

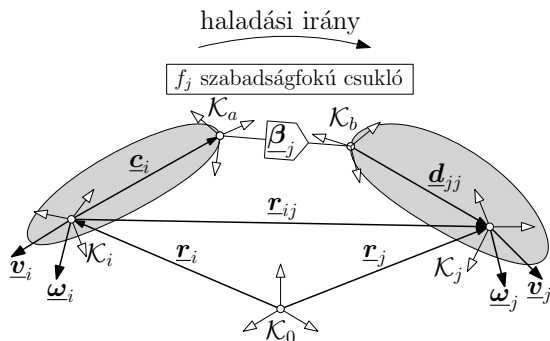
Mechanizmusok és robotok

7. előadás

Töbptest-rendszerek csuklóinak kényszerei (folytatás)
Nyílt láncú töbptest-rendszerek topológiája

Csuklók explicit holonom kényszerei

A csuklók explicit kényszereit elsősorban nyílt láncú többtest-rendszerek kinematikai leírásánál használatos.



Explicit kényszerrel a $\mathcal{K}_j$ test a $\mathcal{K}_i$ testhez viszonyított relatív mozgása írható le relatív csuklókoordinátákkal. Ehhez egy haladási irányt szabunk meg ($\mathcal{K}_i$ a $\mathcal{K}_j$ -t megelőző test). Így a $\mathcal{K}_j$ test indexe egyértelműen jelöli a csuklóra vonatkozó mennyiségeket. Továbbá $\underline{d}_{jj} = -\underline{c}_j$

Helyzetállapot

A $\mathcal{K}_j$ test relatív helyzetét az őt megelőző $\mathcal{K}_i$ testhez viszonyítva a csukló $f_j = 6 - b_{ij}$ szabadságfokának megfelelően f_j számú csukló-koordinátával lehet leírni:

$$\underline{\beta}_j = \begin{bmatrix} \beta_{j,1} \\ \vdots \\ \beta_{j,f_j} \end{bmatrix}$$

Amennyiben a forgás leírásához a négy Euler-paramétert használjuk (pl. gömbcsukló), akkor ehhez társul a

$$\phi_j(\underline{\beta}_j) = 0$$

mellékfeltétel. Az explicit kényszerekkel a $\mathcal{K}_j$ test $\underline{r}_j$ helyzetkoordinátái a megelőző $\mathcal{K}_i$ test $\underline{r}_i$ helyzetkoordinátáinak és a $\underline{\beta}_j$ csukló-helyzetkoordinátáknak segítségével számítható:

$$\underline{r}_j = \underline{r}_j(\underline{r}_i, \underline{\beta}_j, t)$$

A t -től való függés csak reonom kényszereknél lép fel. Utóbbi összefüggés az implicit kényszerfeltételeket is kielégíti tetszőleges $\underline{\beta}_j$ koordinátákra.

Kinematikai differenciálegyenlet

A $\mathcal{K}_j$ test relatív sebességét az őt megelőző $\mathcal{K}_i$ testhez viszonyítva f_j számú csukló-sebességkoordinátával lehet leírni:

$$\underline{\eta}_j = \begin{bmatrix} \eta_{j,1} \\ \vdots \\ \eta_{j,f_j} \end{bmatrix}$$

A sebességkoordinátákat oly módon vezetjük be, hogy a csukló-helyzetkoordináták $\underline{\beta}_j$ deriváltjai az $\underline{\eta}_j$ koordináták lineáris kombinációi legyenek, azaz az alábbi alakban:

$$\dot{\underline{\beta}}_j = \underline{\underline{H}}_j \left(\underline{\beta}_j \right) \underline{\eta}_j$$

Számos esetben $\underline{\eta}_j = \dot{\underline{\beta}}_j$, és $\underline{\underline{H}}_j = \underline{\underline{1}}$.

Sebességállapot

A $\mathcal{K}_j$ test $\underline{\omega}_j = \underline{\omega}_{0j}$ szögsebessége és $\underline{v}_j = \underline{v}_{0j}$ sebessége a $\mathcal{K}_0$ állványhoz képest a $\mathcal{K}_i$ megelőző test $\underline{\omega}_i = \underline{\omega}_{0i}$, $\underline{v}_i = \underline{v}_{0i}$ $\mathcal{K}_0$ állványhoz képesti sebességeiből, és a $\mathcal{K}_j$ test $\mathcal{K}_i$ testhez viszonyított $\underline{\omega}_{ij}$, $\underline{v}_{ij}$ relatív sebességeiből tevődik össze. A relatív mozgásokra érvényes összefüggésnek megfelelően

$$\underline{\omega}_j = \underline{\omega}_i + \underline{\omega}_{ij}$$

$$\underline{v}_j = \underline{v}_i + \tilde{\underline{\omega}}_i \underline{r}_{ij} + \underline{v}_{ij}$$

A relatív $\underline{\omega}_{ij}$, $\underline{v}_{ij}$ sebességek az $\underline{\eta}_j$ csukló-sebességekkel fejezhetők ki:

$$\underline{\omega}_{ij} = \underline{C}_{Rj} \underline{\eta}_j + \bar{\underline{\omega}}_j^{\text{rel}}$$

$$\underline{v}_{ij} = \underline{C}_{Tj} \underline{\eta}_j + \bar{\underline{v}}_j^{\text{rel}}$$

ahol a $(3 \times f_j)$ méretű $\underline{C}_{Rj}$ és $\underline{C}_{Tj}$ a csukló rotációs ill. translációs Jacobi-mátrixai, míg $\bar{\underline{\omega}}_j^{\text{rel}}$ és $\bar{\underline{v}}_j^{\text{rel}}$ a reonom csuklóknál fellépő vektorok.

Behelyettesítve a sebességek egyenletébe, kapjuk, hogy

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\omega}_j \\ \underline{v}_j \end{bmatrix}}_{\underline{\check{v}}_j} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\check{r}}_{ij} & \underline{\underline{1}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{B}}_{ij}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\omega}_i \\ \underline{v}_i \end{bmatrix}}_{\underline{\check{v}}_i} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{C}}_{Rj} \\ \underline{\underline{C}}_{Tj} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{C}}_j} \underline{\eta}_j + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\bar{\omega}}_j^{\text{rel}} \\ \underline{\bar{v}}_j^{\text{rel}} \end{bmatrix}}_{\underline{\bar{\check{v}}}_j^{\text{rel}}}$$

azaz

$$\underline{\check{v}}_j = \underline{\underline{B}}_{ij} \underline{\check{v}}_i + \underline{\underline{C}}_j \underline{\eta}_j + \underline{\bar{\check{v}}}_j^{\text{rel}} \quad (1)$$

Az egyes tagok fizikai tartalma:

- $\underline{\underline{B}}_{ij} \underline{\check{v}}_i$ a szállító szögsebesség és sebesség, amely a csukló típusától független.
- $\underline{\underline{C}}_j \underline{\eta}_j$ a csukló-sebességek hozzájárulása a $\underline{\check{v}}_j$ sebességekhez, mely a csukló típusától függ.
- $\underline{\bar{\check{v}}}_j^{\text{rel}} (\underline{\check{r}}_i, \underline{\check{r}}_j, t)$ a reonom mozgás hozzájárulása, mely szintén csukló-specifikus.

Szabad és gátolt irányok ortogonalitása

Az explicit kényszerek az implicit kényszeregyenleteket kielégítik. Ennek egyértelműsítésére tekintjük a sebességállapot implicit kényszereit, mint határozatlan lineáris egyenletrendszert:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}_i & \underline{\underline{G}}_j \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{G}}_{ij}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{v}}_i \\ \underline{\underline{v}}_j \end{bmatrix} = -\underline{\underline{\gamma}}_{ij} \quad (2)$$

A $\underline{\underline{G}}_{ij}$ kényszermátrix sorai jelölik a $\mathcal{K}_i$ és $\mathcal{K}_j$ testek relatív mozgásának, a kényszer által gátolt irányait.

Az explicit sebességkényszerek tetszőleges $\underline{\underline{v}}_i$ és $\underline{\underline{\eta}}_j$ sebességek esetére szolgáltatják a kényszer által megengedett $\underline{\underline{v}}_j$ sebességét a $\mathcal{K}_j$ testnek. Az explicit sebességkényszerek kielégítik a (2) egyenletrendszert. Ennek szemléltetésére írjuk át az (1) egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{v}}_i \\ \underline{\underline{v}}_j \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{B}}_{ij} & \underline{\underline{C}}_j \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{L}}_{ij}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{v}}_i \\ \underline{\underline{\eta}}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{v}}_j^{\text{rel}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

A (3) egyenlet jobb oldalának második tagja a (2) egyenletrendszer partikuláris megoldása, amely csak reonom kényszereknél lép fel. Az első tag a homogén megoldás, amely tetszőleges $\underline{\check{\nu}}_i$, $\underline{\eta}_j$ értékekre teljesül. A $(12 \times (6 + f_j))$ méretű $\underline{\underline{L}}_{ij}$ mátrix oszlopai a $\mathcal{K}_i$ és $\mathcal{K}_j$ testek relatív mozgásának, a kényszer által megengedett irányait jelöli. A megengedett és gátolt irányok ortogonálisak, azaz $\underline{\underline{G}}_{ij}$ sorai és $\underline{\underline{L}}_{ij}$ oszlopai egymásra merőlegesek:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}_i & \underline{\underline{G}}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} \\ \underline{\underline{B}}_{ij} \\ \underline{\underline{C}}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{G}}_{ij} \underline{\underline{L}}_{ij} = \underline{\underline{0}}$$

azaz:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{G}}_i + \underline{\underline{G}}_j \underline{\underline{B}}_{ij} &= \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{G}}_j \underline{\underline{C}}_j &= \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

Gyorsulásállapot

A sebességek (1) explicit kényszerét idő szerint deriválva, kapjuk a gyorsulások explicit kényszereit:

$$\dot{\underline{\underline{v}}}_j = \underline{\underline{B}}_{ij} \dot{\underline{\underline{v}}}_i + \underline{\underline{C}}_j \dot{\underline{\underline{\eta}}}_j + \underline{\underline{\tilde{a}}}_j^{\text{rel}}$$

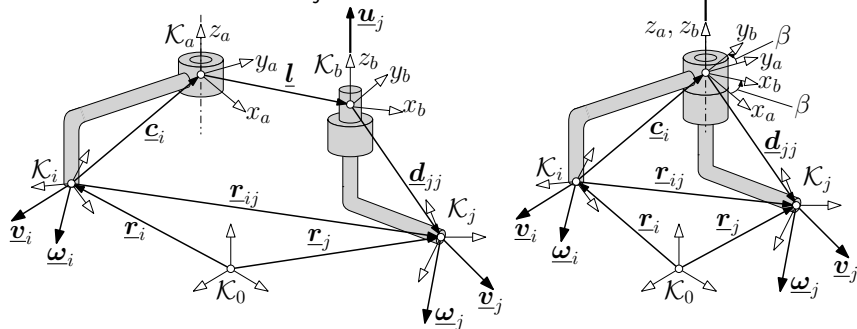
ahol $\dot{\underline{\underline{\eta}}}_j$ a csukló-gyorsuláskoordináták, illetve a $\dot{\underline{\underline{v}}}_i$ és $\dot{\underline{\underline{\eta}}}_j$ gyorsulásoktól nem függő $\underline{\underline{\tilde{a}}}_j^{\text{rel}}$ vektor:

$$\underline{\underline{\tilde{a}}}_j^{\text{rel}} \left(\underline{\underline{r}}_i, \underline{\underline{v}}_i, \underline{\underline{\beta}}_j, \underline{\underline{\eta}}_j, t \right) = \underline{\underline{\dot{B}}}_{ij} \underline{\underline{v}}_i + \underline{\underline{\dot{C}}}_j \underline{\underline{\eta}}_j + \frac{d\underline{\underline{\tilde{v}}}_j^{\text{rel}}}{dt}$$

A gyorsulások explicit kényszerei tetszőleges $\dot{\underline{\underline{v}}}_i$ és $\dot{\underline{\underline{\eta}}}_j$ gyorsulások mellett kielégítik a gyorsulások implicit kényszeregyenleteit.

Példa: forgó csukló explicit kényszerei

Az alábbi forgó csukló $f_j = 1$ szabad csukló-koordinátának a β_j szögelfordulást választjuk, amely a csuklóhoz kötött $\mathcal{K}_b$ KR forgását írja le a $\mathcal{K}_b$ KR-hez képest az $\underline{u}_j$ forgástengely körül.



Helyzetállapot explicit kényszerei az $\check{\underline{r}}_i$ és $\check{\underline{r}}_j$ -re vonatkozóan:

$$\left\{ \begin{array}{c} {}^{j0} \underline{T} \\ {}^0 \underline{r}_j \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} {}^{i0} \underline{T} {}^{ai} \underline{T} {}^{ba} \underline{T} (\beta_j) {}^{jb} \underline{T} \\ {}^0 \underline{r}_i + {}^{i0} \underline{T} \left({}^i \underline{c}_i + {}^{ai} \underline{T} {}^{ba} \underline{T} (\beta_j) {}^b \underline{d}_{jj} \right) \end{array} \right\} \quad \text{azaz} \quad \check{\underline{r}}_j = \check{\underline{r}}_j(\check{\underline{r}}_i, \beta_j)$$

Kinematikai differenciálegyenlet

A csukló-sebességkoordináta $\eta_j = \dot{\beta}_j$ szerinti definíciójával

$$\dot{\beta}_j = \eta_j \quad \left(\underline{\underline{H}}_j = 1 \right)$$

Sebességállapot

A relatív szögsebességre $\underline{\omega}_{ij} = \dot{\beta}_j \underline{u}_j$, míg a relatív sebességre $\underline{v}_{ij} = \dot{\beta}_j \underline{\tilde{u}}_j \underline{d}_{jj}$ írható. Ezeket felhasználva:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\omega}_j \\ \underline{v}_j \end{bmatrix}}_{\underline{\check{v}}_j} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\tilde{r}}_{ij} & \underline{\underline{1}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{B}}_{ij}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\omega}_i \\ \underline{v}_i \end{bmatrix}}_{\underline{\check{v}}_i} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{u}_j \\ \underline{\tilde{u}}_j \underline{d}_{jj} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{C}}_j} \underbrace{\dot{\beta}_j}_{\eta_j}, \quad \underline{\check{v}}_j = \underline{\underline{B}}_{ij} \underline{\check{v}}_i + \underline{\underline{C}}_j \eta_j$$

Gyorsulásállapot

A fenti egyenletet idő szerinti deriválva a gyorsulások explicit kényszereit a szokásos alakban írhatjuk:

$$\underline{\check{v}}_j = \underline{\underline{B}}_{ij} \dot{\underline{\check{v}}}_i + \underline{\underline{C}}_j \dot{\eta}_j + \underline{\check{a}}_j^{\text{rel}}$$

Ahol

$$\ddot{\underline{\mathbf{z}}}_j^{\text{rel}} \left(\underline{\mathbf{r}}_i, \underline{\mathbf{v}}_i, \underline{\boldsymbol{\beta}}_j, \underline{\boldsymbol{\eta}}_j, t \right) = \underline{\dot{\mathbf{B}}}_{ij} \underline{\mathbf{v}}_i + \underline{\dot{\mathbf{C}}}_j \underline{\boldsymbol{\eta}}_j + \frac{d\underline{\mathbf{v}}_j^{\text{rel}}}{dt}$$

Kifejtve:

$$\ddot{\underline{\mathbf{a}}}_j^{\text{rel}} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{u}}_j \dot{\beta}_j \\ \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\dot{r}}_{ij} + \underline{\dot{u}}_j \underline{\mathbf{d}}_{jj} \dot{\beta}_j + \underline{\tilde{u}}_j \underline{\dot{d}}_{jj} \dot{\beta}_j \end{bmatrix}$$

Figyelembe véve, hogy $\underline{\dot{u}}_j = \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\mathbf{u}}_j$, $\underline{\dot{r}}_{ij} = \underline{\dot{c}}_i + \underline{\dot{d}}_{jj} = \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\mathbf{c}}_i + \underline{\tilde{\omega}}_j \underline{\mathbf{d}}_{jj}$, és $\underline{\dot{u}}_j \underline{\mathbf{d}}_{jj} = -\underline{\tilde{d}}_{jj} \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\mathbf{u}}_j$, átírható

$$\ddot{\underline{\mathbf{a}}}_j^{\text{rel}} = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\mathbf{u}}_j \dot{\beta}_j \\ \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\mathbf{c}}_i + \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\tilde{\omega}}_j \underline{\mathbf{d}}_{jj} - \underline{\mathbf{d}}_{jj} \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\mathbf{u}}_j \dot{\beta}_j + \underline{\tilde{u}}_j \underline{\tilde{\omega}}_j \underline{\mathbf{d}}_{jj} \dot{\beta}_j \end{bmatrix}$$

Továbbá $\underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\tilde{\omega}}_j \underline{\mathbf{d}}_{jj} + \underline{\tilde{u}}_j \underline{\tilde{\omega}}_j \underline{\mathbf{d}}_{jj} \dot{\beta}_j = \left(\underline{\tilde{\omega}}_i + \dot{\beta}_j \underline{\tilde{u}}_j \right) \underline{\tilde{\omega}}_j \underline{\mathbf{d}}_{jj} = \underline{\tilde{\omega}}_j \underline{\tilde{\omega}}_j \underline{\mathbf{d}}_{jj}$, így

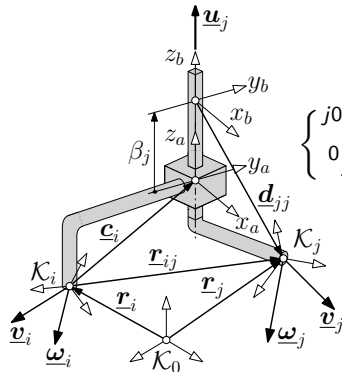
$$\ddot{\underline{\mathbf{a}}}_j^{\text{rel}} = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\mathbf{u}}_j \dot{\beta}_j \\ \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\mathbf{c}}_i + \underline{\tilde{\omega}}_j \underline{\tilde{\omega}}_j \underline{\mathbf{d}}_{jj} - \underline{\mathbf{d}}_{jj} \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\mathbf{u}}_j \dot{\beta}_j \end{bmatrix}$$

Példa: csúszka explicit kényszerei

Az alábbi csúszka $f_j = 1$ szabad csukló-koordinátának a β_j eltolódást választjuk, amely a csuklóhoz kötött $\mathcal{K}_b$ KR eltolódását írja le a $\mathcal{K}_a$ KR-hez képest az $\underline{u}_j$ forgástengely mentén.

Helyzetállapot

Az explicit kényszerek az $\check{\underline{r}}_i$ és $\check{\underline{r}}_j$ -re vonatkozóan:



$$\left\{ \begin{matrix} {}^{j0} \underline{T} \\ {}^0 \underline{r}_j \end{matrix} \right\} = \left\{ {}^0 \underline{r}_i + {}^{i0} \underline{T} \left({}^i \underline{c}_i + \beta_j {}^i \underline{u}_j + {}^{ai} \underline{T} {}^{ba} \underline{T} {}^b \underline{d}_{jj} \right) \right\}$$

azaz

$$\check{\underline{r}}_j = \check{\underline{r}}_j(\check{\underline{r}}_i, \beta_j)$$

Párhuzamos $\mathcal{K}_a$ és $\mathcal{K}_b$ csukló-KR-ek esetén ${}^{ba} \underline{T} = \underline{1}$.

Kinematikai differenciálegyenlet

A csukló-sebességkoordináta $\eta_j = \dot{\beta}_j$ szerinti definíciójával

$$\dot{\beta}_j = \eta_j \quad \left(\underline{\underline{H}}_j = 1 \right)$$

Sebességállapot

A relatív szögsebességre $\underline{\omega}_{ij} = \underline{0}$, míg a relatív sebességre $\underline{v}_{ij} = \dot{\beta}_j \underline{u}_j$ írható. Ezeket felhasználva:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\omega}_j \\ \underline{v}_j \end{bmatrix}}_{\underline{\check{v}}_j} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{r}}_{ij} & \underline{\underline{1}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{B}}_{ij}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\omega}_i \\ \underline{v}_i \end{bmatrix}}_{\underline{\check{v}}_i} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{u}_j \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{C}}_j} \underbrace{\dot{\beta}_j}_{\eta_j}, \quad \underline{\check{v}}_j = \underline{\underline{B}}_{ij} \underline{\check{v}}_i + \underline{\underline{C}}_j \eta_j$$

Gyorsulásállapot

A fenti egyenletet idő szerinti deriválva a gyorsulások explicit kényszereit a szokásos alakban írhatjuk:

$$\dot{\underline{\underline{v}}}_j = \underline{\underline{B}}_{ij} \dot{\underline{\underline{v}}}_i + \underline{\underline{C}}_j \dot{\underline{\underline{\eta}}}_j + \bar{\underline{\underline{a}}}_j^{\text{rel}}$$

Ahol

$$\bar{\underline{\underline{a}}}_j^{\text{rel}} \left(\underline{\underline{r}}_i, \underline{\underline{v}}_i, \underline{\underline{\beta}}_j, \underline{\underline{\eta}}_j, t \right) = \underline{\underline{B}}_{ij} \dot{\underline{\underline{v}}}_i + \underline{\underline{C}}_j \dot{\underline{\underline{\eta}}}_j + \frac{d\bar{\underline{\underline{v}}}_j^{\text{rel}}}{dt}$$

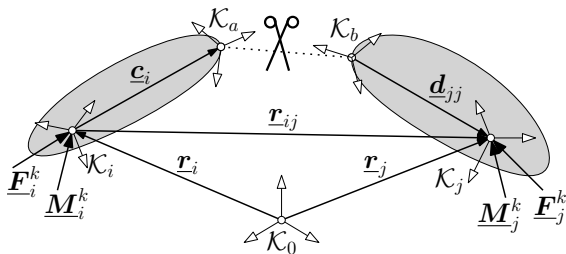
Kifejtve:

$$\bar{\underline{\underline{a}}}_j^{\text{rel}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \tilde{\underline{\underline{\omega}}}_i \dot{\underline{\underline{r}}}_{ij} + \dot{\underline{\underline{\beta}}}_j \dot{\underline{\underline{u}}}_j \end{bmatrix}$$

Figyelembe véve, hogy $\dot{\underline{\underline{u}}}_j = \tilde{\underline{\underline{\omega}}}_i \underline{\underline{u}}_j$ és $\dot{\underline{\underline{r}}}_{ij} = \tilde{\underline{\underline{\omega}}}_i \underline{\underline{r}}_{ij} + \dot{\underline{\underline{\beta}}}_j \underline{\underline{u}}_j$, a fenti összefüggés átírható

$$\bar{\underline{\underline{a}}}_j^{\text{rel}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \tilde{\underline{\underline{\omega}}}_i \left(\tilde{\underline{\underline{\omega}}}_i \underline{\underline{r}}_{ij} + 2\dot{\underline{\underline{\beta}}}_j \underline{\underline{u}}_j \right) \end{bmatrix}$$

Holonom csuklók kényszererői



Ha a csuklót képzeletben kettévágjuk, akkor a kényszererők- és nyomatékok összefoglalhatók egy (6×1) méretű erőcsavar-vektorba:

$$\check{\underline{f}}_i^k = \begin{bmatrix} \underline{M}_i^k \\ \underline{F}_i^k \end{bmatrix}, \quad \check{\underline{f}}_j^k = \begin{bmatrix} \underline{M}_j^k \\ \underline{F}_j^k \end{bmatrix}$$

Ahol $\check{\underline{f}}_i^k$ a $\mathcal{K}_j$ testről az O_i -be redukált vektorkettős, míg $\check{\underline{f}}_j^k$ a $\mathcal{K}_i$ testről az O_j -be redukált vektorkettős.

Explicit kényszererők

Az $\underline{\check{f}}_i^k$ és $\underline{\check{f}}_j^k$ kényszer-erőcsavarok a csuklók által gátolt irányokban fekszenek, melyeket a $(b_{ij} \times 12)$ méretű $\underline{\underline{G}}_{ij} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}_i & \underline{\underline{G}}_j \end{bmatrix}$ kényszmátrix sorai definiálnak. Következésképp b_{ij} számú $\underline{\lambda}_{ij}$ kényszererő-koordinátával az explicit kényszererők az alábbiak szerint írhatók:

$$\begin{bmatrix} \underline{\check{f}}_i^k \\ \underline{\check{f}}_j^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}_i^T \\ \underline{\underline{G}}_j^T \end{bmatrix} \underline{\lambda}_{ij}$$

Az explicit kényszererőket a zárt láncú többtest-rendszerek képzeletben kettévágott csuklóinál alkalmazzuk.

Implicit kényszererők

Az $\check{\underline{f}}_i^k$ és $\check{\underline{f}}_j^k$ kényszer-erőcsavarok a csuklók szabad irányaira merőlegesen állnak, melyeket a $(12 \times (6 + f_j))$ méretű $\underline{\underline{L}}_{ij}$ mátrix oszlopai definiálnak.

Következésképp kényszererők megadhatók az alábbi implicit módon:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{B}}_{ij}^T \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_j^T \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{L}}_{ij}^T} \begin{bmatrix} \check{\underline{f}}_i^k \\ \check{\underline{f}}_j^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}$$

Kifejtve:

$$\check{\underline{f}}_i^k + \underline{\underline{B}}_{ij}^T \check{\underline{f}}_j^k = \underline{\underline{0}} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_i^k \\ \underline{\underline{F}}_i^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{\tilde{r}}}_{ij} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_j^k \\ \underline{\underline{F}}_j^k \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\underline{\underline{C}}_j^T \check{\underline{f}}_j^k = \underline{\underline{0}} \quad (5)$$

A (4) implicit egyenlet a csukló típusától függetlenül érvényes. Az erő-ellenerő elvet fejezi ki a redukált vektorkettős O_i -ből O_j -be történő áthelyezésével együtt.

$$\begin{aligned}\underline{M}_i^k &= - \left(\underline{M}_j^k + \tilde{\underline{r}}_{ij} \underline{F}_j^k \right) \\ \underline{F}_i^k &= - \underline{F}_j^k\end{aligned}$$

Az (5) implicit egyenlet a csukló-specifikus $\underline{\underline{C}}_j$ tag miatt, függ a csukló típusától.

Példa: forgó csukló explicit kényszererői

Explicit kényszererők

A $\underline{\underline{G}}_{ij} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}_i & \underline{\underline{G}}_j \end{bmatrix}$ kényszermátrix segítségével felírható a b_{ij} számú kényszererő ($\underline{\underline{\lambda}}_{123} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}$):

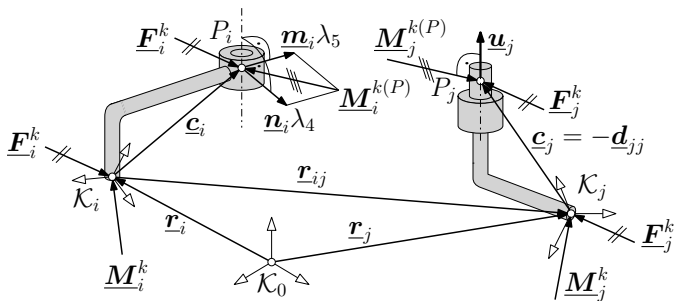
$$\check{\underline{f}}_i^k = \underline{\underline{G}}_i^T \underline{\underline{\lambda}}_{ij} \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{M}_i^k \\ \underline{F}_i^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{\tilde{c}}_i & -\underline{\tilde{u}}_j \underline{m}_i^T & -\underline{\tilde{u}}_j \underline{n}_i^T \\ -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\lambda}_{123} \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix}$$

$$\check{\underline{f}}_j^k = \underline{\underline{G}}_j^T \underline{\underline{\lambda}}_{ij} \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{M}_j^k \\ \underline{F}_j^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{c}}_j & \underline{\tilde{u}}_j \underline{m}_i^T & \underline{\tilde{u}}_j \underline{n}_i^T \\ \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\lambda}_{123} \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix}$$

A fizikai értelmezéshez redukáljuk ezt az erőcsavart a forgástengely valamely $P = P_i = P_j$ pontjára:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_i^{k(P)} \\ \underline{F}_i^{k(P)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{M}_i^k + (-\underline{\tilde{c}}_i) \underline{F}_i^k \\ \underline{F}_i^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{\tilde{u}}_j \underline{m}_i^T \lambda_4 - \underline{\tilde{u}}_j \underline{n}_i^T \lambda_5 \\ -\underline{\lambda}_{123} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_j^{k(P)} \\ \underline{F}_j^{k(P)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{M}_j^k + (-\underline{\tilde{c}}_j) \underline{F}_j^k \\ \underline{F}_j^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{u}}_j \underline{m}_i^T \lambda_4 + \underline{\tilde{u}}_j \underline{n}_i^T \lambda_5 \\ \underline{\lambda}_{123} \end{bmatrix}$$



- $\underline{M}_i^{k(P)}$ ill. $\underline{M}_j^{k(P)}$ merőleges a forgástengelyre.
- Erő-ellenerő elv érvényesül

Implicit kényszererők

A csukló típusától független (4) egyenletének fizikai tartalmát már ismertettük, itt is változatlan formában érvényes.

A csukló típusától függő implicit kényszererők a forgó csuklóra felírt $\underline{\underline{C}}_j$ mátrix segítségével:

$$\underline{\underline{C}}_j^T \check{\underline{f}}_j^k = \underline{0} \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} \underline{u}_j^T & \underline{u}_j^T \tilde{\underline{d}}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{M}_j^k \\ \underline{F}_j^k \end{bmatrix} = 0$$

Kifejtve:

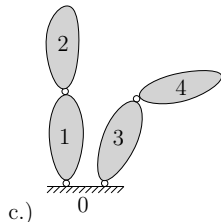
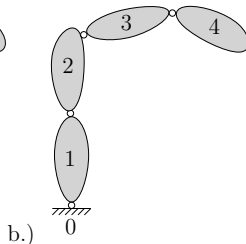
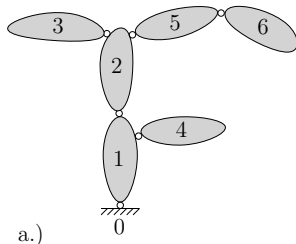
$$\underline{u}_j^T \left(\underline{M}_j^k + \tilde{\underline{d}}_{jj} \underline{F}_j^k \right) = 0$$

Ha a P pontot tekintjük, akkor $\underline{d}_{jj} = \underline{0}$, és így

$$\underline{u}_j^T \underline{M}_j^{k(P)} = 0$$

azaz a forgó csukló forgástengelyén lévő P pontra számított nyomaték merőlege az $\underline{u}_j$ forgástengelyre.

Nyílt láncú többtest-rendszerek topológiája



- A testek száma (n_t , állvány nélkül) megegyezik a csuklók számával (n_c), azaz $n = n_t = n_c$.
- Az állványtól bármely testhez egyértelmű út vezet.
- Minden testhez tartozik öt megelőző test.
- Elágazási hely egy testet több másik test követ.
- Állványtól (0) haladva mindig emelkedő a számozás.

A topológiai leírás visszaadja, hogy mely testeket kötnek csuklók össze. Ehhez az **S** incidenciamátrixot (illeszkedési mátrix) és a **T** útmátrixot vezetjük be. Mindkettő mérete $(n \times n)$.

Az **S** incidenciamátrix az i -ik testet megelőző $p(i)$ testet adja meg. Az **S** incidenciamátrix S_{ij} elemei az alábbiak szerint vesznek fel értéket:

$$S_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ -1 & \text{ha } j = p(i) \\ 0 & \text{minden más esetben} \end{cases}$$

Az előző a.) ábrán vázolt rendszer esetén:

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Az emelkedő számozás miatt alsó háromszög mátrix, főátlóban egyesekkel.

A $\underline{\underline{T}}$ útmátrix megadja, hogy mely testek találhatók meg az állványtól egy adott testig haladva. A T_{ij} elemei az alábbiak szerint vesznek fel értéket:

$$T_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 1 & \text{ha a } j \text{ test a 0-tól az } i \text{ test felé vezető úton található} \\ 0 & \text{minden más esetben} \end{cases}$$

A $\underline{\underline{T}}$ útmátrix az $\underline{\underline{S}}$ incidenciamátrix inverze, azaz

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{S}}^{-1} \quad \text{vagy} \quad \underline{\underline{T}} \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{1}}$$

Az a.) ábrán vázolt rendszer esetén:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Az útmátrix szintén alsó háromszög mátrix, főátlóban egyesekkel.

A lánc struktúrájú, b.) ábrán vázolt rendszer esetén:

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A c.) ábrán vázolt rendszer esetén:

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$