

Rugalmasságtan

III. előadás
készítette: Dr. Lengyel Ákos József

2020. március 28.

2.5. Összefoglalás

A rugalmasságtani feladat ismeretlenjei, egyenletei és peremfeltételei:

Ismeretlenek:

- Elmozdulásmező: $\underline{\underline{\mathbf{u}}}$; koordinátái: u, v, w .
- Alakváltozásmező: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$; koordinátái: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$.
- Feszültségmező: $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$; koordinátái: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$.

Ez összesen 15 db ismeretlen.

Egyenletek:

- Geometriai (kinematikai) egyenlet: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{u}}} \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\underline{\mathbf{u}}})$ (6 db egyenlet).
- Anyagegyenlet: $\underline{\underline{\mathbf{T}}} = 2G \left(\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right)$ (6 db egyenlet).
- Egyensúlyi egyenlet: $\underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \nabla + \underline{\underline{\mathbf{q}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$ (3 db egyenlet).

Peremfeltételek:

- Kinematikai peremfeltétel: $\underline{\underline{\mathbf{u}}} = \underline{\underline{\mathbf{u}}}_0, \quad \underline{\underline{\mathbf{r}}} \in A_U$.
- Dinamikai peremfeltétel: $\underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} = \underline{\underline{\mathbf{p}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{r}}} \in A_p$.

2.5. Összefoglalás

A rugalmasságtan első peremérték-feladata:

- Alapismeretlen az elmozdulás mező: \vec{u} .
- Alapegyenlet a Lamé-Navier egyenlet:

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \frac{\vec{q}}{G} = \vec{0}.$$

- Peremfeltételek:

- Kinematikai peremfeltétel: $\vec{u} = \vec{u}_0, \quad \vec{r} \in A_u.$
- Dinamikai peremfeltétel:

$$2G \left[\vec{u}(\nabla \cdot \vec{n}) + \frac{1}{2} \vec{n} \times \text{rot} \vec{u} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\nabla \cdot \vec{u}) \vec{n} \right] = \vec{p} \quad \vec{r} \in A_p.$$

2.5. Összefoglalás

A rugalmasságtan második peremérték-feladata:

- Alapismeretlen a feszültségmező: \underline{T} .
- Alapegyenlet a Beltrami-Mitchell egyenlet és az egyensúlyi egyenlet.
- Peremfeltételek:
 - Kinematikai peremfeltétel és
 - Dinamikai peremfeltétel a feszültségmezővel kifejezve.

3. Prizmatikus rudak Saint-Venant-féle csavarása

3.1. Bevezetés, alapfogalmak

Prizmatikus rudak csavarását vizsgáljuk, vagyis egyenes középvonalú, állandó keresztmetszetű rudak csavarásával fogunk foglalkozni. A Szilárdságtanban már láttuk, hogy hogyan írható le kör és körgyűrű keresztmetszetű rudak csavarási feladata. Azonban a mérnöki gyakorlatban nem csak ilyen keresztmetszetű rudak lehetnek csavaró igénybevételnek kitéve. Most megvizsgáljuk, milyen elméleti és gyakorlati háttere van tetszőleges keresztmetszetű rudak csavarásának.

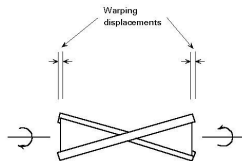
Csavaró igénybevételről akkor beszélünk, ha a prizmatikus rúd tengelye (középvonala) körül működő csavarónyomaték hatására a rúd keresztmetszetei elfordulnak a rúd tengelye körül. Kétféle csavarást különböztetünk meg:

- **Szabad csavarás** vagy egyszerű csavarás (Saint-Venant-féle csavarás)
- **Gátolt csavarás**

3.1. Bevezetés, alapfogalmak

Szabad csavarásról akkor beszélünk, ha a csavaró igénybevétel hatására a keresztmetszetben csak nyírófeszültség ébred. A szabad csavarás jellemzői:

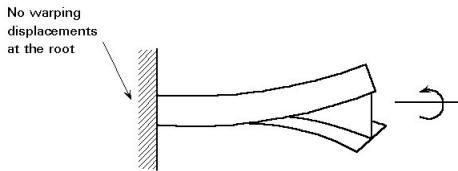
- A keresztmetszet alkotói egyenesek maradnak (a rúd fajlagos szögelfordulása állandó a rúd hossza mentén), az alkotók nem rövidülnek és nem nyúlnak a terhelés hatására (nem ébred normál feszültség),
- A rúd igénybevétele állandó csavarónyomaték a rúd teljes hossza mentén,
- A keresztmetszetek merev lapként fordulnak el, tehát x és y irányban nem torzul a keresztmetszet, de a keresztmetszet pontjai a rúd tengelyének (z) irányába elmozdulhatnak (ezt nevezzük öblösödésnek), tehát a keresztmetszet szabadon öblösödhet.



(a) Torsion with unrestrained warping

3.1. Bevezetés, alapfogalmak

Gátolt csavarásról akkor beszélünk, ha a csavarónyomaték hatására a rúd fajlagos szögelfordulása nem állandó, vagyis a rúd alkotói nem maradnak egyenesek, normálfeszültség is keletkezik a keresztmetszetben.



(b) Torsion with restrained warping

A továbbiakban csak a szabad csavarásról lesz szó.

3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

Ahogy már korábban is láttuk, szabad csavarás esetén a rúd alkotói egyenesek maradnak, ez pedig úgy lehetséges, hogy a rúd fajlagos szögelfordulása (két egymástól egységnyi távolságra eső keresztmetszet egymáshoz viszonyított szögelfordulása) állandó ($\vartheta = \text{állandó}$).

Így egy tetszőleges z

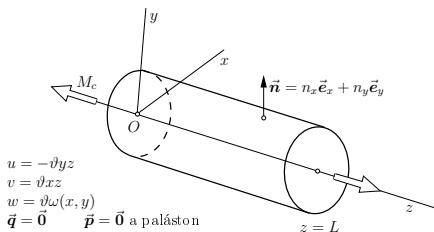
koordinátájú keresztmetszet szögelfordulása

$$\Theta = \vartheta z$$

A fajlagos szögelfordulás

kizárólag a csavarónyomatéktól függ

$$\vartheta = \vartheta(M_c)$$



3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

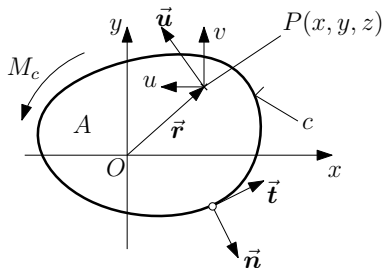
Vizsgáljuk meg az előző ábrán is vázolt, általános keresztmetszetű rúd egyik tetszőleges keresztmetszetét, melyet az alábbi ábra szemléltet. Az x és y irányú elmozdulás kizárólag a keresztmetszet Θ szögelfordulásának a következménye, így az xy síkbeli elmozdulásvektor a következő formában írható fel

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vartheta z \vec{e}_z \times (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) = \\ &= -\vartheta y z \vec{e}_x + \vartheta x z \vec{e}_y\end{aligned}$$

Tehát egy tetszőleges pont x és y irányú elmozdulása már ismert. A keresztmetszet öblösödése miatt a P pontnak van z irányú elmozdulása, melyet az öblösödési függvénnyel $[\omega(x, y)]$ tudunk jellemezni. Tehát

$$u = -\vartheta y z \quad v = \vartheta x z \quad w = \vartheta \omega(x, y)$$

Ezenkívül további feltétel, hogy a rúd súlyát elhanyagoljuk, és felületi terhelés sem hat a rúdra, nem foglalkozunk vele, hogy a csavarónyomaték hogyan jön létre, tehát $\vec{p} = \vec{q} = \vec{0}$.



3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

Felhasználjuk a skaláris kinematikai egyenleteket, hogy az elmozdulásmező alapján előállítsuk az alakváltozási koordinátákat

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\vartheta z + \vartheta z = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\vartheta y + \vartheta \frac{\partial w}{\partial x} = \vartheta \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \right)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \vartheta x + \vartheta \frac{\partial w}{\partial y} = \vartheta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + x \right)$$

Ezek után az anyagtörvény alapján a feszültségeket is meg tudjuk határozni

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\vartheta \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \right), \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G\vartheta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + x \right)$$

Vegyük észre, hogy a nem zérus alakváltozási koordinátákra, ebből következően pedig a nem zérus feszültségekre is igaz, hogy nem függenek z -től [$\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y)$, $\tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y)$].

3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

Most pedig vizsgáljuk meg, hogy az így kapott feszültségek kielégítik-e a skaláris egyensúlyi egyenleteket, illetve milyen differenciálegyenletet kell az öblösödési függvénynek kielégítenie

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 + 0 + \underbrace{\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}}_0 = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 + 0 + \underbrace{\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}}_0 = 0$$

Tehát az első két skaláris egyenlet automatikusan teljesül, a harmadik pedig

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = G\vartheta \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = 0$$

Vagyis

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \Delta \omega = 0 \quad (x, y) \in A$$

3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

Mivel csak nyírófeszültség ébredhet a keresztmetszetben, ezért a feszültségi tenzor a következő alakba írható

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

Így a dinamikai peremfeltételt felírva

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} [\vec{n}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az eredmények alapján tehát

$$\tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y = 0 \quad (x, y) \in c$$

Ebbe az egyenletbe behelyettesítve a nyírófeszültségeket

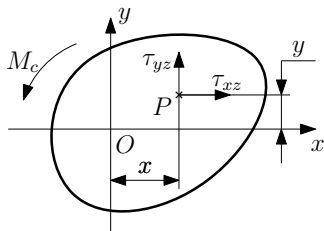
$$G\vartheta \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) n_x + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) n_y \right] = 0$$

3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

A csavarónyomaték számítása

$$\begin{aligned}M_c &= \int_A (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dA = \\&= G\vartheta \int_A \left[x \left(\frac{\partial\omega}{\partial y} + x \right) - y \left(\frac{\partial\omega}{\partial x} - y \right) \right] dA = \\&= G\vartheta \underbrace{\int_A \left(\frac{\partial\omega}{\partial y} x - \frac{\partial\omega}{\partial x} y + x^2 + y^2 \right) dA}_{I_c} = G\vartheta I_c\end{aligned}$$

Itt az I_c
a keresztmetszet ún. **csavarási merevsége**.

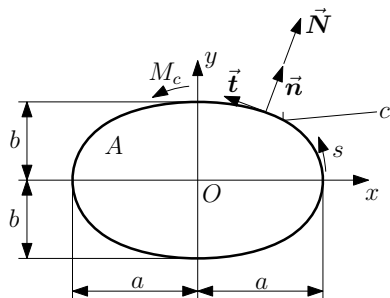


3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

3.2.1.

Példa: Adott az alábbi ábrán látható tömör ellipszis keresztmetszetű rúd. Tételezzük fel, hogy ennek a keresztmetszetnek az öblösödése felírható egy $\omega = Cxy$ alakú függvénnyel. Határozzuk meg a C értékét, a keresztmetszetben ébredő τ_{xz} és τ_{yz} nyírófeszültség függvényeket és a keresztmetszet I_c csavarási merevségét!

Az öblösödési függvény C együtthatójának meghatározásához a dinamikai peremfeltételt fogjuk alkalmazni, amihez szükségünk lesz az \vec{n} normálvektorra. Ennek előállításához írjuk fel az érintő egységvektort



$$\vec{t} = \frac{dx}{ds} \vec{e}_x + \frac{dy}{ds} \vec{e}_y \quad \Rightarrow \quad \vec{t} ds = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y$$

3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

3.2.1. Példa folytatása: A normálvektor előállításához írjuk fel az ellipszis egyenletét

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Képezzük ennek x szerinti első deriváltját az implicit függvények deriválási szabályának megfelelően

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$$

Elosztva az egyenletet 2-vel, valamint formálisan beszorozva dx -szel kapjuk az egyenlet differenciálját

$$\frac{x}{a^2} dx + \frac{y}{b^2} dy = 0$$

Ez az egyenlet pedig felfogható úgy is, mint két vektor skaláris szorzata. Az egyik vektor x koordinátája dx , y koordinátája pedig dy . Ezt láttuk az előbb, ez éppen a $\vec{t}ds$ vektor két koordinátája. Két vektor skaláris szorzata akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra, vagyis a másik két koordináta egy a \vec{t} -re merőleges általános vektor lesz, tehát a hossza nagy valószínűséggel nem lesz egységnyi. Jelöljük ezt a vektort \vec{N} -nel, hosszát pedig λ -val, így

$$\vec{N} = \lambda \vec{n} = \frac{x}{a^2} \vec{e}_x + \frac{y}{b^2} \vec{e}_y$$

3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

3.2.1. Példa folytatása: Ez alapján a normálvektor

$$\vec{n} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{a^2} \vec{e}_x + \frac{y}{b^2} \vec{e}_y \right)$$

Ismerve a normálvektort, fel tudjuk írni a csavarásra érvényes dinamikai peremfeltételt (az öblösödési függvény keresett alakja: $\omega = Cxy$)

$$\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y = 0 \quad (x, y) \in c$$

$$G\vartheta \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) n_x + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) n_y \right] = \frac{G\vartheta}{\lambda} \left[(C-1)y \frac{x}{a^2} + (C+1)x \frac{y}{b^2} \right] = 0$$

$$xy \left[\frac{C}{a^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{C}{b^2} + \frac{1}{b^2} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad C \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$$

3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

3.2.1. Példa folytatása: Közös nevezőre hozva a zárójeles kifejezéseket, majd átrendezve az egyenletet kapjuk

$$C \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}$$

Tehát az öblösödési függvény ellipszis keresztmetszetre:

$$\omega(x, y) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} xy$$

Írjuk fel a következő összefüggéseket

$$C - 1 = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} - \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = -\frac{2a^2}{a^2 + b^2}$$

$$C + 1 = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} + \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = \frac{2b^2}{a^2 + b^2}$$

Így egyszerűbb lesz felírni a nyírófeszültségeket.

3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

3.2.1. Példa folytatása: A nyírófeszültségek az öblösödési függvénnyel

$$\tau_{xz} = G\vartheta \left(\frac{\partial\omega}{\partial x} - y \right) = G\vartheta(C - 1)y = -G\vartheta \frac{2a^2}{a^2 + b^2} y$$

$$\tau_{yz} = G\vartheta \left(\frac{\partial\omega}{\partial y} + x \right) = G\vartheta(C + 1)x = G\vartheta \frac{2b^2}{a^2 + b^2} x$$

A csavarási merevség számítása

$$\begin{aligned} I_c &= \int_A \left(\frac{\partial\omega}{\partial y} x - \frac{\partial\omega}{\partial x} y + x^2 + y^2 \right) dA = \int_A (Cx^2 - Cy^2 + x^2 + y^2) dA = \\ &= \int_A [(C + 1)x^2 - (C - 1)y^2] dA = \int_A \left(\frac{2b^2}{a^2 + b^2} x^2 + \frac{2a^2}{a^2 + b^2} y^2 \right) dA = \\ &= \frac{2a^2 b^2}{a^2 + b^2} \int_A \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] dA \end{aligned}$$

3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

3.2.1. Példa folytatása: Tehát látszik, hogy lényegében az ellipszis egyenletét kell integrálni a keresztmetszeten. Ahhoz, hogy az ellipszis keresztmetszeti tartományán tudjunk integrálni egyszerűen, a következő helyettesítéssel fogunk élni

$$x = \lambda a \cos t; \quad y = \lambda b \sin t$$

Ha a λ értéke 0 és 1 között változik, a t szög értéke pedig 0 és 2π között, akkor látszik, hogy a teljes ellipszis keresztmetszetet lefedjük, és csak azt. Ha másik koordinátákra térünk át integráláskor, akkor a következő transzformációt is el kell végeznünk

$$dA = dx dy = J d\lambda dt$$

ahol J az ún. Jacobi-determináns, melyet a következőképp tudunk meghatározni

$$\begin{aligned} J &= \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\lambda, t)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos t & b \sin t \\ -\lambda a \sin t & \lambda b \cos t \end{vmatrix} = \\ &= \lambda ab \cos^2 t + \lambda ab \sin^2 t = \lambda ab \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_1 = \lambda ab \quad \Rightarrow \quad dA = \lambda ab d\lambda dt \end{aligned}$$

3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

3.2.1. Példa folytatása: Végezzük el az integrálást ez alapján

$$\begin{aligned} \int_{\lambda=0}^1 \int_{t=0}^{2\pi} \left[\left(\frac{\lambda a \cos t}{a} \right)^2 + \left(\frac{\lambda b \sin t}{b} \right)^2 \right] \lambda a b d\lambda dt &= ab \int_{\lambda=0}^1 \int_{t=0}^{2\pi} \lambda^3 \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_1 d\lambda dt = \\ &= ab \int_{t=0}^{2\pi} \left[\frac{\lambda^4}{4} \right]_0^1 dt = \frac{ab}{4} \int_{t=0}^{2\pi} dt = \frac{ab}{4} [t]_0^{2\pi} = \frac{ab\pi}{2} \end{aligned}$$

Így tehát

$$I_c = \frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2} \frac{ab\pi}{2} = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

Ezzel pedig a csavarónyomaték

$$M_c = G\vartheta I_c = G\vartheta \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvényrel

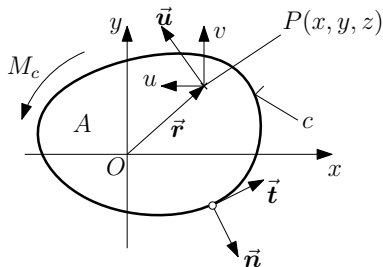
Tömör keresztmetszetet fogunk vizsgálni a továbbiakban. Az előző fejezetben már láttuk, hogy a Saint-Venant-féle csavarásnak kitett rúd esetén a következő egyensúlyi egyenletnek és dinamikai peremfeltételnek kell teljesülnie

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (x, y) \in A$$

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0 \quad (x, y) \in c$$

A korábbiak alapján szintén fennáll, hogy

$$\vec{t} = \frac{dx}{ds} \vec{e}_x + \frac{dy}{ds} \vec{e}_y, \quad \vec{n} = \frac{dy}{ds} \vec{e}_x - \frac{dx}{ds} \vec{e}_y$$



3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

Vezessük be az ún. **Prandtl-féle feszültségfüggvényt**. Ezt a függvényt U -val jelöljük, melynek segítségével a nyírófeszültségeket a következő alakban írjuk fel

$$\tau_{xz} = G\vartheta \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -G\vartheta \frac{\partial U}{\partial x}$$

Ezzel a felírással az egyensúlyi egyenlet identikusan teljesül

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = G\vartheta \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - G\vartheta \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 0 \quad (x, y) \in A$$

Helyettesítsünk be a dinamikai peremfeltételbe

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = G\vartheta \left[\frac{\partial U}{\partial y} n_x - \frac{\partial U}{\partial x} n_y \right] = G\vartheta \left[\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right] = G\vartheta \vec{t} \cdot \nabla U = G\vartheta \frac{\partial U}{\partial s} = 0$$

Mivel a G és a ϑ értéke sem zérus, ezért U iránymenti deriváltja tűnik el a c peremgörbén, ebből következik, hogy

$$U = \text{állandó} = C_0 = 0 \quad (x, y) \in c$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvényel

Használjuk fel az előző fejezetben felírt nyírófeszültségeket, melyek az öblösödési függvényt is tartalmazzák

$$\tau_{xz} = G\vartheta \left(\frac{\partial\omega}{\partial x} - y \right) = G\vartheta \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\tau_{yz} = G\vartheta \left(\frac{\partial\omega}{\partial y} + x \right) = -G\vartheta \frac{\partial U}{\partial x}$$

Ez alapján a kapcsolat az öblösödési függvény és a Prandtl-féle feszültségfüggvény között a következő egyenletrendszerre vezet

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} - y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial\omega}{\partial y} - x = \frac{\partial U}{\partial x}$$

Deriváljuk az első egyenletet y szerint, a másodikat pedig x szerint, majd adjuk össze a két egyenletet

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y} - 1 &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y} - 1 &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \Delta U = -2$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

Tehát összefoglalva tömör keresztmetszet csavarásakor a Prandtl-féle feszültségfüggvénynek két feltételi egyenletet kell kielégítenie

$$\Delta U = -2 \quad (x, y) \in A$$

$$U = 0 \quad (x, y) \in c$$

Ez alapján a Prandtl-féle feszültségfüggvényt úgy építjük fel, hogy egy ismeretlen konstanssal megszorozzuk a keresztmetszet peremgörbéjének (peremgörbéinek) egyenletét (egyenleteit). A peremgörbék egyenlete miatt a második feltétel identikusan teljesül, így az első feltételből a konstans értéke meghatározható. Határozzuk meg a csavarónyomatékokat. Az előző fejezetben már láttuk, hogy általánosan a nyírófeszültségek ismeretében a csavarónyomaték az alábbi alakban számítható

$$M_c = \int_A (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dA = G\vartheta \int_A \left(-x \frac{\partial U}{\partial x} - y \frac{\partial U}{\partial y} \right) dA = -G\vartheta \int_A \vec{r} \cdot \nabla U dA$$

Felhasználva, hogy

$$\nabla \cdot (\vec{r}U) = (\nabla \cdot \vec{r})U + \vec{r} \cdot (\nabla U)$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

kapjuk a csavarónyomatéokra, hogy

$$M_c = -G\vartheta \int_A (\vec{r}U) \cdot \nabla dA + G\vartheta \int_A (\nabla \cdot \vec{r})U dA$$

Az első tag a Stokes-tétel alapján

$$\int_A (\vec{r}U) \cdot \nabla dA = \oint_c \vec{r}U \cdot \vec{n} ds = 0$$

mert az egyik feltétel az U -ra, hogy a c peremgörbén zérus értékű. A második tagban pedig

$$\nabla \cdot \vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y \right) \cdot (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 2$$

Vagyis a csavarónyomaték felhasználva az előző fejezetben felírt összefüggést is

$$M_c = G\vartheta I_c = G\vartheta \int_A 2U dA \quad \Rightarrow \quad I_c = 2 \int_A U dA$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

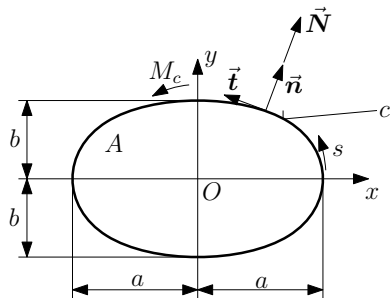
3.3.1. Példa: Tekintsük ismét az előző fejezetben is látott ellipszis keresztmetszetű rudat. Határozzuk meg a rúdhoz tartozó U Prandtl-féle feszültségfüggvényt, a τ_{xz} és τ_{yz} nyírófeszültségeket és a keresztmetszet I_c csavarási merevségét!

Ha meg kell határozni a Prandtl-féle feszültségfüggvényt, akkor a tömör keresztmetszethez tartozó két feltételi egyenlettel kezdünk. Először is

$$U = 0 \quad (x, y) \in c$$

Ezt a legkönnyebb úgy elérni, hogy felírjuk a keresztmetszet peremgörbéjének, vagyis az ellipszis egyenletét, melyet aztán 0-ra rendezünk

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$



3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvényel

3.3.1. Példa folytatása: Ez az egyenlet a peremen teljesíti, hogy zérus értékű. Így a feszültségfüggvényt úgy állítjuk elő, hogy egy ismeretlen konstanssal megszorozzuk az egyenletet, tehát

$$U = K \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

Az ismeretlen K értékét pedig a másik feltételi egyenletből határozzuk meg

$$\Delta U = -2 \quad (x, y) \in A$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = K \left(-\frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2} \right) = -2K \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = -2$$

$$K = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

Tehát a feszültségfüggvény ellipszis keresztmetszetre

$$U = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvényrel

3.3.1. Példa folytatása: Így a nyírófeszültségek

$$\tau_{xz} = G\vartheta \frac{\partial U}{\partial y} = G\vartheta \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(-\frac{2y}{b^2} \right) = -\frac{2G\vartheta a^2}{a^2 + b^2} y$$
$$\tau_{yz} = -G\vartheta \frac{\partial U}{\partial x} = -G\vartheta \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(-\frac{2x}{a^2} \right) = \frac{2G\vartheta b^2}{a^2 + b^2} x$$

Tehát mindkét feszültség lineáris függvénye mind az x -nek, mind az y -nak. Így már csak a csavarási merevség maradt, mely a korábbiak alapján a feszültségfüggvényrel

$$I_c = 2 \int_A U dA = 2 \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \int_A \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dA$$

Hogy az integrálást könnyebben el tudjuk végezni, illetve az integrálási tartományt egyszerűen tudjuk kezelni, a következő helyettesítéssel élünk

$$x = \lambda a \cos t, \quad y = \lambda b \sin t$$

Mivel áttértünk másik változókra, ezért fel kell még írunk a J Jacobi determinánst

$$dA = dx dy = J dX dY$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvényel

3.3.1. Példa folytatása: Mivel az előző példában ugyanezt az ellipszis keresztmetszetet vizsgáltuk, így ugyanezzel a helyettesítéssel élünk, a Jacobi-determináns értéke ennek megfelelően ugyanaz lesz

$$J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\lambda, t)} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} a \cos t & b \sin t \\ -\lambda a \sin t & \lambda b \cos t \end{array} \right| = \lambda ab (\cos^2 t + \sin^2 t)$$

$$dA = dx dy = \lambda ab d\lambda dt$$

Így

$$I_c = 2 \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \int_A \left(1 - \frac{\lambda^2 a^2 \cos^2 t}{a^2} - \frac{\lambda^2 b^2 \sin^2 t}{b^2} \right) \lambda ab d\lambda dt = 2 \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \int_A (\lambda - \lambda^3) d\lambda dt$$

Az integrálás tartománya pedig ismét úgy fedi le az ellipszist, hogy $0 \leq \lambda \leq 1$ és $0 \leq t \leq 2\pi$.

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

3.3.1. Példa folytatása: Tehát a csavarási merevség a következő

$$\begin{aligned} I_c &= 2 \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \int_{\lambda=0}^1 \int_{t=0}^{2\pi} (\lambda - \lambda^3) d\lambda dt = \\ &= 2 \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \int_{t=0}^{2\pi} \left[\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{4} \right]_0^1 dt = \\ &= \frac{a^3 b^3}{2(a^2 + b^2)} \int_{t=0}^{2\pi} dt = \frac{a^3 b^3}{2(a^2 + b^2)} [t]_0^{2\pi} = \frac{a^3 b^3 \pi}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Az így kapott csavarási merevség pedig épp ugyanaz az érték, mint amit az öblösödési függvénnyel felírt megoldásból is kaptunk.

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvényrel

3.3.2. Példa:

Adott az alábbi ábrán látható háromszög keresztmetszetű rúd. Határozzuk meg a keresztmetszetre érvényes Prandtl-féle feszültségfüggvényt, rajzoljuk meg a τ_{yz} feszültségeloszlást az x tengely mentén és határozzuk meg ennek maximumát!

Ahhoz, hogy a Prandtl-féle feszültségfüggvényt meg tudjuk határozni, ismét írjuk fel a tömör keresztmetszetre érvényes két feltételi egyenletünket.

$$\Delta U = -2 \quad (x, y) \in A$$

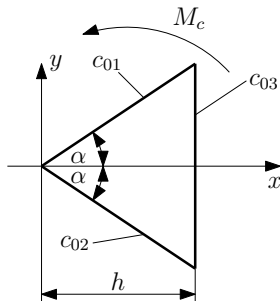
$$U = 0 \quad (x, y) \in C$$

A második egyenletből indulunk ki ismét. Ezt a feltételt a peremgörbékkel tudjuk teljesíteni. Írjuk fel ezeket

$$c_{01} : y - kx = 0, \quad k = \tan \alpha$$

$$c_{02} : y + kx = 0$$

$$c_{03} : x - h = 0$$



3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

3.3.2. Példa folytatása: Ezek segítségével az előző feladatban is látott módszerrel itt is fel lehet írni a feszültségfüggvényt

$$\begin{aligned}U &= C(y - kx)(y + kx)(x - h) = C(y^2 + kxy - kxy - k^2x^2)(x - h) = \\ &= C(xy^2 - k^2x^3 - hy^2 + hk^2x^2)\end{aligned}$$

Az ismeretlen C konstans értéke a másik feltételi egyenletből nyerhető

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = C(-6k^2x + 2hk^2 + 2x - 2h) = -2 \\ C[(2 - 6k^2)x + 2h(k^2 - 1)] &= -2\end{aligned}$$

Mivel az egyenlet jobb oldalán konstans áll, a bal oldalon is annak kell állnia, ezért az x -től függő tagnak el kell tűnnie, vagyis az előtte álló zárójeles kifejezésnek 0-nak kell lennie, tehát

$$2 - 6k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{\frac{2}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30^\circ$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

3.3.2. Példa folytatása: Tehát a feszültségfüggvénnyel történő megoldás determinálja, hogy a háromszög csak egyenlő oldalú lehet. Így a C konstans tehát

$$2hC(k^2 - 1) = 2hC\left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{4}{3}hC = -2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{2h}$$

Így a feszültségfüggvény

$$U = \frac{3}{2h} \left(xy^2 - k^2 x^3 - hy^2 + hk^2 x^2 \right) = \frac{3}{2h} \left(xy^2 - \frac{1}{3} x^3 - hy^2 + \frac{1}{3} hx^2 \right)$$

Így fel tudjuk írni a nyírófeszültségeket

$$\tau_{xz}(x, y) = G\vartheta \frac{\partial U}{\partial y} = G\vartheta \frac{3}{2h} (2xy - 2hy) = \frac{3G\vartheta}{h} (x - h)y$$

$$\tau_{yz}(x, y) = -G\vartheta \frac{\partial U}{\partial x} = -G\vartheta \frac{3}{2h} \left(y^2 - x^2 + \frac{2}{3} hx \right)$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvényel

3.3.2. Példa folytatása: Most ábrázoljuk a τ_{yz} feszültség eloszlását az x tengely mentén. Az x tengely y koordinátája 0, vagyis a korábban felírt $\tau_{yz}(x, y)$ függvényt felhasználva

$$\tau_{yz}(x, 0) = -G\vartheta \frac{3}{2h} \left(-x^2 + \frac{2}{3}hx \right) = \frac{3G\vartheta}{2h} x \left(x - \frac{2}{3}h \right)$$

Vagyis így egy x -ben másodfokú függvényt kaptunk eredményül. A megrajzolást nagyban segíti a zérushelyek megkeresése, ezért alakítottuk át a τ_{yz} kifejezést szorzattá. A szorzat egyik tagja akkor tűnik el, ha $x = 0$, a másik tag pedig a zárójelben álló kifejezés, mely $x = \frac{2}{3}h$ esetén lesz épp 0. Ezek alapján az alábbi ábra szemlélteti a másodfokú függvényt. A függvényből lehet látni, hogy $x = h$ esetén lesz a feszültség maximális. Ezt a koordinátát helyettesítsük be a feszültség kifejezésébe

$$\tau_{yz}^{\max} = \tau_{yz}(h, 0) = \frac{3G\vartheta}{2h} h \left(h - \frac{2}{3}h \right) = \frac{G\vartheta h}{2}$$

