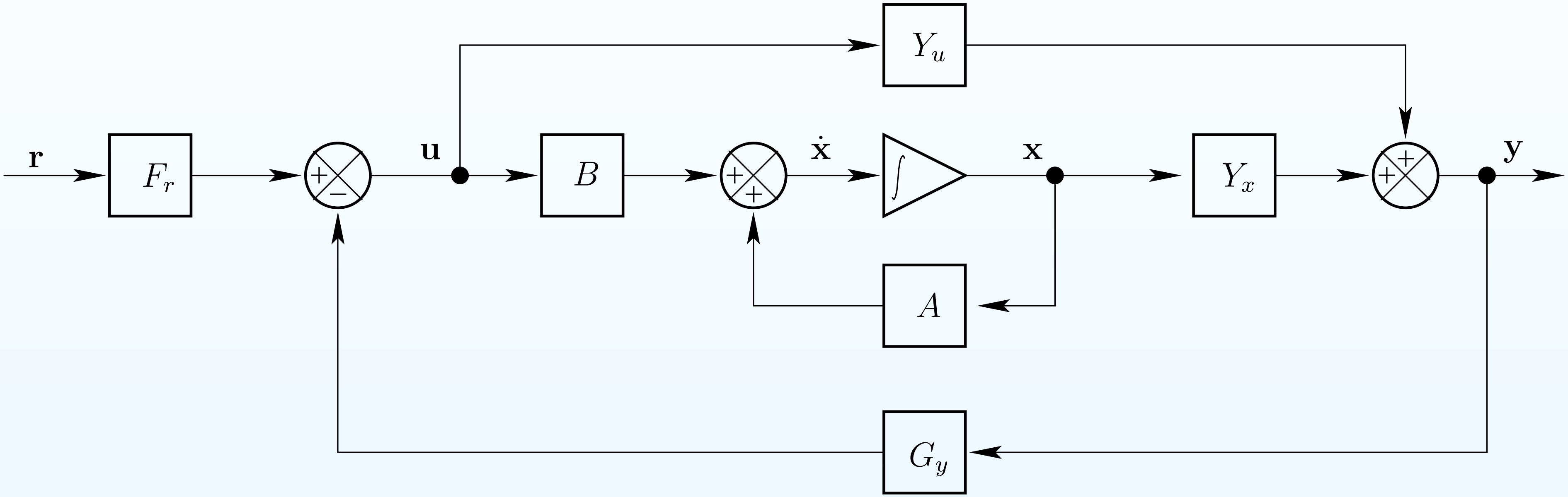
$$\mathbf{u}\left(t\right) = -\mathbf{G}_y\,\mathbf{y}\left(t\right) + \mathbf{F}_r\,\mathbf{r}\left(t\right)$$

a szabályozás kimeneti jelek visszacsatolásával valósul meg

Visszacsatolt állapotra alapozott szabályozás



Visszacsatolt kimenetre alapozott szabályozás



Piezo és VEM

A villamos eltolás $\boldsymbol{d}$ $\left[As/m^2\right]$ vektora ki kell elégítse a

$$\nabla \cdot \boldsymbol{d} = 0$$

egyenletet, a villamos térerősség $\boldsymbol{e}$ $[V/m]$ pedig, az ε $[As/Vm]$ dielektromos állandón keresztül van kapcsolatban a villamos eltolással

$$\boldsymbol{d} = \varepsilon \boldsymbol{e}$$

A villamos térerősség ψ $[V]$ potenciálon keresztül számolható, azaz

$$\boldsymbol{e} = -\nabla \psi \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \boldsymbol{e} = 0, \quad \Delta \psi = 0$$

Fennállnak az alábbi peremfeltételek

$$\psi = \psi_0 \qquad \boldsymbol{r} \in A_\psi$$

$$\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{n} = -\bar{Q} \quad \boldsymbol{r} \in A_Q$$

Piezo és VEM

Az állapotegyenletek vonatkozásában (hőhatást elhanyagolva) áll:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{D} \cdot\cdot \boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}_p \cdot \boldsymbol{e}$$
$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{E}_p^T \cdot\cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{K}_D \cdot \boldsymbol{e}$$

ahol $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{A}$ a mechanikai feszültségi és alakváltozási tenzor, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}_p$ a mechanikai anyagállandók 4-ed rendű tenzora, ill. a piezoelektromos kapcsoló 3-ad rendű tenzor, $\boldsymbol{K}_D$ a dielektromos állandók másodrendű tenzora.
Az alakváltozás

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}^{-1} \cdot\cdot \boldsymbol{T} + \boldsymbol{D}^{-1} \cdot\cdot \boldsymbol{E}_p \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{D}^{-1} \cdot\cdot \boldsymbol{T} + \boldsymbol{D}_p \cdot \boldsymbol{e}$$

ahol $\boldsymbol{D}_p$ piezorugalmassági állandók 3-ad rendű tenzora, míg a második egyenlet

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{E}_p^T \cdot\cdot \boldsymbol{D}^{-1} \cdot\cdot \boldsymbol{T} + \left(\boldsymbol{E}_p^T \cdot\cdot \boldsymbol{D}_p + \boldsymbol{K}_D\right) \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{D}_p^T \cdot\cdot \boldsymbol{T} + \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e}$$

ahol $\boldsymbol{P}$ a permittivitási 2-d rendű tenzor.

Piezoelektromos hatást figyelembe vevő állapotegyenlet

A *Bubnov-Galjorkin*-féle módszer alkalmazásával egy testre felírva

$$\int\limits_V \delta\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{T}\cdot\nabla+\rho\boldsymbol{k}-\rho c_M\dot{\boldsymbol{u}}-\rho\ddot{\boldsymbol{u}})\,dV-\int\limits_{A_p}\delta\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}-\bar{\boldsymbol{p}})dA=0$$

továbbá az elektromos mezők esetén

$$\int\limits_V \delta\psi\ (\boldsymbol{d}\cdot\nabla)\ dV-\int\limits_{A_Q}\delta\psi\ (Q+\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n})\ dA=0$$

$$\int\limits_V \delta\boldsymbol{A}\cdot\cdot\left[\boldsymbol{D}\cdot\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_p\cdot\boldsymbol{e}\right]dV-\int\limits_V\delta\boldsymbol{u}\cdot\left[\rho\boldsymbol{k}-\rho\, c_M\dot{\boldsymbol{u}}-\rho\ddot{\boldsymbol{u}}\right]dV-\int\limits_{A_p}\delta\boldsymbol{u}\cdot\bar{\boldsymbol{p}}\,dA=0$$

$$-\int\limits_V(\delta\psi\,\nabla)\cdot\left[\boldsymbol{E}_p^T\cdot\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{K}_D\cdot\boldsymbol{e}\right]\ dV-\int\limits_{A_Q}\delta\psi\,\bar{Q}\ dA=0$$

Diszkretizáció

Kétfajta mezőt kell közelíteni, egyik az $\boldsymbol{u}$ elmozdulásmező, a másik a ψ potenciál.
A végeselemes apporoximációs technikát felhasználva, írhatjuk, hogy

$$\mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{q}, \quad \mathbf{A} \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_u \mathbf{q}, \quad \boldsymbol{\psi} = \quad \mathbf{N}_\psi \, \boldsymbol{\psi}$$

Behelyettesítések révén a megoldandó differenciál egyenletrendszer

$$\begin{gathered} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_{uu}\mathbf{q} + \mathbf{K}_{u\psi}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{f}_u, \\ \mathbf{K}_{\psi u}\mathbf{q} + \mathbf{K}_{\psi\psi}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{f}_\psi \end{gathered}$$

Itt

$$\mathbf{M} = \int\limits_V \mathbf{N}_u^T \rho \, \mathbf{N}_u \, dV, \quad \mathbf{C} = \int\limits_V \mathbf{N}_u^T c_M \, \mathbf{N}_u \, dV, \quad \mathbf{K}_{uu} = \int\limits_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{D} \mathbf{B}_u \, dV,$$

$$\mathbf{K}_{u\psi} = \int\limits_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{E}_p \mathbf{B}_\psi \, dV = \mathbf{K}_{\psi u}^T, \quad \mathbf{K}_{\psi\psi} = \int\limits_V \mathbf{B}_\psi^T \mathbf{K}_D \mathbf{B}_\psi \, dV,$$

$$\mathbf{f}_u = \int\limits_V \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{k} \, dV + \int\limits_{A_p} \mathbf{N}_u^T \, \bar{\mathbf{p}} \, dA, \quad \mathbf{f}_\psi = \int\limits_{A_Q} \mathbf{N}_\psi^T \, \bar{Q} \, dA,$$

$$\underbrace{\mathbf{D}}_{(6,6)}, \quad \underbrace{\mathbf{E}_p^T}_{(3,6)}, \quad \underbrace{\mathbf{K}_D}_{(3,3)}$$

Egyszerű tartófeladat

A végeselemes tárgyalásmódnak megfelelően

$$\boldsymbol{\varepsilon} = D^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{D}_p\mathbf{e}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{D}_p^T\,\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{P}\,\mathbf{e}$$

$$\mathbf{D}_p^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{25} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$$

Egydimenziós esetben a b vastagságú piezotárcsa alsó és felső felülete közzé a poliarizációs iránnyal megegyező U_{fesz}-t helyezve, a fajlagos nyúlás

$$\varepsilon_z = \varepsilon_3 = d_{33}U_{fesz}/b$$

amiből a piezotárcsa vastagságának megváltozása

$$\Delta b = d_{33}U_{fesz}$$

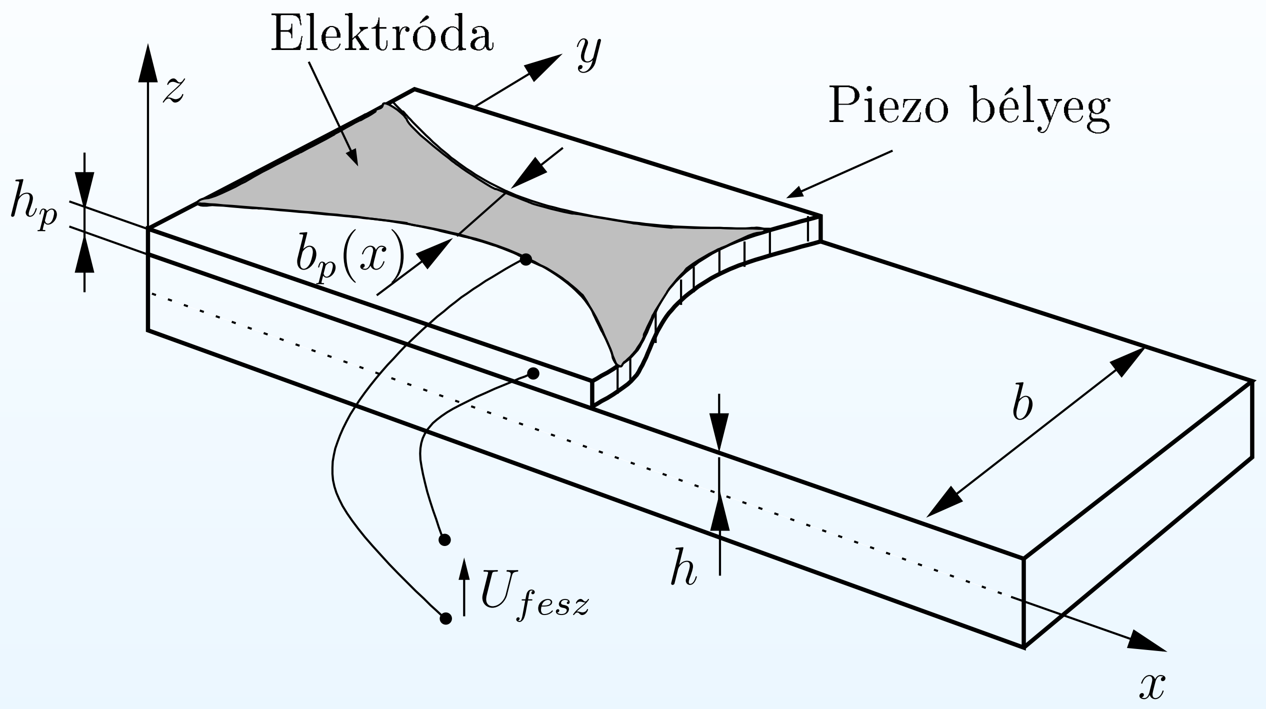
Egyszerű tartófeladat

A feszültség sarkainak megváltoztatása rövidülést fog okozni.
Ha veszünk egy piezo lapocskát, amire a feszültséget a polarizációs irányban a lapocska vastagsága mentén helyezzük el, akkor a vastagságra merőleges irányban a lap L hosszának megváltozása

$$\Delta L = d_{31} \frac{U_{fesz}}{b} L$$

Végezetül vizsgáljunk egy téglalap keresztmetszetű prizmatikus tartóra elhelyezett változó $b_p\left(x\right)$ szélességű piezobélyeget. A tartó hossztengelye x, a vastagság irányába mutasson a z tengely. A tartó magassága h a piezobélyegé h_p. A piezobélyegre U_{fesz} hat.

Példa



Egyszerű tartófeladat

A hosszirányba mutató mechanikai feszültség a piezobélyegben és a tartóban

$$\sigma_x = \sigma_1 = E_{piezo}\varepsilon_x - E_{piezo} d_{31}\frac{U_{fesz}}{h_p}, \quad \sigma_x = E\varepsilon_x$$

ahol $E_{piezo}, \quad E$ a bélyeg és a tartó Young-féle modulusa, U_{fesz} a bélyegre adott feszültség.
A tartó mozgásegyenlete

$$(I_y E w_0'')'' + A\rho\ddot{w}_0 - p = 0$$

ahonnan $p = 0$ esetén

$$A\rho\ddot{w}_0 = M_y''$$

Egyszerű tartófeladat

A hajlítónyomaték

$$M_y = \int_A \sigma_x z \, dA = -\left(I_y E + I_{y,piezo} E_{piezo}\right) w''_0 + E_{piezo} d_{31} \frac{U_{fesz}}{h_p} \left(h_p b_p\left(x\right)\right) h$$

ami rövidebben

$$M_y = -\left(I_y E\right)_{red} w''_0 + E_{piezo}\, d_{31} \frac{U_{fesz}}{h_p} \left(h_p b_p\left(x\right)\right) h$$

mellyel a mozgásegyenlet

$$A\rho\ddot{w} + \left(\left(I_y E\right)_{red} w''_0\right)'' = E_{piezo} d_{31} \frac{U_{fesz}}{h_p} h_p h \;\left(b_p\left(x\right)\right)''$$

© 2007. Páczelt-Szabó-Baksa: VEM alapjai

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!