

Mechanizmusok és robotok

9. előadás

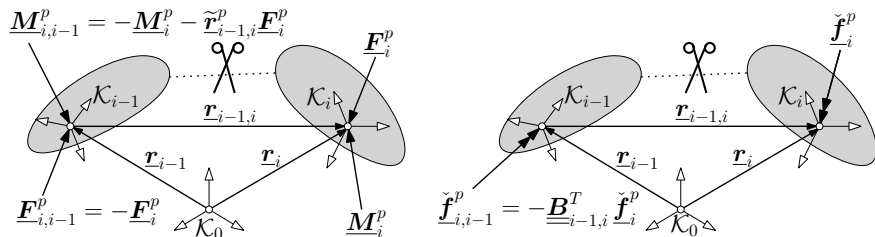
Nyílt láncú többtest-rendszerek dinamikája

Nyílt láncú többtest-rendszerek implicit kényszererői

A nyílt láncú többtest-rendszerek mozgásegyenletének felírásához a rendszer explicit kényszerei mellett a tagokra vonatkozó implicit kényszererők illetve az impulzus- és perdülettételek szükségesek.

Láncszerű rendszer implicit kényszererői

Tekintsünk egy nyílt láncú többtest-rendszer i -ik $\mathcal{K}_i$ és az őt megelőző $i-1$ -ik $\mathcal{K}_{i-1}$ testjét. Az i csukló által a $\mathcal{K}_i$ testre ható kényszer-erőcsavar $\check{\underline{f}}_i^p$, míg a $\mathcal{K}_{i-1}$ testre ható kényszer-erőcsavar $\check{\underline{f}}_{i,i-1}^p$.



Az implicit kényszererők (7.ea.,18.o.), ahol p index a primerre utal:

$$\check{\underline{f}}_{i,i-1}^p + \underline{B}_{i-1,i}^T \check{\underline{f}}_i^p = \underline{0} \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{M}_{i-1}^p \\ \underline{F}_{i-1}^p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{1} & \tilde{\underline{r}}_{i-1,i} \\ \underline{0} & \underline{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{M}_i^p \\ \underline{F}_i^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{C}_i^T \check{\underline{f}}_i^p = \underline{0} \quad (2)$$

A kinematikai lánc i -ik $\mathcal{K}_i$ tagjára ható eredő $\check{\underline{f}}_i^k$ kényszer-erőcsavar (redukált vektorkettős) az öt megelőző $\mathcal{K}_{i-1}$ testről ható $\check{\underline{f}}_i^p$ erőcsavarból és az öt követő $\mathcal{K}_{i+1}$ testről ható $\check{\underline{f}}_{i+1,i}^p$ erőcsavarból tevődik össze.

$$\check{\underline{f}}_i^k = \check{\underline{f}}_i^p + \check{\underline{f}}_{i+1,i}^p \quad \text{ahol} \quad \check{\underline{f}}_{i+1,i}^p = -\underline{B}_{i,i+1}^T \check{\underline{f}}_{i+1}^p$$

Ezen egyenletet a lánc minden tagjára felírható:

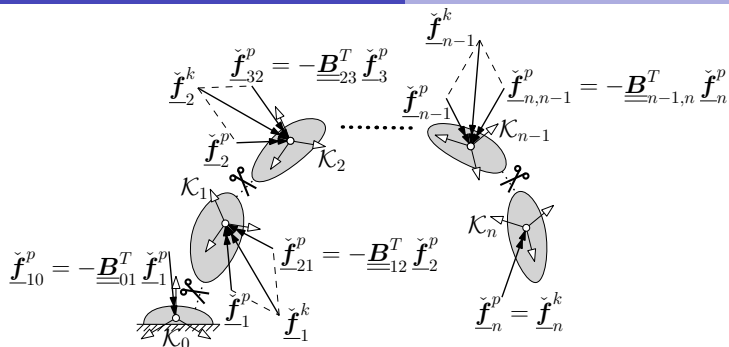
$$\check{\underline{f}}_1^k = \check{\underline{f}}_1^p + \check{\underline{f}}_{21}^p \quad \text{ahol} \quad \check{\underline{f}}_{21}^p = -\underline{B}_{12}^T \check{\underline{f}}_2^p$$

$$\check{\underline{f}}_2^k = \check{\underline{f}}_2^p + \check{\underline{f}}_{32}^p \quad \text{ahol} \quad \check{\underline{f}}_{32}^p = -\underline{B}_{23}^T \check{\underline{f}}_3^p$$

...

$$\check{\underline{f}}_{n-1}^k = \check{\underline{f}}_{n-1}^p + \check{\underline{f}}_{n,n-1}^p \quad \text{ahol} \quad \check{\underline{f}}_{n,n-1}^p = -\underline{B}_{n-1,n}^T \check{\underline{f}}_n^p$$

$$\check{\underline{f}}_n^k = \check{\underline{f}}_n^p$$



Ha az utóbbi egyenletet mátrixegyenletként írjuk fel, akkor a globális transzponált $\underline{\underline{B}}^T$ mátrix jelenik meg: $\underline{\check{f}}^k = \underline{\underline{B}}^T \underline{\check{f}}^p$

$$\begin{bmatrix} \underline{\check{f}}_1^k \\ \underline{\check{f}}_2^k \\ \vdots \\ \underline{\check{f}}_{n-1}^k \\ \underline{\check{f}}_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & -\underline{\underline{B}}_{12}^T & \underline{\underline{0}} & \dots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} & -\underline{\underline{B}}_{23}^T & \dots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \dots & \underline{\underline{1}} & -\underline{\underline{B}}_{n-1,n}^T \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \dots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\check{f}}_1^p \\ \underline{\check{f}}_2^p \\ \vdots \\ \underline{\check{f}}_{n-1}^p \\ \underline{\check{f}}_n^p \end{bmatrix}$$

Az (2) implicit kényszererőket is felírhatjuk testenként:

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1^T \underline{\underline{\mathbf{f}}}_1^p = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2^T \underline{\underline{\mathbf{f}}}_2^p = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

$$\vdots$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{n-1}^T \underline{\underline{\mathbf{f}}}_{n-1}^p = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_n^T \underline{\underline{\mathbf{f}}}_n^p = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Ezt szintén mátrix-egyenletbe foglalhatjuk össze:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_1^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \cdots & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_2^T & \cdots & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \cdots & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{n-1}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \cdots & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{f}}}_1^p \\ \underline{\underline{\mathbf{f}}}_2^p \\ \vdots \\ \underline{\underline{\mathbf{f}}}_{n-1}^p \\ \underline{\underline{\mathbf{f}}}_n^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{bmatrix}$$

a globális transzponált $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^T$ mátrixszal: $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^T \underline{\underline{\mathbf{f}}}^p = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$

A testre ható eredő kényszer-erőcsavarra vonatkozó implicit feltétel a globális transzponált inverz $\underline{\underline{B}}^{-T}$ mátrix segítségével írható fel:

$$\underline{\check{f}}^p = \underline{\underline{B}}^{-T} \underline{\check{f}}^k$$

Amit behelyettesítve $\underline{\underline{C}}^T \underline{\check{f}}^p = \underline{0}$ -ba:

$$\underline{\underline{C}}^T \underline{\underline{B}}^{-T} \underline{\check{f}}^k = \underline{0}$$

Figyelembe véve, hogy a globális Jacobi-mátrix $\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{C}}$, így $\underline{\underline{J}}^T = \underline{\underline{C}}^T \underline{\underline{B}}^{-T}$, azaz

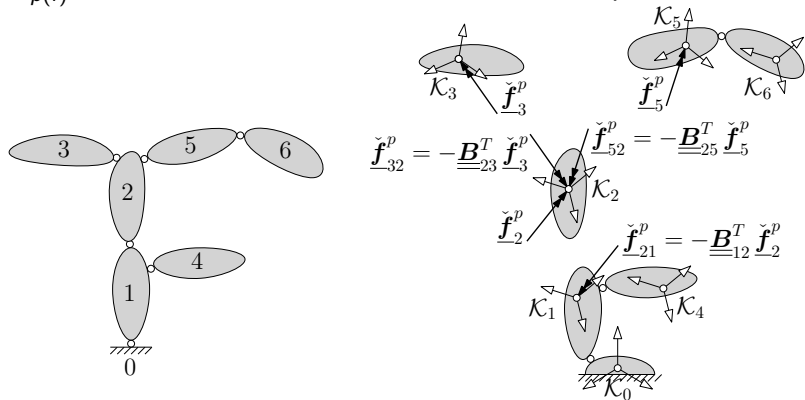
$$\underline{\underline{J}}^T \underline{\check{f}}^k = \underline{0} \quad \text{részletesen :} \quad \left[\begin{array}{ccc} \underline{\underline{J}}_1^T & \dots & \underline{\underline{J}}_n^T \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \underline{\check{f}}_1^k \\ \vdots \\ \underline{\check{f}}_n^k \end{array} \right] = \underline{0}$$

Az i -ik testhez tartozó $\underline{J}_i$ Jacobi mátrix a $\underline{J}_{\equiv Ri}$ rotációs és $\underline{J}_{\equiv Ti}$ translációs részekből állnak, míg az eredő kényszer-erőcsavarok az $\underline{M}_i^k$ kényszer-nyomatékból és $\underline{F}_i^k$ kényszererőből. Ennek megfelelően:

$$\begin{bmatrix} \underline{J}_{\equiv R1}^T & \underline{J}_{\equiv T1}^T & \cdots & \underline{J}_{\equiv Rn}^T & \underline{J}_{\equiv Tn}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{M}_1^k \\ \underline{F}_1^k \\ \vdots \\ \underline{M}_n^k \\ \underline{F}_n^k \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Elágazásokkal rendelkező rendszer implicit kényszererői

Az előzőekben ismertetett kényszererő feltételek fa-struktúrájú rendszerekre is igazak. Az i -ik test csuklója által kifejtett $\check{\underline{f}}_{i,p}^p$ erő az i -ik testet megelőző $\mathcal{K}_{p(i)}$ testről hat a $\mathcal{K}_i$ testre. Tekintsük a korábbi példánkat.



A $\mathcal{K}_2$ testet tekintve, a rá ható eredő kényszer-erőcsavar:

$$\check{\underline{f}}_2^k = \check{\underline{f}}_2^p - \underline{\underline{B}}_{23}^T \check{\underline{f}}_3^p - \underline{\underline{B}}_{25}^T \check{\underline{f}}_5^p$$

Belátható, hogy a rendszer topológiájának figyelembevételével felírt $\underline{\underline{B}}^T$ mátrix segítségével itt is érvényes a

$$\underline{\underline{f}}^k = \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{f}}^p$$

összefüggés, amely részletesen kiírva:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}_1^k \\ \underline{\underline{f}}_2^k \\ \underline{\underline{f}}_3^k \\ \underline{\underline{f}}_4^k \\ \underline{\underline{f}}_5^k \\ \underline{\underline{f}}_6^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & -\underline{\underline{B}}_{12}^T & \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{B}}_{14}^T & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} & -\underline{\underline{B}}_{23}^T & \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{B}}_{25}^T & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} & -\underline{\underline{B}}_{56}^T \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}_1^p \\ \underline{\underline{f}}_2^p \\ \underline{\underline{f}}_3^p \\ \underline{\underline{f}}_4^p \\ \underline{\underline{f}}_5^p \\ \underline{\underline{f}}_6^p \end{bmatrix}$$

A csuklók által kifejtett $\underline{\ddot{f}}^p$ erőcsavarokra változatlanul érvényesek az implicit feltételek:

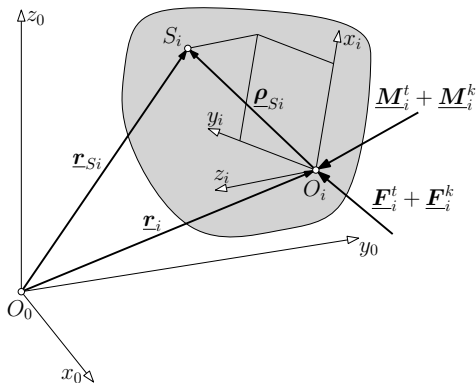
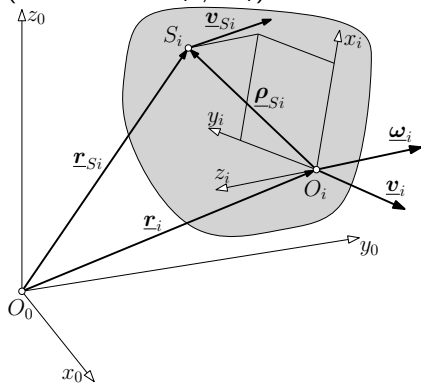
$$\underline{\underline{C}}^T \underline{\ddot{f}}^p = \underline{0}$$

azaz

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{C}}_1^T & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\underline{C}}_2^T & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{\underline{C}}_3^T & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{\underline{C}}_4^T & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{\underline{C}}_5^T & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{\underline{C}}_6^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\ddot{f}}_1^p \\ \underline{\ddot{f}}_2^p \\ \underline{\ddot{f}}_3^p \\ \underline{\ddot{f}}_4^p \\ \underline{\ddot{f}}_5^p \\ \underline{\ddot{f}}_6^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

Impulzus- és perdülettételek

Az impulzus- és perdülettételek az i -ik test O_i pontjára vonatkozóan (általánosan $O_i \neq S_i$) kerülnek felírásra.



Impulzustétel az eredő kényszererőkkel és külső teherrel:

$$m_i \underline{a}_{Si} = \underline{F}_i^t + \underline{F}_i^k$$

Figyelembe véve a test $\underline{\varepsilon}_i = \underline{\dot{\omega}}_i$ szöggyorsulását, S_i gyorsulása:

$$\underline{a}_{S_i} = \underline{a}_i + \underline{\tilde{\varepsilon}}_i \underline{\rho}_{S_i} + \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\rho}_{S_i}$$

Melyet behelyettesítve az impulzustételbe, kapjuk, hogy

$$m_i \underline{a}_i + m_i \underline{\tilde{\varepsilon}}_i \underline{\rho}_{S_i} = \underline{F}_i^t + \underline{F}_i^k - m_i \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\rho}_{S_i} \quad (3)$$

Perdülettétel a külső teher O_i pontra számított nyomatékávak és az eredő kényszernyomatékkal:

$$m_i \underline{\tilde{\rho}}_{S_i} \underline{a}_i + \underline{\Theta}_i \underline{\varepsilon}_i + \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\Theta}_i \underline{\omega}_i = \underline{M}_i^t + \underline{M}_i^k \quad (4)$$

A (3) impulzus- és (4) perdülettétel összefoglalható egy mátrixegyenletbe:

$$\begin{bmatrix} \underline{\Theta}_i & m_i \underline{\tilde{\rho}}_{S_i} \\ m_i \underline{\tilde{\rho}}_{S_i}^T & m_i \underline{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_i \\ \underline{a}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\Theta}_i \underline{\omega}_i \\ -m_i \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\rho}_{S_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{M}_i^t \\ \underline{F}_i^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{M}_i^k \\ \underline{F}_i^k \end{bmatrix}$$

azaz

$$\underline{\underline{M}}_i \underline{\ddot{a}}_i = \underline{\check{f}}_i^c + \underline{\check{f}}_i^t + \underline{\check{f}}_i^k$$

Az utóbbi egyenletben $\underline{\underline{M}}_i$ az i -ik test tömegmátrixa, $\underline{\check{f}}_i^t$ a külső teher redukált vektorkettőse (erőcsavar) O_i -ben, $\underline{\check{f}}_i^k$ a kényszererők redukált vektorkettőse O_i -ben és $\underline{\check{f}}_i^c$ a d'Alembert-féle tehetetlenségi erők. Ha O_i és S_i egybeesnek ($\underline{\rho}_{S_i} = \underline{0}$), akkor a kinetikai egyenletek egyszerűsödnek:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\Theta}}_i & \underline{0} \\ \underline{0} & m_i \underline{\underline{1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_i \\ \underline{a}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\underline{\Theta}}_i \underline{\omega}_i \\ \underline{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{M}_i^t \\ \underline{F}_i^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{M}_i^k \\ \underline{F}_i^k \end{bmatrix}$$

A kinetikai egyenleteket az összes n testre vonatkozóan összefoglaljuk egy mátrixegyenletbe:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \underline{\underline{M}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\check{a}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\check{a}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\check{f}}_1^c \\ \vdots \\ \underline{\check{f}}_n^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\check{f}}_1^t \\ \vdots \\ \underline{\check{f}}_n^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\check{f}}_1^k \\ \vdots \\ \underline{\check{f}}_n^k \end{bmatrix}$$

azaz

$$\underline{\underline{M}} \underline{\check{a}} = \underline{\check{f}}^c + \underline{\check{f}}^t + \underline{\check{f}}^k$$

Ezek a többtest-rendszer Newton-Euler egyenletei.

Külső terhelő erők és nyomatékok

A külső terhelő erők és nyomatékok lehetnek

- ideális terhek
- nem ideális súrlódó erők és nyomatékok

Az ideális erők lehetnek algebrai egyenlettel adottak:

$$\underline{\check{f}}^t = \underline{\check{f}}^t(\underline{\check{r}}, \underline{\check{v}}, t)$$

Ilyen pl. a rugóerők, sebességtől függő csillapító erők, nehézségi erők illetve további ismert idő szerinti lefolyással rendelkező terhelések.

Az ideális erők lehetnek még integrális alakúak, amelyben valamilyen $\underline{\dot{z}} = \underline{\Psi}_z(\underline{\check{r}}, \underline{\check{v}}, \underline{z}, t)$ differenciálegyenlet is része az erőtörvénynek

$$\underline{\check{f}}^t = \underline{\check{f}}^t(\underline{\check{r}}, \underline{\check{v}}, \underline{z}, t) \quad \text{ahol} \quad \underline{\dot{z}} = \underline{\Psi}_z(\underline{\check{r}}, \underline{\check{v}}, \underline{z}, t)$$

Ilyenek pl. sorosan kapcsolt rugó és csillapító elem, vagy olyan meghajtások, amelyek dinamikai viselkedését valamilyen differenciálegyenlettel írhatunk fel. (elektromotorok, hidraulikus hajtások)

A nemidális súrlódó erők és nyomatékok esetén az erőtvényben a kényszererőktől való függés is megjelenik:

$$\underline{\check{f}}^t = \underline{\check{f}}^t \left(\underline{\check{r}}, \underline{\check{v}}, \underline{\check{f}}^k, t \right)$$

Ilyen például a Coulomb-féle súrlódási törvény.

Ezen csatolás miatt a rendszert meghatározó egyenletek már nem lineárisak, ezért az ismeretlen erők és gyorsulások számítása iteratív úton történik.

Nyílt láncú többtest-rendszerek egyenletrendszere

Nyílt láncú többtest-rendszerek mozgásegyenleteinek $\underline{\beta}$ és $\underline{\eta}$ függvényében történő felírásához az alábbiakban összefoglaljuk a többtest-rendszer egyenletrendszerét:

Kinematikai mozgásegyenlet:

$$\dot{\underline{\beta}} = \underline{H}(\underline{\beta}) \underline{\eta} \quad (5)$$

Euler paraméterek mellékfeltételei:

$$\underline{\phi}(\underline{\beta}) = \underline{0} \quad (6)$$

Kinetikai differenciálegyenlet:

$$\underline{M} \underline{\ddot{a}} = \underline{\check{f}}^c + \underline{\check{f}}^t + \underline{\check{f}}^k \quad (7)$$

Testekre ható eredő kényszererők és csuklók által kifejtett kényszererők:

$$\underline{\check{f}}^k = \underline{B}^T \underline{\check{f}}^p \quad (8)$$

Csuklók explicit kényszerei:

$$\underline{\check{r}}_i = \underline{\check{r}}_i \left(\underline{\check{r}}_{p(i)}, \underline{\beta}_i, t \right) \quad (9)$$

$$\underline{\underline{B}} \underline{\check{v}} = \underline{\underline{C}} \underline{\eta} + \underline{\check{v}}^{\text{rel}} \quad (10)$$

$$\underline{\underline{B}} \underline{\dot{\check{v}}} = \underline{\underline{C}} \underline{\dot{\eta}} + \underline{\check{a}}^{\text{rel}} \quad (11)$$

ahol $i = 1, \dots, n$ és $p(i)$ a $\mathcal{K}_i$ -t megelőző test.

A rendszer explicit kényszerei:

$$\underline{\check{r}} = \underline{\check{r}}(\underline{\beta}, t) \quad (12)$$

$$\underline{\check{v}} = \underline{\underline{J}} \underline{\eta} + \underline{\check{v}} \quad (13)$$

$$\underline{\check{a}} = \underline{\underline{J}} \underline{\dot{\eta}} + \underline{\check{a}} \quad (14)$$

ahol $\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{C}} \quad (15)$

Csuklók implicit kényszererőit:

$$\underline{\underline{C}}^T \underline{\check{f}}^p = \underline{0} \quad (16)$$

Testekre ható eredő implicit egyenletei:

$$\underline{\underline{J}}^T \underline{\check{f}}^k = \underline{0} \quad (17)$$

A (7) együtt a (8)-cal, továbbá (11) és (16) egy lineáris egyenletrendszert alkotnak a $\underline{\dot{\mathbf{v}}} = \underline{\ddot{\mathbf{a}}}$ gyorsulásokra, $\underline{\check{\mathbf{f}}}^p$ csukló-erőcsavarokra és $\underline{\dot{\boldsymbol{\eta}}}$ csukló gyorsulásokra:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} & -\underline{\underline{B}}^T & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\ddot{\mathbf{a}}} \\ \underline{\check{\mathbf{f}}}^p \\ \underline{\dot{\boldsymbol{\eta}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\check{\mathbf{f}}}^{tc} \\ -\underline{\check{\mathbf{a}}}^{\text{rel}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \quad (18)$$

ahol $\underline{\check{\mathbf{f}}}^{tc} = \underline{\check{\mathbf{f}}}^t + \underline{\check{\mathbf{f}}}^c$.

Egy hasonló egyenletrendszert kapunk, ha a (14) és (17) egyenleteket használjuk. Ilyenkor a testekre ható $\underline{\check{\mathbf{f}}}^k$ eredő kényszererő az ismeretlen az egyenletrendszerben:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} & -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{J}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{J}}^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\ddot{\mathbf{a}}} \\ \underline{\check{\mathbf{f}}}^k \\ \underline{\dot{\boldsymbol{\eta}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\check{\mathbf{f}}}^{tc} \\ -\underline{\check{\mathbf{a}}}^{\text{rel}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Bevezetve az $\underline{x}$ állapotváltozót

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{\beta} \\ \underline{\eta} \end{bmatrix}$$

a mozgásegyenlet közönséges differenciálegyenlet-rendszerként írható fel:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{\beta}} \\ \dot{\underline{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{H}(\underline{\beta}) \underline{\eta} \\ \underline{\dot{\eta}}(\underline{\beta}, \underline{\eta}, t) \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \dot{\underline{x}} = \underline{\Psi}(\underline{x}, t)$$

A mozgásegyenlet az (5)-ből és a (18) vagy (19) egyenletrendszer $\underline{\eta}$ -re történő megoldásából áll.

A mozgásegyenlethez társulnak a következő kezdeti feltételek:

$$\begin{bmatrix} \underline{\beta}(t_0) \\ \underline{\eta}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\beta}_0 \\ \underline{\eta}_0 \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

Ezek megoldására többtest-rendszereknél kétfajta formalizmus terjedt el:

- nem rekurzív formalizmus
- rekurzív formalizmus

Nem rekurzív formalizmus

A (18) egyenletrendszer megoldása oly módon történik, hogy a (7) egyenletet átrendezzük $\underline{\check{f}}^k$ -ra:

$$\underline{\check{f}}^k = \underline{\underline{M}} \underline{\check{a}} - \underline{\check{f}}^c - \underline{\check{f}}^t$$

melyet behelyettesítünk az $\underline{\check{f}}^p$ -re megoldott (8)

$$\underline{\check{f}}^p = \underline{\underline{B}}^{-T} \underline{\check{f}}^k$$

egyenletbe. Így kapjuk, hogy

$$\underline{\check{f}}^p = \underline{\underline{B}}^{-T} \left(\underline{\underline{M}} \underline{\check{a}} - \underline{\check{f}}^c - \underline{\check{f}}^t \right)$$

Ezt behelyettesítve a (16) számú $\underline{\underline{C}}^T \underline{\check{f}}^p = \underline{0}$ egyenletbe, írhatjuk, hogy

$$\underline{\underline{C}}^T \underline{\underline{B}}^{-T} \left(\underline{\underline{M}} \underline{\check{a}} - \underline{\check{f}}^c - \underline{\check{f}}^t \right) = \underline{0}$$

ahol $\underline{\underline{J}}^T = \underline{\underline{C}}^T \underline{\underline{B}}^{-T}$. Így végül

$$\underline{\underline{J}}^T \left(\underline{\underline{M}} \underline{\check{a}} - \underline{\check{f}}^c - \underline{\check{f}}^t \right) = \underline{0}$$

Illetve

$$\sum_{i=1}^n \underline{\underline{J}}_i^T \left(\underline{\underline{M}}_i \ddot{\underline{a}}_i - \underline{\check{f}}_i^c - \underline{\check{f}}_i^t \right) = \underline{0}$$

Utóbbi egyenleteket megkapjuk (19) megoldásaként, ha az $\underline{\check{f}}^k$ -ra átrendezett (7) egyenletet a (17) egyenletbe írjuk.

Végeztül beírjuk a rendszer (14) számú $\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{J}} \dot{\underline{\eta}} + \underline{\check{a}}$ explicit kényszerfeltételt, és a mozgásegyenletre a következő alakot kapjuk:

$$\widehat{\underline{\underline{M}}}(\underline{\beta}, t) \dot{\underline{\eta}} = \underline{k}^c(\underline{\beta}, \underline{\eta}, t) + \underline{k}^t(\underline{\beta}, \underline{\eta}, t)$$

Ahol az $\widehat{\underline{\underline{M}}}$ tömegmátrix:

$$\widehat{\underline{\underline{M}}} = \underline{\underline{J}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{J}} \quad \text{azaz} \quad \widehat{\underline{\underline{M}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_1^T & \dots & \underline{\underline{J}}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \underline{\underline{M}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{J}}_n \end{bmatrix}$$

Tagonként összegezve:

$$\widehat{\underline{\underline{M}}} = \sum_{i=1}^n \underline{\underline{J}}_i^T \underline{\underline{M}}_i \underline{\underline{J}}_i \quad \text{azaz} \quad \widehat{\underline{\underline{M}}} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_{Ri}^T & \underline{\underline{J}}_{Ti}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Theta}_i & m_i \tilde{\underline{\rho}}_{Si} \\ m_i \tilde{\underline{\rho}}_{Si}^T & m_i \underline{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_{Ri} \\ \underline{\underline{J}}_{Ti} \end{bmatrix}$$

A $\underline{k}^c$ általánosított Coriolis-erők:

$$\underline{k}^c = -\underline{\underline{J}}^T \left(\underline{\underline{M}} \underline{\check{a}} - \underline{\check{f}}^c \right)$$

azaz

$$\underline{k}^c = - \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_1^T & \dots & \underline{\underline{J}}_n^T \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_1 & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\check{a}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\check{a}}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{\check{f}}_1^c \\ \vdots \\ \underline{\check{f}}_n^c \end{bmatrix} \right)$$

Tagonként összegezve:

$$\underline{k}^c = - \sum_{i=1}^n \underline{\underline{J}}_i^T \left(\underline{\underline{M}}_i \underline{\check{a}}_i - \underline{\check{f}}_i^c \right)$$

azaz

$$\underline{k}^c = - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_{\underline{\underline{R}}i}^T & \underline{\underline{J}}_{\underline{\underline{T}}i}^T \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \underline{\underline{\Theta}}_i & m_i \underline{\check{\rho}}_{Si} \\ m_i \underline{\check{\rho}}_{Si}^T & m_i \underline{\underline{1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\bar{\epsilon}}_i \\ \underline{\bar{a}}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\check{\omega}}_i \underline{\underline{\Theta}}_i \underline{\omega}_i \\ m_i \underline{\check{\omega}}_i \underline{\check{\omega}}_i \underline{\rho}_{Si} \end{bmatrix} \right)$$

A $\underline{k}^t$ általánosított terhelő erők:

$$\underline{k}^t = \underline{\underline{J}}^T \check{\underline{f}}^t$$

azaz

$$\underline{k}^t = \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_1^T & \cdots & \underline{\underline{J}}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{\underline{f}}_1^t \\ \vdots \\ \check{\underline{f}}_n^t \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \underline{\underline{J}}_i^T \check{\underline{f}}_i^t$$

Kiírva részletesen:

$$\underline{k}^t = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_{Ri}^T & \underline{\underline{J}}_{Ti}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_i^t \\ \underline{\underline{F}}_i^t \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \left(\underline{\underline{J}}_{Ri}^T \underline{\underline{M}}_i^t + \underline{\underline{J}}_{Ti}^T \underline{\underline{F}}_i^t \right)$$

Amennyiben O_i és S_i egybeesnek ($\tilde{\underline{\rho}}_{S_i} = \underline{0}$), akkor egyszerűsödik a tömegmátrix:

$$\widehat{\underline{\underline{M}}} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \underline{J}_{Ri}^T & \underline{J}_{Ti}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Theta}_i & \underline{0} \\ \underline{0} & m_i \underline{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{J}_{Ri} \\ \underline{J}_{Ti} \end{bmatrix}$$

azaz

$$\widehat{\underline{\underline{M}}} = \sum_{i=1}^n \left(m_i \underline{J}_{Ti}^T \underline{J}_{Ti} + \underline{J}_{Ri}^T \underline{\Theta}_i \underline{J}_{Ri} \right)$$

Továbbá egyszerűsödnek az általánosított Coriolis-erők:

$$\underline{k}^c = - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \underline{J}_{Ri}^T & \underline{J}_{Ti}^T \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \underline{\Theta}_i & \underline{0} \\ \underline{0} & m_i \underline{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\bar{\epsilon}}_i \\ \underline{\bar{a}}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\Theta}_i \underline{\omega}_i \\ \underline{0} \end{bmatrix} \right)$$

azaz

$$\underline{k}^c = - \sum_{i=1}^n \left(m_i \underline{J}_{Ti}^T \underline{\bar{a}}_i + \underline{J}_{Ri}^T \underline{\Theta}_i \underline{\bar{\epsilon}}_i + \underline{J}_{Ri}^T \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\Theta}_i \underline{\omega}_i \right)$$

Az $\underline{x}$ állapotváltozóra felírt mozgásegyenlet:

$$\begin{bmatrix} \underline{\dot{\beta}} \\ \underline{\dot{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{H}(\underline{\beta}) \underline{\eta} \\ \underline{\widehat{M}}^{-1}(\underline{\beta}, t) (\underline{k}^c(\underline{\beta}, \underline{\eta}, t) + \underline{k}^t(\underline{\beta}, \underline{\eta}, t)) \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \underline{\dot{x}} = \underline{\Psi}(\underline{x}, t)$$

A testekre ható kényszererő eredőket az impulzus- és perdülettételekből illetve az explicit kényszerfeltételekből számíthatjuk $\underline{\dot{\eta}}$ csukló-gyorsulások ismeretében:

$$\underline{\check{f}}^k = \underline{\underline{M}} \underline{\check{a}} - \underline{\check{f}}^c - \underline{\check{f}}^t \quad \text{ahol} \quad \underline{\check{a}} = \underline{\underline{J}} \underline{\dot{\eta}} + \underline{\check{a}}$$

Részletesen az i -ik testre:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_i^k \\ \underline{F}_i^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\Theta}_i & m_i \underline{\tilde{\rho}}_{Si} \\ m_i \underline{\tilde{\rho}}_{Si}^T & m_i \underline{\underline{1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_i \\ \underline{a}_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\Theta}_i \underline{\omega}_i \\ -m_i \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\rho}_{Si} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{M}_i^t \\ \underline{F}_i^t \end{bmatrix}$$

Az egyes csuklók által kifejtett kényszererők ezután (8) invertálásával számíthatók:

$$\underline{\check{f}}^p = \underline{\underline{B}}^{-T} \underline{\check{f}}^k$$