

Rugalmasságtan

II. előadás
készítette: Dr. Lengyel Ákos József

2020. március 7.

2. A lineáris rugalmasságtan alapegyenletei, a lehetséges peremfeltételek (folytatás)

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

Rugalmas testnek nevezzük a kontinuumot, ha a kontinuum mozgása során a feszültségtenzor a kontinuum minden egyes pontjában egyértelmű függvénye az alakváltozási tenzornak.

Az alakváltozási tenzor függhet még további nem mechanikai mennyiségektől is:

- hőmérséklet,
- villamos térerősség,
- entrópia,
- stb.

A \underline{T} és \underline{A} , vagyis a feszültségi és alakváltozási állapot között fennálló függvénykapcsolatot hívjuk a **rugalmas test anyagegyenletének**.

Homogén anyagtörvényről beszélünk, ha ez az összefüggés független a helykoordinátáktól. Ha a test **izotróp**, akkor a feszültségi és alakváltozási tenzorok főirányai összeesnek. (izotrópia=iránytól való függetlenség)

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

Lineárisan rugalmas anyagból készült próbatest (rúd) egytengelyű húzóvizsgálatából nyert eredmények (egyszerű Hooke-törvény):

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \varepsilon_k = -\nu\varepsilon,$$

ahol ε_k a keresztirányú fajlagos nyúlás, E az anyagra jellemző rugalmassági modulus és ν pedig a Poisson-tényező. A nyíróvizsgálatok jelleggörbéi alapján bizonyos feszültségszintig a következő lineáris kapcsolat is fennáll a nyírófeszültség és a szögtorzulás között:

$$\tau = G\gamma,$$

itt G az anyag csúsztató rugalmassági modulusa.

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

Izotróp anyagok esetében az alakváltozási és a feszültségi tenzor főtengelei megegyeznek. Ezen főtengelek által alkotott koordináta-rendszerben ($\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$) a következőket lehet írni

$$\varepsilon_i = C_{i1}\sigma_1 + C_{i2}\sigma_2 + C_{i3}\sigma_3, \quad (i = 1, 2, 3)$$

Tiszta húzásra vonatkozó képletek alapján (az egyszerű Hooke-törvényt behelyettesítve):

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}\sigma_3 = \frac{1+\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Izotróp anyag esetén ez fennáll bármely irányban, így kapunk 3 skalár egyenletet DDKR-ben

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1+\nu}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

Illetve ekkor fennáll újabb 3 skalár egyenlet

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

Lineárisan rugalmas anyag estén fennáll

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \rightarrow \quad \frac{1 + \nu}{E} = \frac{1}{2G}$$

Így összefoglalva az eredményeket, beírva a skalár koordinátákat az alakváltozási tenzorbba kapjuk

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \frac{1}{2G} \left[\underline{\underline{\mathbf{T}}} - \frac{\nu}{1 + \nu} T_1 \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right], \quad T_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

Ezt nevezzük **általános Hooke-törvénynek**. A feszültségi tenzorra is felírható az általános Hooke-törvény

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = 2G \left[\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} A_1 \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right], \quad A_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Az általános Hooke-törvény a Lamé-állandókkal (μ, λ)

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = 2\mu \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \lambda A_1 \underline{\underline{\mathbf{1}}}$$
$$\mu = G, \quad \lambda = 2G \frac{\nu}{1 - 2\nu} = \frac{\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} E$$

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

Kapcsolat az első skaláris invariánsok között

$$T_1 = 2GA_1 + \frac{2G\nu}{1-2\nu} A_1 \underbrace{1_1}_3 = 2G \underbrace{\frac{1+\nu}{1-2\nu}}_{3K} A_1$$

ahol K a térfogati rugalmassági modulus. Az anyagegyenlet felírásához tömörített jelölést szoktunk alkalmazni, a feszültségtenzor és az alakváltozási tenzor független koordinátáit egy-egy vektorba rendezzük

$$\sigma_1 = \sigma_x, \quad \sigma_2 = \sigma_y, \quad \sigma_3 = \sigma_z, \quad \sigma_4 = \tau_{yz}, \quad \sigma_5 = \tau_{xz}, \quad \sigma_6 = \tau_{xy}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_y, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z, \quad \varepsilon_4 = \gamma_{yz}, \quad \varepsilon_5 = \gamma_{xz}, \quad \varepsilon_6 = \gamma_{xy}$$

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

Ezzel a tömör írásmóddal anizotróp anyagra is felírható az anyagegyenlet

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^6 C_{ij} \varepsilon_j, \quad (i = 1, \dots, 6)$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}}_{\underline{\sigma}} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{C}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}}_{\underline{\varepsilon}}$$

Vagyis tömören felírva az anyagegyenletet

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\varepsilon}$$

ahol $\underline{\underline{C}}$ az anyagállandók mátrixa, vagy merevségi mátrix összesen 36 db állandót tartalmaz.

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

A fajlagos alakváltozási energia definíció szerint

$$u(\underline{\varepsilon}) = \int_{\underline{0}}^{\underline{\varepsilon}} \underline{\sigma} d\underline{\varepsilon} = \int_{\underline{0}}^{\underline{\varepsilon}} \sigma_i d\varepsilon_i = \int_{\underline{0}}^{\underline{\varepsilon}} \varepsilon_i C_{ij} d\varepsilon_j = \int_0^{\varepsilon_i} d \left(\frac{1}{2} \varepsilon_i C_{ij} \varepsilon_j \right) = \frac{1}{2} \varepsilon_i C_{ij} \varepsilon_j = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{\underline{C}} \underline{\varepsilon}$$

Ez alapján

$$\frac{\partial u(\underline{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_i} = C_{ij} \varepsilon_j, \quad \frac{\partial^2 u(\underline{\varepsilon}_1)}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = C_{ij} = \frac{\partial^2 u(\underline{\varepsilon}_1)}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} = C_{ji} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}^T$$

tehát az anyagállandók mátrixa szimmetrikus. Így a mátrixban a független anyagállandók száma: $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ db anizotróp, lineárisan rugalmas anyagok esetén.

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

Egy szimmetria síkkal rendelkező anizotróp anyag (monoklin rendszer) merevségi mátrixa

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Az anyagegyenlet inverz alakja

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$$

itt $\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1}$ az ún. alakíthatósági mátrix, szintén szimmetrikus és általános esetben 21 db független állandót tartalmaz. Rombikus szimmetriának eleget tevő faanyag esetén például

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{RL}}{E_R} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LR}}{E_L} & \frac{1}{E_R} & -\frac{\nu_{TR}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & -\frac{\nu_{RT}}{E_R} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{RT}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LR}} \end{bmatrix}$$

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

Lineárisan rugalmas, izotróp anyag merevségi mátrixa

$$[\underline{\underline{\mathbf{C}}}] = \frac{2G}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

A hőmérséklet-változás figyelembevétele: a hőmérséklet-változás hatására fellépő deformációt a következő alakban lehet felírni izotróp anyag esetén

$$\varepsilon = \alpha(T - T_0)$$

ahol α az anyagra jellemző **lineáris hőtágulási együttható**, T_0 a test referencia, vagy kezdeti hőmérséklete, melyen deformáció és feszültségmentes, illetve T a test pillanatnyi hőmérséklete. Ez a törvény izotróp anyag esetén minden irányban fennáll. Ha a rugalmas test kis alakváltozást szenved, miközben egyszerre hat rá mechanikai és hőterhelés is, akkor a teljes deformációt a két terhelésből származó deformáció összegeként lehet értelmezni, így az anyagegyenlet hőrugalmas testre

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underbrace{\frac{1}{2G} \left[\underline{\underline{\mathbf{T}}} - \frac{\nu}{1 + \nu} T_1 \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right]}_{\text{mechanikai terhelés}} + \underbrace{\alpha(T - T_0) \underline{\underline{\mathbf{1}}}}_{\text{hőterhelés}}$$

A törvény inverz alakja

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \frac{E}{1 + \nu} \left[\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} A_1 \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right] - \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha(T - T_0) \underline{\underline{\mathbf{1}}}$$

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

2.3.1. Példa: Tekintsük adottnak a korábbi 2.1.4. Példában egy lineárisan rugalmas, izotróp testre kiszámított $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ alakváltozási tenzort:

$$\left[\underline{\underline{\mathbf{A}}} \right]_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -\nu\Gamma y & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\Gamma y & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma y \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg a feszültségi tenzort!

Ehhez a Hooke-törvény következő alakjára van szükségünk:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = 2G \left[\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_1 \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right]$$

Mivel az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ tenzornak csak a főátlójában találhatóak elemek, a feszültségi tenzorban is csak a normálfeszültségek lehetnek zérustól különbözőek:

$$\sigma_x = -2G\nu\Gamma y + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(-2\nu\Gamma y + \Gamma y) = -2G\nu\Gamma y + 2G\nu\Gamma y = 0$$

$$\sigma_y = -2G\nu\Gamma y + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(-2\nu\Gamma y + \Gamma y) = -2G\nu\Gamma y + 2G\nu\Gamma y = 0$$

$$\sigma_z = 2G\Gamma y + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(-2\nu\Gamma y + \Gamma y) = 2G\Gamma y + 2G\nu\Gamma y = 2G(1+\nu)\Gamma y = E\Gamma y$$

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

2.3.2. Példa: Legyen adott egy lineárisan rugalmas, izotróp test alakváltozási tenzora HKR-ben (2.1.5. Példa alapján)

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{(r,\varphi,z)} = cr^2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg a feszültségi tenzort HKR-ben!

Az anyagegyenletet invariáns alakban adtuk meg, így ugyanaz az alakja, mint a DDKR-ben, vagyis

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = 2G \left[\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_1 \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right]$$

A mellékátlóbeli elemek esetében most is zérus értékek helyezkednek el a feszültségi tenzorban ott, ahol az alakváltozási tenzorban is. A főátlóbeli elemeket tekintve:

$$\sigma_r = 6Gcr^2 + \frac{2G\nu}{1-2\nu} 4cr^2 = \left(6 + \frac{8\nu}{1-2\nu} \right) Gcr^2 = \frac{6-4\nu}{1-2\nu} Gcr^2$$

$$\sigma_\varphi = 2Gcr^2 + \frac{2G\nu}{1-2\nu} 4cr^2 = \left(1 + \frac{4\nu}{1-2\nu} \right) 2Gcr^2 = \frac{1+2\nu}{1-2\nu} 2Gcr^2$$

$$\sigma_z = 0 + \frac{2G\nu}{1-2\nu} 4cr^2 = \frac{8\nu}{1-2\nu} Gcr^2$$

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

2.3.3. Példa: Bizonyítsuk be, hogy megválasztható a $\Delta T = T - T_0$ hőmérséklet-különbség oly módon, hogy egyenletes p nyomásnak kitett lineárisan rugalmas, izotróp test feszültségmentes legyen!

Ha egyenletes nyomásnak teszünk ki egy testet, az azt jelenti, hogy a testet minden irányból azonos p nyomás terheli, mely csak normálfeszültséget eredményez a testen belül, nyírófeszültséget nem. Ez alapján a mechanikai terhelésből származó feszültségi tenzor a következő alakba írható

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{T}} \\ \underline{\underline{m}} \end{bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -p \underline{\underline{1}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

A hőrugalmas test anyagegyenletét figyelembe véve a hőterhelésből származó feszültségi tenzor a következő

$$\underline{\underline{T}}_h = -\frac{E}{1-2\nu} \alpha (T - T_0) \underline{\underline{1}}$$

Ahhoz, hogy feszültségmentes legyen a test, a mechanikai és hőterhelésből származó feszültségek összege zérus kell legyen, tehát

$$\underline{\underline{T}}_m + \underline{\underline{T}}_h = \underline{\underline{0}} = -\left[p + \frac{E}{1-2\nu} \alpha (T - T_0) \right] \underline{\underline{1}}$$

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

2.3.3. Példa folytatása

Ez alapján írható, hogy a zárójelben található kifejezés kell zérus legyen, amit ha átrendezünk

$$T = T_0 - \frac{1 - 2\nu}{E\alpha} p$$

Legyen $T_0 = 20 \text{ C}^\circ$, $\nu = 0,29$, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{C}^\circ}$, $p = 100 \text{ MPa}$, $E = 204 \text{ GPa}$. Ezeket behelyettesítve az előző képletbe azt kapjuk, hogy

$$T = 20 - \frac{1 - 2 \cdot 0,29}{204000 \cdot 12 \cdot 10^{-6}} \cdot 100 = 2,84 \text{ C}^\circ$$

Tehát ha ekkora hőmérsékletre lehűtjük a testet, akkor a 100 MPa-os nyomás hatására kialakuló feszültség a testben megszűnik.

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

I. Primál rendszer:

Ekkor alapváltozónak tekintjük a test elmozdulásmezőjét: $\vec{u} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z$. Ennek a vektornak a 3 koordinátája 3 db ismeretlent jelent. Keressük még továbbá az alakváltozást leíró mennyiségeket, ez a mi esetünkben az $\underline{\underline{A}}$ alakváltozási tenzor elemeit jelenti, mely a tenzor szimmetriája miatt összesen 6 db további ismeretlen ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$). Ezenkívül meg kell határozni a testben kialakuló feszültségeket is, azaz a $\underline{\underline{T}}$ feszültségi tenzor koordinátáit is, ami ennek a tenzornak a szimmetriája miatt szintén 6 db ismeretlent jelent ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$). Mindent összevetve 15 db ismeretlent tartalmaz a feladat.

Mezőegyenletek:

Az előbbieken áttekintett fejezetekben láttuk, hogy ezek között az ismeretlenek között kapcsolatot lehet teremteni. Az első egyenlet az ún. **kinematikai vagy geometriai egyenlet**, mely az elmozdulásmező és az alakváltozások között teremt kapcsolatot:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u})$$

Ez egy tenzoregyenlet, melyből 6 db független skaláregyenlet állítható elő. Ezek például DDKR-ben:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned}$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

A második egyenlet az alakváltozási jellemzők és a feszültségek között teremt kapcsolatot, ez az ún. **anyagegyenlet**, mely lineárisan rugalmas, izotróp anyag esetén

$$\underline{\underline{T}} = 2G \left[\underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_1 \underline{\underline{1}} \right]$$

Ez egy újabb tenzoregyenlet melyből újabb 6 skaláregyenlet állítható elő. Ezek DDKR-ben:

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \frac{2G\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 2G \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]$$

$$\sigma_y = 2G \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_z) \right]$$

$$\sigma_z = 2G \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right]$$

$$\tau_{xy} = 2G \frac{1}{2} \gamma_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Végül az utolsó egyenlet, amely biztosítja a test egyensúlyát, ez pedig az **egyensúlyi egyenlet**

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \cdot \nabla + \vec{\boldsymbol{q}} = \vec{\mathbf{0}}$$

mely egy vektoregyenlet, ennek megfelelően 3 db skaláregyenlet állítható elő belőle. Ezek DDKR-ben:

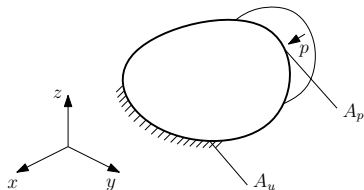
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0$$

Tehát ebből a 3 mezőegyenletből nyertünk összesen 15 db skaláregyenletet a 15 db ismeretlenre. Ám ezek között az egyenletek között szerepel több differenciálegyenlet is, így a probléma egyértelmű megoldásához szükségünk van peremfeltételi előírásokra is.

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata



Egy valós feladat esetén a testre működik valamilyen külső terhelés és emellett valamilyen kényszerrel biztosítják a test egyensúlyát. Így a test külső felületét két részre tudjuk bontani: A_u -val jelöljük azt a felületet, ahol a kényszerek működnek, és A_p -vel, ahol pedig a terhelések (azt a felület részt, amelyen nincs kényszer, és terhelve sincs, a terhelt felülethez soroljuk, ahol 0 a terhelés). Ennek megfelelően a test teljes felülete előáll ennek a két felületnek az összegeként ($A_u \cup A_p = A$), viszont közös része a két felületnek nem lehet ($A_u \cap A_p = \{0\}$).

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Így kétféle peremfeltételi előírás tehető. A kényszerek előírják, hogy a megtámasztott felület pontjainak mekkora az elmozdulása, ezt nevezzük **kinematikai peremfeltételnek**:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 \quad \vec{r} \in A_u$$

A terhelések pedig a terhelt felület pontjaiban előírják a feszültségek értékét, ezt nevezzük **dinamikai peremfeltételnek**:

$$\vec{p} = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n} \quad \vec{r} \in A_p$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Így már a feladat elvileg megoldható, ismerve a 15 skaláregyenletet illetve a 15 ismeretlent, és az előírható peremfeltételeket. Ennek a kapcsolt differenciálegyenlet-rendszernek a megoldása azonban rendkívül bonyolult, ezért előállítjuk a rendszer ún. alapegyenletét. Továbbra is az elmozdulásmezőt tekintjük alapváltozónak: $\underline{\underline{\mathbf{u}}} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z$. Ezek után pedig az előállított mezőegyenleteket kifejezzük, mint ennek az $\underline{\underline{\mathbf{u}}}$ elmozdulásmezőnek a függvénye. Vizsgáljuk először a kinematikai egyenletet:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{u}}} \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\underline{\mathbf{u}}})$$

Ez rendben van, kifejeztük az alakváltozásokat az elmozdulásmezővel. A következő az agyegyenlet, amelybe behelyettesítjük a kinematikai egyenletet:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{T}}} &= 2G \left[\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_1 \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right] = 2G \left[\frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{u}}} \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\underline{\mathbf{u}}}) + \frac{\nu}{1-2\nu} A_1 \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right] = \\ &= G (\underline{\underline{\mathbf{u}}} \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\underline{\mathbf{u}}}) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} (\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{u}}}) \underline{\underline{\mathbf{1}}} \end{aligned}$$

mivel

$$A_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \underline{\underline{\mathbf{u}}} = \nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{u}}}$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Ezzel kifejeztük a feszültségeket, mint az elmozdulásmező függvényeit. Ezt behelyettesítjük az egyensúlyi egyenletbe:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \nabla + \underline{\underline{\mathbf{q}}} &= \left[G(\underline{\underline{\mathbf{u}}} \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\underline{\mathbf{u}}}) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} (\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{u}}}) \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right] \cdot \nabla + \underline{\underline{\mathbf{q}}} = \\ &= G(\underline{\underline{\mathbf{u}}} \circ \nabla) \cdot \nabla + G(\nabla \circ \underline{\underline{\mathbf{u}}}) \cdot \nabla + \frac{2G\nu}{1-2\nu} (\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{u}}}) \nabla + \underline{\underline{\mathbf{q}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}\end{aligned}$$

Nézzük külön a tagokat

$$G(\underline{\underline{\mathbf{u}}} \circ \nabla) \cdot \nabla = G\underline{\underline{\mathbf{u}}} \underbrace{(\nabla \cdot \nabla)}_{\Delta} = G\Delta \underline{\underline{\mathbf{u}}}$$

$$G(\nabla \circ \underline{\underline{\mathbf{u}}}) \cdot \nabla = G\nabla(\underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \nabla) = G\nabla(\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{u}}})$$

$$\frac{2G\nu}{1-2\nu} (\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{u}}}) \nabla = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{u}}})$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

A második és harmadik tag tartalmazza a $\nabla(\nabla \cdot \vec{u})$ szorzatot valamint a G -t, vagyis ezt a két tagot össze tudjuk adni

$$G \left(1 + \frac{2\nu}{1-2\nu} \right) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) = G \left(\frac{1-2\nu}{1-2\nu} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \right) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) = G \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \vec{u})$$

Ezeket visszaírva az egyensúlyi egyenletbe

$$G\Delta\vec{u} + G\frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \vec{q} = \vec{0}$$

Végigosztva az egyenletet G -vel

$$\Delta\vec{u} + \frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \frac{\vec{q}}{G} = \vec{0}$$

Ez az egyenlet a primál rendszer alapegyenlete, az ún. Lamé-Navier egyenlet. Jól látszik, hogy így a probléma egy vektoregyenlettel leírható, melyben csak az elmozdulásmező 3 koordinátája ismeretlen, és ennek megfelelően 3 skalár egyenlet állítható elő belőle.

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Nézzük részletesen az egyenletet DDKR-ben

$$\Delta u \vec{e}_x + \Delta v \vec{e}_y + \Delta w \vec{e}_z + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{q_x}{G} \vec{e}_x + \frac{q_y}{G} \vec{e}_y + \frac{q_z}{G} \vec{e}_z = \vec{0}$$

Ez alapján a 3 skaláregyenlet tehát a következő

$$\Delta u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{q_x}{G} = 0$$

$$\Delta v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{q_y}{G} = 0$$

$$\Delta w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{q_z}{G} = 0$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Most is egy differenciálegyenlet-rendszert kaptunk, tehát az egyértelmű megoldáshoz szükségünk van peremfeltételi előírásokra. A korábban említett két peremfeltételi előírás nem változott, továbbra is a kinematikai és a dinamikai peremfeltételeket kell előírni. A kinematikai peremfeltétel alakja nem változik, az eleve az elmozdulásmezővel van felírva

$$\underline{\vec{u}} = \underline{\vec{u}}_0 \quad \vec{r} \in A_u$$

Viszont a dinamikai peremfeltételi előírásban feszültségek szerepelnek, így ezt is ki kell fejeznünk az elmozdulásmezővel, hogy az alapegyenletből előállítható megoldásokra alkalmazni tudjuk.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} &= \left[G(\underline{\vec{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\vec{u}}) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} (\nabla \cdot \underline{\vec{u}}) \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right] \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} = \\ &= G(\underline{\vec{u}} \circ \nabla) \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} + G(\nabla \circ \underline{\vec{u}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} (\nabla \cdot \underline{\vec{u}}) \underline{\underline{\mathbf{n}}} = \\ &= G \left[\downarrow \underline{\vec{u}} (\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}}) + \nabla (\downarrow \underline{\vec{u}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}}) + \frac{2\nu}{1-2\nu} (\nabla \cdot \underline{\vec{u}}) \underline{\underline{\mathbf{n}}} \right] \end{aligned}$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

A kifejtési tételt felhasználva az alábbi alakban kifejezzük az előző egyenletben a zárójelben található második tagot

$$\operatorname{rot} \vec{u} \times \vec{n} = (\nabla \times \vec{u}) \times \vec{n} = \downarrow \vec{u} (\nabla \cdot \vec{n}) - \nabla (\downarrow \vec{u} \cdot \vec{n})$$

$$\nabla (\downarrow \vec{u} \cdot \vec{n}) = \downarrow \vec{u} (\nabla \cdot \vec{n}) - \operatorname{rot} \vec{u} \times \vec{n} = \downarrow \vec{u} (\nabla \cdot \vec{n}) + \vec{n} \times \operatorname{rot} \vec{u}$$

Ezt visszaírjuk a peremfeltételbe, így

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \vec{n} &= G \left[\downarrow \vec{u} (\nabla \cdot \vec{n}) + \downarrow \vec{u} (\nabla \cdot \vec{n}) + \vec{n} \times \operatorname{rot} \vec{u} + \frac{2\nu}{1-2\nu} (\nabla \cdot \vec{u}) \vec{n} \right] = \\ &= 2G \left[\downarrow \vec{u} (\nabla \cdot \vec{n}) + \frac{1}{2} \vec{n} \times \operatorname{rot} \vec{u} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\nabla \cdot \vec{u}) \vec{n} \right] = \vec{p} \quad \vec{r} \in A_p \end{aligned}$$

Ez lesz a dinamikai peremfeltétel kifejezve az elmozdulásmezővel.

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Összefoglalva:

Tehát a rugalmasságtani feladat a következő alapegyenlettel és peremfeltételekkel fogalmazható meg *primál rendszerben*:

- Alapegyenlet (Lamé-Navier egyenlet): $\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \frac{\vec{q}}{G} = \vec{0}$,
- Kinematikai peremfeltétel: $\vec{u} = \vec{u}_0 \quad \vec{r} \in A_u$,
- Dinamikai peremfeltétel: $2G \left[\vec{u}(\nabla \cdot \vec{n}) + \frac{1}{2} \vec{n} \times \text{rot} \vec{u} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\nabla \cdot \vec{u}) \vec{n} \right] = \vec{p} \quad \vec{r} \in A_p$

Ez az alapegyenlet és a hozzá tartozó peremfeltételek alkotják a **rugalmasságtan első peremérték-feladatát**. Meghatározva az elmozdulásmezőt a kinematikai egyenletekkel előállíthatók az alakváltozási tenzor elemei, melyeket beírva az anyagegyenletbe a feszültségi tenzor elemei is számíthatóak.

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Duál rendszer:

A kiindulási egyenletek (kinematikai egyenlet, anyagegyenlet és egyensúlyi egyenlet) változatlanok, ahogy a peremfeltételek és az ismeretlenek is. Ebben az esetben azonban a feszültségeket tekintjük alapváltozóknak és a peremérték-feladatot a feszültségekkel, mint ismeretlenekkel fogalmazzuk meg. Ennek a feladatnak az alapegyenletét fogjuk előállítani a Lamé-Navier egyenletből. Korábban már láttuk, hogy az alakváltozási tenzor első skaláris invariánsát az elmozdulásmező segítségével ki tudjuk számítani az alábbi alakban

$$A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{u}$$

mely a Lamé-Navier egyenletben is megjelenik: $\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla A_I + \frac{\vec{q}}{G} = \vec{0}$. Szintén korábban már volt szó arról, hogyan függ össze az alakváltozási tenzor első skaláris invariánsa a feszültségi tenzor első skaláris invariánsával

$$T_I = 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} A_I \quad \Rightarrow \quad A_I = \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} T_I$$

Így ki tudtuk fejezni az alakváltozási tenzor első skaláris invariánsát a feszültségekkel. Ezt behelyettesítjük a Lamé-Navier egyenletbe, így kapjuk

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \nabla T_I + \frac{\vec{q}}{G} = \Delta \vec{u} + \frac{1}{2G(1+\nu)} \nabla T_I + \frac{\vec{q}}{G} = \vec{0}$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Az egyenletnek ezt az alakját megszorozzuk hátulról is diadikusan ∇ -val, illetve előlről is, így kapunk két egyenletet

$$\Delta(\vec{u} \circ \nabla) + \frac{1}{2G(1+\nu)} \nabla \circ \nabla T_1 + \frac{\vec{q} \circ \nabla}{G} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

$$\Delta(\nabla \circ \vec{u}) + \frac{1}{2G(1+\nu)} \nabla \circ \nabla T_1 + \frac{\nabla \circ \vec{q}}{G} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Összeadva a két egyenletet

$$2\Delta \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \frac{1}{G(1+\nu)} \nabla \circ \nabla T_1 + \frac{\vec{q} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{q}}{G} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Az anyagegyenlet (általános Hooke-törvény) alapján

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \frac{1}{2G} \left[\underline{\underline{\mathbf{T}}} - \frac{\nu}{1+\nu} T_1 \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right]$$

melyet visszahelyettesítjük az előző egyenletbe

$$\frac{1}{G} \Delta \underline{\underline{\mathbf{T}}} - \frac{\nu}{G(1+\nu)} \Delta T_1 \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \frac{1}{G(1+\nu)} \nabla \circ \nabla T_1 + \frac{\vec{q} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{q}}{G} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Lehet látni, hogy a G -vel minden tag el van osztva, lehet vele egyszerűsíteni. Az egyenlet második tagját $\left(-\frac{\nu}{1+\nu}\Delta T_1\right)$ még átalakítjuk. Először is a Lamé-Navier egyenletet megszorozzuk skalárisan ∇ -val

$$\Delta \underbrace{(\vec{u} \cdot \nabla)}_{A_1} + \frac{1}{1-2\nu} \underbrace{\nabla \cdot \nabla}_{\Delta} \underbrace{(\nabla \cdot \vec{u})}_{A_1} + \frac{\vec{q} \cdot \nabla}{G} = 0$$

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \Delta A_1 + \frac{\nabla \cdot \vec{q}}{G} = 0$$

Ebbe beírva a korábban már látott összefüggést T_1 és A_1 között $\left(A_1 = \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} T_1\right)$

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \Delta T_1 + \frac{\nabla \cdot \vec{q}}{G} = 0$$

Megjelent mindkét tag előtt osztóként a G , egyszerűsíthetünk vele, egyszerűsíthetünk $1-2\nu$ -vel és 2 -vel az első tag előtt is, illetve végigosztjuk az egyenletet $1-\nu$ -vel

$$\frac{1}{1+\nu} \Delta T_1 + \frac{\nabla \cdot \vec{q}}{1-\nu} = 0$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Ezt az egyenletet beszorozva $-\nu$ -vel és átrendezve kapjuk

$$-\frac{\nu}{1+\nu}\Delta T_1 = \frac{\nu}{1-\nu}\nabla \cdot \vec{q}$$

Ennek az egyenletnek a bal oldalán pontosan az a tag jelent meg, amelyet át akartunk alakítani, így visszahelyettesítjük az egyenlet jobb oldalát, ezzel kapjuk

$$\Delta \underline{\underline{T}} + \frac{1}{1+\nu}\nabla \circ \nabla T_1 + \frac{\nu}{1-\nu}\nabla \cdot \vec{q}\underline{\underline{1}} + \vec{q} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{q} = \underline{\underline{0}}$$

Ez a duál rendszer alapegyenlete, az ún. Beltrami-Mitchell egyenlet. Ez egy tenzoregyenlet, melyből a tenzorok szimmetriája miatt elvileg 6 független skaláregyenletet lehetne előállítani, de igazolható, hogy valójában 3 független skaláregyenlet származik belőle. Mivel a feszültségi tenzorban 6 független koordináta szerepel, ezért ehhez az alapegyenlethez az egyensúlyi egyenletet is fel kell használni ($\underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$), mely újabb 3 skaláris egyenlet szintén a feszültségekre nézve.

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

A Beltrami-Mitchell és az egyensúlyi egyenletekből származó feszültségeknek is természetesen ki kell elégíteniük a kinematikai és dinamikai peremfeltételt. Az így előállított feszültségeket beírva az anyagegyenlet megfelelő alakjába, előállíthatóak az alakváltozási tenzor elemei. A kinematikai egyenletek alapján az alakváltozási tenzor elemeiből azonban nem mindig állítható elő egyértelműen a keresett elmozdulásmező. Az egyértelműséget biztosítani kell, erre szolgál az ún. **kompatibilitási egyenlet**, mely a következő alakú

$$\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{A}}} \times \nabla = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

más szavakkal, az alakváltozási tenzorból csak akkor állítható elő egyértelműen az elmozdulásmező, ha a tenzor kielégíti a kompatibilitási egyenletet. Ez egy tenzoregyenlet, melyből az alakváltozási tenzor szimmetriája miatt 6 db skaláris egyenlet állítható elő. Egy tetszőleges tenzor elemeit a tenzorból úgy lehet kinyerni, ha a megfelelő egységvektorokkal megszorozzuk előlről és hátulról is skalárisan (például az 11-es elemet úgy, hogy előlről és hátulról is \vec{e}_x -szel szorozzuk meg a tenzort, vagy például a 32-es elemet úgy, hogy előlről \vec{e}_z -vel, hátulról pedig \vec{e}_y -nal szorozzuk meg skalárisan a tenzort). Így a kompatibilitási egyenlet 6 db skaláregyenletéből kettőt részletesen megnézünk, hogy lehet előállítani, illetve a megmaradó 4 egyenletet pedig csak felírjuk.

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Először nézzük meg a főátlához tartozó egyenleteket. Szorozzuk meg a kompatibilitási egyenletet előlről és hátulról is \vec{e}_x -szel

$$\vec{e}_x \cdot (\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{A}}} \times \nabla) \cdot \vec{e}_x = (\vec{e}_x \times \nabla) \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot (\nabla \times \vec{e}_x) = 0$$

Először nézzük a két zárójelben álló vektorszorzást

$$\vec{e}_x \times \nabla = \vec{e}_x \times \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) = \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_z - \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_y$$

$$\nabla \times \vec{e}_x = -\vec{e}_x \times \nabla = \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_y - \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_z$$

Ezzel a két vektorral megszorozva az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ tenzort

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = -\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 0$$

Átrendezve

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Ha a kompatibilitási egyenletet előlről és hátulról is \vec{e}_y -nal majd pedig \vec{e}_z -vel szorozzuk meg, rendre a következő két egyenletet kapjuk

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Most nézzük a mellékátlához tartozó egyenleteket. Szorozzuk meg a kompatibilitási egyenletet előlről \vec{e}_x -szel, hátulról pedig \vec{e}_y -nal

$$\vec{e}_x \cdot (\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{A}}} \times \nabla) \cdot \vec{e}_y = (\vec{e}_x \times \nabla) \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot (\nabla \times \vec{e}_y) = 0$$

$$\nabla \times \vec{e}_y = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) \times \vec{e}_y = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_z - \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_x$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Így

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} = \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 0$$

Átrendezzük az egyenletet

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

Ugyanez az egyenlet állítható elő, ha a kompatibilitási egyenlet előlről szorozzuk meg \vec{e}_y -nal és hátulról \vec{e}_x -szel. Így még további két egyenlet állítható elő, melyek

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right)$$

Ezek az egyenletek pedig azt mutatják, hogy valójában az alakváltozási koordináták nem függetlenek egymástól.

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

2.4.1. Példa: Igazolja, hogy az alábbi elmozdulásmező kielégíti a Lamé-Navier egyenletet, ha

$$\vec{q} = -\gamma \vec{e}_z!$$

$$u = -\frac{\nu\gamma}{E}xz; v = -\frac{\nu\gamma}{E}yz; w = \frac{\gamma}{2E} [z^2 - L^2 + \nu(x^2 + y^2)]$$

A Lamé-Navier egyenlet invariáns alakja

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \frac{\vec{q}}{G} = \vec{0}$$

Mivel az elmozdulásmező a DDKR koordinátáitól függ, így a DDKR-ben érvényes 3 skalár egyenletet kell felírni

$$\Delta u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{q_x}{G} = 0$$

$$\Delta v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{q_y}{G} = 0$$

$$\Delta w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{q_z}{G} = 0$$

Mivel mindhárom egyenletben szükség lesz az A_1 első skaláris invariánsra, ezt meghatározzuk külön

$$A_1 = \nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu\gamma}{E}z - \frac{\nu\gamma}{E}z + \frac{\gamma}{E}z = \frac{\gamma}{E}(1-2\nu)z$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

amire még szükségünk lesz, a Δu , Δv és Δw , ezek

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\nu\gamma}{E} + \frac{\nu\gamma}{E} + \frac{\gamma}{E} = \frac{\gamma}{E}(1 + 2\nu)$$

Helyettesítsük ezeket az eredményeket vissza a 3 skaláris egyenletbe

$$0 + \frac{1}{1-2\nu} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\gamma}{E}(1-2\nu)z \right]}_0 + \frac{0}{G} = 0$$

$$0 + \frac{1}{1-2\nu} \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\gamma}{E}(1-2\nu)z \right]}_0 + \frac{0}{G} = 0$$

$$\frac{\gamma}{E}(1 + 2\nu) + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\gamma}{E}(1 - 2\nu) - \frac{\gamma}{G} = \frac{\gamma}{E}(1 + 2\nu + 1 - 2 - 2\nu) = 0; \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

2.4.2. Példa: Igazolja, hogy az alábbi alakváltozási tenzor kompatibilis!

$$\left[\underline{\underline{\mathbf{A}}} \right]_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -\nu\Gamma y & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\Gamma y & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma y \end{bmatrix}$$

A tenzorból ki tudjuk nyerni az alakváltozási koordinátákat, melyek a következők:

$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\Gamma y$; $\varepsilon_z = \Gamma y$; $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Ezeket a koordinátákat kell behelyettesíteni a 6 db skaláris kompatibilitási egyenletbe:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad \Rightarrow \quad 0 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad \Rightarrow \quad 0 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad \Rightarrow \quad 0 + 0 = 0$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

2.4.2. Példa folytatása:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \Rightarrow 0 = 0 + 0 - 0$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \Rightarrow 0 = 0 + 0 - 0$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) \Rightarrow 0 = 0 + 0 - 0$$

Mind a hat kompatibilitási egyenlet teljesült, tehát az alakváltozási tenzorból egyértelműen előállítható az elmozdulásmező.