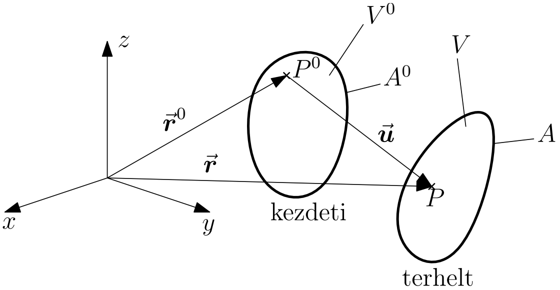
Mechanika

IV. előadás

2019. március 25.

2. Alakváltozási állapot

Elmozdulási állapot

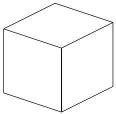


Kezdeti konfiguráció, vagyis a terhelés előtti jellemzők: P^0, $\vec{r}^0$, A^0, V^0.
Pillanatnyi konfiguráció, vagyis a terhelt állapot jellemzői: P, $\vec{r}$, A, V.
Az elmozdulás: $\vec{u}$, $\vec{r} = \vec{r}^0 + \vec{u}$

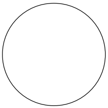
$$\vec{u} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y + u_z\vec{e}_z$$

2. Alakváltozási állapot

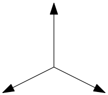
Elemei környezet: a pont olyan kis környezete, amelyben a mechanikai jellemzők véges számú adattal megadhatók, és a hely lineáris függvényei. Pl.:



elemi kocka



elemi gömb

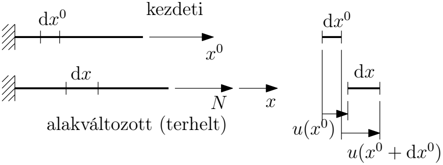


elemi triéder

Két erőrendszer egyenértékű, ha ugyanazt az alakváltozást hozzák létre.

2. Alakváltozási állapot

Alakváltozás 1D-ben: vonalelem, elemi ívhossz



elmozdulás: $\vec{\boldsymbol{u}} = u\vec{\boldsymbol{e}}_x$, $u = u(x^0)$
differenciális elmozdulás: $\mathrm{d}u = u(x^0 + \mathrm{d}x^0) - u(x^0)$
ábra alapján:

$$u(x^0) + \mathrm{d}x = \mathrm{d}x^0 + u(x^0 + \mathrm{d}x^0)$$

$$\mathrm{d}x - \mathrm{d}x^0 = \mathrm{d}u; \quad \mathrm{d}x^0 > 0,\ \mathrm{d}x > 0$$

2. Alakváltozási állapot

Alakváltozások:

– Volanelem arány:

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x^0} = \frac{\mathrm{d}x^0 + \mathrm{d}u}{\mathrm{d}x^0} = 1 + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x^0} = \begin{cases} > 1 \text{ nyúlás} \\ = 1 \\ < 1 \text{ rövidülés} \end{cases}$$

– Fajlagos nyúlások:

- kezdeti hosszra vonatkozó (mérnöki)

$$\varepsilon^0 = \frac{\mathrm{d}x - \mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}x^0} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x^0} = \lambda - 1$$

- terhelt hosszra vonatkozó (valódi)

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}x - \mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

- Lagrange-féle

$$\varepsilon^{\mathrm{Lag}} = \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}x^0)^2}{(\mathrm{d}x^0)^2} = \frac{1}{2}\frac{2\mathrm{d}x^0\mathrm{d}u + (\mathrm{d}u)^2}{(\mathrm{d}x^0)^2} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x^0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x^0}\right)^2 = \lambda - 1 + \frac{1}{2}(\lambda - 1)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$$

2. Alakváltozási állapot

- Euler-féle

$$\varepsilon^{\text{Eul}} = \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}x^0)^2}{(\mathrm{d}x)^2} = \frac{1}{2}\frac{2\mathrm{d}x^0\mathrm{d}u + (\mathrm{d}u)^2}{(\mathrm{d}x)^2} = \frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

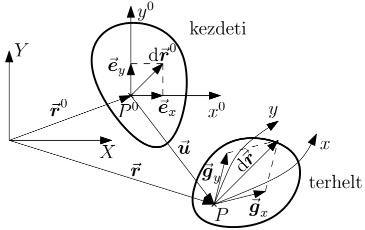
- Hencky-féle (logaritmikus)

$$\varepsilon^{\log} = \ln\lambda$$

Kis alakváltozás: ha $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x^0} \approx \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ hányados nagyságrendje jóval kisebb, mint 1 (10^{-3} vagy ettől kisebb nagyságrendű)
következmény: $\mathrm{d}x^0 \approx \mathrm{d}x \Rightarrow x^0 \approx x$
Ekkor a fajlagos nyúlások: $\varepsilon^0 \approx \varepsilon \approx \varepsilon^{\text{Lag}} \approx \varepsilon^{\text{Eul}} \approx \varepsilon^{\log}$
tehát csak egyetlen fajlagos nyúlást számítunk ilyenkor: $\varepsilon \approx \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x^0} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

2. Alakváltozási állapot

Alakvátozás 2D-ben



$$P^0 \quad \rightarrow \quad P$$

$$\vec{r}^0 = x^0\vec{e}_x + y^0\vec{e}_y \quad \rightarrow \quad \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

Mozgástörvény:

$$\left.\begin{array}{l} x = x(x^0, y^0) \\ y = y(x^0, y^0) \end{array}\right\}$$

Az anyagi vonalak (x^0, y^0) érintői:

$$\vec{e}_x = \frac{\partial \vec{r}^0}{\partial x^0} \quad \rightarrow \quad \vec{g}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^0}; \qquad \vec{e}_y = \frac{\partial \vec{r}^0}{\partial y^0} \quad \rightarrow \quad \vec{g}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^0}; \qquad \mathrm{d}\vec{r}^0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{r}$$

2. Alakváltozási állapot

Alakváltozási gradiens

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial x^0} \underbrace{\mathrm{d}x^0}_{\vec{\boldsymbol{e}}_x \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^0} + \frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial y^0} \underbrace{\mathrm{d}y^0}_{\vec{\boldsymbol{e}}_y \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^0} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial x^0} \left(\vec{\boldsymbol{e}}_x \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^0 \right) + \frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial y^0} \left(\vec{\boldsymbol{e}}_y \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^0 \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial x^0} \circ \vec{\boldsymbol{e}}_x \right) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^0 + \left(\frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial y^0} \circ \vec{\boldsymbol{e}}_y \right) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^0 = \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial x^0} \circ \vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial y^0} \circ \vec{\boldsymbol{e}}_y \right)}_{\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^0$$

tehát a kezdeti és a terhelt állapot közötti kapcsolatot az alakváltozási gradiens tenzor ($\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}$) írja le:

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^0$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial x^0} \circ \vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial y^0} \circ \vec{\boldsymbol{e}}_y = \vec{\boldsymbol{g}}_x \circ \vec{\boldsymbol{e}}_x + \vec{\boldsymbol{g}}_y \circ \vec{\boldsymbol{e}}_y$$

más szavakkal az alakváltozási gradiens tenzor a kezdeti állapot anyagi vonalainak érintő egységvektoraihoz a terhelt állapot anyagi vonalainak érintő vektorát rendeli hozzá

$$\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} = \vec{\boldsymbol{r}} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial}{\partial y^0} \vec{\boldsymbol{e}}_y \right) = \vec{\boldsymbol{r}} \circ \nabla^0$$

2. Alakváltozási állapot

Beírva az alakváltozási gradiensbe az $\vec{r} = \vec{r}^0 + \vec{u}$ felbontást:

$$\underline{\underline{F}} = \left(\vec{r}^0 + \vec{u}\right) \circ \nabla^0 = \underbrace{\vec{r}^0 \circ \nabla^0}_{\underline{\underline{1}}} + \underbrace{\vec{u} \circ \nabla^0}_{\underline{\underline{U}}} = \underline{\underline{1}} + \vec{u} \circ \nabla^0 = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{U}}$$

Itt $\underline{\underline{U}}$ az ún. elmozdulási gradiens tenzor. Mátrixosan kifejtve:

$$\left[\underline{\underline{F}}\right] = \left[\vec{r} \circ \nabla^0\right] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} & \frac{\partial}{\partial y^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^0} & \frac{\partial x}{\partial y^0} \\ \frac{\partial y}{\partial x^0} & \frac{\partial y}{\partial y^0} \end{bmatrix}$$

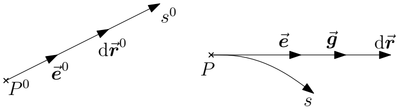
$$\left[\vec{r}^0 \circ \nabla^0\right] = \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} & \frac{\partial}{\partial y^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^0}{\partial x^0} & \frac{\partial x^0}{\partial y^0} \\ \frac{\partial y^0}{\partial x^0} & \frac{\partial y^0}{\partial y^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\underline{\underline{1}}\right]$$

$$\left[\underline{\underline{U}}\right] = \left[\vec{u} \circ \nabla^0\right] = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} & \frac{\partial}{\partial y^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x^0} & \frac{\partial u}{\partial y^0} \\ \frac{\partial v}{\partial x^0} & \frac{\partial v}{\partial y^0} \end{bmatrix}$$

Speciális eset: $\vec{g}_x = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_x$, $\vec{g}_y = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_y$. Ebből általánosítva következik bármely tetszőleges n anyagi vonalra nézve, hogy: $\vec{g}_n = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_n$.

2. Alakváltozási állapot

Ívelem változása:



$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^0 = \mathrm{d}s^0\vec{\boldsymbol{e}}^0; \quad \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = \mathrm{d}s\vec{\boldsymbol{e}}; \quad |\vec{\boldsymbol{e}}^0| = |\vec{\boldsymbol{e}}| = 1$$

$$\vec{\boldsymbol{g}} = \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}^0$$

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^0 = \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \mathrm{d}s^0\vec{\boldsymbol{e}}^0 = \mathrm{d}s^0 \underbrace{\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}^0}_{\vec{\boldsymbol{g}}}$$

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = \mathrm{d}s^0\vec{\boldsymbol{g}}$$

$$|\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}| = \mathrm{d}s^0|\vec{\boldsymbol{g}}| = \mathrm{d}s \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s^0} = |\vec{\boldsymbol{g}}|$$

Így a vonalelemarány:

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s^0} = |\vec{\boldsymbol{g}}| = \sqrt{\vec{\boldsymbol{g}}^2} = \sqrt{\underline{g}^\mathsf{T}\underline{g}} = \sqrt{\vec{\boldsymbol{e}}^0 \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^\mathsf{T} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}^0}$$

2. Alakváltozási állapot

Speciális eset:

$$\vec{\boldsymbol{e}}^0 = \vec{\boldsymbol{e}}_x \quad \to \quad \lambda_x = |\vec{\boldsymbol{g}}_x| = \sqrt{\vec{\boldsymbol{e}}_x \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_x}$$

$$\vec{\boldsymbol{e}}^0 = \vec{\boldsymbol{e}}_y \quad \to \quad \lambda_y = |\vec{\boldsymbol{g}}_y| = \sqrt{\vec{\boldsymbol{e}}_y \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_y}$$

Általánosan tehát:

$$\vec{\boldsymbol{e}}^0 = \vec{\boldsymbol{e}}_n \quad \to \quad \lambda_n = |\vec{\boldsymbol{g}}_n| = \sqrt{\vec{\boldsymbol{e}}_n \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_n}$$

Alakváltozási mértékek:

- fajlagos nyúlások (mint 1D-ben):

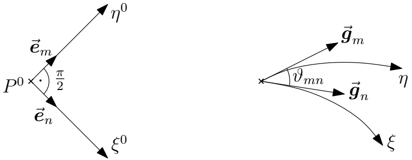
$$\varepsilon^0 = \frac{\mathrm{d}s - \mathrm{d}s^0}{\mathrm{d}s^0} = \lambda - 1, \qquad \varepsilon = \frac{\mathrm{d}s - \mathrm{d}s^0}{\mathrm{d}s} = 1 - \frac{1}{\lambda},$$

$$\varepsilon^{\mathrm{Lag}} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}s^2 - \left(\mathrm{d}s^0\right)^2}{\left(\mathrm{d}s^0\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\lambda^2 - 1\right) \qquad \varepsilon^{\mathrm{Eul}} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}s^2 - \left(\mathrm{d}s^0\right)^2}{\mathrm{d}s^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$\varepsilon^{\log} = \ln \lambda$$

2. Alakváltozási állapot

- szögtorzulás:



Terhelés előtt a két anyagi vonal (ξ^0, η^0) által bezárt szög $\frac{\pi}{2}$. Terhelés után: $\vartheta_{mn} = \vartheta_{nm}$. A szögtorzulás:

$$\gamma_{mn} = \frac{\pi}{2} - \vartheta_{mn}$$

Kiszámítása a két vektor skaláris szorzata alapján:

$$\cos\vartheta_{mn} = \frac{\vec{g}_m \cdot \vec{g}_n}{|\vec{g}_m||\vec{g}_n|} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{mn}\right) = \sin\gamma_{mn} \left(= \frac{\vec{e}_m \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathsf{T}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_n}{\lambda_m \lambda_n} \right)$$

2. Alakváltozási állapot

Kis alakváltozások esetén:

$$\left|\frac{\partial \vec{\boldsymbol{u}}}{\partial x^0}\right| \approx \left|\frac{\partial \vec{\boldsymbol{u}}}{\partial y^0}\right| \approx \left|\frac{\partial \vec{\boldsymbol{u}}}{\partial x}\right| \approx \left|\frac{\partial \vec{\boldsymbol{u}}}{\partial y}\right| << 1$$

következmény:

$$\vec{\boldsymbol{e}}_x \approx \vec{\boldsymbol{g}}_x, \ldots; \quad \mathrm{d}s \approx \mathrm{d}s^0; \quad \nabla^0 \approx \nabla$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \vec{\boldsymbol{u}} \circ \nabla^0 = \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \vec{\boldsymbol{u}} \circ \nabla$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \approx \left(\underline{\underline{\mathbf{1}}} + \nabla \circ \vec{\boldsymbol{u}}\right)\left(\underline{\underline{\mathbf{1}}} + \vec{\boldsymbol{u}} \circ \nabla\right) = \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underbrace{\vec{\boldsymbol{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{\boldsymbol{u}}}_{2\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}} + \underbrace{(\nabla \circ \vec{\boldsymbol{u}}) \cdot (\vec{\boldsymbol{u}} \circ \nabla)}_{\approx 0}$$

Linearizálás után:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{\boldsymbol{u}}\right)$$

2. Alakváltozási állapot

Alakváltozási jellemzők, kis alakváltozások esetén:

$$\lambda_n^2 = \vec{e}_n \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_n = \vec{e}_n \cdot \underline{\underline{1}} \cdot \vec{e}_n + 2\vec{e}_n \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{e}_n$$

- fajlagos nyúlás:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2}\left(\lambda^2 - 1\right) = \vec{e}_n \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{e}_n \approx \lambda_n - 1$$

- szögtorzulás:

$$\gamma_{mn} \approx \sin\gamma_{mn} = \frac{\vec{e}_m \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_n}{\lambda_m \lambda_n}$$

$$\lambda_m \lambda_n \gamma_{mn} = \vec{e}_m \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_n$$

$$\underbrace{(1+\varepsilon_m)(1+\varepsilon_n)}_{\approx 1}\gamma_{mn} = \underbrace{\vec{e}_m \cdot \underline{\underline{1}} \cdot \vec{e}_n}_{0} + 2\vec{e}_m \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{e}_n$$

$$\gamma_{mn} = 2\vec{e}_m \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{e}_n \qquad \text{vagy} \qquad \frac{1}{2}\gamma_{mn} = \vec{e}_m \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{e}_n = \vec{e}_n \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{e}_m$$

2. Alakváltozási állapot

Az alakváltozási gradiens ($\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}$) és az elmozdulási gradiens ($\underline{\underline{\boldsymbol{U}}}$) tenzorok additív felbontása:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{1}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{U}}}; \quad \underline{\underline{\boldsymbol{U}}} = \vec{\boldsymbol{u}} \circ \nabla$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{U}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{U}}}_{\text{sz}} + \underline{\underline{\boldsymbol{U}}}_{\text{asz}}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{U}}}_{\text{sz}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\boldsymbol{U}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{\boldsymbol{u}}) : \text{ alakváltozási tenzor}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{U}}}_{\text{asz}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\boldsymbol{U}}} - \underline{\underline{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{u}} \circ \nabla - \nabla \circ \vec{\boldsymbol{u}}) : \text{ forgási tenzor}$$

A $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^0$ vonalelem mozgása:

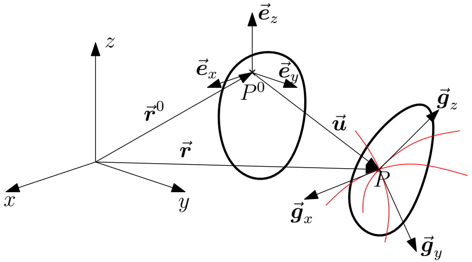
$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^0 = (\underline{\underline{\boldsymbol{1}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{U}}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^0 = \underbrace{\underline{\underline{\boldsymbol{1}}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^0}_{\text{merevtestszerű eltolódás}} + \underbrace{\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^0}_{\text{alakváltozás}} + \underbrace{\underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^0}_{\text{forgás}}$$

Kis alakváltozások esetén kis forgások lépnek fel ($\underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}}}$ minden eleme $<< 1$). Képezhető a forgás tenzor vektorinvariánsa (minden aszimmetrikus tenzor esetén képezhető), melyre igaz:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^0 = \vec{\psi} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^0$$

ahol $\vec{\psi}$ a forgásvektor.

Alakváltozás 3D-ben:



$$\mathrm{d}\vec{r} = \underline{\underline{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}^0, \qquad \underline{\underline{F}} = \vec{r} \circ \nabla^0 \qquad \vec{g}_x = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_x, \ldots$$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{U}}; \qquad \underline{\underline{U}} = \vec{u} \circ \nabla^0$$

2. Alakváltozási állapot

Az alakváltozási mértékek meghatározása ugyanúgy történik, mint 2D-ben:

- vonalelem arány:

$$\lambda_n = |\vec{\boldsymbol{g}}_n| = \sqrt{\vec{\boldsymbol{e}}_n \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_n}$$

- fajlagos nyúlások:

$$\varepsilon^0 = \frac{\mathrm{d}s - \mathrm{d}s^0}{\mathrm{d}s^0} = \lambda - 1; \qquad \varepsilon = \frac{\mathrm{d}s - \mathrm{d}s^0}{\mathrm{d}s} = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

$$\varepsilon^{\mathrm{Lag}} = \frac{\mathrm{d}s^2 - \left(\mathrm{d}s^0\right)^2}{\left(\mathrm{d}s^0\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\lambda^2 - 1\right); \qquad \varepsilon^{\mathrm{Eul}} = \frac{\mathrm{d}s^2 - \left(\mathrm{d}s^0\right)^2}{\mathrm{d}s^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right);$$

$$\varepsilon^{\log} = \ln \lambda$$

- fajlagos szögtorzulás

$$\sin \gamma_{mn} = \frac{\vec{\boldsymbol{g}}_m \cdot \vec{\boldsymbol{g}}_n}{\lambda_m \lambda_n} = \frac{\vec{\boldsymbol{e}}_m \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_n}{\lambda_m \lambda_n}$$

2. Alakváltozási állapot

Kis alakváltozások esete, linearizált formulák:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{U}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{U}}}_{\mathrm{sz}} + \underline{\underline{\boldsymbol{U}}}_{\mathrm{asz}} = \vec{\boldsymbol{u}} \circ \nabla$$

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{U}}}\right] = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Kis alakváltozásról beszélünk, ha $\underline{\underline{\boldsymbol{U}}}$ minden eleme jóval kisebb nagyságrendű, mint 1. Ekkor érvényes:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{U}}}_{\mathrm{sz}}; \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{U}}}_{\mathrm{asz}}$$

Alakváltozás *xyz* koordináta-rendszerben:

$$\varepsilon_n = \vec{\boldsymbol{e}}_n \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_n \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \vec{\boldsymbol{e}}_x \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_x \\ \varepsilon_y &= \vec{\boldsymbol{e}}_y \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_y \\ \varepsilon_z &= \vec{\boldsymbol{e}}_z \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_z \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{mn} = \vec{\boldsymbol{e}}_m \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_n \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}\gamma_{xy} &= \vec{\boldsymbol{e}}_x \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_y \\ \tfrac{1}{2}\gamma_{yz} &= \vec{\boldsymbol{e}}_y \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_z \\ \tfrac{1}{2}\gamma_{zx} &= \vec{\boldsymbol{e}}_z \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_x \end{aligned}$$

2. Alakváltozási állapot

Az alakváltozási tenzor mátrixa *xyz* koordináta-rendszerben:

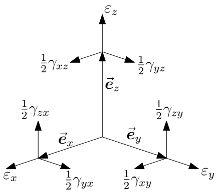
$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Az additív felbontás $\left(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\boldsymbol{U}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{U}}}^{\mathrm{T}}\right)\right)$ miatt az alábbi kinematikai egyenletek fogalmazhatóak meg:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

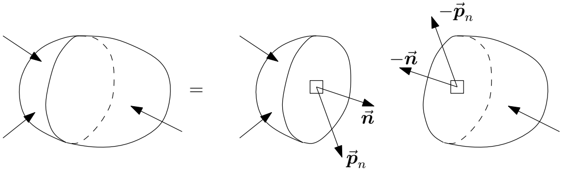
$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Szemléltetés:



3. Feszültségi állapot

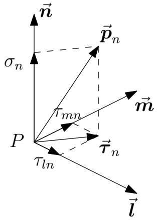
A feszültségvektor értelmezése: részekre bontott test



Feszültségvektor: a belső erőrendszer sűrűségvektora: $\vec{\boldsymbol{p}}_n$, mértékegysége: $1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 1$ Pa.
Általánosan: $\vec{\boldsymbol{p}} = \vec{\boldsymbol{p}}(P, \vec{\boldsymbol{n}})$, P-t rögzítve: $\vec{\boldsymbol{p}} = \vec{\boldsymbol{p}}(\vec{\boldsymbol{n}}) = \vec{\boldsymbol{p}}_n$.

3. Feszültségi állapot

Feszültségállapot: a ponton átfektethető normálisokon ébredő feszültségvektorok összessége.
Felbontása: $\vec{\boldsymbol{p}}_n = \vec{\boldsymbol{\sigma}}_n + \vec{\boldsymbol{\tau}}_n$



Normálfeszültség:

$$\sigma_n = \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{\sigma}}_n = \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{p}}_n = \begin{cases} > 0 \text{ húzó} \\ < 0 \text{ nyomó} \end{cases}$$

Csúsztató feszültség:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_n = \vec{\boldsymbol{p}}_n - \vec{\boldsymbol{\sigma}}_n$$

$$\tau_{mn} = \vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{\tau}}_n = \vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{p}}_n, \qquad \tau_{ln} = \vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{\tau}}_n = \vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{p}}_n$$

Tehát az $\vec{\boldsymbol{n}}$, $\vec{\boldsymbol{m}}$, $\vec{\boldsymbol{l}}$ bázisban a feszültségvektor: $\vec{\boldsymbol{p}}_n = \sigma_n \vec{\boldsymbol{n}} + \tau_{mn} \vec{\boldsymbol{m}} + \tau_{ln} \vec{\boldsymbol{l}}$

3. Feszültségi állapot

Feszültségtenzor:
elemi tetraéder egyensúlya:

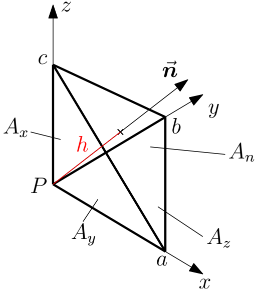
$$\vec{\boldsymbol{n}} = n_x \vec{\boldsymbol{e}}_x + n_y \vec{\boldsymbol{e}}_y + n_z \vec{\boldsymbol{e}}_z$$

Az A_n felület területvektorának képzése:

$$\vec{\boldsymbol{A}}_n = \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{r}}_{ab} \times \vec{\boldsymbol{r}}_{ac}\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{A}}_n = \frac{1}{2}\left(b\vec{\boldsymbol{e}}_y - a\vec{\boldsymbol{e}}_x\right) \times \left(c\vec{\boldsymbol{e}}_z - a\vec{\boldsymbol{e}}_x\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(bc\vec{\boldsymbol{e}}_x + ac\vec{\boldsymbol{e}}_y + ab\vec{\boldsymbol{e}}_z\right)$$



$$\vec{\boldsymbol{A}}_n = A_x \vec{\boldsymbol{e}}_x + A_y \vec{\boldsymbol{e}}_y + A_z \vec{\boldsymbol{e}}_z = A_n \vec{\boldsymbol{n}}; \quad |\vec{\boldsymbol{n}}| = 1$$

$$A_x = \frac{1}{2}bc = A_n \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_x = A_n n_x, \quad A_y = \frac{1}{2}ac = A_n n_y; \quad A_z = \frac{1}{2}ab = A_n n_z$$

3. Feszültségi állapot

Egyensúly:

$$\int_{A_x} \vec{\boldsymbol{p}}_{-x} \mathrm{d}A + \int_{A_y} \vec{\boldsymbol{p}}_{-y} \mathrm{d}A + \int_{A_z} \vec{\boldsymbol{p}}_{-z} \mathrm{d}A + \int_{A_n} \vec{\boldsymbol{p}}_{n} \mathrm{d}A + \int_{V} \vec{\boldsymbol{q}} \mathrm{d}V = \vec{\boldsymbol{0}}$$

Például:

$$\int_{A_y} \vec{\boldsymbol{p}}_{-y} \mathrm{d}A = -\int_{A_y} \vec{\boldsymbol{p}}_{y} \mathrm{d}A = \underbrace{-\vec{\boldsymbol{p}}_y(S_y)}_{\text{súlypontban véve}} A_y = -\vec{\boldsymbol{p}}_y(S_y) A_n n_y \qquad y \to x \to z$$

$$\int_{A_n} \vec{\boldsymbol{p}}_{n} \mathrm{d}A = \vec{\boldsymbol{p}}_n(S_n) A_n; \qquad \int_{V} \vec{\boldsymbol{q}} \mathrm{d}V = \vec{\boldsymbol{q}}(S) V = \vec{\boldsymbol{q}}(s) \frac{A_n h}{3}$$

Mivel elemi környezetről van szó, ezért:

$$h \to 0, \text{ de } \vec{\boldsymbol{n}} = \text{áll.}$$

$$S_x, S_y, S_z, S_n, S \to P, \quad V \to 0$$

3. Feszültségi állapot

$$-\vec{\boldsymbol{p}}_x(S_x)A_n n_x - \vec{\boldsymbol{p}}_y(S_y)A_n n_y - \vec{\boldsymbol{p}}_z(S_z)A_n n_z + -\vec{\boldsymbol{p}}_n(S_n)A_n + \vec{\boldsymbol{q}}(S)\frac{A_n h}{3} = \vec{\boldsymbol{0}}$$

Figyelembe véve a határértékeket, egyszerűsítés után P-ben:

$$\vec{\boldsymbol{p}}_n = \vec{\boldsymbol{p}}_x n_x + \vec{\boldsymbol{p}}_y n_y + \vec{\boldsymbol{p}}_z n_z$$

Például:

$$\vec{\boldsymbol{p}}_x n_x = \vec{\boldsymbol{p}}_x(\vec{\boldsymbol{e}}_x \cdot \vec{\boldsymbol{n}}) = (\vec{\boldsymbol{p}}_x \circ \vec{\boldsymbol{e}}_x) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}$$

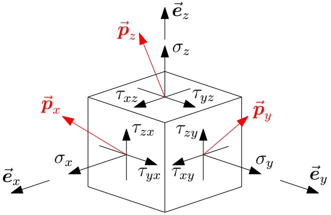
Így

$$\vec{\boldsymbol{p}}_n = (\vec{\boldsymbol{p}}_x \circ \vec{\boldsymbol{e}}_x + \vec{\boldsymbol{p}}_y \circ \vec{\boldsymbol{e}}_y + \vec{\boldsymbol{p}}_z \circ \vec{\boldsymbol{e}}_z) \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = \underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}$$

Ez az ún. Cauchy-tétel, ahol $\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}$ a P pontbeli feszültségi tenzor

3. Feszültségi állapot

Szemléltetés az *xyz* koordináta-rendszerben az elemi kockán:



A Cauchy-tétel alapján:

$$\vec{\boldsymbol{p}}_x = \underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_x; \quad \vec{\boldsymbol{p}}_y = \underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_y; \quad \vec{\boldsymbol{p}}_z = \underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\vec{\boldsymbol{p}}_x = \sigma_x \vec{\boldsymbol{e}}_x + \tau_{yx} \vec{\boldsymbol{e}}_y + \tau_{zx} \vec{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\vec{\boldsymbol{p}}_y = \tau_{xy} \vec{\boldsymbol{e}}_x + \sigma_y \vec{\boldsymbol{e}}_y + \tau_{zy} \vec{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\vec{\boldsymbol{p}}_z = \tau_{xz} \vec{\boldsymbol{e}}_x + \tau_{yz} \vec{\boldsymbol{e}}_y + \sigma_z \vec{\boldsymbol{e}}_z$$

3. Feszültségi állapot

A feszültségi tenzor mátrixa:

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}\right] = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{p}}_x & \vec{\boldsymbol{p}}_y & \vec{\boldsymbol{p}}_z \end{bmatrix}$$

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Tetszőleges $\vec{\boldsymbol{n}}$ irányhoz tartozó feszültségi koordináták meghatározása $\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}$ alapján:

$$\sigma_n = \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{p}}_n = \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}$$

$$\tau_{mn} = \vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{p}}_n = \vec{\boldsymbol{m}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}$$

3. Feszültségi állapot

Az elemi kocka egyensúlya alapján:

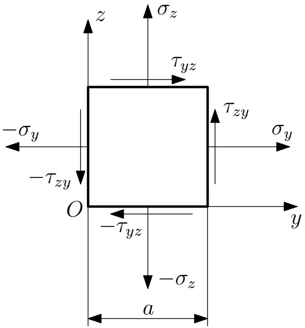
$$M_x = a\tau_{zy} - a\tau_{yz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Az
elemi kocka tetszőlegesen állhat, tetszőleges
$\vec{n}, \vec{m}, \vec{l}$ bázisban, tehát általánosítva
is igaz, hogy $\tau_{mn} = \tau_{nm}$. Következmény:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^{\mathrm{T}}$$

vagyis a feszültségi tenzor szimmetrikus.

$$\tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{p}_n = \vec{m} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{m}$$

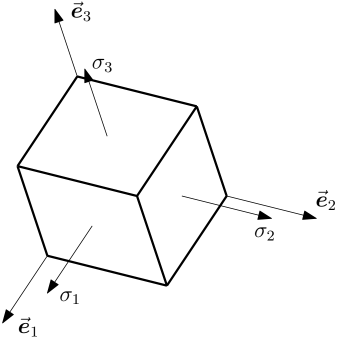


3. Feszültségi állapot

A feszültségi tenzor főtengelyproblémája: ha a feszültségi tenzorhoz található egy olyan $\vec{\boldsymbol{e}}$ vektor, melyre teljesül az alábbi sajátérték-feladat, hogy:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}} = \sigma \vec{\boldsymbol{e}}$$

akkor az $\vec{\boldsymbol{e}}$ vektor a feszültségi tenzor sajátvektora vagy főiránya, a hozzá tartozó σ érték pedig az ún. főfeszültség. Bizonyítható, hogy minden feszültségi tenzorhoz található 3 egymásra kölcsönösen merőleges, jobbsodrású rendszert alkotó főirány, és 3 főfeszültség. A főfeszültségeket σ_1, σ_2, σ_3-mal jelöljük, megállapodás szerint: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. A főfeszültségekhez tartozó főirányokat pedig $\vec{\boldsymbol{e}}_1$, $\vec{\boldsymbol{e}}_2$, $\vec{\boldsymbol{e}}_3$-mal jelöljük. A feszültségi tenzor mátrixa a főtengelyek koordináta-rendszerében:



$$\underset{(1,2,3)}{\left[\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}\right]} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Ha a főfeszültségek közül egy/kettő/három nem zérus értékű, akkor a feszültségállapotot egy/kettő/három tengelyűnek nevezzük.