

Rugalmasságtan

I. előadás
készítette: Dr. Lengyel Ákos József

2020. február 15.

Elérhetőségek

Tantárgy: Rugalmasságtan (GEMET310ML)

Előadó: Dr. Lengyel Ákos József

Elérhetőségek:

- Iroda: A/4. épület 428.
- Tel.: +36-46-565-111/18-78
- E-mail: mechlen@uni-miskolc.hu
- Honlap: www.mech.uni-miskolc.hu/~lengyel/education

Követelmények

Tantárgyi követelmény: aláírás + kollokvium (vizsga)

- Az aláírás megszerzése szorgalmi időszakban: 2 db 30 perces zárthelyi, melyek a 3. és 4. alkalommal kerülnek megíratásra, egyenként 20 pontért. Az aláírás feltétele az egyik zh-n legalább 8 pont elérése.
- Az aláírás megszerzése vizsgaidőszakban: a vizsgaidőszak első két hete aláíráspótló időszak, minden héten egy-egy aláíráspótlási lehetőség, 40 pontos 50 perces zh-val, melyből 20 pontot kell elérni.
- Vizsgajegy megszerzése szorgalmi időszakban: a 2 db zárthelyin összesen 40 pont érhető el, a két zh pontszámait összeadva 20 ponttól megajánlott elégséges (2), 24 ponttól megajánlott közepes (3), 28 ponttól megajánlott jó (4) és 32 ponttól megajánlott jeles (5) vizsgajegy szerezhető.
- Vizsgajegy megszerzése vizsgaidőszakban: a 6 hetes vizsgaidőszakban hetente egy vizsgalehetőség, melyen egy 40 pontos, 50 perces zárthelyit kell megírni, elégtelentől eltérő jegyet ugyanannyi ponttól lehet szerezni, mint szorgalmi időszakban megajánlott jegyet.

Aki a félévközi két zh-n 16 ponttól több pontot ér el, pluszpontokat kap, melyeket a vizsgán beszámítjuk. Az elért pontszámból ki kell vonni 16 pontot, az eredményt pedig osztani kell kettővel, ennyi pluszpont jár a vizsgán (ha a hányados nem egész szám, a kerekítés szabályai érvényesek). Aki megajánlott jegyet szerez, a pluszpontok neki is járnak abban az esetben, ha nem elégedett a megajánlott jeggyel, és vizsgaidőszakok szeretne javítani.

1. Bevezetés, alapfogalmak

1.1. Alapfogalmak

Rugalmasságtan: a rugalmas testek mechanikája

A kontinuummechanika, azon belül a szilárd testek mechanikája tudományterület része. Célja a rugalmas test elmozdulási, alakváltozási, feszültségi és energetikai állapotának leírása, a kezdeti-peremérték-feladatának származtatása, megfogalmazása, megoldása.

Rugalmas test: ha a test a terhelés eltávolítása után kezdeti alakját tökéletesen visszanyeri. Tágabb értelemben minden olyan test (kontinuum) rugalmas, amelynek alakítására fordított mechanikai energia teljes egészében visszanyerhető.

Rugalmas anyag: a feszültségmező csak a pillanatnyi alakváltozási állapot függvénye, NEM függ a terhelési folyamattól, az alakváltozás útjától. A belső erőrendszer (ER) konzervatív.

Kontinuum modell: feltételezzük, hogy a rugalmas test anyaga a térfogatot folytonosan tölti ki, vagyis a test molekuláris szerkezetét nem vesszük figyelembe.

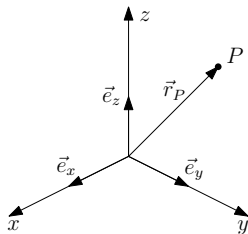
Lineáris rugalmasságtan: feltétel a feladat differenciálegyenlet-rendszerére nézve

- *geometriai linearitás:* az elmozdulásmező helykoordináták szerinti deriváltjai jóval kisebb nagyságrendűek, mint 1 (10^{-3} , vagy ennél is kisebb nagyságrend, vagyis a kezdeti és az alakváltozott állapot közel megegyezik),
- *anyagi linearitás:* a feszültségek és az alakváltozások közötti kapcsolat egyértelmű és lineáris.

Végeselem-módszer (VEM): a rugalmasságtani feladat "közelítő"/numerikus megoldására szolgáló technika.

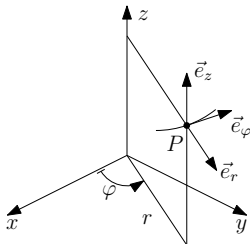
1.2. Alkalmazott koordináta-rendszerek

Descartes-i derékszögű
koordináta-rendszer (DDKR)



$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Hengerkoordináta-rendszer (HKR)



$$\vec{r} = r\vec{e}_r(\varphi) + z\vec{e}_z$$

A rugalmasságtanban leggyakrabban használt koordináta-rendszerek.

Kapcsolat a két koordináta-rendszer (KR) között:

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z = z$$

1.2. Alkalmazott koordináta-rendszerek

A HKR tulajdonságai a két KR kapcsolata alapján:

$$\vec{r} = r \cos \varphi \vec{e}_x + r \sin \varphi \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y = \vec{e}_r$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \vec{e}_x + r \cos \varphi \vec{e}_y = r \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{e}_z$$

Következmény, hogy a HKR két egységvektora is függ a φ szögtől:

$$\vec{e}_r(\varphi) = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y; \quad \vec{e}_\varphi(\varphi) = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y$$

Tehát deriválásnál figyelembe kell venni, hogy

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y = \vec{e}_\varphi; \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\cos \varphi \vec{e}_x - \sin \varphi \vec{e}_y = -\vec{e}_r$$

1.2. Alkalmazott koordináta-rendszerek

A Hamilton-féle differenciáloperátor (nabla)

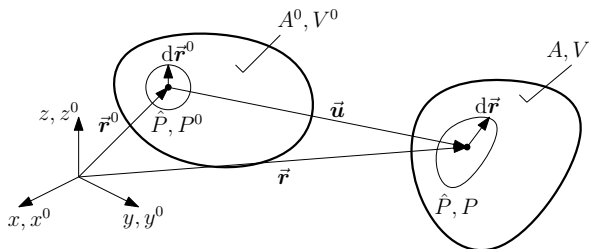
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z; \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

A Laplace-féle differenciáloperátor (laplace)

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

2. A lineáris rugalmasságtan alapegyenletei, a lehetséges peremfeltételek

2.1. Elmozdulási és alakváltozási állapot



Az alakváltozás előtti állapot (bal oldali test): terhelés előtti, deformációmentes, ez az ún. kezdeti konfiguráció.

Az alakváltozott állapot (jobb oldali test): terhelés utáni, ún. pillanatnyi konfiguráció.

Elemi környezet: a P pont olyan kis környezete, amelyben a mechanikai állapot

- véges számú mennyiséggel megadható,
- a hely lineáris függvénye.

Az alakváltozás leírásához szükséges, mivel a pontnak nincs alakja. Az elemi környezet lehet elemi kocka, elemi gömb vagy elemi triéder.

2.1. Elmozdulási és alakváltozási állapot

A terhelés során változik

- az anyagi pont helye

$$P^0(x^0, y^0, z^0) \rightarrow P(x, y, z)$$

$$\vec{r}^0 = x^0 \vec{e}_x + y^0 \vec{e}_y + z^0 \vec{e}_z; \quad \vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

- az anyagi (x^0, y^0, z^0) vonalak érintői

$$\vec{e}_x = \frac{\partial \vec{r}^0}{\partial x^0} \rightarrow \vec{g}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^0}$$

$$\vec{e}_y = \frac{\partial \vec{r}^0}{\partial y^0} \rightarrow \vec{g}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^0}$$

$$\vec{e}_z = \frac{\partial \vec{r}^0}{\partial z^0} \rightarrow \vec{g}_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z^0}$$

- a vonalelem vektor

$$d\vec{r}^0 \rightarrow d\vec{r}$$

2.1. Elmozdulási és alakváltozási állapot

A leképezést linearizáljuk, így tenzorral is leírható

$$\begin{aligned}d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^0} dy^0 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z^0} dz^0 + (\dots) = \\&= \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^0} (\vec{e}_x \cdot d\vec{r}^0) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^0} (\vec{e}_y \cdot d\vec{r}^0) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z^0} (\vec{e}_z \cdot d\vec{r}^0) = \\&= \underbrace{\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^0} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^0} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z^0} \circ \vec{e}_z \right]}_{\underline{\underline{\mathbf{F}}}} \cdot d\vec{r}^0\end{aligned}$$

vagyis $d\vec{r} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot d\vec{r}^0$ ahol

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \vec{r} \circ \nabla^0$$

az ún. **alakváltozási gradiens tenzor**. Részletezve:

$$\left[\underline{\underline{\mathbf{F}}} \right]_{(x,y,z)} = \left[\vec{r} \circ \nabla^0 \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^0} & \frac{\partial x}{\partial y^0} & \frac{\partial x}{\partial z^0} \\ \frac{\partial y}{\partial x^0} & \frac{\partial y}{\partial y^0} & \frac{\partial y}{\partial z^0} \\ \frac{\partial z}{\partial x^0} & \frac{\partial z}{\partial y^0} & \frac{\partial z}{\partial z^0} \end{bmatrix}$$

2.1. Elmozdulási és alakváltozási állapot

Az ábra alapján $\vec{r} = \vec{r}^0 + \vec{u}$, ahol $\vec{u} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z$ az **elmozdulásvektor**, vagy elmozdulás mező. Ezt behelyettesítjük az alakváltozási gradiens tenzor képletébe, így kapjuk

$$\underline{\underline{F}} = (\vec{r}^0 + \vec{u}) \circ \nabla^0 = \underline{\underline{1}} + \vec{u} \circ \nabla^0 = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{U}}$$

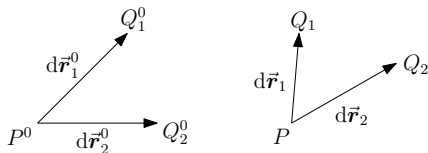
Itt $\underline{\underline{U}} = \vec{u} \circ \nabla^0$ az **elmozdulási gradiens tenzor**, $\underline{\underline{1}}$ pedig az egységtenzor. Részletezve:

$$[\underline{\underline{1}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[\underline{\underline{U}}]_{(x,y,z)} = [\vec{u} \circ \nabla^0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x^0} & \frac{\partial u}{\partial y^0} & \frac{\partial u}{\partial z^0} \\ \frac{\partial v}{\partial x^0} & \frac{\partial v}{\partial y^0} & \frac{\partial v}{\partial z^0} \\ \frac{\partial w}{\partial x^0} & \frac{\partial w}{\partial y^0} & \frac{\partial w}{\partial z^0} \end{bmatrix}$$

Az elmozdulási gradiens tenzor elemei megmutatják, hogy az alakváltozás nagy, vagy kismértékű. Ha az elmozdulási gradiens **minden** elemének nagyságrendje jóval kisebb mint egy ($\frac{\partial u}{\partial x^0}$; $\frac{\partial u}{\partial y^0}$; stb. $\ll 1$, azaz ezen deriváltak nagyságrendje 10^{-3} vagy ettől kisebb), akkor az alakváltozás **kismértékű!** Minden más esetben nagymértékű alakváltozásról beszélünk.

2.1. Elmozdulási és alakváltozási állapot



Nagy alakváltozások esete

$$d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1^0 \cdot d\vec{r}_2^0 = d\vec{r}_1^0 \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot d\vec{r}_2^0 - d\vec{r}_1^0 \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} \cdot d\vec{r}_2^0 = d\vec{r}_1^0 \cdot \underbrace{(\underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} - \underline{\underline{\mathbf{1}}})}_{2\underline{\underline{\mathbf{E}}}} \cdot d\vec{r}_2^0$$

Itt az $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ tenzor a Green–Lagrange-féle (Green–Saint Venant-féle) alakváltozási tenzor

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} - \underline{\underline{\mathbf{1}}})$$

Véges alakváltozásokra vonatkozik, a kezdeti állapotban van felírva. Korábban már láttuk, hogy $\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\mathbf{U}}}$, ezt helyettesítsük be a Green–Lagrange alakváltozási tenzorba

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2} \left[(\underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\mathbf{U}}})^T \cdot (\underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\mathbf{U}}}) - \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right] = \frac{1}{2} [\underline{\underline{\mathbf{U}}} + \underline{\underline{\mathbf{U}}}^T + \underline{\underline{\mathbf{U}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{U}}}]$$

2.1. Elmozdulási és alakváltozási állapot

Kis alakváltozások esetén a kezdeti és a deformált alak közel azonos. Ennek következménye, hogy $\nabla \cong \nabla^0$, $\underline{\mathbf{e}} \cong \underline{\mathbf{g}}$, stb. Ekkor $\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{u}} \circ \nabla^0 = \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{u}} \circ \nabla$. Kis alakváltozások esetén $\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{u}} \circ \nabla$ tenzor elemei jóval kisebb nagyságrendűek mint 1, vagyis $\underline{\mathbf{U}}^T \cdot \underline{\mathbf{U}}$ szorzat értéke elhanyagolhatóan kicsi (kinematikai linearizálás). Ezt beírva a Green–Lagrange alakváltozási tenzorból kapjuk a kis alakváltozásokra is érvényes linearizált **alakváltozási tenzort**

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{U}}^T + \underbrace{\underline{\mathbf{U}}^T \cdot \underline{\mathbf{U}}}_{\cong 0}] = \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{U}}^T] = \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\mathbf{u}}]$$

Ezt az egyenletet nevezzük **kinematikai vagy geometriai egyenletnek**. Innentől tovább kis alakváltozásokkal foglalkozunk.

Az elmozdulási gradiens additív felbontása

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{u}} \circ \nabla = \underline{\mathbf{U}}_{\text{szim}} + \underline{\mathbf{U}}_{\text{aszim}} = \underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{\Psi}}$$

A szimmetrikus rész éppen az alakváltozási tenzort adja ($\underline{\mathbf{A}}$), az aszimmetrikus rész pedig az ún. forgás tenzor ($\underline{\mathbf{\Psi}}$). Definíció szerint egy tenzor szimmetrikus részét így képezzük

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{U}}^T]$$

Egy tenzor akkor szimmetrikus, ha transzponáltja megegyezik önmagával ($\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}^T$).

2.1. Elmozdulási és alakváltozási állapot

Az aszimmetrikus rész képzése

$$\underline{\underline{u}}_{\text{aszim}} = \underline{\underline{\Psi}} = \frac{1}{2} [\underline{\underline{u}} - \underline{\underline{u}}^T] = \frac{1}{2} [\vec{u} \circ \nabla - \nabla \circ \vec{u}]$$

Egy tenzor aszimmetrikus, ha $\underline{\underline{\Psi}} = -\underline{\underline{\Psi}}^T$, ez pedig csak úgy teljesül, ha a főátlóban minden érték zérus, a mellékátlóban a szimmetrikusan elhelyezkedő elemek pedig egymás ellentettjei. Az alakváltozási tenzor mátrixa

$$\begin{aligned} \underset{(x,y,z)}{[\underline{\underline{A}}]} &= \frac{1}{2} [\underline{\underline{u}} + \underline{\underline{u}}^T] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Itt $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ az x, y, z irányokba eső fajlagos nyúlások, $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ az adott két irány közötti szögtorzulások. A két tenzorból látszanak az elmozdulásmező koordinátái és az alakváltozási koordináták közötti összefüggések (skaláris egyenletek), pl.: $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$, stb.

2.1. Elmozdulási és alakváltozási állapot

A forgás tenzor mátrixa

$$\begin{aligned} \left[\underline{\underline{\Psi}} \right]_{(x,y,z)} &= \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{\mathbf{U}}} - \underline{\underline{\mathbf{U}}}^T \right] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\psi_z & \psi_y \\ \psi_z & 0 & -\psi_x \\ -\psi_y & \psi_x & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A forgás tenzor vektorinvariánsa (forgás vektor)

$$\underline{\underline{\Psi}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{a}}} = \underline{\underline{\psi}} \times \underline{\underline{\mathbf{a}}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\psi}} = \psi_x \underline{\underline{\mathbf{e}}}_x + \psi_y \underline{\underline{\mathbf{e}}}_y + \psi_z \underline{\underline{\mathbf{e}}}_z$$

Elemi mozgások

$$d\underline{\underline{\mathbf{r}}} = \left(\underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\mathbf{U}}} \right) \cdot d\underline{\underline{\mathbf{r}}}^0 = d\underline{\underline{\mathbf{r}}}^0 + \underline{\underline{\mathbf{U}}} \cdot d\underline{\underline{\mathbf{r}}}^0 = \underbrace{d\underline{\underline{\mathbf{r}}}^0}_{\text{eltolódás}} + \underbrace{\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot d\underline{\underline{\mathbf{r}}}^0}_{\text{alakváltozás}} + \underbrace{\underline{\underline{\Psi}} \cdot d\underline{\underline{\mathbf{r}}}^0}_{\text{forgás}}$$

2.1. Elmozdulási és alakváltozási állapot

Alakváltozási állapot HKR-ben: Az invariáns összefüggések itt is érvényesek, vagyis $\underline{\underline{\mathbf{U}}} = \underline{\underline{\mathbf{u}}} \circ \nabla$, $\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2} [\underline{\underline{\mathbf{U}}} + \underline{\underline{\mathbf{U}}}^T + \underline{\underline{\mathbf{U}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{U}}}]$, $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \frac{1}{2} [\underline{\underline{\mathbf{U}}} + \underline{\underline{\mathbf{U}}}^T]$, $\underline{\underline{\Psi}} = \frac{1}{2} [\underline{\underline{\mathbf{U}}} - \underline{\underline{\mathbf{U}}}^T]$. Az elmozdulásvektor HKR-ben: $\underline{\underline{\mathbf{u}}} = u\vec{\mathbf{e}}_r + v\vec{\mathbf{e}}_\varphi + w\vec{\mathbf{e}}_z$, illetve a nabla operátor HKR-ben: $\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\vec{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\mathbf{e}}_z$. Ne feledjük, hogy $\frac{\partial \vec{\mathbf{e}}_r}{\partial \varphi} = \vec{\mathbf{e}}_\varphi$ és $\frac{\partial \vec{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{\mathbf{e}}_r$. Ezek alapján

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{U}}} &= (u\vec{\mathbf{e}}_r + v\vec{\mathbf{e}}_\varphi + w\vec{\mathbf{e}}_z) \circ \left(\frac{\partial}{\partial r}\vec{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\mathbf{e}}_z \right) = \frac{\partial u}{\partial r}\vec{\mathbf{e}}_r \circ \vec{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{\mathbf{e}}_r \circ \vec{\mathbf{e}}_\varphi + \\ &+ \frac{1}{r}u\vec{\mathbf{e}}_\varphi \circ \vec{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{\mathbf{e}}_r \circ \vec{\mathbf{e}}_z + \frac{\partial v}{\partial r}\vec{\mathbf{e}}_\varphi \circ \vec{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\vec{\mathbf{e}}_\varphi \circ \vec{\mathbf{e}}_\varphi - \frac{1}{r}v\vec{\mathbf{e}}_r \circ \vec{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{\partial v}{\partial z}\vec{\mathbf{e}}_\varphi \circ \vec{\mathbf{e}}_z + \\ &+ \frac{\partial w}{\partial r}\vec{\mathbf{e}}_z \circ \vec{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\vec{\mathbf{e}}_z \circ \vec{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{\partial w}{\partial z}\vec{\mathbf{e}}_z \circ \vec{\mathbf{e}}_z \end{aligned}$$

$$\left[\underline{\underline{\mathbf{U}}} \right]_{(r,\varphi,z)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

2.1. Elmozdulási és alakváltozási állapot

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{(r,\varphi,z)} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_r & \frac{1}{2}\gamma_{r\varphi} & \frac{1}{2}\gamma_{rz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{\varphi r} & \varepsilon_\varphi & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi z} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zr} & \frac{1}{2}\gamma_{z\varphi} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r}\right) & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tehát $\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$, $\gamma_{r\varphi} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r}$, $\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$, stb.

2.1. Elmozdulási és alakváltozási állapot

2.1.1. Példa: Határozzuk meg az $\underline{\underline{F}}$ alakváltozási gradiens tenzor mátrixát, ha ismert a test pontjainak alakváltozás utáni helyzetét leíró $\vec{r}(x, y, z)$ helyvektor! Adott:

$\vec{r} = Cx^2z^2\vec{e}_x - Cyx^2z\vec{e}_y + Cx^2z^2\vec{e}_z$, $C = \text{áll.}$

$$\left[\underline{\underline{F}} \right]_{(x,y,z)} = [\vec{r} \circ \nabla] = \begin{bmatrix} Cx^2z^2 \\ -Cyx^2z \\ Cx^2z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2Cxz^2 & 0 & 2Cx^2z \\ -2Cyxz & -Cx^2z & -Cyx^2 \\ 2Cxz^2 & 0 & 2Cx^2z \end{bmatrix}$$

2.1. Elmozdulási és alakváltozási állapot

2.1.2. Példa: Ismert egy rugalmas test elmozdulásvektora, mint a hely függvénye:
 $\vec{u}(x, y, z) = Cxy^2\vec{e}_x + Cyz^2\vec{e}_y + Czx^2\vec{e}_z$, $C = 10^{-6} \text{ mm}^{-2}$. A test egy P pontjának helyvektora:
 $\vec{r}_P = -20\vec{e}_x + 30\vec{e}_y + 40\vec{e}_z$ mm. Határozzuk meg a test P pontjában az $\underline{\underline{U}}_P$ elmozdulási gradiens, az $\underline{\underline{F}}_P$ alakváltozási gradiens, az $\underline{\underline{A}}_P$ alakváltozási és a $\underline{\underline{\Psi}}_P$ forgás tenzort!

$$\left[\underline{\underline{U}} \right]_{(x,y,z)} = \vec{u} \circ \nabla = \begin{bmatrix} Cxy^2 \\ Cyz^2 \\ Czx^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^2 & 2xy & 0 \\ 0 & z^2 & 2yz \\ 2xz & 0 & x^2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\left[\underline{\underline{U}}_P \right]_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 30^2 & 2 \cdot (-20) \cdot 30 & 0 \\ 0 & 40^2 & 2 \cdot 30 \cdot 40 \\ 2 \cdot (-20) \cdot 40 & 0 & 20^2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} = \begin{bmatrix} 9 & -12 & 0 \\ 0 & 16 & 24 \\ -16 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$\left[\underline{\underline{F}}_P \right]_{(x,y,z)} = \left[\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{U}}_P \right] = \begin{bmatrix} 1,0009 & -0,0012 & 0 \\ 0 & 1,0016 & 0,0024 \\ -0,0016 & 0 & 1,0004 \end{bmatrix}$$

2.1. Elmozdulási és alakváltozási állapot

2.1.2. Példa folytatása

$$\begin{aligned} \left[\underline{\underline{\mathbf{A}}}_P \right]_{(x,y,z)} &= \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{\mathbf{U}}} + \underline{\underline{\mathbf{U}}}^T \right] = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 9 & -12 & 0 \\ 0 & 16 & 24 \\ -16 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 & -16 \\ -12 & 16 & 0 \\ 0 & 24 & 4 \end{bmatrix} \right\} \cdot 10^{-4} = \\ &= \begin{bmatrix} 9 & -6 & -8 \\ -6 & 16 & 12 \\ -8 & 12 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\underline{\underline{\mathbf{\Psi}}}_P \right]_{(x,y,z)} &= \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{\mathbf{U}}} - \underline{\underline{\mathbf{U}}}^T \right] = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 9 & -12 & 0 \\ 0 & 16 & 24 \\ -16 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 & -16 \\ -12 & 16 & 0 \\ 0 & 24 & 4 \end{bmatrix} \right\} \cdot 10^{-4} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -6 & 8 \\ 6 & 0 & 12 \\ -8 & -12 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\vec{\psi}_P = (-12\vec{e}_x + 8\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \cdot 10^{-4}$$

2.1. Elmozdulási és alakváltozási állapot

2.1.3. Példa: Ismert egy rugalmas test alakváltozás utáni helyzetét leíró $\vec{r}(x, y, z)$ helyvektor. $\vec{r} = (x + a_1 y^2)\vec{e}_x + (y + a_2)\vec{e}_y + (z + a_3 yz)\vec{e}_z$. Határozzuk meg a véges alakváltozások $\underline{\underline{E}}$ Green-Lagrange-féle alakváltozási tenzorát! A tenzor meghatározásához szükségünk van az alakváltozási gradiens tenzorra meg annak transzponáltjára, melyek

$$\left[\underline{\underline{F}} \right]_{(x,y,z)} = [\vec{r} \circ \nabla] = \begin{bmatrix} 1 & 2a_1 y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_3 z & 1 + a_3 y \end{bmatrix}, \quad \left[\underline{\underline{F}}^T \right]_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_1 y & 1 & a_3 z \\ 0 & 0 & 1 + a_3 y \end{bmatrix}$$

$$\left[\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \right]_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 1 & 2a_1 y & 0 \\ 2a_1 y & 4a_1^2 y^2 + 1 + a_3^2 z^2 & a_3 z + a_3^2 yz \\ 0 & a_3 z + a_3^2 yz & 1 + 2a_3 y + a_3^2 y^2 \end{bmatrix}$$

és így a Green-Lagrange alakváltozási tenzor

$$\left[\underline{\underline{E}} \right]_{(x,y,z)} = \left[\frac{1}{2} \left(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}} \right) \right] = \begin{bmatrix} 0 & a_1 y & 0 \\ a_1 y & 2a_1^2 y^2 + \frac{1}{2} a_3^2 z^2 & \frac{1}{2} (a_3 z + a_3^2 yz) \\ 0 & \frac{1}{2} (a_3 z + a_3^2 yz) & a_3 y + \frac{1}{2} a_3^2 y^2 \end{bmatrix}$$

2.1. Elmozdulási és alakváltozási állapot

2.1.4. Példa: Adott az $Oxyz$ koordináta-rendszerben egy rugalmas test elmozdulásmezője:

$\vec{u} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z$, ahol $u = -\nu\Gamma xy$, $v = \frac{\Gamma}{2}(\nu x^2 - \nu y^2 - z^2)$, $w = \Gamma yz$, és ν , $\Gamma = \text{áll.}$

Határozzuk meg az $\underline{\underline{U}}$ elmozdulási gradiens, az $\underline{\underline{A}}$ alakváltozási és a $\underline{\underline{\Psi}}$ forgás tenzort, majd a $\vec{\psi}$ forgásvektort!

$$\left[\underline{\underline{U}} \right]_{(x,y,z)} = [\vec{u} \circ \nabla] = \begin{bmatrix} -\nu\Gamma y & -\nu\Gamma x & 0 \\ \nu\Gamma x & -\nu\Gamma y & -\Gamma z \\ 0 & \Gamma z & \Gamma y \end{bmatrix}, \quad \left[\underline{\underline{U}}^T \right]_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -\nu\Gamma y & \nu\Gamma x & 0 \\ -\nu\Gamma x & -\nu\Gamma y & \Gamma z \\ 0 & -\Gamma z & \Gamma y \end{bmatrix}$$

$$\left[\underline{\underline{A}} \right]_{(x,y,z)} = \left[\frac{1}{2} (\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}}^T) \right] = \begin{bmatrix} -\nu\Gamma y & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\Gamma y & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma y \end{bmatrix}$$

$$\left[\underline{\underline{\Psi}} \right]_{(x,y,z)} = \left[\frac{1}{2} (\underline{\underline{U}} - \underline{\underline{U}}^T) \right] = \begin{bmatrix} 0 & -\nu\Gamma x & 0 \\ \nu\Gamma x & 0 & -\Gamma z \\ 0 & \Gamma z & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\psi} = \Gamma z \vec{e}_x + \nu\Gamma x \vec{e}_z$$

2.1. Elmozdulási és alakváltozási állapot

2.1.5. Példa: Adott egy rugalmas test elmozdulásmezője HKR-ben: $\underline{\vec{u}} = cr^3 \underline{\vec{e}}_r$, ahol $c = \text{áll.}$ Határozzuk meg az elmozdulási gradiens, az alakváltozási és a forgás tenzort, valamint a forgásvektort!

$$\left[\underline{\underline{\mathbf{U}}} \right]_{(r,\varphi,z)} = [\underline{\vec{u}} \circ \nabla] = \left[(cr^3 \underline{\vec{e}}_r) \circ \left(\frac{\partial}{\partial r} \underline{\vec{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \underline{\vec{e}}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \underline{\vec{e}}_z \right) \right] =$$

$$\left[3cr^2 \underline{\vec{e}}_r \circ \underline{\vec{e}}_r + \frac{1}{r} 0 \underline{\vec{e}}_r \circ \underline{\vec{e}}_\varphi + \frac{1}{r} cr^3 \underline{\vec{e}}_\varphi \circ \underline{\vec{e}}_\varphi + 0 \underline{\vec{e}}_r \circ \underline{\vec{e}}_z \right] = cr^2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ez a tenzor most (de csak most, mivel épp olyan az elmozdulásmező) szimmetrikus, tehát $\underline{\underline{\mathbf{U}}} = \underline{\underline{\mathbf{U}}}^T$. Így

$$\left[\underline{\underline{\mathbf{A}}} \right]_{(r,\varphi,z)} = cr^2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\Psi}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}, \quad \vec{\psi} = \vec{\mathbf{0}}$$

2.1. Elmozdulási és alakváltozási állapot

2.1.6. Példa: Adott egy rugalmas test elmozdulásmezője HKR-ben: $\vec{u} = \vartheta r z \vec{e}_\varphi + \vartheta \omega(r, \varphi) \vec{e}_z$, ahol $\vartheta = \text{áll}$. Határozzuk meg az elmozdulási gradiens, az alakváltozási és a forgás tenzort, valamint a forgásvektort!

$$\left[\underline{\underline{U}} \right]_{(r, \varphi, z)} = [\vec{u} \circ \nabla] = \left[(\vartheta r z \vec{e}_\varphi + \vartheta \omega(r, \varphi) \vec{e}_z) \circ \left(\frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) \right] =$$

$$\left[\vartheta z \vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_r - \frac{1}{r} \vartheta r z \vec{e}_r \circ \vec{e}_\varphi + \vartheta r \vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_z + \vartheta \frac{\partial \omega}{\partial r} \vec{e}_z \circ \vec{e}_r + \frac{1}{r} \vartheta \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \vec{e}_z \circ \vec{e}_\varphi \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\vartheta z & 0 \\ \vartheta z & 0 & \vartheta r \\ \vartheta \frac{\partial \omega}{\partial r} & \frac{\vartheta}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} & 0 \end{bmatrix}, \quad \left[\underline{\underline{U}}^T \right]_{(r, \varphi, z)} = \begin{bmatrix} 0 & \vartheta z & \vartheta \frac{\partial \omega}{\partial r} \\ -\vartheta z & 0 & \frac{\vartheta}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \\ 0 & \vartheta r & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\underline{\underline{A}} \right]_{(r, \varphi, z)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \vartheta \frac{\partial \omega}{\partial r} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(\vartheta r + \frac{\vartheta}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{2} \vartheta \frac{\partial \omega}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\vartheta r + \frac{\vartheta}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

2.1. Elmozdulási és alakváltozási állapot

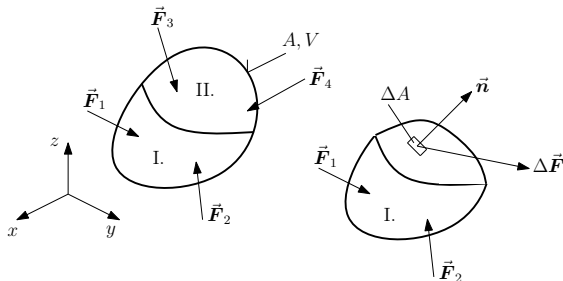
2.1.6. Példa folytatása

$$\left[\underline{\underline{\Psi}} \right]_{(r,\varphi,z)} = \begin{bmatrix} 0 & -\vartheta z & -\frac{1}{2}\vartheta \frac{\partial \omega}{\partial r} \\ \vartheta z & 0 & \frac{1}{2} \left(\vartheta r - \frac{\vartheta}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{2}\vartheta \frac{\partial \omega}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\vartheta}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} - \vartheta r \right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\psi} = \frac{\vartheta}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} - r \right) \vec{\mathbf{e}}_r - \frac{\vartheta}{2} \frac{\partial \omega}{\partial r} \vec{\mathbf{e}}_\varphi + \vartheta z \vec{\mathbf{e}}_z$$

2.2. Feszültségi állapot

Nyugalomban lévő, alakváltozást szenvedett rugalmas testet vizsgálunk.



A testet egy tetszőleges síkkal elmetszve a megmaradt darabnak is egyensúlyban kell lennie, következésképp az elvágott felületen belső erőrendszer (felületen megoszló erőrendszer) alakul ki. Ennek a felületnek egyetlen pontját, és annak elemi környezetét (ΔA) vizsgáljuk. Ebben a pontban a megoszló erőrendszer részeként egy $\Delta \vec{F}$ erő ébred. Ez alapján lehet értelmezni az adott pontban ébredő **feszültségvektort**

$$\vec{t}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n},$$

ahol $\underline{\underline{T}}$ a **Cauchy-féle feszültségi tenzor**, mely deformálódott felületelemre értelmezett mennyiség.

2.2. Feszültségi állapot

A feszültségi tenzor mátrixa:

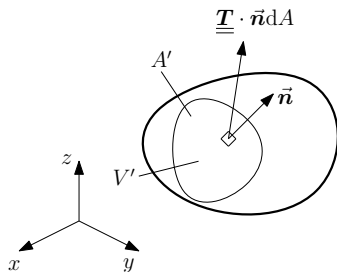
$$\begin{matrix} & \downarrow \vec{t}_x & \downarrow \vec{t}_y & \downarrow \vec{t}_z \\ \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \\ (x,y,z) & & \end{matrix}$$

Ahol a \vec{t}_x , \vec{t}_y és \vec{t}_z az x , y és z normálisú síkokhoz tartozó feszültségvektorok.

$$\vec{t}_x = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{e}_x, \quad \vec{t}_y = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{e}_y, \quad \vec{t}_z = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{e}_z$$

2.2. Feszültségi állapot

A mechanikai egyensúly egyenlete



Erők egyensúlya:

$$\int_{(A')} \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n} dA + \int_{(V')} \vec{q} dV = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \int_{(V')} [\underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \vec{q}] dV = \vec{0}$$

Ez utóbbi egyenletnek fenn kell állnia tetszőleges V' térfogat esetén, ezért

$$\underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$$

Ez a **mechanikai egyensúly egyenlete**.

2.2. Feszültségi állapot

Az egyensúlyi egyenlet skaláris egyenletei

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \nabla + \vec{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kifejtve:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0$$

2.2. Feszültségi állapot

Nyomatékok egyensúlya:

$$\int_{(A')} \vec{r} \times \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n} dA + \int_{(V')} \vec{r} \times \vec{q} dV = \vec{0}$$

$$\int_{(V')} \left[\vec{r} \times \underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \vec{r} \times \vec{q} \right] dV = \int_{(V')} \left[\vec{r} \times \underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \vec{r} \times \underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \vec{r} \times \vec{q} \right] dV =$$

$$\int_{(V')} \vec{r} \times \underline{\underline{T}} \cdot \nabla dV + \int_{(V')} \vec{r} \times \underbrace{[\underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \vec{q}]}_{\vec{0}} dV = \int_{(V')} \vec{r} \times \underline{\underline{T}} \cdot \nabla dV = \vec{0}$$

Ennek az egyenlőségnek fenn kell állnia bármilyen tetszőleges V' térfogaton, tehát

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}}_{\vec{e}_x} \times \underbrace{\underline{\underline{T}} \cdot \vec{e}_x}_{\vec{t}_x} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \times \underline{\underline{T}} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \underline{\underline{T}} \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_x \times \vec{t}_x + \vec{e}_y \times \vec{t}_y + \vec{e}_z \times \vec{t}_z =$$

$$= \tau_{yx} \vec{e}_z - \tau_{zx} \vec{e}_y - \tau_{xy} \vec{e}_z + \tau_{zy} \vec{e}_x + \tau_{xz} \vec{e}_y - \tau_{yz} \vec{e}_x = \vec{0}$$

Következmény: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, vagyis a feszültségi tenzor szimmetrikus, $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T$.

2.2. Feszültségi állapot

Az egyensúlyi egyenlet invariáns alakja ugyanaz HKR-ben is: $\underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$. Célszerű HKR-ben a feszültségi tenzort diadikus alakban felírni:

$$\begin{aligned} \left[\underline{\underline{T}} \right]_{(r,\varphi,z)} &= \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\varphi} & \tau_{rz} \\ \tau_{\varphi r} & \sigma_\varphi & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix} = (\sigma_r \vec{e}_r + \tau_{\varphi r} \vec{e}_\varphi + \tau_{zr} \vec{e}_z) \circ \vec{e}_r + \\ &+ (\tau_{r\varphi} \vec{e}_r + \sigma_\varphi \vec{e}_\varphi + \tau_{z\varphi} \vec{e}_z) \circ \vec{e}_\varphi + (\tau_{rz} \vec{e}_r + \tau_{\varphi z} \vec{e}_\varphi + \sigma_z \vec{e}_z) \circ \vec{e}_z \end{aligned}$$

Ennek segítségével:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}} \cdot \nabla &= (\sigma_r \vec{e}_r \circ \vec{e}_r + \tau_{\varphi r} \vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_r + \tau_{zr} \vec{e}_z \circ \vec{e}_r + \tau_{r\varphi} \vec{e}_r \circ \vec{e}_\varphi + \sigma_\varphi \vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_\varphi + \tau_{z\varphi} \vec{e}_z \circ \vec{e}_\varphi + \\ &+ \tau_{rz} \vec{e}_r \circ \vec{e}_z + \tau_{\varphi z} \vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_z + \sigma_z \vec{e}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) = \\ &= \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial r} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} \vec{e}_z + \frac{1}{r} \sigma_r \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \tau_{r\varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \tau_{\varphi r} \vec{e}_\varphi + \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi - \frac{1}{r} \sigma_\varphi \vec{e}_r + \frac{1}{r} \tau_{zr} \vec{e}_z + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi} \vec{e}_z + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \vec{e}_z \end{aligned}$$

2.2. Feszültségi állapot

Így a 3 skalár egyensúlyi egyenlet HKR-ben:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + q_r = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{r\varphi}}{r} + q_\varphi = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{zr} + q_z = 0$$

2.2. Feszültségi állapot

2.2.1. Példa: Ismert egy rugalmas test feszültségi tenzora.

(a) Határozzuk meg a \vec{q} térfogati tehervektort feltételezve, hogy a mechanikai egyensúly a test minden pontjában teljesül!

(b) Keressük meg a főfeszültségeket a test $Q(a, 0, \sqrt{2a})$ pontjában, illetve határozzuk meg a legnagyobb nyírófeszültség értékét is!

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} x^2y & x(1-y^2) & 0 \\ x(1-y^2) & \frac{1}{3}(y^3-3y) & 0 \\ 0 & 0 & 2z^2 \end{bmatrix}$$

(a) Egyszerűen behelyettesítünk a skaláris egyensúlyi egyenletekbe:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 2xy - 2xy + 0 + q_x = 0 \quad \rightarrow \quad q_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y = 1 - y^2 + y^2 - 1 + 0 + q_y = 0 \quad \rightarrow \quad q_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0 + 0 + 4z + q_z = 0 \quad \rightarrow \quad q_z = -4z$$

Ez alapján a térfogati tehervektor: $\vec{q} = -4z\vec{e}_z$.

2.2. Feszültségi állapot

2.2.1. Példa folytatása

(b) A főfeszültségek és a hozzájuk tartozó főirányok meghatározásához az alábbi sajátérték-problémát kell megoldani

$$\left(\underline{\underline{T}} - \sigma \underline{\underline{1}}\right) \cdot \vec{n} = \vec{0},$$

ahol σ a főfeszültség, \vec{n} pedig a főirányhoz tartozó egységvektor. Ennek az egyenletnek keressük a triviálistól ($\vec{n} = \vec{0}$) eltérő megoldását, vagyis az együtttható mátrix determinánusa zérus kell legyen

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc} \underline{\underline{T}} \\ \underline{\underline{Q}} \\ (x,y,z) \end{array} \right] &= \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4a \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \det \left(\underline{\underline{T}}_{\underline{\underline{Q}}} - \sigma \underline{\underline{1}} \right) = \begin{vmatrix} -\sigma & a & 0 \\ a & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 4a - \sigma \end{vmatrix} = \\ &= (4a - \sigma) (\sigma^2 - a^2) = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_1 = 4a > \sigma_2 = a > \sigma_3 = -a \end{aligned}$$

2.2. Feszültségi állapot

2.2.1. Példa folytatása

Az 1-es főirány látszik a tenzorból, $\vec{n}_1 = \vec{e}_z$. A 2-es főirányhoz a σ_2 -t kell visszaírni a sajátérték problémába

$$\left(\underline{\underline{T}}_Q - \sigma_2 \underline{\underline{1}} \right) \cdot \vec{n}_2 = \vec{0} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \\ n_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ez alapján kapjuk a következő egyenletrendszert

$$\left. \begin{array}{l} -an_{2x} + an_{2y} = 0 \\ an_{2x} - an_{2y} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{n_{2y}}{n_{2x}} = 1 = \tan \alpha \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Mivel \vec{n}_2 is egységvektor, ezért $\sqrt{n_{2x}^2 + n_{2y}^2} = 1$, ebből következik, hogy $\vec{n}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y$. Az $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ főirányok egymásra kölcsönösen merőleges jobbsodrású rendszert alkotnak, emiatt: $\vec{n}_3 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y$.

2.2. Feszültségi állapot

2.2.2. Példa: (MP. III. 6.21.) Adott a $\underline{\underline{T}}(\vec{r})$ feszültségmező: $\vec{t}_x = 4z^2\vec{e}_y - 2x^3y^2\vec{e}_z$,
 $\vec{t}_y = 4z^2\vec{e}_x + 2x^2y^3\vec{e}_z$, $\vec{t}_z = -2x^3y^2\vec{e}_x + 2x^2y^3\vec{e}_y + \rho g z\vec{e}_z$. Ellenőrizze le, hogy teljesülnek-e a skaláris alakú egyenletek, ha $\vec{q} = -\rho g\vec{e}_z$!

$$\left[\underline{\underline{T}} \right]_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 0 & 4z^2 & -2x^3y^2 \\ 4z^2 & 0 & 2x^2y^3 \\ -2x^3y^2 & 2x^2y^3 & \rho g z \end{bmatrix}$$

A skaláris egyensúlyi egyenletek felhasználva $\underline{\underline{T}}$ -t

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}}_0 + \underbrace{\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}}_0 + \underbrace{\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}}_0 + \underbrace{q_x}_0 &= 0 \\ \underbrace{\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}}_0 + \underbrace{\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}}_0 + \underbrace{\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}}_0 + \underbrace{q_y}_0 &= 0 \\ \underbrace{\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}}_{-6x^2y^2} + \underbrace{\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}}_{6x^2y^2} + \underbrace{\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}}_{\rho g} + \underbrace{q_z}_{-\rho g} &= 0 \end{aligned}$$

2.2. Feszültségi állapot

2.2.3. Példa: (MP. III. 6.26.) Ismeretes HKR-ben a $\underline{\underline{T}}(\vec{r})$ feszültségmező: $\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}$; $\sigma_\varphi = A + \frac{B}{r^2}$; $\sigma_z = \sigma_0$; $A, B, \sigma_0 = \text{áll.}$; $\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = \tau_{zr} = 0$. Kielégíti-e a feszültségmező az egyensúlyi egyenletet, ha $\vec{q} = \vec{0}$?

A skaláris egyensúlyi egyenletek alapján írhatjuk, hogy

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 2 \frac{B}{r^3} - 2 \frac{B}{r^3} + 0 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{r\varphi}}{r} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{zr} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Tehát a feszültségmező kielégíti az egyensúlyi egyenleteket.

2.2. Feszültségi állapot

2.2.4. Példa: (MP. III. 6.28.) Legyen adott HKR-ben a $\underline{\underline{T}}(\vec{r})$ feszültségmező:

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\sigma_{\omega 0}\frac{r^2}{r_K^2}; \sigma_\varphi = A + \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\sigma_{\omega 0}\frac{r^2}{r_K^2}; \sigma_z = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = \tau_{zr} = 0;$$

$A, B, \nu, \sigma_{\omega 0}, r_K = \text{áll.}$ Határozza meg a \vec{q} térfogati erőrendszert, hogy a skaláris alakú egyensúlyi egyenletek teljesüljenek!

Használjuk fel most is ugyanazokat az egyenleteket, mint az előző példában:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + q_r &= \\ 2\frac{B}{r^3} - \frac{6+2\nu}{8}\sigma_{\omega 0}\frac{r}{r_K^2} - 2\frac{B}{r^3} + \frac{2\nu-2}{8}\sigma_{\omega 0}\frac{r}{r_K^2} + q_r = 0 &\rightarrow q_r = \sigma_{\omega 0}\frac{r}{r_K^2} \\ \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + 2\frac{\tau_{r\varphi}}{r} + q_\varphi = 0 + 0 + 0 + 0 + q_\varphi = 0 &\rightarrow q_\varphi = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{zr} + q_z = 0 + 0 + 0 + 0 + q_z = 0 &\rightarrow q_z = 0 \end{aligned}$$

Tehát a térfogati erőrendszer: $\vec{q} = \sigma_{\omega 0} \frac{r}{r_K^2} \vec{e}_r$.