

Mechanika

I. előadás

2023. szeptember 12.

Elérhetőségek, információk

Tantárgy: Műszaki mechanika (GEMET611MB, GEMET611MBL),
Mechanika (GEMET266B, GEMET266BL)

Előadó: Dr. Lengyel Ákos József

Elérhetőségek:

- Iroda: Miskolc, Egyetemváros, A/4. épület 441.
- Tel.: +36-46-565-111/18-78
- E-mail: akos.lengyel@uni-miskolc.hu
- Honlap: www.mech.uni-miskolc.hu/~lengyel/education
- Feladatok 1.: <http://www.mech.uni-miskolc.hu/~szirbik/notes/statika.pdf>
- Feladatok 2.: <http://www.mech.uni-miskolc.hu/~szirbik/notes/szilardsagtan.pdf>

A) Statika

1. Bevezetés, alapfogalmak

Mechanika, mint tudomány tárgya: testek, anyagi rendszerek mozgásának és tartós nyugalomának feltételeit, okait vizsgálja.

Műszaki mechanika: a mechanika elveinek alkalmazása műszaki feladatokra. Például

- tartós nyugalom biztosítása
- teherbíró képesség meghatározása: méretezés, ellenőrzés
- dinamika: előírt mozgások biztosítása

Modellezés a mechanikában:

- modellezés: a valóságos viszonyokat a vizsgálatok szempontjából lényegesnek ítélt tulajdonságok kiemelésével leegyszerűsítjük → modellt alkotunk
- folyamata:
 - megfigyelés, mérés
 - leírás
 - *törvények megfogalmazása, alkalmazása, számolás* (ezzel fogunk foglalkozni)
 - ellenőrzés, pontosítás
- fontosabb modellek:
 - **merev test:** olyan test, amely pontjainak egymáshoz viszonyított távolsága mozgás közben nem változik, térbeli helyzetét 6 adat határozza meg. Spec. eset: **anyagi pont** \equiv **tömegpont**, olyan merev test, amelynek mozgását egyetlen pontja mozgásával írjuk le, térbeli helyzetét 3 koordináta jellemzi, szabadsági foka 3.

1. Bevezetés, alapfogalmak

- fontosabb modellek (folytatás):
 - **szilárd test:** alakváltozásra képes test, terhelés mozgás során pontjainak egymáshoz viszonyított távolsága változik. Pl.: **rugalmas test** (a terhelés levétele után visszanyeri eredeti alakját), **képlékeny test** (a terhelés levétele után nem nyeri vissza eredeti alakját), **viszkózus testek** (polimerek)
 - **koncentrált erő:** egyik testnek a másik testre történő hatása (gravitáció, érintkezés útján, rugó, stb.)

a mechanika egy lehetséges felosztása

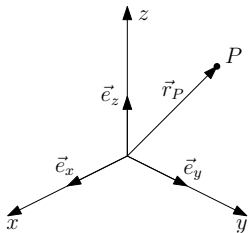
- merev testek mechanikája (statika, dinamika)
- szilárd testek mechanikája (szilárdságtan, rugalmasságtan)
- folyadékok, gázok mechanikája (áramlástan)

Fizikai mennyiségek típusai

- skaláris mennyiség: nagyság, mértékegység (térfogat, V [cm^3], sűrűség, ρ [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$], tömeg, m [kg], stb.)
- vektoriális mennyiség: nagyság, irány, mértékegység (erő, \vec{F} [N], sebesség, \vec{v} [$\frac{\text{m}}{\text{s}}$], gyorsulás, \vec{a} [$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$], stb.)
- tenzor mennyiség: (később)

1. Bevezetés, alapfogalmak

Koordináta-rendszer: Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer (DDKR). Ez egy merev test, amihez képest a mozgásokat viszonyítjuk.



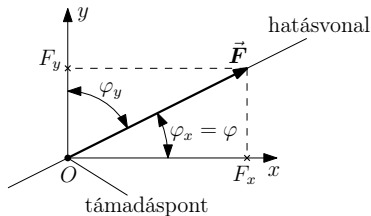
- bázisvektorok: $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$
- koordináták: x, y, z
- a P pont helyvektora: $\vec{r}_P = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ [m]
- tetszőleges vektor: $\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$ [$\frac{m}{s}$]

Statika tárgya: merev testekből álló rendszer tartós nyugalmának biztosításához szükséges külső és belső erők meghatározása.

2. Anyagi pont statikája

2.1 Anyagi pontra ható erő megadása

a) síkbeli eset (2D):



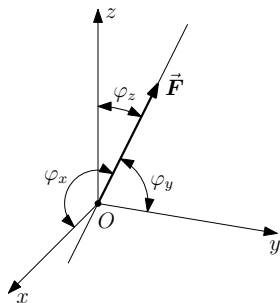
az erővektor $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$ [N]

az erő irányvektora: $\vec{e}, \vec{F} = F \vec{e}$, ahol $F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

$\vec{e} = \cos \varphi_x \vec{e}_x + \cos \varphi_y \vec{e}_y = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y$

2. Anyagi pont statikája

b) térbeli eset (3D):



$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

irányvektor:

$$\vec{e} = \cos \varphi_x \vec{e}_x + \cos \varphi_y \vec{e}_y + \cos \varphi_z \vec{e}_z$$

$$|\vec{e}| = 1 = \cos^2 \varphi_x + \cos^2 \varphi_y + \cos^2 \varphi_z$$

két szög független, a harmadik belőlük számítható. Az erő nagysága:

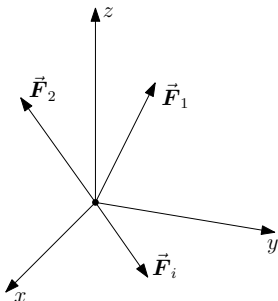
$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\vec{F} = F \vec{e} = \underbrace{F \cos \varphi_x}_{F_x} \vec{e}_x + \underbrace{F \cos \varphi_y}_{F_y} \vec{e}_y + \underbrace{F \cos \varphi_z}_{F_z} \vec{e}_z$$

2. Anyagi pont statikája

2.2 Anyagi pontra ható erőrendszer (ER)

a) értelmezés: anyagi pontra ható erők összessége



ER: $\vec{F}_i; i = 1, 2, \dots, n$ (adott)

hatásvonalaik irányvektorai: $\vec{e}_i; i = 1, \dots, n; |\vec{e}_i| = 1$

jellemző: közös támadáspont (közös ponton támadó ER)

az erők nagysága: $F_i = |\vec{F}_i| = \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2 + F_{iz}^2}$

2. Anyagi pont statikája

b) az ER eredője

Értelemzés: az \vec{F}_i ; $i = 1, \dots, n$ db koncentrált erőből álló ER eredője az erők összege.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

az eredő erő koordinátái:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy}$$

$$F_z = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum_{i=1}^n F_{iz}$$

így az eredő

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

2. Anyagi pont statikája

c) az anyagi pontra ható ER egyensúlya

Értelmezés: az anyagi pontra ható \vec{F}_i , $i = 1, \dots, n$ koncentrált erőkből álló ER egyensúlyi ER, ha

$$\text{eredőjük zérus, vagyis } \vec{F} = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}$$

vetületi vagy skaláris egyensúlyi egyenletek:

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_x : F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} &= 0 \\ \vec{e}_y : F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} &= 0 \\ \vec{e}_z : F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} &= 0 \end{aligned} \right\} 3 \text{ db egyenlet}$$

d) az anyagi pont tartós nyugalma

Newton I. mozgástörvénye: ha az anyagi pontra ható ER eredője zérus, akkor az anyagi pont vagy tartós nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez

- az ER egyensúlya szükséges feltétel a tartós nyugalomhoz
- speciális esetek:
 - $n = 1$: egyetlen erő \rightarrow nyugalom nem lehetséges
 - $n = 2$: \vec{F}_1 ; \vec{F}_2 : egyensúly feltétele, hogy $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$
jellemzőik tehát, hogy azonos a hatásvonaluk, a nagyságuk, de ellentétes az irányuk

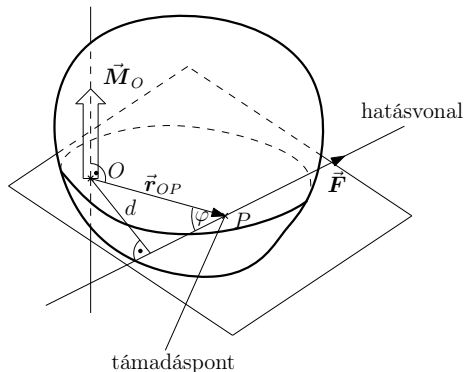
e) anyagi pontra ható két ER egyenértékűsége

Értelmezés: két különböző ER egyenértékű, ha az eredőjük megegyezik egymással (csak anyagi pontnál)

3. Merev testre ható erőrendszer

3.1 Koncentrált erő pontra számított nyomatéka

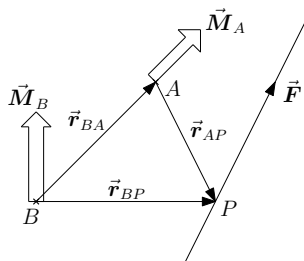
a) értelmezés: a P pontban támadó \vec{F} erő nyomatéka az O pontra: $\vec{M}_O = \vec{r}_{OP} \times \vec{F}$ [Nm]
következmények:



- $\vec{M}_O \perp (\vec{r}_{OP}; \vec{F})$;
iránya a jobbkézsabály szerint
- \vec{M}_O nagysága: $|\vec{M}_O| = |\vec{r}_{OP}| |\vec{F}| \sin \varphi = |\vec{F}| \underbrace{|\vec{r}_{OP}| \sin \varphi}_{d} = F \cdot d$
vagyis erőszőr erőkar
- Az erő nem ad nyomatékot hatásvonalának pontjaira (igazolás: az erő karja zérus lesz).
- Az erő a hatásvonala mentén eltolható, nyomatéka nem változik. (igazolás: az erőt áttoljuk a hatásvonal egy tetszőleges pontjába, az erőkar változatlan marad).

3. Merev testre ható erőrendszer

b) összefüggés két pontra számított nyomaték között



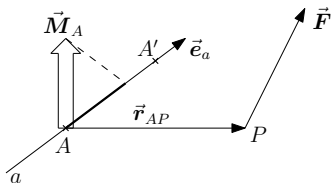
$$\begin{aligned}\vec{M}_A &= \vec{r}_{AP} \times \vec{F} \\ \vec{M}_B &= \vec{r}_{BP} \times \vec{F} = (\vec{r}_{BA} + \vec{r}_{AP}) \times \vec{F} = \\ &= \vec{r}_{BA} \times \vec{F} + \underbrace{\vec{r}_{AP} \times \vec{F}}_{\vec{M}_A} \Rightarrow \\ \vec{M}_B &= \vec{M}_A + \vec{r}_{BA} \times \vec{F} = \vec{M}_A + \vec{F} \times \vec{r}_{AB}\end{aligned}$$

3. Merev testre ható erőrendszer

3.2 Koncentrált erő tengelyre számított nyomatéka

a) tengely: irányított egyenes, egységvektora: \vec{e} ; $|\vec{e}| = 1$, például A ponton áthaladó a tengely: \vec{e}_a . A tengely x , y és z tengelyekkel bezárt szöge rendre α_x , α_y és α_z , így

$$\vec{e}_a = \cos \alpha_x \vec{e}_x + \cos \alpha_y \vec{e}_y + \cos \alpha_z \vec{e}_z$$



A tengelyre számított nyomaték értelmezése: a P pontban támadó \vec{F} erő a tengelyre számított nyomatéka:

$$M_a = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_a = (\vec{r}_{AP} \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_a \text{ [Nm]}$$

3. Merev testre ható erőrendszer

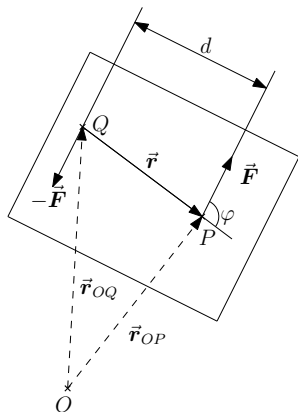
következmények:

- M_a az \vec{M}_A vektor merőleges vetülete az a tengelyre
- M_a nagysága nem függ az A pont megválasztásától:

$$M_a = \vec{M}_{A'} \cdot \vec{e}_a = (\vec{M}_A + \vec{r}_{A'A} \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_a = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_a + \underbrace{(\vec{r}_{A'A} \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_a}_{=0} = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_a$$

- ha az erő hatásvonalja metszi a tengelyt, akkor $M_a = 0$. Igazolás: A rajta van \vec{F} hatásvonalán és a -n is, tehát $\vec{M}_A = \vec{0} \Rightarrow M_a = 0$
- ha az erő párhuzamos az a tengellyel, akkor $M_a = 0$. Igazolás: mivel \vec{M}_A merőleges az \vec{F} erőre, így \vec{M}_A egyúttal merőleges \vec{e}_a -ra is, így a két vektor skaláris szorzata 0-át ad: $\vec{M}_A \cdot \vec{e}_a = 0$.

3. Merev testre ható erőrendszer



3.3 Az erőpár és nyomatéka

- a) értelmezés: az erőpárt **két** párhuzamos hatásvonalú, azonos nagyságú, ellentétes irányú erővektor alkotja (a hatásvonalak nem esnek egybe, de egyetlen síkban vannak)
- b) az erőpár eredője és nyomatéka

- eredő: $\vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0}$
- nyomaték a Q pontra: $\vec{M}_Q = \vec{r}_{QP} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \neq \vec{0}$
- nyomaték a P pontra: $\vec{M}_P = \vec{r}_{PQ} \times (-\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$
- nyomaték a tetszőleges O pontra:
$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OP} \times \vec{F} + \vec{r}_{OQ} \times (-\vec{F}) =$$
$$(\vec{r}_{OP} - \vec{r}_{OQ}) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

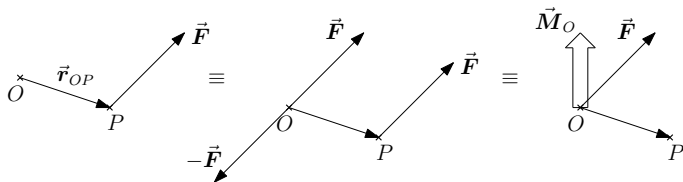
3. Merev testre ható erőrendszer

következmények:

- az erőpár nyomatéka a test/tér bármely pontjára ugyanakkora: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, nagysága:
 $|\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin \varphi = F \underbrace{(|\vec{r}| \sin \varphi)}_d = Fd$
- az erőpár \vec{M} nyomatéka a test/tér bármely pontjába áthelyezhető
- ha ismert n db erőpár, akkor ezek n db nyomatékvektorral egyenértékűek: $\vec{M}_1; \vec{M}_2; \dots; \vec{M}_n$, amelyek összegezhetőek, így az eredő nyomaték: $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$ [Nm]

3. Merev testre ható erőrendszer

3.4 Koncentrált erők áthelyezése másik pontba: redukálás



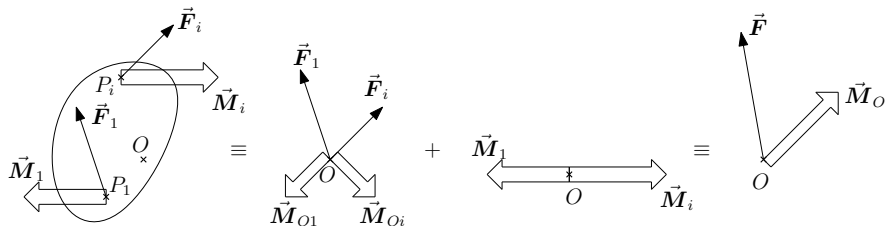
- a) a redukált vektorkettős fogalma: a P pontban támadó \vec{F} erő O pontba redukált vektorkettőse az $(\vec{F}; \vec{M}_O)_O$ erő és nyomatékvektor, ahol $\vec{M}_O = \vec{r}_{OP} \times \vec{F}$ [Nm]; és \vec{M}_O merőleges az \vec{F} -re.
- b) a redukálás megfordítása: ha ismert a tetszőleges O pontban egy egymásra merőleges $\vec{F} \perp \vec{M}_O$ erő és nyomaték, akkor léteznek olyan pontok, amelyekben az \vec{F} , \vec{M}_O csak az \vec{F} erővel helyettesíthető. Ezeknek a pontoknak a mértani helye egy egyenes, amely párhuzamos az \vec{F} erővel és átmegy P -n. Egyenlete

$$(\vec{r} - \vec{r}_{OP}) \times \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ahol} \quad \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Ez az egyenes az ún. centrális egyenes.

3. Merev testre ható erőrendszer

3.5 A merev testre ható általános ER redukált vektorkettőse statikai egyenértékűség:



Tehát adott a P_i pontokban támadó $\vec{F}_i, \vec{M}_i, i = 1, 2, \dots, n$ általános ER.

3. Merev testre ható erőrendszer

a) az általános ER O pontba redukált vektorkettőse

\vec{F}_i, \vec{M}_i áthelyezése P_i -ből O -ba: $\vec{F}_i, \vec{M}_{O_i} = \vec{r}_{OP_i} \times \vec{F}_i$ és $\vec{M}_i, i = 1, 2, \dots, n$

Ezekkel az ER O pontba redukált vektorkettőse:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OP_1} \times \vec{F}_1 + \dots + \vec{r}_{OP_n} \times \vec{F}_n + \vec{M}_1 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_{OP_i} \times \vec{F}_i + \vec{M}_i)$$

következmény: a testre ható bármely általános ER helyettesíthető egy erővel és egy nyomatékkal: $(\vec{F}; \vec{M}_O)_O$ az ER O pontba redukált vektorkettőse

b) a redukált vektorkettős az $A \neq O$ pontban

eredő: $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$

nyomaték: $\vec{M}_A = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_{AP_i} \times \vec{F}_i + \vec{M}_i) \neq \vec{M}_O$

\vec{M}_A kiszámítása \vec{M}_O ismeretében: $\vec{M}_A = \vec{M}_O + \vec{r}_{AO} \times \vec{F}$ (lásd 3.1 b))

3. Merev testre ható erőrendszer

c) statikai egyenértékűség: a merev testre ható általános ER $(\vec{F}_i; \vec{M}_i; i = 1, \dots, n)$ statikailag egyenértékű egy tetszőleges pontban az odaredukált vektorkettősével $(\vec{F}; \vec{M}_O)_O$ (egy erővel és egy nyomatékkal)

d) két különböző ER egyenértékűsége

- a merev testre hat két ER:

- 1 ER: $\vec{F}_i; \vec{M}_i; i = 1, \dots, n$

- 2 ER: $\vec{F}_j; \vec{M}_j; j = 1, \dots, m$

- redukált vektorkettősük ugyanabba az O pontba:

- 1 ER: $(\vec{F}; \vec{M}_O)_O$

- 2 ER: $(\vec{F}'; \vec{M}'_O)_O$

- a két ER statikailag egyenértékű, ha a redukált vektorkettősük azonos egymással:

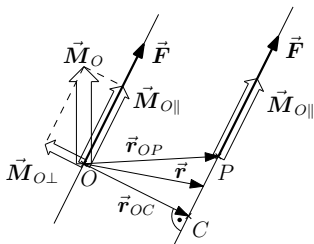
$$\vec{F} = \vec{F}' : \begin{cases} F_x = F'_x \\ F_y = F'_y \\ F_z = F'_z \end{cases} \quad 3 \text{ db skaláris vagy vetületi egyenlet}$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}'_O : \begin{cases} M_{Ox} = M'_{Ox} \\ M_{Oy} = M'_{Oy} \\ M_{Oz} = M'_{Oz} \end{cases} \quad 3 \text{ db skaláris nyomatéki egyenlet}$$

3. Merev testre ható erőrendszer

3.6 Merev testre ható általános ER centrális egyenese

- a) értelmezés: a P_i pontokban támadó $\vec{F}_i; \vec{M}_i; i = 1, \dots, n$ általános ER **centrális egyenese** azon pontok mértani helye, amelyekben az ER eredőjével és egy vele párhuzamos nyomatékkal helyettesíthető
- b) a centrális egyenes egyenlete



- O pontba redukált vektorkettős: $(\vec{F}; \vec{M}_O)_O$
- az \vec{M}_O nyomaték \vec{F} -vel párhuzamos és \vec{F} -re merőleges összetevője:

$$\vec{M}_{O||} = \frac{1}{F^2} (\vec{F} \cdot \vec{M}_O) \cdot \vec{F}$$

$$\vec{M}_{O\perp} = \frac{1}{F^2} (\vec{F} \times \vec{M}_O) \times \vec{F} = \vec{M}_O - \vec{M}_{O||}$$

- 3.4 b) alapján: $\vec{M}_{O\perp}$ és \vec{F} helyettesíthető egy P ponton átmenő

egyenes mentén egyetlen \vec{F} erővel, az $\vec{M}_{O||}$ vektort pedig áthelyezzük az egyenes P

pontjába, így a **centrális egyenes** egyenlete: $(\vec{r} - \vec{r}_{OP}) \times \vec{F} = \vec{0}$. Másik alak:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_{O\perp}, \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

3. Merev testre ható erőrendszer

c) a centrális egyenes O ponthoz legközelebb eső C pontja:
egyenlet:

$$\vec{r}_{OC} \times \vec{F} = \vec{M}_{O\perp} \quad (\vec{r} \rightarrow \vec{r}_{OC})$$

$$\vec{F} \times (\vec{r}_{OC} \times \vec{F}) = \vec{F} \times \vec{M}_{O\perp}$$

$$\vec{r}_{OC} \underbrace{(\vec{F} \cdot \vec{F})}_{F^2} - \underbrace{\vec{F} (\vec{F} \cdot \vec{r}_{OC})}_0 = \vec{F} \times \vec{M}_O$$

$$\vec{r}_{OC} = \frac{1}{F^2} \vec{F} \times \vec{M}_O \quad [\text{m}] \quad (|\vec{r}_{OC}| = d \text{ az } \vec{F} \text{ erő karja})$$

a centrális egyenes egyenlete \vec{r}_{OC} ismeretében:

$$\vec{F} \times (\vec{r} - \vec{r}_{OC}) = \vec{0}$$

3. Merev testre ható erőrendszer

d) speciális esetek, az ER-ek osztályozása:

- $\vec{F} = \vec{0}; \vec{M}_O = \vec{0}$ egyensúlyi ER \rightarrow Statika
- $\vec{F} = \vec{0}; \vec{M}_O \neq \vec{0}$ egyetlen erőpár
- $\vec{F} \neq \vec{0}; \vec{M}_O \perp \vec{F}$ az ER centrális egyenesében egyetlen erővel, az \vec{F} -fel helyettesíthető
- $\vec{F} \neq \vec{0}; \vec{M}_O \not\perp \vec{F}$ általános eset: erőcsavar a centrális egyenes mentén

3. Merev testre ható erőrendszer

3.7 Merev testre ható egyensúlyi ER, és a test tartós nyugalma

a) értelmezés: a P_i pontban ható \vec{F}_i ; \vec{M}_i ; $i = 1, \dots, n$ általános ER egyensúlyi ER, ha a test vagy a tér egy tetszőleges pontjában a redukált vektorkettős zérus, vagyis

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_x : F_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ \vec{e}_y : F_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \\ \vec{e}_z : F_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \end{array} \right. \quad \text{3 db skaláris erőegyensúlyi egyenlet}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_{OP_i} \times \vec{F}_i + \vec{M}_i) = \vec{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_x : M_{Ox} = 0 \\ \vec{e}_y : M_{Oy} = 0 \\ \vec{e}_z : M_{Oz} = 0 \end{array} \right. \quad \text{3 db skaláris nyomatéki egyenlet}$$

összesen 6 db egyenlet. Ha az O pontban zérus a redukált vektorkettős, akkor a test/tér bármely pontjában zérus: áthelyezés O -ból A -ba:

$$\vec{F} = \vec{0}$$
$$\vec{M}_A = \underbrace{\vec{M}_O}_{\vec{0}} + \vec{r}_{AO} \times \underbrace{\vec{F}}_{\vec{0}} = \vec{0}$$

3. Merev testre ható erőrendszer

b) a merev test tartós nyugalma:

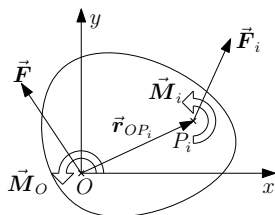
A statika alaptétele: egy merev test csak akkor lehet tartós nyugalomban, ha a testre ható külső ER egyensúlyi

- az egyensúlyi ER szükséges feltétel a tartós nyugalomhoz, a merevtestszerű mozgást (eltolódás és forgás) a támasztó ER-nek meg kell akadályozni
- a külső ER: terhelés (adott) és a támasztásoknál fellépő támasztó ER (keresett)

3. Merev testre ható erőrendszer

3.8 Merev testre ható speciális ER-ek egyensúlya

a) síkbeli erőrendszerek



ismert: $P_i, \vec{F}_i, \vec{M}_i, i = 1, \dots, n$ síkbeli ER, most $\vec{F}_i = F_{ix}\vec{e}_x + F_{iy}\vec{e}_y, \vec{M}_i = M_i\vec{e}_z$

- az ER O pontba redukált vektorkettőse:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y,$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_{OP_i} \times \vec{F}_i + \vec{M}_i) = M_O\vec{e}_z$$

- egyensúlyi ER

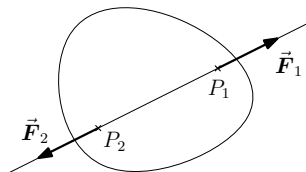
$$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} F_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ F_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow M_O = 0$$

- centrális egyenes: $\vec{M}_O \perp \vec{F}$ mindig fennáll, ezért az ER egyetlen erővel, az \vec{F} eredővel helyettesíthető a centrális egyenesben

3. Merev testre ható erőrendszer

b) merev testre ható két erő egyensúlya



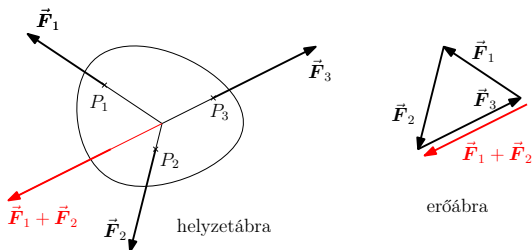
adott: P_1 ; \vec{F}_1 , keresett: P_2 ; \vec{F}_2 úgy, hogy az ER egyensúlyi legyen
egyensúlyi ER: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$,

$\vec{M}_O = \vec{0}$ bármely pontra.

következmény: P_2 rajta van az \vec{F}_1 hatásvonalán (bárhon), \vec{F}_2 pedig \vec{F}_1 nagyságával azonos, de ellentétes irányú

3. Merev testre ható erőrendszer

c) merev testre ható három nem párhuzamos erő egyensúlya



adott: $P_1; \vec{F}_1; P_2; \vec{F}_2$; keresett: $P_3; \vec{F}_3$, ha ez ER egyensúlyi
egyensúlyi ER: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$

$\vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_3$ hatásvonalja azonos $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ hatásvonalával
következmény:

- azonos síkban vannak
- hatásvonalaik egyetlen pontban metsződnek
- eredőjük zérus kell legyen \rightarrow erőábrában nyílfolyam folytonos

3. Merev testre ható erőrendszer

d) három párhuzamos erő egyensúlya

adott: $P_1(x_1)$; \vec{F}_1 ; $P_2(x_2)$; \vec{F}_2 ,

keresett: $P_3(x_3)$; \vec{F}_3 , ha az ER egyensúlyi

egyensúlyi ER: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \Rightarrow$

$$\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = -(F_1 + F_2) \vec{e}_y$$

$$\vec{M}_O = \vec{0} = F_1 x_1 \vec{e}_z + F_2 x_2 \vec{e}_z - F_3 x_3 \vec{e}_z$$

$$x_3 = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2}; F_3 = F_1 + F_2$$

megoldás másként x_3 -ra:

nyomatéki egyenlet a $Q(x_3; 0)$ pontra

$$\vec{M}_Q = -F_1 a \vec{e}_z + F_2 b \vec{e}_z = \vec{0} \Rightarrow F_1 a = F_2 b$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{b}{a}$$

$$a = x_3 - x_1; b = x_2 - x_3$$

