

Mechanizmusok és robotok

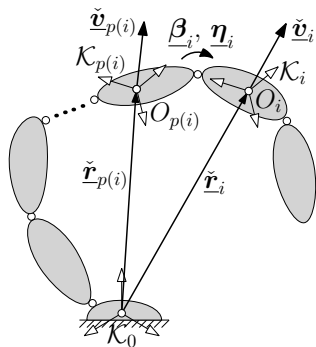
8. előadás

Nyílt láncú többtest-rendszerek kinematikája

Minimál-koordináták és sebességek

Tekintsünk egy nyílt láncú többtest-rendszer i -ik testjét. A hozzá kötött $\mathcal{K}_i$ KR origója O_i . Az őt megelőző test indexe $p(i)$, testhez kötött KR-e $\mathcal{K}_{p(i)}$. A rendszer helyzet- és sebességállapotát az $n (= n_c = n_t)$ számú test helyzeteinek és sebességeinek összessége adja:

$$\underline{\check{\mathbf{r}}}_i = \{ \underline{\mathbf{R}}_i, \underline{\mathbf{r}}_i \}, \quad \underline{\check{\mathbf{v}}}_i = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{\omega}}_i \\ \underline{\mathbf{v}}_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$



Minden $\mathcal{K}_i$ testet megelőz egy f szabadságfokú kényszer, melyhez a $\underline{\beta}_i$ csukló-helyzetkoordináták és az $\underline{\eta}_i$ csukló-sebességek tartoznak:

$$\underline{\beta}_i = \begin{bmatrix} \beta_{i,1} \\ \vdots \\ \beta_{i,f_i} \end{bmatrix}, \quad \underline{\eta}_i = \begin{bmatrix} \eta_{i,1} \\ \vdots \\ \eta_{i,f_i} \end{bmatrix}$$

Mellékfeltétel Euler-paraméterek használatánál:

$$\phi_i(\underline{\beta}_i) = 0$$

Euler paraméterek használatakor $\dim(\underline{\beta}_i) = f + 1$.

A $\underline{\beta}_i$ csukló-helyzetkoordináták idő szerinti deriváltjai és az $\underline{\eta}_i$ csukló-sebességek között a $(\dim(\underline{\beta}_i) \times f_i)$ méretű $\underline{\underline{H}}_i$ mátrix teremt kapcsolatot:

$$\dot{\underline{\beta}}_i = \underline{\underline{H}}_i(\underline{\beta}_i) \underline{\eta}_i$$

A teljes többtest-rendszer szabadságfoka $f = \sum_{i=1}^n f_i$. Az összes csukló helyzet- és sebességkoordinátáit összefoglaljuk egy f elemű vektorba, valamint az Euler-paraméterek mellékfeltételeit is:

$$\underline{q} = \underline{\beta} \quad \text{ahol} \quad \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \underline{\beta}_1 \\ \vdots \\ \underline{\beta}_n \end{bmatrix}, \quad \underline{s} = \underline{\eta} \quad \text{ahol} \quad \underline{\eta} = \begin{bmatrix} \underline{\eta}_1 \\ \vdots \\ \underline{\eta}_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\phi}(\underline{\beta}) = \underline{0}$$

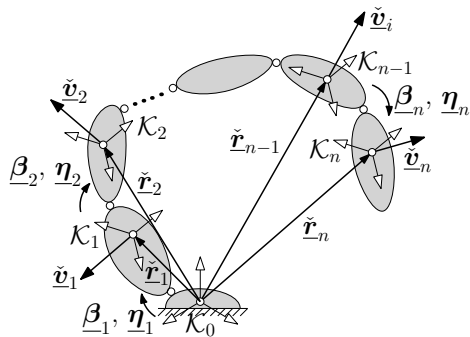
A kinematikai differenciálegyenleteket is összefoglaljuk:

$$\begin{bmatrix} \underline{\beta}_1 \\ \vdots \\ \underline{\beta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{H}}_1(\underline{\beta}_1) & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \underline{\underline{H}}_n(\underline{\beta}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\eta}_1 \\ \vdots \\ \underline{\eta}_n \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \dot{\underline{\beta}} = \underline{\underline{H}}(\underline{\beta}) \underline{\eta}$$

Nyílt láncú többtest-rendszer explicit kényszerei

Egy többtest-rendszer explicit kényszerei a csuklóknál észlelt relatív mozgások koordinátáiból minden test abszolút KR-beli mozgását szolgáltatják.

Nyílt kinematikai lánc helyzetállapotának explicit kényszerei



Adott $\underline{\beta}$ csukló-helyzeteknél a K_0 inerciarendszerből ($\underline{r}_0 = \underline{0}$, $\underline{R}_0 = \underline{1}$) kiindulva rekurzívan számíthatók a testek helyzetét leíró koordináták:

$$\underline{\check{r}}_i = \underline{\check{r}}_i(\underline{\check{r}}_{i-1}, \underline{\beta}_i, t) \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

Ha a csuklók kényszereit következetesen behelyettesítjük, akkor az egyes testek helyzetét a csukló-helyzetek függvényében kapjuk meg:

$$\underline{\check{r}}_i = \underline{\check{r}}_i(\underline{\beta}, t) \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

Összefoglalva:

$$\begin{bmatrix} \underline{\check{r}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\check{r}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\check{r}}_1(\underline{\beta}, t) \\ \vdots \\ \underline{\check{r}}_n(\underline{\beta}, t) \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \underline{\check{r}} = \underline{\check{r}}(\underline{\beta}, t)$$

Nyílt kinematikai lánc sebességállapotának explicit kényszerei

Adott $\underline{\beta}$ csukló-helyzetek és $\underline{\eta}$ csukló-sebességek esetén a $\mathcal{K}_0$ inerciarendszerből ($\underline{\check{v}}_0 = \underline{0}$) kiindulva rekurzívan számíthatók a testek sebességét leíró koordináták:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\omega}_i \\ \underline{v}_i \end{bmatrix}}_{\underline{\check{v}}_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{0} \\ -\underline{\tilde{r}}_{i-1,i} & \underline{1} \end{bmatrix}}_{\underline{B}_{i-1,i}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\omega}_{i-1} \\ \underline{v}_{i-1} \end{bmatrix}}_{\underline{\check{v}}_{i-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{C}_{Ri} \\ \underline{C}_{Ti} \end{bmatrix}}_{\underline{C}_i} \underline{\eta}_i + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\bar{\omega}}_i^{\text{rel}} \\ \underline{\bar{v}}_i^{\text{rel}} \end{bmatrix}}_{\underline{\check{v}}_i^{\text{rel}}}, \quad i = 1, \dots, n$$

Ezeket az egyenleteket is összefoglalhatjuk a globális $\underline{B}(\underline{\check{r}})$, $\underline{C}(\underline{\check{r}})$ és $\underline{\check{v}}^{\text{rel}}(\underline{\check{r}}, t)$ mátrixok segítségével:

$$\begin{bmatrix}
 \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \dots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\
 -\underline{\underline{B}}_{12} & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \dots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\
 \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{B}}_{23} & \underline{\underline{1}} & \dots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \dots & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\
 \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \dots & -\underline{\underline{B}}_{n-1,n} & \underline{\underline{1}}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \underline{\underline{\check{v}}}_1 \\
 \underline{\underline{\check{v}}}_2 \\
 \underline{\underline{\check{v}}}_3 \\
 \vdots \\
 \underline{\underline{\check{v}}}_{n-1} \\
 \underline{\underline{\check{v}}}_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \underline{\underline{C}}_1 & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \dots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\
 \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_2 & \underline{\underline{0}} & \dots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\
 \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_3 & \dots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \dots & \underline{\underline{C}}_{n-1} & \underline{\underline{0}} \\
 \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \dots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_n
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \underline{\underline{\eta}}_1 \\
 \underline{\underline{\eta}}_2 \\
 \underline{\underline{\eta}}_3 \\
 \vdots \\
 \underline{\underline{\eta}}_{n-1} \\
 \underline{\underline{\eta}}_n
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 \underline{\underline{\check{v}}}_1^{\text{rel}} \\
 \underline{\underline{\check{v}}}_2^{\text{rel}} \\
 \underline{\underline{\check{v}}}_3^{\text{rel}} \\
 \vdots \\
 \underline{\underline{\check{v}}}_{n-1}^{\text{rel}} \\
 \underline{\underline{\check{v}}}_n^{\text{rel}}
 \end{bmatrix}$$

azaz

$$\underline{\underline{B}} \underline{\underline{\check{v}}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\eta}} + \underline{\underline{\check{v}}}^{\text{rel}}$$

A globális $\underline{\underline{B}}$ mátrix felépítése az $\underline{\underline{S}}$ incidenciamátrixéval egyezik meg, úgy, hogy az 1-et tartalmazó főátlóbeli S_{ii} elemeket (6×6) -os egységmátrixokkal helyettesítjük, a -1-et tartalmazó S_{ij} elemekt pedig $-\underline{\underline{B}}_{ji}$ -vel.

A kinematikai lánc sebességállapotának explicit kényszerei a testek abszolút sebességeit szolgáltatják a $\underline{\beta}$ csukló-helyzetek és $\underline{\eta}$ csukló-sebességek függvényében. A sebességeket az inverz $\underline{\underline{B}}^{-1}$ -gyel kapjuk meg:

$$\underline{\check{v}} = \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{C}} \underline{\eta} + \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\check{v}}^{\text{rel}}$$

Az inverz $\underline{\underline{B}}^{-1}$ -mindig létezik, mivel reguláris. A $\underline{y}_i = \underline{\underline{C}}_i \underline{\eta}_i + \underline{\check{v}}_i^{\text{rel}}$ jelölést alkalmazva a csuklók kényszereit következetesen egymásba helyettesítjük

$$\underline{\check{v}}_1 = \underline{\underline{B}}_{01} \underline{\check{v}}_0 + \underline{y}_1 \quad \text{ahol} \quad \underline{\check{v}}_0 = \underline{0}$$

$$\underline{\check{v}}_2 = \underline{\underline{B}}_{12} \underline{\check{v}}_1 + \underline{y}_2$$

$$\underline{\check{v}}_3 = \underline{\underline{B}}_{23} \underline{\check{v}}_2 + \underline{y}_3$$

$$\vdots$$

$$\underline{\check{v}}_n = \underline{\underline{B}}_{n-1,n} \underline{\check{v}}_{n-1} + \underline{y}_n$$

Behelyettesítés után:

$$\underline{\check{v}}_1 = \underline{y}_1$$

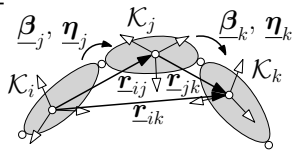
$$\underline{\check{v}}_2 = \underline{\underline{B}}_{12} \underline{y}_1 + \underline{y}_2$$

$$\underline{\check{v}}_3 = \underline{\underline{B}}_{23} \underline{\underline{B}}_{12} \underline{y}_1 + \underline{\underline{B}}_{23} \underline{y}_2 + \underline{y}_3$$

$\vdots$

$$\underline{\check{v}}_n = \underline{\underline{B}}_{n-1,n} \cdots \underline{\underline{B}}_{12} \underline{y}_1 + \underline{\underline{B}}_{n-1,n} \cdots \underline{\underline{B}}_{23} \underline{y}_2 + \cdots + \underline{\underline{B}}_{n-1,n} \underline{y}_{n-1} + \underline{y}_n$$

Két egymást követő $\underline{\underline{B}}_{jk}$ és $\underline{\underline{B}}_{ij}$ mátrix összeszorozható $\underline{r}_{ik} = \underline{r}_{ij} + \underline{r}_{jk}$ figyelembevételével:



$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{r}}_{ik} & \underline{\underline{1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{r}}_{jk} & \underline{\underline{1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{r}}_{ij} & \underline{\underline{1}} \end{bmatrix}$$

azaz

$$\underline{\underline{B}}_{ik} = \underline{\underline{B}}_{jk} \underline{\underline{B}}_{ij}$$

Így a fenti egyenletrendszer átírható a következő alakba:

$$\underline{\check{v}}_1 = \underline{y}_1$$

$$\underline{\check{v}}_2 = \underline{B}_{12}\underline{y}_1 + \underline{y}_2$$

$$\underline{\check{v}}_3 = \underline{B}_{13}\underline{y}_1 + \underline{B}_{23}\underline{y}_2 + \underline{y}_3$$

$$\vdots$$

$$\underline{\check{v}}_n = \underline{B}_{1,n}\underline{y}_1 + \underline{B}_{2,n}\underline{y}_2 + \cdots + \underline{B}_{n-1,n}\underline{y}_{n-1} + \underline{y}_n$$

Vagy mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} \underline{\check{v}}_1 \\ \underline{\check{v}}_2 \\ \underline{\check{v}}_3 \\ \vdots \\ \underline{\check{v}}_{n-1} \\ \underline{\check{v}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{B}_{12} & \underline{1} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{B}_{13} & \underline{B}_{23} & \underline{1} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \underline{B}_{1,n-1} & \underline{B}_{2,n-1} & \underline{B}_{3,n-1} & \cdots & \underline{1} & \underline{0} \\ \underline{B}_{1,n} & \underline{B}_{2,n} & \underline{B}_{3,n} & \cdots & \underline{B}_{n-1,n} & \underline{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \underline{y}_3 \\ \vdots \\ \underline{y}_{n-1} \\ \underline{y}_n \end{bmatrix}$$

azaz

$$\underline{\check{v}} = \underline{B}^{-1}\underline{y}$$

A $\underline{\underline{B}}^{-1}$ mátrix a $\underline{\underline{T}}$ útmátrixból származtatható úgy, hogy az 1-et tartalmazó T_{ij} főátló elemeket (6×6) -os egységmátrixokkal, valamint az 1-et tartalmazó T_{ij} elemeket (6×6) -os $\underline{\underline{B}}_{ji}$ mátrixokkal.

A kinematikai lánc explicit kényszerei a $\underline{\underline{B}}^{-1}$ mátrixszal:

$$\underline{\underline{\check{v}}} = \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\eta}} + \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{\check{v}}}^{\text{rel}}$$

$$\underline{\underline{\check{v}}} = \underline{\underline{J}} \underline{\underline{\eta}} + \underline{\underline{\check{v}}}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\check{v}}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{\check{v}}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{J}}_n \end{bmatrix} \underline{\underline{\eta}} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\check{v}}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{\check{v}}}_n \end{bmatrix}$$

Ahol $\underline{\underline{J}}(\underline{\underline{\beta}}, t)$ a $(6n \times f)$ méretű globális Jacobi-mátrix, míg a $6n$ elemű $\underline{\underline{\check{v}}}(\underline{\underline{\beta}}, t) = \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{\check{v}}}^{\text{rel}}$ a csak reonom kényszereknél fellépő tag.

A $\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{C}}$ globális Jacobi-mátrix:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_1 \\ \underline{\underline{J}}_2 \\ \underline{\underline{J}}_3 \\ \vdots \\ \underline{\underline{J}}_{n-1} \\ \underline{\underline{J}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}}_1 & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{B}}_{12} \underline{\underline{C}}_1 & \underline{\underline{C}}_2 & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{B}}_{13} \underline{\underline{C}}_1 & \underline{\underline{B}}_{23} \underline{\underline{C}}_2 & \underline{\underline{C}}_3 & \cdots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \underline{\underline{B}}_{1,n-1} \underline{\underline{C}}_1 & \underline{\underline{B}}_{2,n-1} \underline{\underline{C}}_2 & \underline{\underline{B}}_{3,n-1} \underline{\underline{C}}_3 & \cdots & \underline{\underline{C}}_{n-1} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{B}}_{1,n} \underline{\underline{C}}_1 & \underline{\underline{B}}_{2,n} \underline{\underline{C}}_2 & \underline{\underline{B}}_{3,n} \underline{\underline{C}}_3 & \cdots & \underline{\underline{B}}_{n-1,n} \underline{\underline{C}}_{n-1} & \underline{\underline{C}}_n \end{bmatrix}$$

A $\underline{\underline{J}}$ Jacobi-mátrix ($6 \times f$) méretű $\underline{\underline{J}}_i$ sorai az egyes $\mathcal{K}_i$ testek Jacobi-mátrixai, amelyek a rotációs $\underline{\underline{J}}_{Ri}$ és translációs $\underline{\underline{J}}_{Ti}$ Jacobi-mátrixokból tevődnek össze. Így az egyes testek explicit kényszerei:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\omega}}_i \\ \underline{\underline{v}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_{Ri} \\ \underline{\underline{J}}_{Ti} \end{bmatrix} \underline{\underline{\eta}} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\bar{\omega}}}_i \\ \underline{\underline{\bar{v}}}_i \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \underline{\underline{\check{v}}}_i = \underline{\underline{J}}_i \underline{\underline{\eta}} + \underline{\underline{\bar{v}}}_i$$

A $\mathcal{K}_i$ test $\underline{\underline{J}}_i$ Jacobi mátrixát írhatjuk a

$$\underline{\underline{J}}_i = \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_{i1} & \underline{\underline{J}}_{i2} & \cdots & \underline{\underline{J}}_{ii} & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}$$

alakban is. Ezen mátrix $\underline{\underline{J}}_{ij}$ részmátrixára igaz, hogy

$$\underline{\underline{J}}_{ij} = \begin{cases} \underline{\underline{B}}_{ji} \underline{\underline{C}}_j & \text{ha } i \geq j \\ \underline{\underline{0}} & \text{ha } i < j \end{cases} \quad (\underline{\underline{B}}_{ii} = \underline{\underline{1}})$$

A $\underline{\underline{J}}_{ij}$ részmátrix a j -ik csukló $\underline{\underline{\eta}}_j$ csukló-sebességének a $\mathcal{K}_i$ test $\underline{\underline{\check{v}}}_j$ sebességére gyakorolt hatását írja le. A Jacobi- mátrix segítségével megfogalmazott $\underline{\underline{\check{v}}} = \underline{\underline{J}} \underline{\underline{\eta}} + \underline{\underline{\check{v}}}$ explicit kényszerek kifejtve az alábbi módon írhatók:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\check{v}}}_1 \\ \underline{\underline{\check{v}}}_2 \\ \vdots \\ \underline{\underline{\check{v}}}_{n-1} \\ \underline{\underline{\check{v}}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_{11} & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{J}}_{21} & \underline{\underline{J}}_{22} & \cdots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \underline{\underline{J}}_{n-1,1} & \underline{\underline{J}}_{n-1,2} & \cdots & \underline{\underline{J}}_{n-1,n-1} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{J}}_{n,1} & \underline{\underline{J}}_{n,2} & \cdots & \underline{\underline{J}}_{n,n-1} & \underline{\underline{J}}_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\eta}}_1 \\ \underline{\underline{\eta}}_2 \\ \vdots \\ \underline{\underline{\eta}}_{n-1} \\ \underline{\underline{\eta}}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\check{v}}}_1 \\ \underline{\underline{\check{v}}}_2 \\ \vdots \\ \underline{\underline{\check{v}}}_{n-1} \\ \underline{\underline{\check{v}}}_n \end{bmatrix}$$

Nyílt kinematikai lánc gyorsulásállapotának explicit kényszerei

Adott $\underline{\beta}$ csukló-helyzetek, $\underline{\eta}$ csukló-sebességek és $\underline{\dot{\eta}}$ csukló-gyorsulások esetén a $\mathcal{K}_0$ inerciarendszerből ($\underline{\ddot{a}}_0 = \underline{0}$) kiindulva rekurzívan számíthatók a testek sebességét leíró koordináták:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_i \\ \underline{a}_i \end{bmatrix}}_{\underline{\ddot{a}}_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{0} \\ -\underline{\tilde{r}}_{i-1,i} & \underline{1} \end{bmatrix}}_{\underline{B}_{i-1,i}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_{i-1} \\ \underline{a}_{i-1} \end{bmatrix}}_{\underline{\ddot{a}}_{i-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{C}_{Ri} \\ \underline{C}_{Ti} \end{bmatrix}}_{\underline{C}_i} \underline{\dot{\eta}}_i + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\bar{\varepsilon}}_i^{\text{rel}} \\ \underline{\bar{a}}_i^{\text{rel}} \end{bmatrix}}_{\underline{\bar{\ddot{a}}}_i^{\text{rel}}}, \quad i = 1, \dots, n$$

Ezeket az egyenleteket a sebességállapotnál bemutatottakkal analóg módon összefoglalhatjuk mátrixos írásmódot használva:

$$\underline{B} \underline{\ddot{a}} = \underline{C} \underline{\dot{\eta}} + \underline{\bar{\ddot{a}}}^{\text{rel}}$$

Ahol $\underline{\ddot{\mathbf{a}}}^{\text{rel}}$ az $\underline{\dot{\boldsymbol{\eta}}}$ csukló-gyorsulásoktól független $6n$ elemű vektor:

$$\underline{\ddot{\mathbf{a}}}^{\text{rel}}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}, \underline{\boldsymbol{\nu}}, \underline{\boldsymbol{\beta}}, \underline{\boldsymbol{\eta}}, t) = \begin{bmatrix} \underline{\ddot{\mathbf{a}}}_1^{\text{rel}} \\ \vdots \\ \underline{\ddot{\mathbf{a}}}_n^{\text{rel}} \end{bmatrix}$$

Hasonlóan a sebességállapothoz, a nyílt kinematikai lánc explicit kényszereit az előző egyenlet $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1}$ -gyel balról történő szorzásával kapjuk:

$$\underline{\ddot{\mathbf{a}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\dot{\boldsymbol{\eta}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1} \underline{\ddot{\mathbf{a}}}^{\text{rel}}$$

$$\underline{\ddot{\mathbf{a}}} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \underline{\dot{\boldsymbol{\eta}}} + \underline{\ddot{\mathbf{a}}}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\ddot{\mathbf{a}}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\ddot{\mathbf{a}}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{J}}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{\mathbf{J}}}_n \end{bmatrix} \underline{\dot{\boldsymbol{\eta}}} + \begin{bmatrix} \underline{\ddot{\mathbf{a}}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\ddot{\mathbf{a}}}_n \end{bmatrix}$$

Az $\ddot{\underline{\mathbf{a}}}(\underline{\boldsymbol{\beta}}, \underline{\boldsymbol{\eta}}, t) = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1} \ddot{\underline{\mathbf{a}}}^{\text{rel}}$ vektor az $\dot{\underline{\boldsymbol{\eta}}}$ csukló-gyorsulásoktól független $6n$ elemű vektor, amelynek a $\mathcal{K}_i$ testekhez tartozó részei:

$$\ddot{\underline{\mathbf{a}}}_i = \begin{bmatrix} \ddot{\underline{\mathbf{e}}}_i \\ \ddot{\underline{\mathbf{a}}}_i \end{bmatrix}$$

Az $\ddot{\underline{\mathbf{a}}}$ vektor a sebességekre vonatkozó $\dot{\underline{\mathbf{v}}} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \underline{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\underline{\mathbf{v}}}$ egyenletből kiindulva a globális Jacobi-mátrix idő szerinti deriválásának útján is megkapható:

$$\ddot{\underline{\mathbf{a}}} = \dot{\underline{\underline{\mathbf{J}}}} \underline{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\underline{\mathbf{v}}}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\underline{\mathbf{a}}}_1 \\ \ddot{\underline{\mathbf{a}}}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\underline{\mathbf{a}}}_{n-1} \\ \ddot{\underline{\mathbf{a}}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{\underline{\mathbf{J}}}}_{11} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \cdots & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \dot{\underline{\underline{\mathbf{J}}}}_{21} & \dot{\underline{\underline{\mathbf{J}}}}_{22} & \cdots & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dot{\underline{\underline{\mathbf{J}}}}_{n-1,1} & \dot{\underline{\underline{\mathbf{J}}}}_{n-1,2} & \cdots & \dot{\underline{\underline{\mathbf{J}}}}_{n-1,n-1} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \dot{\underline{\underline{\mathbf{J}}}}_{n,1} & \dot{\underline{\underline{\mathbf{J}}}}_{n,2} & \cdots & \dot{\underline{\underline{\mathbf{J}}}}_{n,n-1} & \dot{\underline{\underline{\mathbf{J}}}}_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{\eta}}_1 \\ \underline{\boldsymbol{\eta}}_2 \\ \vdots \\ \underline{\boldsymbol{\eta}}_{n-1} \\ \underline{\boldsymbol{\eta}}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\underline{\mathbf{v}}}_1 \\ \dot{\underline{\mathbf{v}}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\underline{\mathbf{v}}}_{n-1} \\ \dot{\underline{\mathbf{v}}}_n \end{bmatrix}$$

Nyílt kinematikai lánc szokványos csuklókkal

A sebesség- és gyorsulásállapot számításához szükséges a $\underline{\underline{J}}_{ji}$ és $\dot{\underline{\underline{J}}}_{ji}$ mátrixok ismerete, melyek a csukló típusától függenek.

Forgó csukló

A $\underline{\underline{B}}_{ij}$ és a forgó csuklóra jellemző $\underline{\underline{C}}_i$ mátrixok segítségével

$$\underline{\underline{J}}_{ji} = \underline{\underline{B}}_{ij} \underline{\underline{C}}_i = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{\tilde{r}}}_{ij} & \underline{\underline{1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{u}}_i \\ \underline{\underline{\tilde{u}}}_i \underline{\underline{d}}_{ii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{u}}_i \\ \underline{\underline{\tilde{u}}}_i \underline{\underline{d}}_{ij} \end{bmatrix}$$

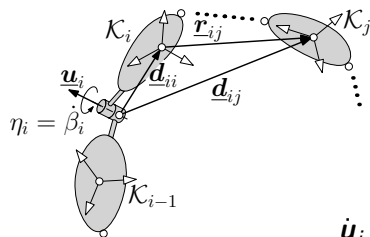
Ahol $\underline{\underline{d}}_{ij} = \underline{\underline{d}}_{ii} + \underline{\underline{r}}_{ij}$, a csukló $\underline{\underline{u}}_i$ forgástengelyétől a $\mathcal{K}_j$ testhez mutató vektor.

A $\underline{\underline{J}}_{ji}$ mátrixot deriválás útján kapjuk:

$$\dot{\underline{\underline{J}}}_{ji} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{\underline{u}}}_i \\ \dot{\underline{\underline{\tilde{u}}}}_i \underline{\underline{d}}_{ij} + \underline{\underline{\tilde{u}}}_i \dot{\underline{\underline{d}}}_{ij} \end{bmatrix}$$

ahol a vektorok idő szerinti deriváltjai:

$$\dot{\underline{\underline{u}}}_i = \underline{\underline{\tilde{\omega}}}_{i-1} \underline{\underline{u}}_i, \quad \dot{\underline{\underline{d}}}_{ij} = \underline{\underline{\tilde{\omega}}}_{i-1} \underline{\underline{d}}_{ij} + \sum_{\alpha=i}^j \underline{\underline{\tilde{\omega}}}_{\alpha, \alpha-1} \underline{\underline{d}}_{\alpha j}$$



Csúszka

A $\underline{\underline{B}}_{ij}$ és a csúszkára jellemző $\underline{\underline{C}}_i$ mátrixok segítségével

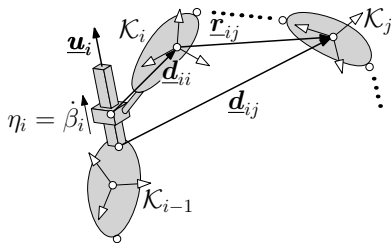
$$\underline{\underline{J}}_{ji} = \underline{\underline{B}}_{ij} \underline{\underline{C}}_i = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{\tilde{r}}}_{ij} & \underline{\underline{1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{u}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{u}}_i \end{bmatrix}$$

A $\dot{\underline{\underline{J}}}_{ji}$ mátrixot deriválás útján kapjuk:

$$\dot{\underline{\underline{J}}}_{ji} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \dot{\underline{\underline{u}}}_i \end{bmatrix}$$

Ahol

$$\dot{\underline{\underline{u}}}_i = \underline{\underline{\tilde{\omega}}}_{i-1} \underline{\underline{u}}_i$$

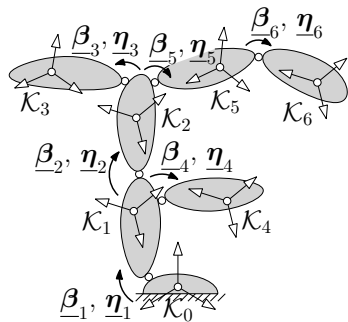


Fa elrendezésű nyílt kinematikai láncok

Elágazásokkal rendelkező nyílt láncú rendszerek a tisztán lánc elrendezésű többtest-rendszerekből származtathatók, ha figyelembe vesszük a rendszer topológiáját. Példának a már korábban bemutatott elrendezést tekintjük.

A rendszer incidenciamátrixa:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



míg az útmátrixa:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A sebességállapotra vonatkozóan ugyanaz a

$$\underline{\underline{B}} \underline{\underline{\dot{v}}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\eta}} + \underline{\underline{\dot{v}}}^{\text{rel}}$$

összefüggés érvényes, annyi különbséggel, hogy a $\underline{\underline{B}}$ mátrix követi az $\underline{\underline{S}}$ incidenciamátrix struktúráját, míg $\underline{\underline{B}}^{-1}$ inverze követi az $\underline{\underline{S}}$ útmátrix struktúráját:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{B}}_{12} & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{B}}_{23} & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{B}}_{14} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{B}}_{25} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{B}}_{56} & \underline{\underline{1}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{B}}_{12} & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{B}}_{13} & \underline{\underline{B}}_{23} & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{B}}_{14} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{B}}_{15} & \underline{\underline{B}}_{25} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{B}}_{16} & \underline{\underline{B}}_{26} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{B}}_{56} & \underline{\underline{1}} \end{bmatrix}$$

Ilyenkor is érvényes a $\underline{\underline{B}}_{ik} = \underline{\underline{B}}_{jk} \underline{\underline{B}}_{ij}$ összefüggés, amellyel

$$\begin{aligned}\underline{\underline{v}} &= \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\eta}} + \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{v}}^{\text{rel}} \\ \underline{\underline{v}} &= \underline{\underline{J}} \underline{\underline{\eta}} + \underline{\underline{v}}\end{aligned}$$

ahol a globális Jacobi mátrix $\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{C}}$, a példában

$$\underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_{11} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{J}}_{21} & \underline{\underline{J}}_{22} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{J}}_{31} & \underline{\underline{J}}_{32} & \underline{\underline{J}}_{33} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{J}}_{41} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{J}}_{44} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{J}}_{51} & \underline{\underline{J}}_{52} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{J}}_{55} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{J}}_{61} & \underline{\underline{J}}_{62} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{J}}_{65} & \underline{\underline{J}}_{66} \end{bmatrix}$$

Ahol az egyes almátrixokra egyaránt érvényes, hogy

$$\underline{\underline{J}}_{ij} = \begin{cases} \underline{\underline{B}}_{ji} \underline{\underline{C}}_j & \text{ha } i \geq j \\ \underline{\underline{0}} & \text{ha } i < j \end{cases} \quad \left(\underline{\underline{B}}_{ii} = \underline{\underline{1}} \right)$$