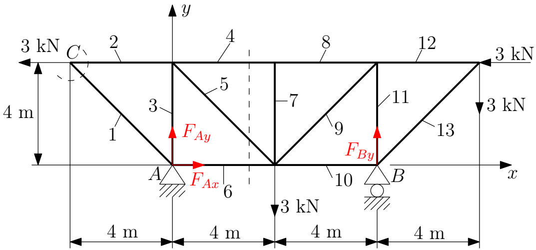
Mechanika

III. előadás

2019. március 11.

7. Szerkezetek statikája

7.2. Rácsos szerkezet
– hidak, daruk, távvezeték tartó oszlopok, stb.



adott: a rácsos síkbeli szerkezet
kérdés: a támasztó ER, a rudakban ébredő belső erők

7. Szerkezetek statikája

a) támasztó ER számítása
a teljes szerkezetre, mint egyetlen merev testre 3 egyensúlyi egyenlet:

$$\sum F_x = -3 + F_{Ax} - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ax} = 6 \text{ kN } \rightarrow$$

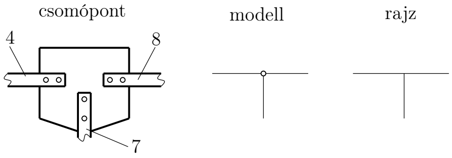
$$M_b = 0 = -8F_{Ay} + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad F_{Ay} = 3 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_y = 3 - 3 - 3 + F_{By} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{By} = 3 \text{ kN } \uparrow$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_A = 6\vec{\boldsymbol{e}}_x + 3\vec{\boldsymbol{e}}_y \text{ kN}, \quad \vec{\boldsymbol{F}}_B = 3\vec{\boldsymbol{e}}_y \text{ kN}$$

b) a belső ER számítása (rúd irányú erők)
alapfeltevések:

- a rudak súlya elhanyagolható
- a rudak a csomópontokban csuklókkal kapcsolódnak egymáshoz
- terhelés csak a csomópontokban hat



következmény: a rudakban csak rúdirányú erők ébrednek, jele: $N \lesseqgtr 0$, tehát például a 7-es rúd esetén: N_7
előjelek:

- $N > 0$, a rúd húzott
- $N = 0$, a rúd terheletlen (vakrúd)
- $N < 0$, a rúd nyomott

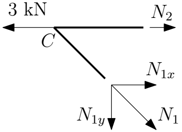
a rúderők meghatározása:

- csomóponti módszer (anyagi pont egyensúlya)
- átmetsző módszer (merev test egyensúlya)

7. Szerkezetek statikája

példa: N_1 és N_2 meghatározása: C csomópont, mint anyagi pont nyugalma:
geometriai egyenlet:

$$\frac{N_{1y}}{N_{1x}} = 1 \quad \Rightarrow \quad N_{1x} = N_{1y}$$



egyensúlyi egyenletek:

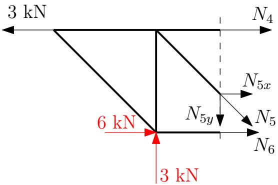
$$\sum F_y = -N_{1y} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{1x} = 0$$

$$\sum F_x = -3 + N_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = 3 \text{ kN} \leftarrow - \rightarrow$$

Tehát az 1-es rúd vakrúd ($N_1 = 0$), a 2-es rúd pedig húzott ($N_2 = 3$ kN). Hf. az N_3 és N_6 erők meghatározása az A csomópont nyugalmából.

7. Szerkezetek statikája

példa: N_4, N_5 és N_6 rúderők meghatározása átmetsző módszerrel
geometriai egyenlet:



$$\frac{N_{5y}}{N_{5x}} = 1, \quad \Rightarrow \quad N_{5x} = N_{5y}$$

egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_y = 3 - N_{5y} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{5y} = 3\text{ kN} \downarrow$$

tehát $N_{5y} = N_{5x} = 3$ kN
nyomatéki egyenlet N_5 és N_6 hatásvonalának metszéspontjára:

$$M_d = 0 = -3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 4N_4 \quad \Rightarrow \quad N_4 = 0$$

Így a 4-es rúd vakrúd.

$$\sum F_x = -3 + 6 + 3 + N_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_6 = -6\text{ kN} \leftarrow$$

Összefoglalva: $N_4 = 0$ vakrúd, $N_5 = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4{,}24$ kN $\leftarrow - \rightarrow$ húzott, $N_6 = -6$ kN $\rightarrow - \leftarrow$ nyomott

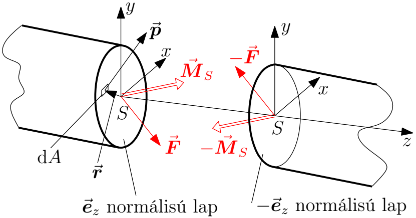
8. Rudak igénybevételei

Alapfogalmak:

- **rúd:** olyan 3D-s test, amelynek egyik geometriai mérete lényegesen nagyobb (hossz), mint a másik két irányú mérete
- **rúd középvonala:** a rúd keresztmetszeteinek súlypontjait összekötő fiktív vonal
- **rúd modell:** a rudat a középvonalával helyettesítjük, és a mechanikai jellemzőket (terhelés, stb.) ehhez a vonalhoz kötjük
- **prizmatikus rúd:** egyenes középvonalú, állandó keresztmetszetű rúd

8. Rudak igénybevételei

8.1 A rúd belső erőrendszere és igénybevétele



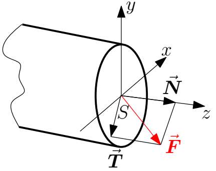
$$\vec{F} = \int_{(A)} \vec{p}\mathrm{d}A \quad \vec{M}_S = \int_{(A)} \vec{r} \times \vec{p}\mathrm{d}A$$

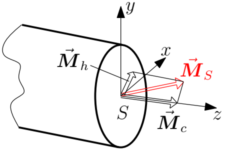
- terhelés után tartós nyugalomba került rudat képzeletben elmetszük, az elmetszett keresztmetszetben felületen megoszló belső ER működik: sűrűségvektora $\vec{p}$ $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\right]$
- az $\vec{r}(x, y)$ keresztmetszeti pontban $\vec{p}(x, y)$ a terhelés
- elemi erő az $\vec{r}$ helyen: $\mathrm{d}\vec{F} = \vec{p}\mathrm{d}A = \vec{p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
- a súlypontba redukált vektorkettős:

8. Rudak igénybevételei

A rúd keresztmetszetének igénybevétele (értelmezés): a rúd keresztmetszetében megoszló belső ER-nek a keresztmetszet S súlypontjába redukált vektorkettősét $\left(\vec{F};\vec{M}_S\right)$ a rúd **igénybevételének** nevezzük.

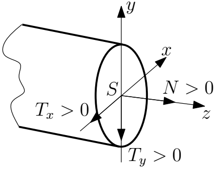
- az igénybevételek összetevői:

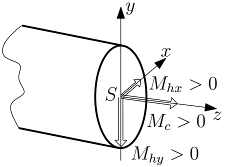




$$\vec{F} = \underbrace{\vec{N}}_{\text{rúderő}} + \underbrace{\vec{T}}_{\text{nyíróerő}}\ ; \quad \vec{M}_S = \underbrace{\vec{M}_C}_{\text{csavarónyomaték}} + \underbrace{\vec{M}_h}_{\text{hajlítónyomaték}}$$

- $+$ előjellel értelmezett igénybevételek:





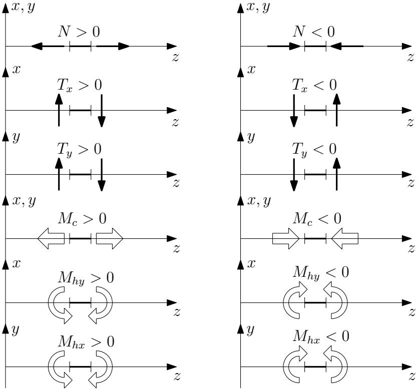
8. Rudak igénybevételei

8.2 A pozitív előjelű igénybevételek szemléltetése az elemi rúdszakaszon

Ha a T_x,
T_y, N, M_{hx}, M_{hy} és M_c igénybevételek pozitív előjelűek, akkor a redukált vektorkettős a pozitív $\vec{\boldsymbol{e}}_z$ normálisú keresztmetszetben:

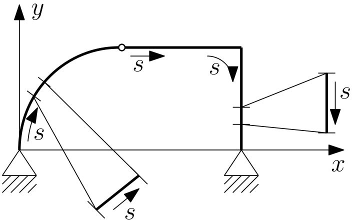
$\vec{\boldsymbol{F}} = -T_x\vec{\boldsymbol{e}}_x - T_y\vec{\boldsymbol{e}}_y + N\vec{\boldsymbol{e}}_z$,

$\vec{\boldsymbol{M}}_S = M_{hx}\vec{\boldsymbol{e}}_x - M_{hy}\vec{\boldsymbol{e}}_y + M_c\vec{\boldsymbol{e}}_z$



8. Rudak igénybevételei

tört-vonalú tartó esetén az igénybevételek ábrázolása (síkbeli eset)



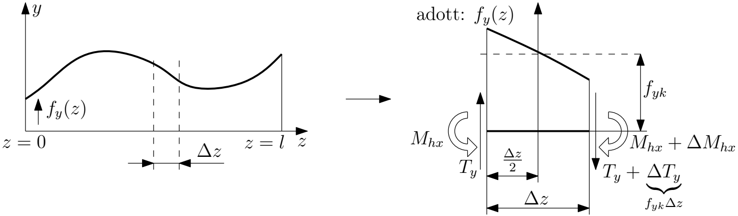
z szerepét az *s* ívkoordináta veszi át

9. Rudak igénybevételi ábrái

igénybevételi ábra: terhelés után tartós nyugalomba került rúd keresztmetszeteiben ébredő igénybevételeket a rúd középvonala mentén ábrázoljuk

9.1 Megoszló erőrendszerrel terhelt rúd egyensúlyi egyenletei

a) terhelés az *yz* síkban



Feltételezések: $f_y(z)$ a vizsgált szakaszon folytonos

9. Rudak igénybevételi ábrái

a Δz hosszúságú rúd-darabra ható ER egyensúlyi:

$$\vec{\boldsymbol{e}}_z : \quad 0 = 0$$

$$\vec{\boldsymbol{e}}_y : \quad T_y + f_{yk}\Delta z - T_y - \Delta T_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta T_y}{\Delta z} = f_{yk} \text{ differencia-egyenlet}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} : \quad f_{yk} \to f_y(z); \quad \frac{\Delta T_y}{\Delta z} \to \frac{\mathrm{d}T_y}{\mathrm{d}z}$$

$$\frac{\mathrm{d}T_y(z)}{\mathrm{d}z} = f_y(z) \quad (1) \quad \text{az erők egyensúlya } y \text{ irányban}$$

$$\vec{\boldsymbol{e}}_x : \quad \vec{\boldsymbol{M}}_C = \left[-M_{hx} + T_y \frac{\Delta z}{2} + (T_y + \Delta T_y)\frac{\Delta z}{2} + M_{hx} + \Delta M_{hx} \right] \vec{\boldsymbol{e}}_x = \vec{\boldsymbol{0}}$$

$$T_y \Delta z + \Delta M_{hx} + \Delta T_y \frac{\Delta z}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta M_{hx}}{\Delta z} = -T_y - \frac{\Delta T_y}{2} \text{ differencia-egyenlet}$$

határátmenet: $\Delta z \to 0$; $\Delta T_y \to 0$

$$\frac{\mathrm{d}M_{hx}(z)}{\mathrm{d}z} = -T_y(z) \quad (2) \quad \text{nyomatéki egyensúlyi egyenlet}$$

az (1) és (2) két lineáris, közönséges, elsőrendű, állandó együtthatós differenciál-egyenlet (DE)

9. Rudak igénybevételi ábrái

A DE-k megoldása integrálással

$$\frac{\mathrm{d}T_y(z)}{\mathrm{d}z} = f_y(z)$$

$$\int_0^l \frac{\mathrm{d}T_y(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z = \int_0^l \mathrm{d}T_y = T_y(l) - T_y(0)$$

$$T_y(l) = T_y(0) + \int_0^l f_y(z)\mathrm{d}z$$

tetszőleges z helyen:

$$T_y(z) = T_y(0) + \int_{\zeta=0}^{z} f_y(\zeta)\mathrm{d}\zeta \quad \text{(1) egyenlet integrális alakja}$$

$$M_{hx}(z) = M_{hx}(0) - \int_{\zeta=0}^{z} T_y(\zeta)\mathrm{d}\zeta \quad \text{(2) egyenlet integrális alakja}$$

9. Rudak igénybevételi ábrái

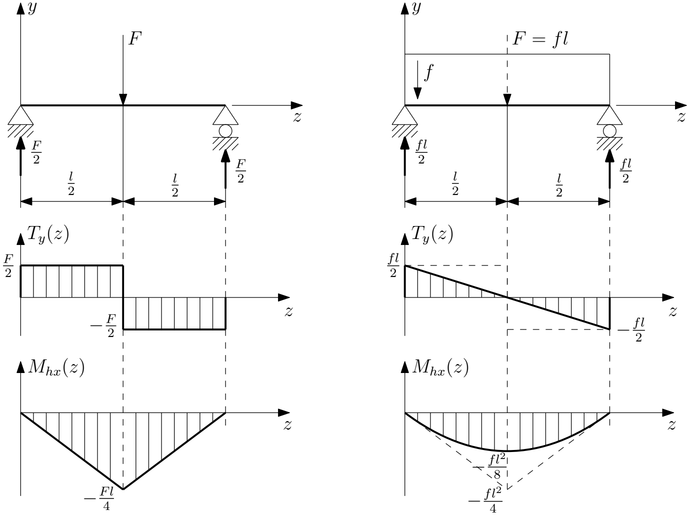
b) terhelés az xz síkban, analógia alapján:

$$(1) \quad \frac{\mathrm{d}T_x(z)}{\mathrm{d}z} = f_x(z) \quad \Rightarrow \quad T_x(z) = T_x(0) + \int\limits_{\zeta=0}^{z} f_x(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

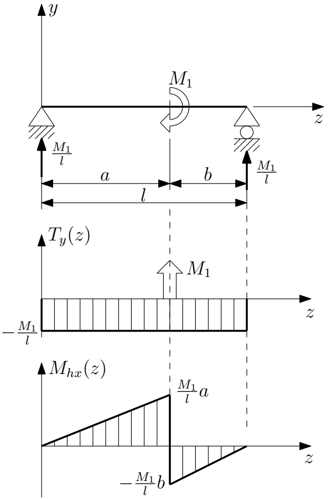
$$(2) \quad \frac{\mathrm{d}M_{hy}(z)}{\mathrm{d}z} = -T_x(z) \quad \Rightarrow \quad M_{hy}(z) = M_{hy}(0) - \int\limits_{\zeta=0}^{z} T_x(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

9. Rudak igénybevételi ábrái

9.2 Egyenes rudak igénybevételi ábrái:



9. Rudak igénybevételi ábrái



B) **Szilárdságtan**

1. Matematikai alapfogalmak

A Szilárdságtan tárgya: terhelés után tartós nyugalomba került szilárd testek elmozdulási, alakváltozási és feszültségi állapotának vizsgálata, számítása, teherbíró képességük meghatározása (méretezés, ellenőrzés)

1.1 Vektorok szorzatai

a) Skaláris szorzás...

b) Vektoriális szorzás...

kétszeres vektoriális szorzás (kifejtési tétel):

$$\vec{\boldsymbol{a}} \times (\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}}) - \vec{\boldsymbol{c}}(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}})$$

$$(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) \times \vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}}) - \vec{\boldsymbol{a}}(\vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}})$$

1. Matematikai alapfogalmak

c) Diadikus (v. tenzoriális) szorzás

$$\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}} = \underline{\underline{\boldsymbol{C}}} : \text{ másodrendű tenzor}$$

kiszámítás adott KR-ben

$$\left[\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}}\right] = \left[\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}\right] = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix}$$

a tenzornak 9 db koordinátája van, pl.: $C_{xx} = a_x b_x$, $C_{yz} = a_y b_z$, stb. Tulajdonság:

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}\right] = \begin{bmatrix} \underbrace{\underline{a} b_x}_{\vec{\boldsymbol{c}}_x} & \underbrace{\underline{a} b_y}_{\vec{\boldsymbol{c}}_y} & \underbrace{\underline{a} b_z}_{\vec{\boldsymbol{c}}_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}^{\mathsf{T}} a_x \\ \underline{b}^{\mathsf{T}} a_y \\ \underline{b}^{\mathsf{T}} a_z \end{bmatrix}$$

1. Matematikai alapfogalmak

$\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}$ invariáns (KR-től független) alakja az oszlopában álló vektorokkal:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{C}}} = \vec{\boldsymbol{C}}_x \circ \vec{\boldsymbol{e}}_x + \vec{\boldsymbol{C}}_y \circ \vec{\boldsymbol{e}}_y + \vec{\boldsymbol{C}}_z \circ \vec{\boldsymbol{e}}_z$$

igazolás:

$$\left[\vec{\boldsymbol{C}}_x \circ \vec{\boldsymbol{e}}_x\right] = \begin{bmatrix} a_x b_x \\ a_y b_x \\ a_z b_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x & 0 & 0 \\ a_y b_x & 0 & 0 \\ a_z b_x & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\vec{\boldsymbol{C}}_y \circ \vec{\boldsymbol{e}}_y\right] = \begin{bmatrix} a_x b_y \\ a_y b_y \\ a_z b_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_x b_y & 0 \\ 0 & a_y b_y & 0 \\ 0 & a_z b_y & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\vec{\boldsymbol{C}}_z \circ \vec{\boldsymbol{e}}_z\right] = \begin{bmatrix} a_x b_z \\ a_y b_z \\ a_z b_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_x b_z \\ 0 & 0 & a_y b_z \\ 0 & 0 & a_z b_z \end{bmatrix}$$

1. Matematikai alapfogalmak

A diadikus szorzat **nem** kommutatív:

$$\vec{\boldsymbol{b}} \circ \vec{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x a_x & b_x a_y & b_x a_z \\ b_y a_x & b_y a_y & b_y a_z \\ b_z a_x & b_z a_y & b_z a_z \end{bmatrix} = \left[\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}^{\mathrm{T}}\right]$$

Ez a mátrix $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}$ mátrixa a főátlóra tükrözve (transzponált). Következmény:

$$\vec{\boldsymbol{b}} \circ \vec{\boldsymbol{a}} = \left(\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}}\right)^{\mathrm{T}}; \quad \vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}} = \left(\vec{\boldsymbol{b}} \circ \vec{\boldsymbol{a}}\right)^{\mathrm{T}}$$

1. Matematikai alapfogalmak

1.2 Tenzoralgebra

- nulladrendű tenzor: skalár, $3^0 = 1$ eleme van
- elsőrendű tenzor: vektor, $3^1 = 3$ eleme van
- másodrendű tenzor: tenzor, $3^2 = 9$ eleme van
- ...
- n-edrendű tenzor: 3^n eleme van

a) alapműveletek:

- tenzorok összeadása/kivonása: $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \pm \underline{\underline{\boldsymbol{B}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}$ pl.: $C_{xx} = A_{xx} \pm B_{xx}$, stb.
- tenzorok egyszeres skaláris szorzata: $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{B}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}$ pl.: xyz KR-ben

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{bmatrix}$$

ahol $D_{xx} = A_{xx}B_{xx} + A_{xy}B_{xy} + A_{xz}B_{zx}$, $D_{zy} = A_{zx}B_{xy} + A_{zy}B_{yy} + A_{zz}B_{zy}$, ... , stb.

- két tenzor kétszeres skaláris (belső) szorzata:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot\cdot \underline{\underline{\boldsymbol{B}}} = s = \underbrace{A_{xx}B_{xx} + A_{xy}B_{xy} + A_{xz}B_{xz} + \ldots + A_{zz}B_{zz}}_{\text{9 tagból álló összeg}}$$

1. Matematikai alapfogalmak

- tenzor és vektor skaláris szorzata:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx}c_x + A_{xy}c_y + A_{xz}c_z \\ A_{yx}c_x + A_{yy}c_y + A_{yz}c_z \\ A_{zx}c_x + A_{zy}c_y + A_{zz}c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

legyen $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}}$, vagyis $A_{xx} = a_x b_x$, $A_{xy} = a_x b_y$, stb. Ezeket helyettesítsük be a fenti $\vec{\boldsymbol{v}}$ vektorba:

$$v_x = a_x b_x c_x + a_x b_y c_y + a_x b_z c_z = a_x (b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z) = a_x \left(\vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}} \right)$$

$$v_y = a_y b_x c_x + a_y b_y c_y + a_y b_z c_z = a_y (b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z) = a_y \left(\vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}} \right)$$

$$v_z = a_z b_x c_x + a_z b_y c_y + a_z b_z c_z = a_z (b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z) = a_x \left(\vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}} \right)$$

következmény: $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{a}} \left(\vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}} \right)$, illetve $\vec{\boldsymbol{v}} = \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}} = \left(\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}} \right) \cdot \vec{\boldsymbol{c}}$, tehát

$$\left(\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}} \right) \cdot \vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{a}} \left(\vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}} \right), \quad \vec{\boldsymbol{c}} \cdot \left(\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}} \right) = \left(\vec{\boldsymbol{c}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} \right) \vec{\boldsymbol{b}}$$

1. Matematikai alapfogalmak

b) szimmetrikus és aszimmetrikus tenzorok:
értelmezés: az $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ tenzor **szimmetrikus**, ha $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}^{\mathrm{T}}$
koordinátákkal: $A_{xy} = A_{yx}$, $A_{yz} = A_{zy}$, $A_{zx} = A_{xz}$, következmény: a szimmetrikus tenzornak 6 független koordinátája van

értelmezés: az $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ tenzor aszimmetrikus (ferdeszimmetrikus) tenzor, ha $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = -\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}^{\mathrm{T}}$
koordinátákkal: $A_{xx} = A_{yy} = A_{zz} = 0$ a főátlóban, $A_{xy} = -A_{yx}$, $A_{yz} = -A_{zy}$, $A_{zx} = -A_{xz}$,
következmény: 3 zérustól különböző, független koordinátája van

- aszimmetrikus tenzor vektor invariánsa: ha $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ aszimmetrikus, akkor létezik olyan $\vec{\boldsymbol{a}}$ vektor, hogy $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$, ahol $\vec{\boldsymbol{v}}$ tetszőleges, és $\vec{\boldsymbol{a}}$ az $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ vektor invariánsa

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\text{ mátrixa: } \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} A_{xy} &= -a_z = -A_{yx} \\ A_{yz} &= -a_x = -A_{zy} \\ A_{zx} &= -a_y = -A_{xz} \end{aligned}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} = A_{zy}\vec{\boldsymbol{e}}_x + A_{xz}\vec{\boldsymbol{e}}_y + A_{yx}\vec{\boldsymbol{e}}_z$$

igazolás:

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_z v_y + a_y v_z \\ a_z v_x - a_x v_z \\ -a_y v_x + a_x v_y \end{bmatrix} = [\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{v}}]$$

1. Matematikai alapfogalmak

c) az egységtenzor
értelmezés: olyan tenzor, amelynek a főátlójában 1 áll, a többi koordinátája zérus
jele: $\underline{\underline{\mathbf{1}}}$
mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{invariáns előállítása: } \underline{\underline{\mathbf{1}}} = \vec{\boldsymbol{e}}_x \circ \vec{\boldsymbol{e}}_x + \vec{\boldsymbol{e}}_y \circ \vec{\boldsymbol{e}}_y + \vec{\boldsymbol{e}}_z \circ \vec{\boldsymbol{e}}_z$$

tulajdonsága: $\underline{\underline{\mathbf{1}}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}$ bármely $\vec{\boldsymbol{v}}$ esetén

1. Matematikai alapfogalmak

1.3 A homogén, lineáris vektor-vektor függvény
a) skalár-skalár függvény: $y = f(x)$
inhomogén lineáris függvény: $y = mx + b$
homogén lineáris függvény: $y = mx$

b) vektor-vektor függvény: $\vec{\boldsymbol{w}} = f(\vec{\boldsymbol{v}})$
homogén lineáris vektor-vektor függvény:

$$\begin{aligned} w_x &= A_{xx}v_x + A_{xy}v_y + A_{xz}v_z \\ w_y &= A_{yx}v_x + A_{yy}v_y + A_{yz}v_z \\ w_z &= A_{zx}v_x + A_{zy}v_y + A_{zz}v_z \end{aligned}$$

invariáns alakban $\vec{\boldsymbol{w}} = \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$ a homogén lineáris vektor-vektor függvény legáltalánosabb alakja,
ahol $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ a függvény operátora
jelentése: a tér $\vec{\boldsymbol{v}}$ vektoraihoz a tér $\vec{\boldsymbol{w}}$ vektorait rendeljük hozzá

1. Matematikai alapfogalmak

- bázisvektorok leképezése (*xyz*):

$$\begin{array}{ll}
\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_x = \vec{\boldsymbol{w}}_x = A_{xx}\vec{\boldsymbol{e}}_x + A_{yx}\vec{\boldsymbol{e}}_y + A_{zx}\vec{\boldsymbol{e}}_z = \vec{\boldsymbol{A}}_x & \left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\right] \text{ 1. oszlopa} \\
\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_y = \vec{\boldsymbol{w}}_y = A_{xy}\vec{\boldsymbol{e}}_x + A_{yy}\vec{\boldsymbol{e}}_y + A_{zy}\vec{\boldsymbol{e}}_z = \vec{\boldsymbol{A}}_y & \left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\right] \text{ 2. oszlopa} \\
\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_z = \vec{\boldsymbol{w}}_x = A_{xz}\vec{\boldsymbol{e}}_x + A_{yz}\vec{\boldsymbol{e}}_y + A_{zz}\vec{\boldsymbol{e}}_z = \vec{\boldsymbol{A}}_z & \left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\right] \text{ 3. oszlopa}
\end{array}$$

- homogén lineáris függvények tulajdonságai:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_1 + \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_2 = \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \left(\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \vec{\boldsymbol{v}}_2\right)$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \left(\lambda \vec{\boldsymbol{v}}\right) = \lambda \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$$

1. Matematikai alapfogalmak

1.4 Tenzormezők

a) értelmezés:

- skalármező: $f(\vec{\boldsymbol{r}}) = f(x, y, z)$; $\vec{\boldsymbol{r}} = x\vec{\boldsymbol{e}}_x + y\vec{\boldsymbol{e}}_y + z\vec{\boldsymbol{e}}_z$
- vektormező: $\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{v}}(x, y, z)$
- tenzormező: $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}(x, y, z)$

$\nabla = \vec{\boldsymbol{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{\boldsymbol{e}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{\boldsymbol{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}$ a "nabla" operátor *xyz* KR-ben

b) tenzormezők differenciálása (megváltozások számítása)

- skalármező gradiense: $f = f(x, y, z)$ (egyváltozós eset: $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$)

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}f = (\mathrm{grad}\ f) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = (f\nabla) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = (\nabla f) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}$$

$$\mathrm{grad}\ f = \nabla f = f\nabla = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = \mathrm{d}x\vec{\boldsymbol{e}}_x + \mathrm{d}y\vec{\boldsymbol{e}}_y + \mathrm{d}z\vec{\boldsymbol{e}}_z$$

1. Matematikai alapfogalmak

- vektormező gradiense: $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}(x, y, z)$
  jobb oldali gradiens: $\vec{\boldsymbol{v}} \circ \nabla = \underline{\underline{\boldsymbol{V}}}$

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{V}}}\right] = \left[\vec{\boldsymbol{v}} \circ \nabla\right] = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

  bal oldali gradiens: $\nabla \circ \vec{\boldsymbol{v}} = \underline{\underline{\boldsymbol{V}}}^{\mathrm{T}}$

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{V}}}^{\mathrm{T}}\right] = \left[\nabla \circ \vec{\boldsymbol{v}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

- a $\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ vektormező megváltozása: $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}} = \left(\vec{\boldsymbol{v}} \circ \nabla\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \left(\nabla \circ \vec{\boldsymbol{v}}\right)$
- vektormező divergenciája: $d = \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla = \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \mathrm{div}\ \vec{\boldsymbol{v}}$
- vektormező rotációja: $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{v}} \times \nabla = -\nabla \times \vec{\boldsymbol{v}}$

$$a_x = \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}; \quad a_y = \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}; \quad a_z = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}$$