

# Mechanizmusok és robotok

## 5. előadás

Kötöttségekkel rendelkező mechanikai rendszerek (folytatás),  
Töbtest-rendszerek kényszerkapcsolatai

## Mozgásegyenletek függő koordinátákkal

A holonom tömegpontrendszer mozgásegyenleteit az egymástól függő  $\underline{r}$  helyzetkoordináták függvényében az alábbi egyenletekből kapjuk:

Kinematikai mozgásegyenlet:

$$\dot{\underline{r}} = \underline{v} \quad \text{vagy} \quad \dot{\underline{r}}_i = \underline{v}_i \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

Kinetikai differenciálegyenlet:

$$\underline{M} \dot{\underline{v}} = \underline{F}^t + \underline{F}^k \quad \text{vagy} \quad m_i \dot{\underline{v}}_i = \underline{F}_i^t + \underline{F}_i^k \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

Implicit holonom kényszer egyenletek:

$$\underline{g}(\underline{r}, t) = \underline{0} \quad (3)$$

$$\underline{G}(\underline{r}, t) \underline{v} + \underline{\bar{\gamma}}(\underline{r}, t) = \underline{0} \quad \text{vagy} \quad \sum_{i=1}^n \underline{G}_i(\underline{r}, t) \underline{v}_i + \underline{\bar{\gamma}}(\underline{r}, t) = \underline{0} \quad (4)$$

$$\underline{G}(\underline{r}, t) \dot{\underline{v}} + \underline{\bar{\gamma}}(\underline{r}, \underline{v}, t) = \underline{0} \quad \text{vagy} \quad \sum_{i=1}^n \underline{G}_i(\underline{r}, t) \dot{\underline{v}}_i + \underline{\bar{\gamma}}(\underline{r}, \underline{v}, t) = \underline{0} \quad (5)$$

Explicit kényszererők:

$$\underline{F}^k = \underline{G}^T \underline{\lambda} \quad \text{vagy} \quad \underline{F}_i^k = \underline{G}_i^T \underline{\lambda} \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

A (6) egyenletet (2)-be helyettesítve, az (1) differenciálegyenlettel és a (3) kényszeregyenlettel együtt a problémát leíró (deskriptor) differenciál-algebrai egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}\underline{\dot{r}} &= \underline{v} \\ \underline{M} \underline{\dot{v}} &= \underline{F}^t(\underline{r}, \underline{v}, t) + \underline{\underline{G}}^T(\underline{r}, t) \underline{\lambda} \\ \underline{0} &= \underline{g}(\underline{r}, t)\end{aligned}\tag{7}$$

Keressük a megoldást a következő változókra:

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} \underline{r}(t) \\ \underline{v}(t) \\ \underline{\lambda}(t) \end{bmatrix} \quad \text{alábbi kezdeti feltételekkel:} \quad \underline{y}(t_0) = \begin{bmatrix} \underline{r}(t_0) \\ \underline{v}(t_0) \\ \underline{\lambda}(t_0) \end{bmatrix}$$

Megoldási eljárás: a deskriptor egyenleteket közös differenciál-egyenletekké szeretnénk alakítani. Az (5) és (7) egyenletek a következő lineáris egyenletrendszert alkotják:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} & -\underline{\underline{G}}^T \\ -\underline{\underline{G}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{v}} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}^t \\ \underline{\underline{\gamma}} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 3n \text{ egyenlet} \\ b \text{ egyenlet} \end{array} \tag{8}$$

Mivel  $\underline{\underline{M}}$  pozitív definit, így (7)-ből  $\dot{\underline{v}}$  kifejezhető:

$$\dot{\underline{v}} = \underline{\underline{M}}^{-1} \left( \underline{F}^t + \underline{\underline{G}}^T \underline{\lambda} \right) \quad (9)$$

amelyet (5)-be behelyettesítünk, amely  $b$  egyenletet jelent a  $\underline{\lambda}$  kényszererők  $b$  számú koordinátájára:

$$\underline{\underline{Q}} \underline{\lambda} = -\underline{\underline{G}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{F}^t - \underline{\bar{\gamma}} \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{G}}^T \quad (10)$$

Ezen egyenletnek akkor létezik egyértelmű megoldása, ha  $\underline{\underline{Q}}$  reguláris, amely akkor teljesül, ha a kényszermátrix rangja  $\text{rank} \underline{\underline{G}} = b$  (a kényszerek függetlenek).

Legyenek a kényszeregyenletek egymástól függetlenek, így (10) megoldása

$$\underline{\lambda}(\underline{r}, \underline{v}, t) = -\underline{\underline{Q}}^{-1} \left( \underline{\underline{G}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{F}^t + \underline{\bar{\gamma}} \right) \quad (11)$$

Ezt behelyettesítve a (9) egyenletbe, kapjuk, hogy

$$\dot{\underline{v}}(\underline{r}, \underline{v}, t) = \underline{\underline{M}}^{-1} \left( \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{Q}}^{-1} \underline{\underline{G}} \underline{\underline{M}}^{-1} \right) \underline{F}^t - \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{Q}}^{-1} \underline{\bar{\gamma}}$$

Ez utóbbi és az (1) egyenletek alkotják a megoldandó elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{r}} \\ \dot{\underline{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v} \\ \underline{\dot{v}}(\underline{r}, \underline{v}, t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \underline{r}(t_0) \\ \underline{v}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{r}_0 \\ \underline{v}_0 \end{bmatrix} \quad \text{kezdeti feltételekkel}$$

Csak azok a megoldások jók, amelyek kielégítik a helyzetállapot és sebességállapot kényszerfeltételeit, azaz a kezdeti értékeknek azokkal konzisztensnek kell lenniük:

$$\begin{aligned} \underline{g}(\underline{r}_0, t_0) &= \underline{0} \\ \underline{G}(\underline{r}_0, t_0) \underline{v}_0 + \underline{\tilde{\gamma}}(\underline{r}_0, t_0) &= \underline{0} \end{aligned}$$

A kényszererőket a  $\underline{\lambda}$ -ra (11)-ből kapott értékeinek (6)-ba való visszahelyettesítésével kapjuk meg:

$$\underline{F}^k = \underline{G}^T \underline{\lambda} \quad \text{ahol} \quad \underline{\lambda} = \underline{\lambda}(\underline{r}, \underline{v}, t)$$

## Mozgásegyenletek minimálkoordinátákkal

A holonom tömegpontrendszer mozgásegyenleteit a  $\underline{q}$  minimálkoordináták függvényében az alábbi egyenletekből kapjuk:

Kinetikai differenciálegyenlet:

$$\underline{\underline{M}} \underline{\dot{v}} = \underline{\underline{F}}^t(\underline{r}, \underline{v}, t) + \underline{\underline{F}}^k \quad \text{vagy} \quad m_i \underline{\dot{v}}_i = \underline{\underline{F}}_i^t(\underline{r}, \underline{v}, t) + \underline{\underline{F}}_i^k \quad i = 1, \dots, n \quad (12)$$

Explicit holonom kényszeregyenletek ( $f$  számú minimálkoordináta  $\underline{q}$ -ban):

$$\underline{r} = \underline{r}(\underline{q}, t) \quad \text{vagy} \quad \underline{r}_i = \underline{r}_i(\underline{q}, t) \quad i = 1, \dots, n \quad (13)$$

$$\underline{v} = \underline{\underline{J}}(\underline{q}, t) \underline{\dot{q}} + \underline{\bar{v}}(\underline{q}, t) \quad \text{vagy} \quad \underline{v}_i = \underline{\underline{J}}_i(\underline{q}, t) \underline{\dot{q}} + \underline{\bar{v}}_i(\underline{q}, t) \quad (14)$$

$$\underline{\dot{v}} = \underline{\underline{J}}(\underline{q}, t) \underline{\ddot{q}} + \underline{\bar{a}}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \quad \text{vagy} \quad \underline{\dot{v}}_i = \underline{\underline{J}}_i(\underline{q}, t) \underline{\ddot{q}} + \underline{\bar{a}}_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \quad (15)$$

Implicit kényszererők:

$$\underline{\underline{J}}^T \underline{\underline{F}}^k = \underline{0} \quad \text{vagy} \quad \sum_{i=1}^n \underline{\underline{J}}_i^T \underline{\underline{F}}_i^k = \underline{0} \quad i = 1, \dots, n \quad (16)$$

A  $\underline{\dot{v}}$  abszolút gyorsulásokra, az  $\underline{F}^k$  kényszererőkre és a  $\underline{\ddot{q}}$  minimálkoordináta-gyorsulásra egy lineáris egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} & \underline{\underline{-1}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{-1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{J}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{J}}^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{v}} \\ \underline{F}^k \\ \underline{\ddot{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}^t \\ -\underline{\bar{a}} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 3n \text{ egyenlet} \\ 3n \text{ egyenlet} \\ f \text{ egyenlet} \end{array}$$

A mozgásegyenletek felírásához a lineáris egyenletrendszert  $\underline{\ddot{q}}$ -re oldjuk meg. A kényszererőket a (12) egyenletből kifejezve és a (16) implicit kényszererőkbe, kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{J}}^T (\underline{\underline{M}} \underline{\dot{v}} - \underline{F}^t) = \underline{0} \quad \text{vagy} \quad \sum_{i=1}^n \underline{\underline{J}}_i^T (m_i \underline{\dot{v}}_i - \underline{F}_i^t) = \underline{0}$$

Behelyettesítve a (13), (14), (15) explicit kényszeregyenleteket az utóbbi egyenletbe, közösleges másodrendű nemlineáris differenciálegyenleteket kapunk:

$$\underbrace{\underline{\underline{J}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{J}}}_{\underline{\underline{\hat{M}}}(\underline{q}, t)} \underline{\ddot{q}} + \underbrace{\underline{\underline{J}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\bar{a}}}_{-\underline{k}^c(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)} - \underbrace{\underline{\underline{J}}^T \underline{F}^t}_{\underline{k}^t(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)} = \underline{0}$$

$$\widehat{\underline{\underline{M}}}(\underline{q}, t) \ddot{\underline{q}} = \underline{k}^c(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) + \underline{k}^t(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \quad (17)$$

ahol  $\widehat{\underline{\underline{M}}}$  szimmetrikus, pozitív definit  $(f \times f)$  méretű tömegmátrix:

$$\widehat{\underline{\underline{M}}}(\underline{q}, t) = \begin{bmatrix} \underline{J}_1^T & \dots & \underline{J}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \underline{\underline{1}} & & \underline{\underline{0}} \\ & \ddots & \\ \underline{\underline{0}} & & m_n \underline{\underline{1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{J}_1 \\ \vdots \\ \underline{J}_n \end{bmatrix}$$

$\underline{k}^c$  az általánosított Coriolis-erők  $(f \times 1)$  méretű mátrixa:

$$\underline{k}^c(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = - \begin{bmatrix} \underline{J}_1^T & \dots & \underline{J}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \underline{\underline{1}} & & \underline{\underline{0}} \\ & \ddots & \\ \underline{\underline{0}} & & m_n \underline{\underline{1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\underline{a}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\underline{a}}_n \end{bmatrix}$$

$\underline{k}^t$  az általánosított terhelő erők  $(f \times 1)$  méretű mátrixa:

$$\underline{k}^t(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \begin{bmatrix} \underline{J}_1^T & \dots & \underline{J}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F}_1^t \\ \vdots \\ \underline{F}_n^t \end{bmatrix}$$



A (17) másodrendű differenciálegyenlet-rendszert elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre alakíthatjuk. Ehhez bevezetjük a  $\underline{q}$  minimálkoordináták  $\underline{w}$  koordinátasebességeit, mint idő szerinti deriváltakat. Így a kinematikai mozgásegyenletek:

$$\underline{\dot{q}} = \underline{w} \quad \text{amiből} \quad \underline{\ddot{q}} = \underline{\dot{w}}$$

Bevezetve a helyzet- és sebességállapot koordinátáit tartalmazó

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{w} \end{bmatrix}$$

vektort, a mozgásegyenlet, mint elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer írható fel:

$$\begin{bmatrix} \underline{\dot{q}} \\ \underline{\dot{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\widehat{M}}^{-1}(\underline{q}, t) (\underline{k}^c(\underline{q}, \underline{w}, t) + \underline{k}^t(\underline{q}, \underline{w}, t)) \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \underline{\dot{x}} = \underline{\Psi}(\underline{x}, t)$$

amelyhez az alábbi kezdeti feltételek társulnak:

$$\begin{bmatrix} \underline{q}(t_0) \\ \underline{w}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{q}_0 \\ \underline{w}_0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{kiindulási helyzet} \\ \text{kezdősebesség} \end{array} \quad \text{tömören:} \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

A differenciálegyenlet megoldásából számolt  $\underline{\ddot{q}} = \underline{\dot{w}}$  koordinátagyorsulásokkal, a (15) explicit kényszer egyenlet és (12) impulzustételből számíthatók a kényszererők:

$$\underline{F}^k = \underline{\underline{M}} \underline{\dot{v}} - \underline{F}^t \quad \text{ahol} \quad \underline{\dot{v}} = \underline{\underline{J}} \underline{\ddot{q}} + \underline{\bar{a}}$$

így

$$\underline{F}^k = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{J}} \underline{\ddot{q}} + \underline{\underline{M}} \underline{\bar{a}} - \underline{F}^t \quad (18)$$

A kényszererőket másféleképp – a gyorsulások előzetes kiszámítása nélkül – ha képezzük a  $\underline{\underline{G}} \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{0}}$  feltételnek eleget tevő  $\underline{\underline{G}}$  kényszermátrixot. Az  $\underline{F}^k = \underline{\underline{G}}^T \underline{\lambda}$  explicit kényszererőket beírjuk a (18) egyenletbe, és beszorozzuk balról  $\underline{\underline{G}} \underline{\underline{M}}^{-1}$ -gyel:

$$\underline{\underline{G}} \underline{\underline{M}}^{-1} \cdot | \quad \underline{\underline{G}}^T \underline{\lambda} = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{J}} \underline{\ddot{q}} + \underline{\underline{M}} \underline{\bar{a}} - \underline{F}^t$$

$$\underline{\underline{G}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{G}}^T \underline{\lambda} = \underbrace{\underline{\underline{G}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{J}}}_{\underline{\underline{0}}} \underline{\ddot{q}} + \underbrace{\underline{\underline{G}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{M}}}_{\underline{\underline{1}}} \underline{\bar{a}} - \underline{\underline{G}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{F}^t$$

Azaz kapjuk a

$$\underline{\underline{G}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{G}}^T \underline{\lambda} = \underline{\underline{G}} \underline{\bar{a}} - \underline{\underline{G}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{F}^t$$

lineáris egyenletet  $\underline{\lambda}$ -ra. Az egyenlet együtthatómátrixa és jobb oldala a rendszer adott  $\underline{q}$  helyzete és  $\underline{\dot{q}}$  sebessége esetén számítható.

Az innen számított  $\underline{\lambda}$  kényszererő-koordinátákkal az explicit kényszererők számíthatók az ismert  $\underline{F}^k = \underline{\underline{G}}^T \underline{\lambda}$  összefüggéssel.

## Többtest-rendszerek kényszerkapcsolatai

Többtest-rendszerek kényszerei azokra a kapcsolatokra (ízületekre, csuklókra – angolul joint) vezethetők vissza, amelyek a rendszer testeit összekötik.

### Holonom szkleronom kapcsolatok

A szkleronom kényszerkapcsolatokat az érintkező felületek időben nem változó geometriája határozza meg. Egy  $b_H^{szk}$  holonom szkleronom kényszerrel rendelkező kapcsolat szabadságfoka két test relatív mozgására vonatkozóan

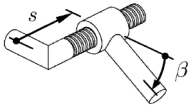
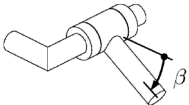
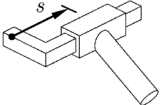
$$f = 6 - b \quad \text{ahol} \quad b = b_H^{szk}$$

A kényszerkapcsolatok az érintkező felületek szerint osztályozhatók:

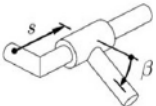
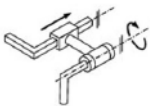
- alsórendű kényszerkapcsolatok: a testek érintkezése véges felület mentén történik meg.
- felsőrendű kényszerkapcsolatok: a testek érintkezése vonal mentén vagy pontszerűen történik meg.

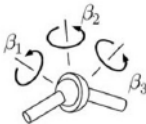
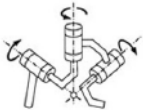
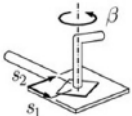
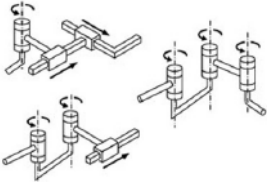
## Alsórendű kényszerkapcsolatok

1 szabadságfokú kapcsolatot jelent a csavarkötés és annak két speciális esete, a forgó csukló és a csúszka.

| Csavarmenet<br>(Helical joint)                                                    | Forgó csuklós<br>(Revolute joint)                                                 | Csúszka<br>(Prismatic joint)                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |
| $s = p\beta$ ( $p$ : menetemelkedés)                                              | $p = 0$                                                                           | $p = \infty$                                                                       |

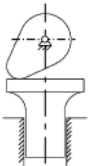
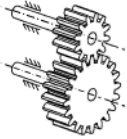
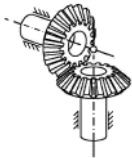
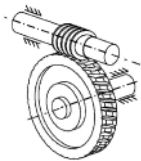
További alsórendű kényszerkapcsolatok forgó csuklós és csúszkás kapcsolatok kombinációjaként előállíthatók.

| Kapcsolat                                              | $f$ | ábrázolás                                                                         | helyettesítő kapcsolat                                                             |
|--------------------------------------------------------|-----|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Csúszó csukló<br>vagy forgó csúszka<br>Cylindric joint | 2   |  |  |

| Kapcsolat                                    | $f$ | ábrázolás                                                                         | helyettesítő kapcsolat                                                             |
|----------------------------------------------|-----|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Kardán-csukló<br><b>Universal joint</b>      | 2   |  |   |
| Gömbcsukló<br><b>Spherical joint</b>         | 3   |  |   |
| Sík pár<br><b>Flat pair vagy Planar pair</b> | 3   |  |  |

## Felsőrendű kényszerkapcsolatok

Néhány példát az alábbi táblázat mutat

| Bütykös kényszer<br>(síkbeli)                                                    | Hengeres fogaskerék<br>(síkbeli)                                                  | Kúpkerék<br>(gömbi)                                                               | Csigakerék<br>(térbeli)                                                             |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |

## Holonom reonom kapcsolatok

Bizonyos kényszerkapcsolathoz kötött koordinátáknak gyakran előírt idő szerinti lefutása van ( $s = s(t)$  vagy  $\beta = \beta(t)$ ). Az időtől függő függvényt egy reonom kényszerrel adhatjuk meg. (aktív kényszerkapcsolat)

Egy  $b$  holonom kényszerrel leírható kapcsolat szabadságfoka, amely  $b_H^{szk}$  szkleronom és  $b_H^r$  reonom kényszerrel rendelkezik

$$f = 6 - b \quad \text{ahol} \quad b = b_H^{szk} + b_H^r$$

# Többtest-rendszerek osztályozása

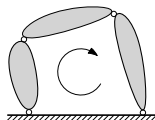
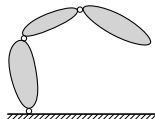
A következőben két, a modellalkotás szempontjából fontos osztályozás kerül bemutatásra.

## Topológia szerinti osztályozás

Tekintsünk egy  $\mathcal{K}_0$  álló vonatkoztatási rendszert (állvány), mellyel egy  $n_t$  merev testből és  $n_k$  kényszerkapcsolatból álló mechanikai rendszer kapcsolódik. Két alapvető topológia létezik:

**Nyílt láncú többtest-rendszerek** (robot): van olyan tag, amely csak egy másik testtel van kapcsolatban. Bármely test útja egy másik testtől egyértelmű.  $n_k = n_t$

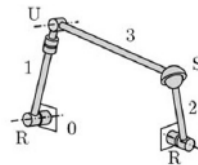
**Zárt láncú többtest-rendszerek** (mechanizmus): minden tag két másik taggal van kapcsolatban. Úgy származtatható, hogy a nyílt láncú rendszerbe további kényszerkapcsolatokat építünk be. Ezáltal kinematikai hurkokat hozunk létre. A független hurkok száma:  $n_h = n_k - n_t$



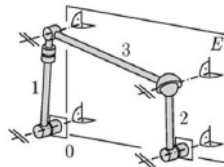


# Kinematikai osztályozás

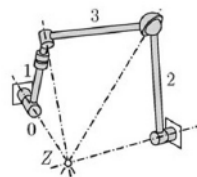
Térbeli többtest-rendszer: a tagok általános térbeli mozgást végeznek. (kitérő forgástengelyek)



Síkbeli többtest-rendszer: a tagok síkmozgást végeznek. (párhuzamos forgástengelyek)



Gömbi többtest-rendszer: a tagok pontjai gömbfelületeken mozognak. (egy pontban metsződő forgástengelyek)



# Statikai és kinematikai határozottság, szabadságfok

Tekintsünk egy többtest-rendszert, melyben

$n_t$  a merev testek száma

$n_c$  a csuklók száma, melyek szabadságfoka rendre  $f_i$

$b_i = 6 - f_i$  a csuklók kinematikai kényszerei

Az ismeretlenek száma és a vonatkozó egyenletek száma közötti relációt vizsgáljuk.

Az impulzus és perdülettételek testenként 6 egyenletet jelentenek a szabad rendszerre:

$$f^{SZ} = 6n_t$$

A rendszer kinematikai kényszereinek száma:

$$b = \sum_{i=1}^{n_c} b_i = \sum_{i=1}^{n_c} (6 - f_i)$$

amely egyben a minimális kényszererő koordináták száma.

Az egymástól független kényszerek  $b^{flen}$  száma a rendszerre felírt  $\underline{\underline{G}}$  kényszermátrix rangja:

$$b^{flen} = \text{rank}(\underline{\underline{G}})$$

$b^{flen}$  nem lehet nagyobb, mint a szabad rendszer  $f^{sz}$  szabadságfoka.  
A rendszer tartalmaz  $b^r$  redundáns kényszeret:

$$b^r = b - b^{flen}$$

A  $b^r$  számától függően lehet

$b^r = 0$ : statikailag határozott rendszer, vagy

$b^r > 0$ : statikailag  $b^r$ -szeresen határozatlan rendszer.

Utóbbi esetben a merevtest modellel nem számíthatók a kényszererők.  
Ilyenek zárt láncú rendszereknél fordulhatnak elő.

A rendszer szabadságfoka

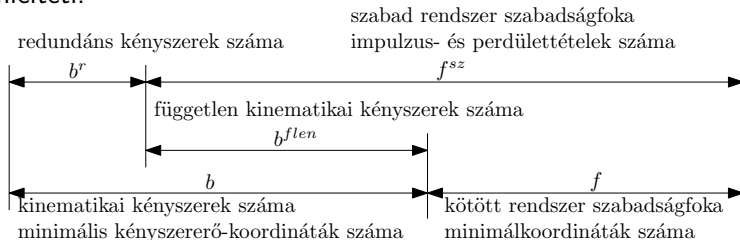
$$f = f^{sz} - b^{flen} \quad \text{azaz} \quad f = 6n_t - b^{flen}$$

Ennek függvényében

$f = 0$ : kinematikailag határozott a rendszer, azaz nem mozgatható

$f > 0$ : kinematikailag határozatlan rendszer, azaz mozgatható

A kényszerek és szabadságfokokra vonatkozó összefüggést az alábbi ábra szemlélteti:



Amennyiben az összes kényszer független egymástól ( $b = b^{flen}$ ), akkor a szabadságfok alábbi módon írható:

$$f = 6n_t - \sum_{i=1}^{n_c} (6 - f_i)$$

illetve az  $n_h = n_c - n_t$  hurkok számával

$$f = \sum_{i=1}^{n_c} f_i - 6n_h$$

Ez utóbbi egyenlet a Grübler-Kutzbach egyenlet statikailag határozott többtest-rendszerekre.

## Megjegyzések:

1. Rejtett szabadságfok: valamely tagnak olyan mozgási lehetősége, melynek nincs befolyása a többi tag mozgására. (pl.: két gömbcsuklós rúd forgása hossz tengelye körül) Ilyen szabadságfokok elkerülendőek a modellalkotás során, mert numerikus problémákhoz vezet.
2. Statikailag határozatlan szerkezetek között elképzelhető, hogy a Grübler-Kutzbach egyenlettel számolt  $f \leq 0$ , de mégis mozgathatók ( $f = 1$  valójában). Leggyakrabban síkbeli vagy gömbi rendszereknél fordul elő. Emiatt síkbeli vagy gömbi rendszereknél sok esetben eleve testenként 3 szabadságfokkal számolva  $f^{sz} = 3n_t$ , és

$$b = \sum_{i=1}^{n_c} b_i = \sum_{i=1}^{n_c} (3 - f_i)$$

ahol  $f_i$ -ben csak a síkbeli vagy gömbi mozgás során meghatározó szabadságfokokat számoljuk. Ha a kényszerek egymástól függetlenek, akkor a Grübler-Kutzbach kritérium is módosul:

$$f = \sum_{i=1}^{n_c} f_i - 3n_h \quad \text{ahol} \quad n_h = n_c - n_t$$