

# Mechanizmusok és robotok

## 6. előadás

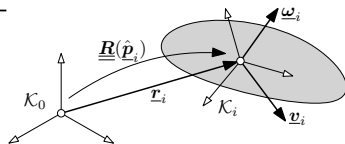
Töbtest-rendszerek csuklóinak kényszerei

## Merev test mozgásának mennyiségei

Merev testek kinematikai mennyiségei a test helyzet- sebesség- és gyorsulásállapotát írják le.

**Helyzetállapotot** az  $i$ -ik testhez kötött  $\mathcal{K}_i$  KR helyzetét leíró  $(7 \times 1)$ -es vektor adja meg, amely az Euler paramétereket és a KR helyvektorát tartalmazza.

$$\underline{\check{r}}_i = \begin{bmatrix} \underline{\hat{p}}_i \\ \underline{r}_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n_t$$



Az orientációt sok esetben a  ${}^0\underline{R}_i = {}^{i0}\underline{T}$  forgató mátrixszal közvetlenül is megadhatjuk. Ilyenkor a KR helyvektor és a forgató mátrixból képzett mennyiség adja a test helyzetét:

$$\underline{\check{r}}_i = \left\{ \underline{R}_i, \underline{r}_i \right\}$$

A **sebességállapotot** a testhez kötött  $\mathcal{K}_i$  KR  $\underline{\omega}_i$  szögsebessége és origójának  $\underline{v}_i = \dot{\underline{r}}_i$  sebessége határozza meg, melyet a  $(6 \times 1)$ -es

$$\underline{\check{v}}_i = \begin{bmatrix} \underline{\omega}_i \\ \underline{v}_i \end{bmatrix}$$

vektorba foglaljuk össze.

A szögsebesség és az Euler-paraméterek idő szerinti deriváltjai közötti kapcsolatot leíró  ${}_0\dot{\underline{p}}_i = \frac{1}{2}\underline{\overline{P}}_i(\hat{\underline{p}}_i)\underline{\hat{\omega}}_i$  egyenletet (3. előadás, 22.o.) úgy írjuk fel, hogy az  $\underline{\hat{\omega}}_i$  kvaterniónak csak a vektor részét tüntetjük fel (a skalár rész zérus), és emiatt  $\underline{\overline{P}}$ -nek első oszlopát szintén elhagyjuk:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{p}_{si} \\ {}_0\dot{\underline{p}}_i \end{bmatrix}}_{{}_0\dot{\underline{p}}_i} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} -\underline{p}_i^T \\ p_{si}\underline{1} - \tilde{\underline{p}}_i \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{H}}_i(\hat{\underline{p}}_i)} \underline{\omega}_i$$

Az  $i$ -ik testre összességében az alábbi kinematikai mozgásegyenlet érvényes:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{\hat{p}}}_i \\ \dot{\underline{r}}_i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{H}}_i(\underline{\hat{p}}_i) & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\check{H}}}_i} \begin{bmatrix} \underline{\omega}_i \\ \underline{v}_i \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \dot{\underline{r}}_i = \underline{\underline{\check{H}}}_i \underline{v}_i$$

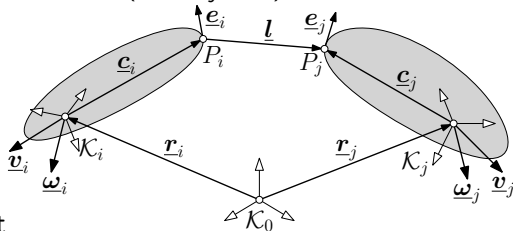
A **gyorsulásállapotot** a testhez kötött  $\mathcal{K}_i$  KR  $\underline{\varepsilon}_i = \underline{\omega}_i$  szöggyorsulása és origójának  $\underline{a}_i = \underline{\dot{v}}_i$  gyorsulása határozza meg, melyet a sebességállapot idő szerinti deriváltjaként kapunk meg. A gyorsulásmennyiségek a  $(6 \times 1)$ -es

$$\underline{\dot{v}}_i = \begin{bmatrix} \dot{\underline{v}}_i \\ \underline{\dot{v}}_i \end{bmatrix} \quad \text{illetve} \quad \underline{\check{a}}_i = \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_i \\ \underline{a}_i \end{bmatrix}$$

vektorba foglalhatók össze.

## Csuklók implicit holonom kényszerei

Csuklók implicit holonom kényszerei két test relatív helyzetét, sebességét és gyorsulását befolyásolják. Elsősorban zárt láncú rendszereknél használjuk. Egy kinematikai lánc  $\mathcal{K}_i$  és  $\mathcal{K}_j$  testjeit egy  $b_{ij} = b_{Hij}$  holonom kényszerrel leírható csukló köti össze ( $0 \leq b_{ij} \leq 6$ ).



### Helyzetállapot

A  $\mathcal{K}_j$  test  $\mathcal{K}_i$ -hoz viszonyított helyzetét  $b_{ij}$  geometriai kényszerkapcsolat korlátozza:

$$\begin{bmatrix} g_1(\underline{\check{r}}_i, \underline{\check{r}}_j, t) \\ \vdots \\ g_{b_{ij}}(\underline{\check{r}}_i, \underline{\check{r}}_j, t) \end{bmatrix}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \underline{g}_{ij}(\underline{\check{r}}_i, \underline{\check{r}}_j, t) = \underline{0}$$

## Sebességállapot

A helyzetállapot kényszereinek teljes idő szerinti deriváltjaként lineáris kényszerekt kapunk  $\underline{\check{r}}_i$ -re és  $\underline{\check{r}}_j$ -re:

$$\frac{d\underline{\mathbf{g}}_{ij}}{dt} = \frac{\partial \underline{\mathbf{g}}_{ij}}{\partial \underline{\check{r}}_i} \frac{d\underline{\check{r}}_i}{dt} + \frac{\partial \underline{\mathbf{g}}_{ij}}{\partial \underline{\check{r}}_j} \frac{d\underline{\check{r}}_j}{dt} + \frac{\partial \underline{\mathbf{g}}_{ij}}{\partial t} = \underline{\mathbf{0}}$$

amelybe  $\underline{\check{r}}_i = \underline{\check{H}}_i \underline{\check{v}}_i$  összefüggést behelyettesítve:

$$\underline{\dot{\mathbf{g}}}_{ij} = \underline{\mathbf{G}}_i \underline{\check{v}}_i + \underline{\mathbf{G}}_j \underline{\check{v}}_j + \underline{\bar{\gamma}}_{ij} = \underline{\mathbf{0}}$$

ahol  $\underline{\mathbf{G}}_i$  és  $\underline{\mathbf{G}}_j$  a csukló  $(b_{ij} \times 6)$  méretű kényszermátrixa:

$$\underline{\mathbf{G}}_i(\underline{\check{r}}_i, \underline{\check{r}}_j) = \frac{\partial \underline{\mathbf{g}}_{ij}}{\partial \underline{\check{r}}_i} \underline{\check{H}}_i, \quad \underline{\mathbf{G}}_j(\underline{\check{r}}_i, \underline{\check{r}}_j) = \frac{\partial \underline{\mathbf{g}}_{ij}}{\partial \underline{\check{r}}_j} \underline{\check{H}}_j$$

illetve a csak reonom kényszereknél fellépő  $(b_{ij} \times 1)$  méretű  $\underline{\bar{\gamma}}_{ij}$  vektor:

$$\underline{\bar{\gamma}}_{ij}(\underline{\check{r}}_i, \underline{\check{r}}_j, t) = \frac{\partial \underline{\mathbf{g}}_{ij}}{\partial t}$$

Megjegyzés: ha a helyzetállapot kényszereit vektoriálisan fogalmazzuk meg, akkor az abban megjelenő vektorok idő szerinti deriváltjait  $\underline{\omega}_i$  és  $\underline{\omega}_j$  segítségével közvetlenül kifejezhetjük. Ily módon megkapjuk a  $\underline{\underline{G}}_i$  és  $\underline{\underline{G}}_j$  kényszermátrixokat, a  $\underline{g}_{ij}$  helyzet szerinti parciális deriválása nélkül.

### Gyorsulásállapot

A sebességállapot kényszereinek teljes idő szerinti deriváltjaként megkapjuk a gyorsulások kényszeregyenleteit:

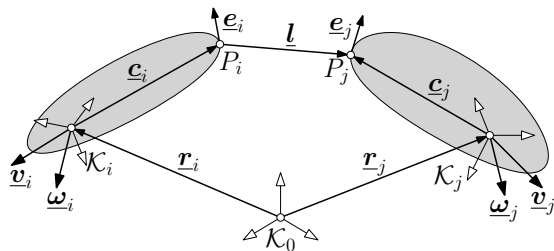
$$\ddot{\underline{g}}_{ij} = \underline{\underline{G}}_i \dot{\underline{v}}_i + \underline{\underline{G}}_j \dot{\underline{v}}_j + \ddot{\underline{\gamma}}_{ij} = \underline{0}$$

ahol a  $\dot{\underline{v}}_i$  és  $\dot{\underline{v}}_j$  gyorsulásoktól nem függő  $(b_{ij} \times 1)$  méretű  $\ddot{\underline{\gamma}}_{ij}$  vektor:

$$\ddot{\underline{\gamma}}_{ij}(\underline{r}_i, \underline{r}_j, \underline{v}_i, \underline{v}_j, t) = \underline{\dot{G}}_i \underline{v}_i + \underline{\dot{G}}_j \underline{v}_j + \frac{d\bar{\gamma}_{ij}}{dt}$$

# Csuklók elemi implicit kényszerei

A gyakori csuklófajták kényszerei kifejezhetők a két test testhez kötött  $P_i$  és  $P_j$  pontjai, az őket összekötő  $\underline{l}$  vektor és a testekhez kötött  $\underline{e}_i$  és  $\underline{e}_j$  irányok segítségével. A következőkben ismertetett 4 elemi kényszertípusból számos csukló kényszerei felírhatók.

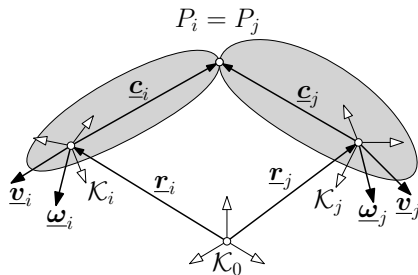


# I. kényszertípus: Egybeeső $P_i$ és $P_j$ pontok

## Helyzetállapot

A  $\mathcal{K}_i$  és  $\mathcal{K}_j$  testek  $P_i$  és  $P_j$  pontjai egybeesnek, emiatt  $\underline{l} = \underline{0}$ . Így három kényszeregyenletet jelentő vektoregyenletet írhatunk fel:

$$\underline{g}_{ij} = \underline{l} = \underline{r}_j + \underline{c}_j - \underline{r}_i - \underline{c}_i = \underline{0}$$



## Sebességállapot

Idő szerint deriválva a fenti egyenletet, írhatjuk, hogy

$$\dot{\underline{l}} = \dot{\underline{r}}_j + \dot{\underline{c}}_j - \dot{\underline{r}}_i - \dot{\underline{c}}_i = \underline{0}$$

Behelyettesítve az idő szerinti deriválásokra az alábbi

$$\dot{\underline{r}}_i = \underline{v}_i, \quad \dot{\underline{r}}_j = \underline{v}_j, \quad \dot{\underline{c}}_i = \tilde{\underline{\omega}}_i \underline{c}_i = -\tilde{\underline{c}}_i \underline{\omega}_i, \quad \dot{\underline{c}}_j = \tilde{\underline{\omega}}_j \underline{c}_j = -\tilde{\underline{c}}_j \underline{\omega}_j$$

összefüggéseket, kapjuk, hogy

$$\dot{\underline{g}}_{ij} = \dot{\underline{l}} = \underline{v}_j - \tilde{\underline{c}}_j \underline{\omega}_j - \underline{v}_i + \tilde{\underline{c}}_i \underline{\omega}_i = \underline{0}$$

Utóbbi egyenlet a szokásos alakra hozható

$$\underline{\dot{g}}_{ij} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\tilde{c}}_i & -\underline{\underline{1}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{G}}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\omega}_i \\ \underline{v}_i \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{v}}_i} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\underline{\tilde{c}}_j & \underline{\underline{1}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{G}}_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\omega}_j \\ \underline{v}_j \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{v}}_j} = \underline{\underline{0}}$$

Mivel a kényszer szkleronom, ezért  $\underline{\tilde{\gamma}}_{ij} = \underline{\underline{0}}$ .

## Gyorsulásállapot

A sebességállapotra vonatkozó egyenlet idő szerinti deriváltja

$$\underline{\ddot{g}}_{ij} = \underline{\dot{l}} = \underline{\dot{v}}_j - \underline{\tilde{c}}_j \underline{\dot{\omega}}_j - \underline{\dot{\tilde{c}}}_j \underline{\omega}_j - \underline{\dot{v}}_i + \underline{\tilde{c}}_i \underline{\dot{\omega}}_i + \underline{\dot{\tilde{c}}}_i \underline{\omega}_i = \underline{\underline{0}}$$

Az egyenlet szintén a szokásos alakra hozható:

$$\underline{\ddot{g}}_{ij} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\tilde{c}}_i & -\underline{\underline{1}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{G}}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\dot{\omega}}_i \\ \underline{\dot{v}}_i \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\dot{v}}}_i} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\underline{\tilde{c}}_j & \underline{\underline{1}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{G}}_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\dot{\omega}}_j \\ \underline{\dot{v}}_j \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\dot{v}}}_j} + \underline{\underline{\ddot{\gamma}}}_{ij} = \underline{\underline{0}}$$

ahol

$$\underline{\underline{\ddot{\gamma}}}_{ij} = \underline{\dot{\tilde{c}}}_i \underline{\omega}_i - \underline{\dot{\tilde{c}}}_j \underline{\omega}_j = \underline{\tilde{\omega}}_j \underline{\tilde{\omega}}_j \underline{c}_j - \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{c}_i$$

## II. kényszertípus: $\underline{l}$ vetítése $\underline{e}_i$ -re ( $b_{ij} = 1$ )

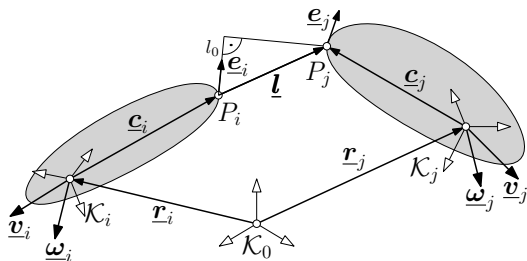
### Helyzetállapot

A  $P_i$  és  $P_j$  pontjokat összekötő  $\underline{l}$  vektor vetülete a  $\mathcal{K}_i$  test  $\underline{e}_i$  irányára konstans. Azaz

$$g_{ij} = \underline{e}_i^T \underline{l} - l_0 = 0$$

ahol

$$\underline{l} = \underline{r}_j + \underline{c}_j - \underline{r}_i - \underline{c}_i$$



### Sebességállapot

Deriváljuk idő szerint a fenti összefüggést:

$$\dot{g}_{ij} = \dot{\underline{e}}_i^T \underline{l} + \underline{e}_i^T \dot{\underline{l}} = 0$$

ahol

$$\dot{\underline{e}}_i = \tilde{\underline{\omega}}_i \underline{e}_i = -\tilde{\underline{e}}_i \underline{\omega}_i, \quad \dot{\underline{l}} = \underline{v}_j - \tilde{\underline{c}}_j \underline{\omega}_j - \underline{v}_i + \tilde{\underline{c}}_i \underline{\omega}_i$$

Figyelembe véve, hogy  $\dot{\underline{e}}_i^T \underline{l} = \underline{l}^T \dot{\underline{e}}_i = \underline{l}^T \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{e}_i = \underline{e}_i^T \left( \underline{\tilde{l}} \underline{\omega}_i \right)$ , a sebességállapot kényszeregyenlete:

$$\dot{g}_{ij} = \underbrace{\left[ \underline{e}_i^T \left( \underline{\tilde{c}}_i + \underline{\tilde{l}} \right) \quad -\underline{e}_i^T \right]}_{\underline{\underline{G}}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\omega}_i \\ \underline{v}_i \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{v}}_i} + \underbrace{\left[ -\underline{e}_i^T \underline{\tilde{c}}_j \quad \underline{e}_i^T \right]}_{\underline{\underline{G}}_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\omega}_j \\ \underline{v}_j \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{v}}_j} = 0$$

## Gyorsulásállapot

A sebességállapotra vonatkozó egyenlet idő szerinti deriváltja

$$\ddot{g}_{ij} = \ddot{\underline{e}}_i^T \underline{l} + 2\dot{\underline{e}}_i^T \underline{l} + \underline{e}_i^T \ddot{\underline{l}} = 0$$

ahol

$$\ddot{\underline{l}} = \dot{\underline{v}}_j - \underline{\tilde{c}}_j \dot{\underline{\omega}}_j - \underline{\dot{\tilde{c}}}_j \underline{\omega}_j - \dot{\underline{v}}_i + \underline{\tilde{c}}_i \dot{\underline{\omega}}_i + \underline{\dot{\tilde{c}}}_i \underline{\omega}_i \quad \text{és} \quad \ddot{\underline{e}}_i = \underline{\dot{\tilde{\omega}}}_i \underline{e}_i + \underline{\tilde{\omega}}_i \dot{\underline{e}}_i$$

így a szokásos alakra hozható:

$$\ddot{g}_{ij} = \underbrace{\left[ \underline{e}_i^T \left( \underline{\tilde{c}}_i + \underline{\tilde{l}} \right) \quad -\underline{e}_i^T \right]}_{\underline{\underline{G}}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\dot{\omega}}_i \\ \underline{\dot{v}}_i \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\dot{v}}}_i} + \underbrace{\left[ -\underline{e}_i^T \underline{\tilde{c}}_j \quad \underline{e}_i^T \right]}_{\underline{\underline{G}}_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\dot{\omega}}_j \\ \underline{\dot{v}}_j \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\dot{v}}}_j} + \underline{\underline{\ddot{\gamma}}}_{ij} = 0$$

ahol

$$\bar{\gamma}_{ij} = \underline{l}^T \underline{\dot{\omega}}_i \underline{e}_i + \underline{e}_i^T \left( \underline{\dot{c}}_i \underline{\omega}_i - \underline{\dot{c}}_j \underline{\omega}_j \right) + 2 \underline{\dot{e}}_i^T \underline{l}$$

amely kifejezésben

$$\underline{\dot{c}}_i = \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{c}_i = -\underline{\tilde{c}}_i \underline{\omega}_i$$

$$\underline{\dot{c}}_j = \underline{\tilde{\omega}}_j \underline{c}_j = -\underline{\tilde{c}}_j \underline{\omega}_j$$

$$\underline{\dot{l}} = \underline{v}_j - \underline{\tilde{c}}_j \underline{\omega}_j - \underline{v}_i + \underline{\tilde{c}}_i \underline{\omega}_i$$

$$\underline{\dot{e}}_i = \underline{\tilde{\omega}}_i \underline{e}_i = -\underline{\tilde{e}}_i \underline{\omega}_i$$

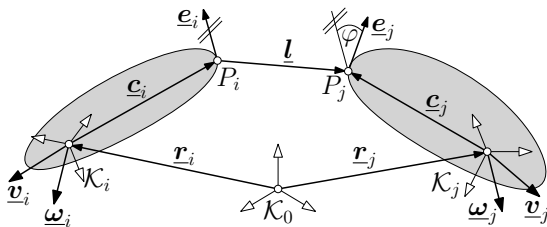
behelyettesítésével  $\bar{\gamma}_{ij}$ -ben nem szerepel koordinátagyorsulás.

### III. kényszertípus: $\underline{e}_i$ és $\underline{e}_j$ közötti szög ( $b_{ij} = 1$ )

#### Helyzetállapot

A  $\mathcal{K}_i$  test  $\underline{e}_i$  irányvektora és a  $\mathcal{K}_j$  test  $\underline{e}_j$  irányvektora közötti szög konstans. Azaz

$$g_{ij} = \underline{e}_i^T \underline{e}_j - \cos \varphi = 0$$



#### Sebességállapot

Deriváljuk idő szerint a fenti összefüggést:

$$\dot{g}_{ij} = \dot{\underline{e}}_i^T \underline{e}_j + \underline{e}_i^T \dot{\underline{e}}_j = 0$$

ahol

$$\dot{\underline{e}}_i = \tilde{\underline{\omega}}_i \underline{e}_i = -\tilde{\underline{e}}_i \underline{\omega}_i, \quad \dot{\underline{e}}_j = \tilde{\underline{\omega}}_j \underline{e}_j = -\tilde{\underline{e}}_j \underline{\omega}_j$$

mivel  $\dot{\underline{e}}_i^T \underline{e}_j = \underline{e}_j^T \dot{\underline{e}}_i = \underline{e}_j^T \tilde{\underline{\omega}}_i \underline{e}_i = \underline{e}_i^T \tilde{\underline{e}}_j \underline{\omega}_j$  így a sebességállapotra:

$$\dot{g}_{ij} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{e}_i^T \tilde{\underline{e}}_j & \underline{0}^T \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{G}}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\omega}_j \\ \underline{v}_j \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{v}}_j} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\underline{e}_i^T \tilde{\underline{e}}_j & \underline{0}^T \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{G}}_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\omega}_j \\ \underline{v}_j \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{v}}_j} = 0$$

## Gyorsulásállapot

A sebességállapotra vonatkozó egyenlet idő szerinti deriváltja

$$\ddot{g}_{ij} = \ddot{\underline{e}}_i^T \underline{e}_j + \underline{e}_i^T \ddot{\underline{e}}_j + 2\dot{\underline{e}}_i^T \dot{\underline{e}}_j = 0$$

ahol

$$\ddot{\underline{e}}_i = \ddot{\underline{\omega}}_i \underline{e}_i + \underline{\omega}_i \dot{\underline{e}}_i, \quad \ddot{\underline{e}}_j = \ddot{\underline{\omega}}_j \underline{e}_j + \underline{\omega}_j \dot{\underline{e}}_j$$

így a szokásos alakra hozható:

$$\ddot{g}_{ij} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{e}_i^T \ddot{\underline{e}}_j & \underline{0}^T \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{G}}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\underline{\omega}}_i \\ \dot{\underline{v}}_i \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\dot{v}}}_i} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\underline{e}_i^T \ddot{\underline{e}}_j & \underline{0}^T \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{G}}_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\underline{\omega}}_j \\ \dot{\underline{v}}_j \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\dot{v}}}_j} + \bar{\bar{\gamma}}_{ij} = 0$$

ahol

$$\bar{\bar{\gamma}}_{ij} = \underline{e}_j^T \ddot{\underline{\omega}}_i \underline{e}_i + \underline{e}_i^T \ddot{\underline{\omega}}_j \underline{e}_j + 2\dot{\underline{e}}_i^T \dot{\underline{e}}_j$$

$$\bar{\bar{\gamma}}_{ij} = \underline{e}_i^T (\ddot{\underline{\omega}}_i \ddot{\underline{\omega}}_i + \ddot{\underline{\omega}}_j \ddot{\underline{\omega}}_j - 2\ddot{\underline{\omega}}_i \ddot{\underline{\omega}}_j) \underline{e}_j$$

gyorsuláskoordinátákat nem tartalmazó kifejezés.

## IV. kényszertípus: $P_i$ és $P_j$ közötti távolság ( $b_{ij} = 1$ )

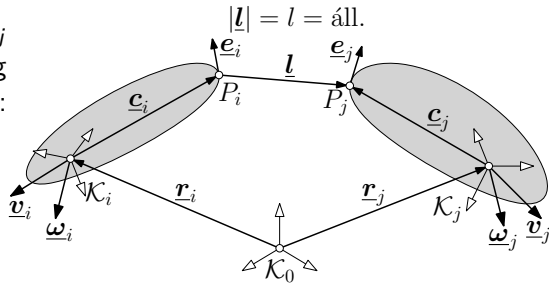
### Helyzetállapot

A  $\mathcal{K}_i$  test  $P_i$  pontja és a  $\mathcal{K}_j$  test  $P_j$  pontja közötti távolság állandó. Azaz annak négyzete:

$$g_{ij} = \frac{1}{2} (\underline{l}^T \underline{l} - l^2) = 0$$

ahol

$$\underline{l} = \underline{r}_j + \underline{c}_j - \underline{r}_i - \underline{c}_i$$



### Sebességállapot

Deriváljuk idő szerint a fenti összefüggést:

$$\dot{g}_{ij} = \dot{\underline{l}}^T \underline{l} = 0 \quad \text{ahol} \quad \dot{\underline{l}} = \underline{v}_j - \tilde{\underline{c}}_j \underline{\omega}_j - \underline{v}_i + \tilde{\underline{c}}_i \underline{\omega}_i$$

így a sebességállapot kényszeregyenletét a szokásos formában felírva:

$$\dot{g}_{ij} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{l}^T \tilde{\underline{c}}_i & -\underline{l}^T \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{G}}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\omega}_i \\ \underline{v}_i \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{v}}_i} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\underline{l}^T \tilde{\underline{c}}_j & \underline{l}^T \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{G}}_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\omega}_j \\ \underline{v}_j \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{v}}_j} = 0$$

## Gyorsulásállapot

A sebességállapotra vonatkozó egyenlet idő szerinti deriváltja

$$\ddot{\underline{g}}_{ij} = \ddot{\underline{l}}^T \underline{l} + \dot{\underline{l}}^T \dot{\underline{l}} = 0$$

ahol

$$\dot{\underline{l}} = \dot{\underline{v}}_j - \tilde{\underline{c}}_j \dot{\underline{\omega}}_j - \dot{\tilde{\underline{c}}}_j \underline{\omega}_j - \dot{\underline{v}}_i + \tilde{\underline{c}}_i \dot{\underline{\omega}}_i + \dot{\tilde{\underline{c}}}_i \underline{\omega}_i$$

így a szokásos alakra hozható:

$$\ddot{\underline{g}}_{ij} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{l}^T \tilde{\underline{c}}_i & -\underline{l}^T \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{G}}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\underline{\omega}}_i \\ \dot{\underline{v}}_i \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{\underline{v}}}_i} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\underline{l}^T \tilde{\underline{c}}_j & \underline{l}^T \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{G}}_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\underline{\omega}}_j \\ \dot{\underline{v}}_j \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{\underline{v}}}_j} + \bar{\underline{\underline{\gamma}}}_{ij} = 0$$

ahol

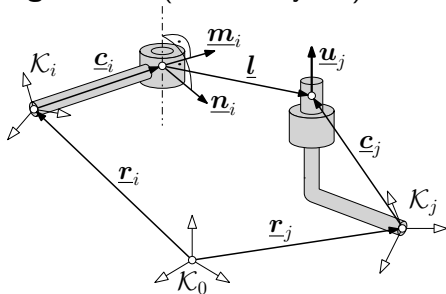
$$\bar{\underline{\underline{\gamma}}}_{ij} = \underline{l}_j^T (\tilde{\underline{\omega}}_j \dot{\underline{c}}_j - \tilde{\underline{\omega}}_i \dot{\underline{c}}_i) + \dot{\underline{l}}^T \dot{\underline{l}}$$

gyorsuláskoordinátákat nem tartalmazó kifejezés.

# Holonom csuklók implicit kényszerei

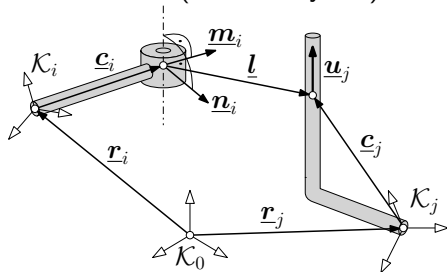
Az alábbiakban a szokványos csuklók kényszereinek felépítését mutatja az elemi kényszerekből.

**Forgó csukló ( $b = 5$  kényszer)**



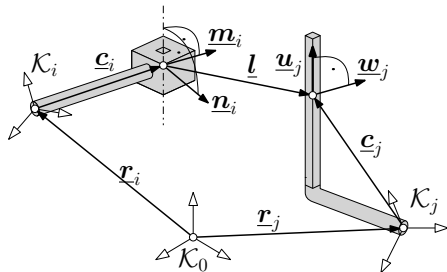
$$\begin{aligned} \text{I:} & \left[ \frac{l}{\underline{m}_i^T \underline{u}_j} \right] = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3e \\ 1e \\ 1e \end{matrix} \\ \text{III:} & \left[ \frac{\underline{m}_i^T \underline{u}_j}{\underline{n}_i^T \underline{u}_j} \right] = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1e \\ 1e \\ 1e \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\underline{g}_{ij}(\underline{\check{r}}_i, \underline{\check{r}}_j) = \underline{0} \quad 5 \text{ egyenlet}$$

Csúszó csukló ( $b = 4$  kényszer)

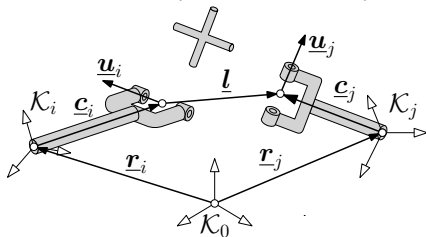
$$\begin{array}{ll} \text{II:} & \begin{bmatrix} \underline{m}_i^T \underline{l} \\ \underline{n}_i^T \underline{l} \end{bmatrix} \\ \text{III:} & \begin{bmatrix} \underline{m}_i^T \underline{u}_j \\ \underline{n}_i^T \underline{u}_j \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1e \\ 1e \\ 1e \\ 1e \end{array}$$

$$\underline{g}_{ij}(\check{\underline{r}}_i, \check{\underline{r}}_j) = \underline{0} \quad 4 \text{ egyenlet}$$

Csúszka ( $b = 5$  kényszer)

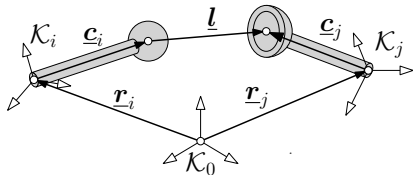
$$\begin{array}{ll} \text{II:} & \begin{bmatrix} \underline{m}_i^T \underline{l} \\ \underline{n}_i^T \underline{l} \end{bmatrix} \\ \text{III:} & \begin{bmatrix} \underline{m}_i^T \underline{u}_j \\ \underline{n}_i^T \underline{u}_j \end{bmatrix} \\ \text{III:} & \begin{bmatrix} \underline{m}_i^T \underline{w}_j \\ \underline{n}_i^T \underline{w}_j \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1e \\ 1e \\ 1e \\ 1e \\ 1e \end{array}$$

$$\underline{g}_{ij}(\check{\underline{r}}_i, \check{\underline{r}}_j) = \underline{0} \quad 5 \text{ egyenlet}$$

Kardán-csukló ( $b = 4$  kényszer)

$$\text{I: } \begin{bmatrix} \underline{l} \\ \underline{u}_i^T \underline{u}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 3e \\ 1e \end{matrix}$$

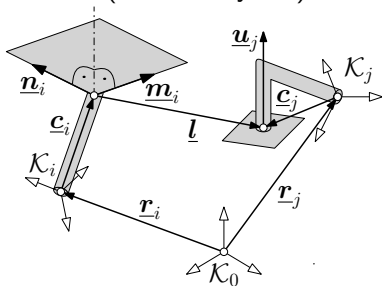
$$\underline{g}_{ij}(\underline{\check{r}}_i, \underline{\check{r}}_j) = \underline{0} \quad 4 \text{ egyenlet}$$

Gömbcsukló ( $b = 3$  kényszer)

$$\text{I: } [\underline{l}] = [\underline{0}] \quad 3e$$

$$\underline{g}_{ij}(\underline{\check{r}}_i, \underline{\check{r}}_j) = \underline{0} \quad 3 \text{ egyenlet}$$

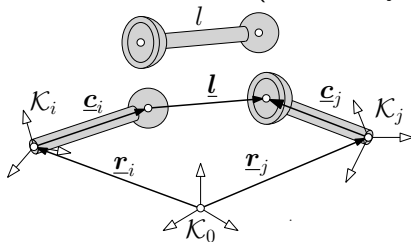
## Sík támasz ( $b = 3$ kényszer)



$$\begin{aligned} \text{II:} & \left[ \begin{array}{c} \underline{l}^T \underline{u}_j \\ \underline{m}_j^T \underline{u}_j \\ \underline{n}_j^T \underline{u}_j \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} 1\text{e} \\ 1\text{e} \\ 1\text{e} \end{array} \\ \text{III:} & \end{aligned}$$

$$\underline{g}_{ij}(\underline{\check{r}}_i, \underline{\check{r}}_j) = \underline{0} \quad 3 \text{ egyenlet}$$

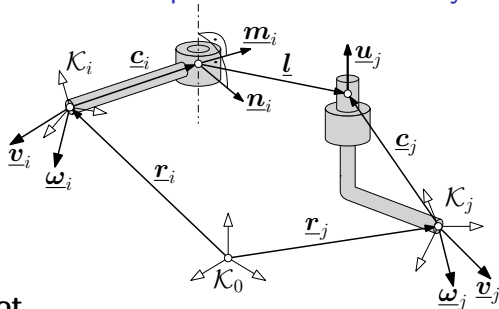
## Gömbcsuklós támasz ( $b = 1$ kényszer)



$$\text{IV:} \quad \frac{1}{2} \left( \underline{l}^T \underline{l} - l^2 \right) = 0 \quad 1\text{e}$$

$$\underline{g}_{ij}(\underline{\check{r}}_i, \underline{\check{r}}_j) = 0 \quad 1 \text{ egyenlet}$$

## Példa: forgó csukló implicit holonom kényszerei



### Helyzetállapot

A forgástengelyen lévő  $P_i$  és  $P_j$  pontok egybeesnek (I. típus), továbbá a  $K_j$  testhez kötött, forgástengellyel párhuzamos  $\underline{u}_j$  vektor merőleges a  $K_i$  testhez kötött forgástengely  $\underline{n}_i$  és  $\underline{m}_i$  normálvektoraira (kétszer III. típus).

$$\begin{aligned} \text{I:} & \left[ \underline{r}_j + \underline{c}_j - \underline{r}_i - \underline{c}_i \right] = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 3\text{e} \\ \text{III:} & \left[ \begin{array}{c} \underline{m}_i^T \underline{u}_j \\ \underline{n}_i^T \underline{u}_j \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1\text{e} \\ 1\text{e} \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\underline{g}_{ij}(\underline{r}_i, \underline{r}_j) = \underline{0} \quad 5 \text{ egyenlet}$$

## Sebességállapot

A sebességállapot implicit kényszereit az I. típus és két III. típus kényszeregyenleteiből kapjuk:

$$\dot{\underline{g}}_{ij} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\underline{c}}_j & -\underline{1} \\ \underline{m}_i^T \tilde{\underline{u}}_j & \underline{0}^T \\ \underline{n}_i^T \tilde{\underline{u}}_j & \underline{0}^T \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{G}}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\omega}_i \\ \underline{v}_i \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{v}}_i} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\tilde{\underline{c}}_j & \underline{1} \\ -\underline{m}_i^T \tilde{\underline{u}}_j & \underline{0}^T \\ -\underline{n}_i^T \tilde{\underline{u}}_j & \underline{0}^T \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{G}}_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\omega}_j \\ \underline{v}_j \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{v}}_j} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

## Gyorsulásállapot

A gyorsulásállapot a kétfajta kényszertípussal a szokásos alakban:

$$\ddot{\underline{g}}_{ij} = \underline{\underline{G}}_i \dot{\underline{v}}_i + \underline{\underline{G}}_j \dot{\underline{v}}_j + \bar{\underline{\gamma}}_{ij} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

ahol

$$\bar{\underline{\gamma}}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{\underline{\omega}}_j \tilde{\underline{\omega}}_j \underline{c}_j - \tilde{\underline{\omega}}_i \tilde{\underline{\omega}}_i \underline{c}_j \\ \underline{m}_i^T (\tilde{\underline{\omega}}_i \tilde{\underline{\omega}}_i + \tilde{\underline{\omega}}_j \tilde{\underline{\omega}}_j - 2\tilde{\underline{\omega}}_i \tilde{\underline{\omega}}_j) \underline{u}_j \\ \underline{n}_i^T (\tilde{\underline{\omega}}_i \tilde{\underline{\omega}}_i + \tilde{\underline{\omega}}_j \tilde{\underline{\omega}}_j - 2\tilde{\underline{\omega}}_i \tilde{\underline{\omega}}_j) \underline{u}_j \end{bmatrix}$$