

Mechanika

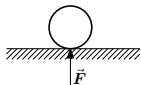
II. előadás

2019. március 4.

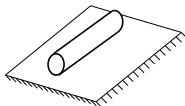
4. Merev test megtámasztásai, statikai feladatok

megtámasztás: testek érintkezése útján jön létre, az érintkezés során egymásra **erőt** fejtenek ki
merev testek érintkezése:

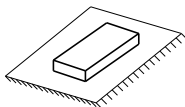
- **pontszerű:** a két test egyetlen pontban érintkezik, a támasztó-erőrendszer egyetlen koncentrált erő



- **vonalszerű:** a két test egy vonal mentén érintkezik, a támasztó-ER vonal mentén megoszló ER $\vec{f} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$



- **felület menti érintkezés:** a két test felület mentén érintkezik egymással, a támasztó-ER felület mentén megoszló ER $\vec{p} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$



4. Merev test megtámasztásai, statikai feladatok

4.1 A Coulomb-féle súrlódási modell és törvény (száraz súrlódás esete, Charles Augustine de Coulomb, 1736-1806 francia fizikus)

a) kísérleti tapasztalatok:

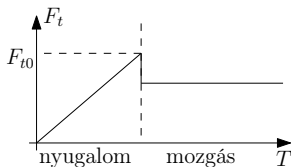
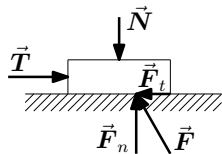
\vec{T} : tolóerő, \vec{N} leszorító erő

támasztó-ER eredője: $\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_t$

$\vec{F}_n = -\vec{N}$

a támasztóerő normál irányú összetevője

nyugalom: $\vec{F}_t = -\vec{T}$ a súrlódási erő



4. Merev test megtámasztásai, statikai feladatok

b) a Coulomb-féle súrlódási törvény: kapcsolat az F_n és F_t között
nyugalom esetén: $F_t \leq \mu_0 F_n$; $F_{t0} = \mu_0 F_n$

mozgás esetén: $F_t = \mu F_n$

ahol μ_0 a nyugalmi (tapadási), μ a mozgásbeli súrlódási tényező

$\mu_0 \approx 0,01 - 0,9$ $\mu_0 > \mu$

4. Merev test megtámasztásai, statikai feladatok

c) a Coulomb-féle súrlódási kúp

$$\frac{F_t}{F_n} = \tan \alpha$$

törvény: $\frac{F_t}{F_n} \leq \mu_0$ a nyugalom feltétele

legyen $\mu_0 = \tan \rho_0$, így

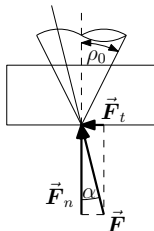
$$\frac{F_t}{F_n} = \tan \alpha \leq \mu_0 = \tan \rho_0$$

$$\tan \alpha \leq \tan \rho_0$$

$$\alpha \leq \rho_0$$

következmény: a nyugalom feltétele, hogy a támasztó ER eredőjének hatásvonala a súrlódási kúp **palástja** ($F_t = F_{t0}$ a nyugalmi helyzet határa), vagy azon belül legyen

- mozgás esetén $\frac{F_t}{F_n} = \mu$
- sima felület/támasz: $\mu_0 = \mu = 0$:
 $\vec{F}_t = \vec{0}$; a támasztóerő merőleges a támasztó felületre
- a súrlódási törvényt érvényesnek tekintjük pontszerű/vonalszerű érintkezés esetén

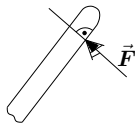
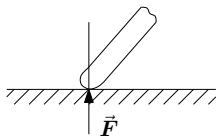


4. Merev test megtámasztásai, statikai feladatok

4.2 Megtámasztások fontosabb típusai síkban

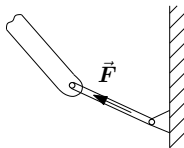
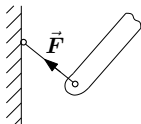
a) a támasztóerő iránya ismert, nagysága ismeretlen

sima támasz:



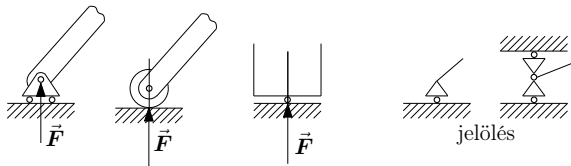
x, y KR: $\frac{F_x}{F_y}$ aránya ismert

súlytalan kötél, vagy rúd támasza

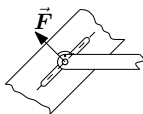
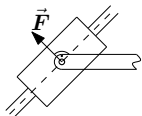


4. Merev test megtámasztásai, statikai feladatok

görgős támasz (görgő)



csúszka (sima) $\mu_0 = 0$

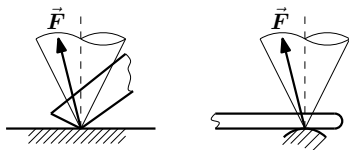


xy KR-ben F_x és F_y ismeretlen
 $\frac{F_x}{F_y}$ ismert a hatásvonal miatt

4. Merev test megtámasztásai, statikai feladatok

b) a támasztóerő nagysága és iránya ismeretlen

érdes megtámasztás



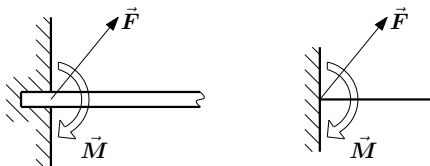
csukló, csuklós támasz



xy KR-ben: $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$
mind F_x , mind F_y ismeretlen

4. Merev test megtámasztásai, statikai feladatok

befogás, befalazás



$$\begin{aligned}xyz \text{ KR-ben: } \vec{F} &= F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y \\ \vec{M} &= M_z \vec{e}_z\end{aligned} \quad 3 \text{ db ismeretlen}$$

4. Merev test megtámasztásai, statikai feladatok

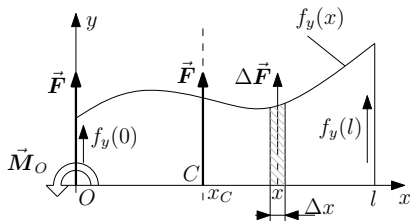
4.3 Statikai feladatok megoldása

- statikai feladat: merev test az ismert terhelő-erőrendszer és a támasztásoknál fellépő ismeretlen erőrendszer hatására tartós nyugalomban van. Keresett a támasztó-ER.
- megoldás: tartós nyugalom, statika alaptétele, támasztó ER + terhelő ER \equiv külső ER, mely egyúttal egyensúlyi ER.
- statikai (egyensúlyi) egyenletekkel dolgozunk, számuk síkban 3 db, térben 6 db.

5. Megoszló erőrendszerek

- vonal, vagy felület mentén érintkező testek kölcsönhatásának eredménye a vonal, vagy felület mentén megoszló ER
- térfogaton megoszló ER (pl. gravitáció)

5.1 Egyenes vonal mentén megoszló ER (síkbeli)



- ismert: a megoszló ER sűrűségvektora $\vec{f}_y = f_y \vec{e}_y \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$ egységnyi hosszra eső erő
- kérdés: a megoszló ER eredője és nyomatéka

a) a megoszló ER redukált vektorkettőse

- Δx szakaszon ható erő: $\Delta \vec{F} = \Delta x \vec{f}_y(x)$ [N]
- a megoszló ER eredője: $\vec{F} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta \vec{F} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{f}_y \Delta x = \int_0^l \vec{f}_y(x) dx$ [N]

5. Megoszló erőrendszerek

- a megoszló ER nyomatéka az O pontra

$$\Delta \vec{M}_O = x \vec{e}_x \times \Delta \vec{F} = x \Delta F \vec{e}_z = x f_y(x) \Delta x \vec{e}_z$$

Ez a $\Delta \vec{F}$ erő nyomatéka x karon O pontban.

$$\vec{M}_O = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta \vec{M}_O = \lim_{n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x f_y(x) \Delta x \vec{e}_z = \int_0^l x f_y(x) dx \vec{e}_z$$

$$\vec{M}_O = \int_{x=0}^l x f_y(x) dx \vec{e}_z \text{ [Nm] a megoszló ER nyomatéka az } O \text{ pontra.}$$

következmény: bármely vonal mentén megoszló ER helyettesíthető egy eredő erővel és egy nyomatékkal. $(\vec{F}; \vec{M}_O)_O$ a megoszló ER redukált vektorkettőse az O pontban.

5. Megoszló erőrendszerek

b) a megoszló ER centrális egyenese

keresett: $C(x_C; 0)$ pont, a centrális egyenes O -hoz legközelebb eső pontja

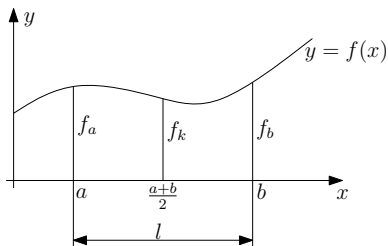
$$\vec{r}_{OC} = \frac{1}{F^2} F \vec{e}_y \times M_O \vec{e}_z = \frac{1}{F^2} F M_O \vec{e}_x = \frac{M_O}{F} \vec{e}_x = x_C \vec{e}_x$$

$$x_C = \frac{M_O}{F} = \frac{\int_0^l x f_y(x) dx}{\int_0^l f_y(x) dx}$$

szemléletből nyomaték az O pontra: $(x_C F) \vec{e}_z = M_O \vec{e}_z \Rightarrow x_C = \frac{M_O}{F}$

5. Megosztó erőrendszerek

c) egyváltozós függvény integrálása numerikusan: Simpson-formula

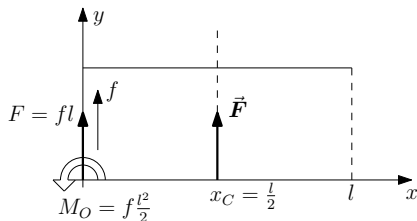


$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} (f_a + 4f_k + f_b)$$

ez a képlet pontos legfeljebb 3-adfokú polinomig

5. Megoszló erőrendszerek

egyenletesen megoszló terhelés



adott: $f_y(x) = f = \text{áll.}$, kérdés: eredő, \vec{M}_O , x_C

eredő:

$$\vec{F} = \int_0^l f_y(x) dx \vec{e}_y = \int_0^l f dx \vec{e}_y = f \int_0^l dx \vec{e}_y = f[x]_0^l \vec{e}_y = fl \vec{e}_y$$

nyomaték az O pontra:

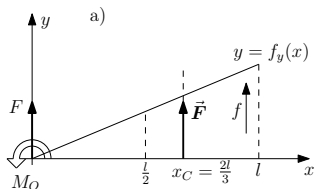
$$\vec{M}_O = \int_0^l x f_y(x) dx \vec{e}_z = f \int_0^l x dx \vec{e}_z = f \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l \vec{e}_z = f \frac{l^2}{2} \vec{e}_z$$

a centrális egyenes O -hoz legközelebb eső C pontja:

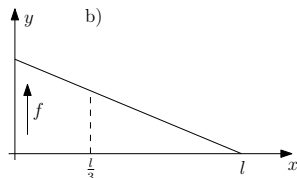
$$x_C = \frac{M_O}{F} = \frac{f \frac{l^2}{2}}{fl} = \frac{l}{2} \text{ [m]}$$

5. Megoszló erőrendszerek

lineárisan megoszló terhelés



$$f_y(x) = \frac{f}{l}x$$



$$f_y(x) = f - \frac{f}{l}x$$

a)

$$F = \int_0^l f_y(x) dx = \frac{l}{6} \left(0 + 4 \frac{f}{2} + f \right) = \frac{fl}{2} \text{ [N]}$$

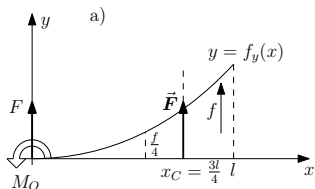
$$M_O = \int_0^l x f_y(x) dx = \frac{l}{6} \left(0 + 4 \frac{l}{2} \frac{f}{2} + fl \right) = \frac{fl^2}{3} \text{ [Nm]} \quad x_C = \frac{M_O}{F} = \frac{2}{3}l \text{ [m]}$$

b)

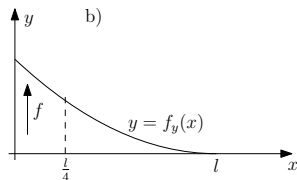
$$F = \frac{fl}{2}; \quad M_O = \frac{fl^2}{6}; \quad x_C = \frac{l}{3}$$

5. Megoszló erőrendszerek

másodfokú polinom (parabola) szerint megoszló terhelés



$$f_y(x) = \frac{f}{l^2}x^2$$



$$f_y(x) = \frac{f}{l^2}(x-l)^2$$

a)

$$F = \int_0^l f_y(x) dx = \frac{l}{6} \left(0 + 4 \frac{f}{4} + f \right) = \frac{fl}{3}$$

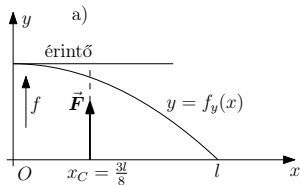
$$M_O = \int_0^l x f_y(x) dx = \frac{l}{6} \left(0 + 4 \frac{l f}{2 \cdot 4} + fl \right) = \frac{l}{6} \frac{3}{2} fl = \frac{fl^2}{4} \quad x_C = \frac{M_O}{F} = \frac{3}{4}l$$

b)

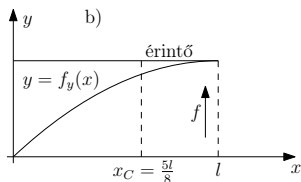
$$F = \frac{fl}{3}; \quad M_O = \frac{fl^2}{12}; \quad x_C = \frac{l}{4}$$

5. Megoszló erőrendszerek

másodfokú polinom (parabola) szerint megoszló terhelés



$$f_y(x) = f - \frac{f}{l^2}x^2$$



$$f_y(x) = f - \frac{f}{l^2}(x-l)^2$$

a)

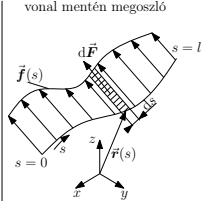
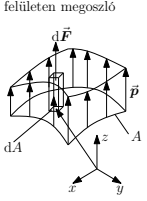
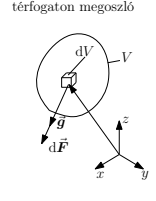
$$F = \frac{2}{3}fl \quad M_O = \frac{fl^2}{4} \quad x_C = \frac{3}{8}l$$

b)

$$F = \frac{2}{3}fl \quad M_O = \frac{5fl^2}{12} \quad x_C = \frac{5}{8}l$$

5. Megoszló erőrendszerek

5.2 Vonal mentén, felületen és térfogaton megoszló ER-ek

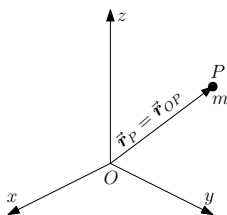
	 <p>vonal mentén megoszló</p>	 <p>felületen megoszló</p>	 <p>térfogaton megoszló</p>
sűrűségvektor	$\vec{f} = \vec{f}(s) \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$	$\vec{p} = \vec{p}(\vec{r}) \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$	$\vec{q} = \vec{q}(\vec{r}) \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right]$
elemi erő	$d\vec{F} = \vec{f}(s)ds \quad [\text{N}]$	$d\vec{F} = \vec{p}dA \quad [\text{N}]$	$d\vec{F} = \vec{q}dV \quad [\text{N}]$
eredő erő	$\vec{F} = \int_0^l d\vec{F} = \int_0^l \vec{f}(s)ds \quad [\text{N}]$	$\vec{F} = \int_{(A)} \vec{p}dA \quad [\text{N}]$	$\vec{F} = \int_{(V)} \vec{q}dV \quad [\text{N}]$
nyomaték O-ban	$\vec{M}_O = \int_0^l \vec{r} \times d\vec{F} =$ $= \int_0^l \vec{r} \times \vec{f}(s)ds \quad [\text{Nm}]$	$\vec{M}_O = \int_{(A)} \vec{r} \times \vec{p}dA \quad [\text{Nm}]$	$\vec{M}_O = \int_{(V)} \vec{r} \times \vec{q}dV \quad [\text{Nm}]$ pl.: $\vec{q} = \rho g \vec{e}$

következmény: bármely megoszló ER helyettesíthető a test/tér egy tetszőleges pontjában egy koncentrált erővel és egy nyomatékkal \equiv az ER redukált vektorkettősével

6. Tömegközéppont, súlypont, statikai nyomaték

6.1 Tömegpontrendszer tömegközéppontja és súlypontja

a) Tömegpont statikai nyomatéka



a P anyagi ponthoz egy skaláris mennyiséget rendelünk: m tömeg [kg]. Tömeg: a tehetetlenség mértéke. Értelmezés: a P pontbeli m tömeg statikai nyomatéka az O pontra:

$$\vec{S}_O = \vec{r}_{OP} m \text{ [kgm]}$$

(ez egy segédmennyiség, lineáris vagy elsőrendű nyomatéka m -nek) egyetlen m

tömegpont tömegközéppontja: P , $\vec{S}_P = \vec{0}$

6. Tömegközéppont, súlypont, statikai nyomaték

b) tömegpontrendszer tömegközéppontja

ismert: $P_i, m_i, i = 1, \dots, n, \vec{r}_{OP_i} \equiv \vec{r}_i$

keresett: a tömegpontrendszer

tömegközéppontja: \vec{r}_T

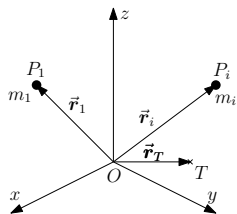
a tömegpontrendszer össztömege:

(eredő tömeg)

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{i=1}^n m_i$$

értelmezés:

az $m_i, i = 1, \dots, n$ tömegpontrendszer **tömegközéppontja** az a pont, amelyben a tömegpontrendszer az m össztömegével helyettesíthető olyan módon, hogy erre a pontra (T) a tömegpontrendszer **statika nyomatéka zérus**



6. Tömegközéppont, súlypont, statikai nyomaték

meghatározása:

$$\vec{\mathbf{S}}_O = \vec{\mathbf{r}}_1 m_1 + \dots + \vec{\mathbf{r}}_n m_n = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{r}}_i m_i$$

$$\vec{\mathbf{S}}_O = m \vec{\mathbf{r}}_{OT}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_{OT} m = \vec{\mathbf{r}}_1 m_1 + \dots + \vec{\mathbf{r}}_n m_n$$

$$\vec{\mathbf{r}}_{OT} \equiv \vec{\mathbf{r}}_T = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{r}}_i m_i}{m} = \frac{\vec{\mathbf{S}}_O}{m} \text{ [m]}$$

átszámítás másik pontba:

$$\vec{\mathbf{S}}_A = \vec{\mathbf{S}}_O + \vec{\mathbf{r}}_{AO} m$$

(analógia: $\vec{\mathbf{M}}_A = \vec{\mathbf{M}}_O + \vec{\mathbf{r}}_{AO} \times \vec{\mathbf{F}}$)

például: $\vec{\mathbf{S}}_T = \vec{\mathbf{S}}_O + \vec{\mathbf{r}}_{TO} m = m \vec{\mathbf{r}}_{OT} + m \vec{\mathbf{r}}_{TO} = \vec{\mathbf{0}}$

a statikai nyomaték koordinátái egy tömegpont esetén:

$$\vec{\mathbf{S}}_O = \vec{\mathbf{r}}_{OP} m = \underbrace{x_{OP} m}_{S_{yz}} \vec{\mathbf{e}}_x + \underbrace{y_{OP} m}_{S_{xz}} \vec{\mathbf{e}}_y + \underbrace{z_{OP} m}_{S_{xy}} \vec{\mathbf{e}}_z$$

itt S_{yz} , S_{xz} , S_{xy} rendre az yz , xz és xy koordináta-síkokra számított statikai nyomaték

6. Tömegközéppont, súlypont, statikai nyomaték

c) tömegpontrendszer súlypontja

ismert: $m_i, \vec{r}_i, i = 1, \dots, n,$

g, \vec{e} : gravitációs erőter (gyorsulás, irány)

(Föld: $g \approx 9,81$

$$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \vec{G}_i = m_i \vec{g} = m_i g \vec{e} \left[\frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} = \text{N} \right]$$

a tömegpontrendszer eredő súlya (összsúlya)

$$\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \dots + \vec{G}_n = \sum_{i=1}^n (m_i \vec{g}) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{g} = m \vec{g}$$

értelmezés: az m_i

$i = 1, \dots, n$ tömegpontrendszer súlypontja

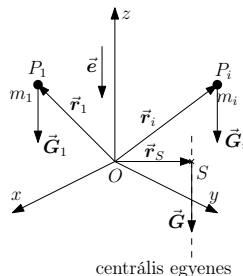
az a pont, amelyben a tömegpontrendszer \vec{G}_i

súlyerői a \vec{G} eredő súlyerővel helyettesíthető

– gravitáció irányától és nagyságától

függetlenül – olyan módon, hogy erre

a pontra a súlyerőrendszer nyomatéka zérus



6. Tömegközéppont, súlypont, statikai nyomaték

a súlypont meghatározása:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{G}_1 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{G}_n = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \left(\sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i \right) \times \vec{g}$$

$$\vec{M}_O = \vec{r}_S \times \vec{G} = \vec{r}_S \times m \vec{g} = (\vec{r}_S m) \times \vec{g}$$

Magyarázat: a zárójelben álló mennyiségeknek meg kell egyezniük

$$\vec{r}_S m = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i$$

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i}{m} \equiv \vec{r}_T$$

következmény: a tömegközéppont és a súlypont egybeesik: $S \equiv T$

6. Tömegközéppont, súlypont, statikai nyomaték

6.2 Merev test tömegközéppontja és súlypontja

- a test sűrűsége: $\rho = \rho(\vec{r}) \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$
homogén test: $\rho = \text{áll.}$
- az elemi térfogat: $dV = dx dy dz$
- az elemi tömeg: $dm = \rho dV$
- a test

$$\text{térfogata: } V = \lim_{n \rightarrow \infty, \Delta m \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta V =$$

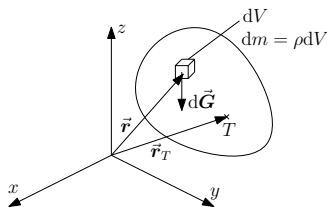
$$\int_V dV = \int_x \int_y \int_z dx dy dz$$

- a test tömege:
 $m = \int_{(V)} \rho dV = \int_{(V)} dm = \int_x \int_y \int_z \rho dx dy dz$
- a test súlya:

$$\vec{G} = \lim_{n \rightarrow \infty, \Delta m \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta m \vec{g} = \int_{(V)} dm \vec{g} = m \vec{g}, \rho g = \gamma \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right] \text{ a fajszűly}$$

- a merev test statikai nyomatéka az O pontra: $\vec{S}_O = \lim_{n \rightarrow \infty, \Delta m \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta m \vec{r} =$

$$\int_{(V)} \vec{r} dm = \int_{(V)} \vec{r} \rho dV$$



6. Tömegközéppont, súlypont, statikai nyomaték

- a merev test tömegközéppontja és súlypontja azonos: $\vec{r}_S \equiv \vec{r}_T = \frac{\vec{S}_O}{m} = \frac{\int_{(V)} \vec{r} dm}{\int_{(V)} dm}$ [m];

$$\vec{S}_O = \vec{r}_T m$$

- a homogén test súlypontja: $\vec{r}_S = \vec{r}_T = \frac{\int_{(V)} \rho \vec{r} dV}{\int_{(V)} \rho dV} = \frac{\rho \int_{(V)} \vec{r} dV}{\rho \int_{(V)} dV} = \frac{\int_{(V)} \vec{r} dV}{\int_{(V)} dV} = \frac{\int_{(V)} \vec{r} dV}{V}$;

$$\int_{(V)} \vec{r} dV = \vec{r}_T V$$

6. Tömegközéppont, súlypont, statikai nyomaték

6.3 Speciális merev testek súlypontja

a) homogén rúd

• keresztmetszet: $A = \text{áll.}; \rho = \text{áll.}$

• rúd hossza: $l = \int_{(l)} ds$

• a rúd tömege: $m = \int_{(V)} dm = \int_{(A)} \int_{(l)} \rho dV = \rho \int_{(A)} \int_{(l)} dA ds =$

$$\underbrace{\rho \int_{(A)} dA}_A \underbrace{\int_{(l)} ds}_l = \rho A l = \rho V$$

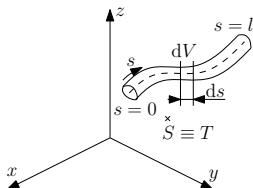
• statikai nyomaték:

$$\vec{S}_O = \int_{(V)} \vec{r} \rho dV = \rho \int_{(A)} \int_{(l)} \vec{r} dA ds =$$

$$\rho \int_{(A)} dA \int_{(l)} \vec{r} ds = \rho A \int_{(l)} \vec{r} ds$$

• súlypont: $\vec{r}_S = \frac{\vec{S}_O}{m} = \frac{\rho A \int_{(l)} \vec{r} ds}{\rho A l} = \frac{\int_{(l)} \vec{r} ds}{l};$

vonal: ha $A \rightarrow 0$, akkor $\rho A = 1$, így továbbra is érvényesek a fenti képletek



6. Tömegközéppont, súlypont, statikai nyomaték

b) homogén merev lap

- vastagsága: $h = \text{áll.}$ (z irányban)
- sűrűség: $\rho = \text{áll.}$

- felület: $A = \int_{(A)} dA = \int_x \int_y dx dy$

- statikai
nyomaték: $\vec{S}_O = \int_{(V)} \vec{r} dm = \int_{(V)} \vec{r} \rho dV =$
 $\rho \int_{(V)} \vec{r} dV = \rho \int_{(A)} \int_{(h)} \vec{r} dAdz = \rho h \int_{(A)} \vec{r} dA$

- súlypont:

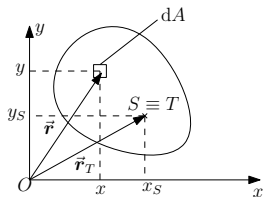
$$\vec{r}_S \equiv \vec{r}_T = \frac{\vec{S}_O}{m} = \frac{\rho h \int_{(A)} \vec{r} dA}{\rho Ah} = \frac{\int_{(A)} \vec{r} dA}{A},$$

koordinátái: $\vec{r}_S = x_S \vec{e}_x + y_S \vec{e}_y,$

$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y,$ ezek

$$x_S = \frac{\int_{(A)} x dA}{A} = \frac{S_y}{A}, y_S = \frac{\int_{(A)} y dA}{A} = \frac{S_x}{A}, \text{ ahol } S_x = \int_{(A)} y dA \text{ és } S_y = \int_{(A)} x dA \text{ rendre az } x \text{ és } y$$

tengelyre számított (lineáris) statikai nyomaték. Megjegyzés: ha x és y tengelyek átmennek a súlyponton, akkor $O \equiv S, \vec{S}_O \equiv \vec{0},$ és $S_x = S_y = 0$

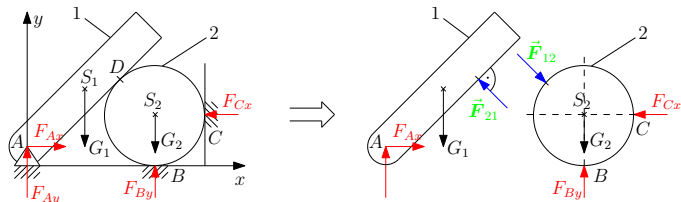


7. Szerkezetek statikája

Feladat: több merev testből álló rendszer tartós nyugalmához szükséges külső és belső erők meghatározása

7.1 Jelölések, statikai határozottság, megoldhatóság

két merev testből álló rendszer



Adott: az ábra a méretekkel együtt, ill. $\mu_0 = 0$

ismeretlen külső ER: $\vec{F}_A = F_{Ax}\vec{e}_x + F_{Ay}\vec{e}_y$; $\vec{F}_B = F_{Bx}\vec{e}_x + F_{By}\vec{e}_y$; $\vec{F}_C = F_{Cx}\vec{e}_x$.

Az egész (1+2) szerkezetre összesen 3 statikai (egyensúlyi) egyenlet írható fel.

7. Szerkezetek statikája

- ismeretlen belső erők:

$$1\text{-ről a } 2\text{-re: } \vec{F}_{12} = F_{12x}\vec{e}_x - F_{12y}\vec{e}_y$$

$$2\text{-ről az } 1\text{-re: } \vec{F}_{21} = -F_{21x}\vec{e}_x + F_{21y}\vec{e}_y$$

$$\text{és: } \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}; \text{ vagy } \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$$

továbbá: ismert az \vec{F}_{12} iránya is, azaz az $\frac{F_{12y}}{F_{12x}}$ arány. Következmény: a belső erő egy ismeretlent jelent.

- az 1 és 2 test a rájuk ható külső és belső erők hatására külön-külön tartós nyugalomban van
- egyensúlyi erőrendszerek
 - a) 1+2 külső ER-re: 3 egyensúlyi egyenlet
 - b) 1 külső és belső ER-re: 3 egyensúlyi egyenlet
 - c) 2 külső és belső ER-re: 3 egyensúlyi egyenletEz összesen 6 db független statikai (egyensúlyi) egyenlet
- n db merev testből álló rendszer esetén síkban $3n$ független egyenlet; térben $6n$ független egyenlet írható fel
- az ismeretlenek száma legyen n_i , a felírható független egyenleteké pedig n_e
a felrajzolt példában: $n_e = 6$, $n_i = 5$, vagyis $n_e > n_i$, a feladat tehát megoldható

7. Szerkezetek statikája

- statikailag határozott szerkezet: értelmezés
egy merev testekből álló rendszer statikailag határozott, ha a külső és belső ER ismeretlenjeinek száma és a felírható független statikai egyenletek száma megegyezik, vagyis $n_e = n_i$
- ha $n_e > n_i$, akkor a szerkezet labilis, mozgékony, de a támasztó ER számítható, a feladat megoldható (statikailag túlhatározott)
- ha $n_e < n_i$, akkor a szerkezet statikailag határozatlan, és csak egyensúlyi v. statikai egyenletekkel nem számítható a támasztó ER.
- például egy merev test: $n_e = 3 \rightarrow n_i \leq n_e$ esetén oldható meg a feladat