

Mechanizmusok és robotok

4. előadás

Kötöttségekkel rendelkező mechanikai rendszerek

Kényszerek

Kényszer (vagy kényszerfeltétel) két merev test közvetlen érintkezése, melynek során a két test egymás mozgását kölcsönösen befolyásolja. Ennek megfelelően megkülönböztethetünk:

- Szabad mechanikai rendszerek: a helyzetkoordináták geometriai szempontból tetszőleges értéket vehetnek fel. Pl. levegőben mozgó repülőgép
- Kötétt mechanikai rendszerek: a rendszer tagjai egymással és a környezettel kényszerek és támaszok révén kapcsolódnak, mely során egymás mozgását geometriai úton befolyásolják.

Kényszereket a következő fizikai jellemzők szerint osztályozhatunk:

holonom	– nem holonom (anholonom)
szkleronom	– reonom
geometriai (passzív)	– kinematikai (aktív)
kétoldalú	– egyoldalú
illetve matematikai leírás szerint	
implicit	– explicit

Holonom rendszerek kinematikája

Tekintsünk egy n_t testből álló rendszer i -ik elemét. Az adott test helyzetét a $\mathcal{K}_0$ inerciarendszerhez képest a hozzá kötött $\mathcal{K}_i$ KR O_i origójának $\underline{r}_i$ helyvektora és a forgását leíró pl. $\underline{\hat{p}}_i$ Euler-paraméterei határozzák meg. Ezeket összefoglaljuk egy (7×1) méretű vektorba:

$$\underline{\check{r}}_i = \begin{bmatrix} \underline{\hat{p}}_i \\ \underline{r}_i \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, n_t$$

Ha a forgást Euler-szögekkel írjuk le, akkor (6×1) méretű a mátrix.

Az összes test helyzetét leíró mennyiségeket szintén összefoglaljuk egy mátrixba:

$$\underline{\check{r}} = \begin{bmatrix} \underline{\check{r}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\check{r}}_{n_t} \end{bmatrix}$$

A könnyebb megérthetőség kedvéért szorítkozzunk egyelőre n_{tp} tömegpontokból álló rendszerekre. Ilyen rendszerek helyzetét leíró helyvektorok mátrixa:

$$\underline{\check{r}} = \underline{r} = \begin{bmatrix} \underline{r}_1 \\ \vdots \\ \underline{r}_{n_{tp}} \end{bmatrix}$$

Szkleronom és reonom holonom kényszerek

Holonóm kényszerek egy mechanikai rendszer helyzetét leíró mennyiségeket befolyásolják.

Megvalósítása: ideálisan merev csuklók, támaszok, megvezetések stb. Egy $n = n_t$ (vagy $n = n_{tp}$) tagból álló rendszer esetén az alábbi alakban írhatók fel a kényszeregyenletek (vagy kényszerfeltételek):

$$\begin{aligned} g(\underline{\check{r}}_1, \dots, \underline{\check{r}}_n) &= 0 && \text{szkleronom holonom kényszer} \\ g(\underline{\check{r}}_1, \dots, \underline{\check{r}}_n, t) &= 0 && \text{reonom holonom kényszer} \end{aligned}$$

Egy- és kétoldalú holonom kényszerek.

A fenti egyenletek kétoldalúak. Ez azt jelenti, hogy a rendszer a kényszerek felületét nem hagyhatja el. Egyoldalú kényszerek esetén a rendszer a kényszerek felületét egy irányba elhagyhatja. Ezek alakja egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned} g(\underline{\check{r}}_1, \dots, \underline{\check{r}}_n) &\geq 0 && \text{egyoldalú szkleronom holonom kényszer} \\ g(\underline{\check{r}}_1, \dots, \underline{\check{r}}_n, t) &\geq 0 && \text{egyoldalú reonom holonom kényszer} \end{aligned}$$

Holonóm rendszerek szabadságfoka

Egy holonóm rendszer f szabadságfoka a rendszer helyzetét leíró egymástól független koordináták száma. Egy térbeli n_t számú merev testből álló szabad rendszerben minden testnek hat szabadságfoka van, következésképp egy ilyen rendszer szabadságfoka $f = 6n_t$. Amennyiben b számú holonóm kényszerfeltétel elő van írva, a független helyzetkoordináták száma b -vel csökken, így a rendszer szabadságfoka:

$$f = 6n_t - b$$

Egy térbeli n_{tp} számú tömegpontból álló rendszer szabadságfoka:

$$f = 3n_{tp} - b$$

Síkbeli többtest-rendszer esetén hasonló gondolatmenettel jutunk

$$f = 3n_t - b \quad (\text{síkbeli többtest-rendszer})$$

$$f = 2n_{tp} - b \quad (\text{síkbeli tömegpont-rendszer})$$

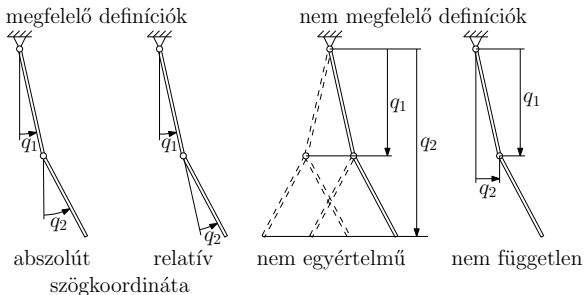
A fenti egyenletek akkor érvényesek, ha a b számú kényszerfeltétel egymástól független.

Holonóm rendszerek minimálkoordinátái

Egy f szabadságfokú holonóm rendszer helyzetét f számú minimálkoordinátával (általános koordináta, természetes koordináta) le lehet írni:

$$\underline{q} = [q_1 \quad \dots \quad q_f]^T$$

A minimálkoordináták távolság- vagy szögkoordináták lehetnek. Fontos, hogy a rendszer helyzetét egyértelműen leírják. Megengedett koordináták lehetnek abszolút vagy relatív mértékek, de olyan nem lehetnek, amelyek a helyzetet nem írják le egyértelműen, vagy egymástól nem függetlenek.



Implicit holonóm kényszerek

A bemutatott holonóm kényszeregyenletek az $\underline{s}$ helyzetkoordinátákat implicit módon tartalmazzák, ezért implicit kényszereknek hívjuk őket. A kényszeregyenletek viszont nem csak a helyzetkoordinátákra, hanem azok deriváltjaira is hatással vannak.

Helyzetállapot implicit holonóm kényszeregyenletei

Egy $n (= n_{tp})$ tömegpontból álló rendszer $3n$ helyzetkoordinátával rendelkezik:

$$\ddot{\underline{r}} = \underline{\ddot{r}} = \begin{bmatrix} \underline{r}_1 \\ \vdots \\ \underline{r}_n \end{bmatrix} \quad \text{ahol} \quad \underline{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

Az $\underline{s}$ helyzetkoordinátákat a $b < 3n$ számú (általánosság kedvéért reonom) kényszeregyenlet befolyásolja.

$$\begin{bmatrix} g_1(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_n, t) \\ \vdots \\ g_b(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_n, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \underline{g}(\underline{r}, t) = \underline{0}$$

A kényszeregyenletek egy határozatlan nemlineáris egyenletrendszert alkotnak. Feltételezzük, hogy az egyenletek egymástól függetlenek.

Sebességállapot implicit holonom kényszeregyenletei

A tömegpontrendszer sebességei:

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \vdots \\ \underline{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{r}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\dot{r}}_n \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \underline{v} = \underline{\dot{r}}$$

A sebességállapot implicit kényszeregyenleteit a helyzetállapot kényszeregyenleteinek teljes idő szerinti deriváltjaként kapjuk (1.előadás, 22.o.):

$$\underline{\dot{g}} = \frac{\partial \underline{g}(\underline{r}, t)}{\partial \underline{r}_1} \underline{\dot{r}}_1 + \dots + \frac{\partial \underline{g}(\underline{r}, t)}{\partial \underline{r}_n} \underline{\dot{r}}_n + \frac{\partial \underline{g}(\underline{r}, t)}{\partial t} = \underline{0} \text{ azaz}$$

$$\underline{\dot{g}} = \underline{\underline{G}}_1(\underline{r}, t) \underline{v}_1 + \dots + \underline{\underline{G}}_n(\underline{r}, t) \underline{v}_n + \underline{\bar{\gamma}}(\underline{r}, t) = \underline{0}$$

Ahol a $(b \times 3)$ méretű

$$\underline{\underline{G}}_i = \frac{\partial \underline{g}(\underline{r}, t)}{\partial \underline{r}_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \underline{r}_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_b}{\partial \underline{r}_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_i} & \frac{\partial g_1}{\partial y_i} & \frac{\partial g_1}{\partial z_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_b}{\partial x_i} & \frac{\partial g_b}{\partial y_i} & \frac{\partial g_b}{\partial z_i} \end{bmatrix}$$

Jacobi-mátrixot az i -ik tömegpont kényszermátrixának nevezzük.

A $(b \times 1)$ méretű idő szerinti parciális deriváltakat tartalmazó

$$\underline{\bar{\gamma}} = \frac{\partial \underline{g}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_b}{\partial t} \end{bmatrix}$$

vektor csak reonom kényszereknel lép fel.

A kényszeregyenletek összefoglalhatók egy mátrix-egyenletbe:

$$\dot{\underline{\underline{g}}} = \left[\frac{\partial \underline{\underline{g}}(\underline{\underline{r}}, t)}{\partial \underline{\underline{r}}_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \underline{\underline{g}}(\underline{\underline{r}}, t)}{\partial \underline{\underline{r}}_n} \right] \begin{bmatrix} \underline{\underline{v}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{v}}_n \end{bmatrix} + \frac{\partial \underline{\underline{g}}(\underline{\underline{r}}, t)}{\partial t} = \underline{\underline{0}} \quad \text{azaz}$$

$$\dot{\underline{\underline{g}}} = \underline{\underline{G}}(\underline{\underline{r}}, t) \underline{\underline{v}} + \bar{\underline{\gamma}}(\underline{\underline{r}}, t) = \underline{\underline{0}}$$

Ahol a rendszer kényszermátrixa:

$$\underline{\underline{G}} = \frac{\partial \underline{\underline{g}}}{\partial \underline{\underline{r}}} = \left[\underbrace{\frac{\partial \underline{\underline{g}}}{\partial \underline{\underline{r}}_1}}_{\underline{\underline{G}}_1} \quad \dots \quad \underbrace{\frac{\partial \underline{\underline{g}}}{\partial \underline{\underline{r}}_n}}_{\underline{\underline{G}}_n} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{\underline{g}}_1}{\partial \underline{\underline{r}}_1} & \dots & \frac{\partial \underline{\underline{g}}_1}{\partial \underline{\underline{r}}_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \underline{\underline{g}}_b}{\partial \underline{\underline{r}}_1} & \dots & \frac{\partial \underline{\underline{g}}_b}{\partial \underline{\underline{r}}_n} \end{bmatrix}$$

A $\underline{\underline{G}}$ kényszermátrix rangja megegyezik az egymástól független kényszeregyenletek számával. Ha $\text{rank}(\underline{\underline{G}}) = b$, akkor az összes kényszeregyenlet független.

Gyorsulásállapot implicit holónom kényszeregyenletei

A tömegpontrendszer gyorsulásai:

$$\begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{v}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\dot{v}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\ddot{r}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\ddot{r}}_n \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \underline{a} = \underline{\dot{v}} = \underline{\ddot{r}}$$

A gyorsulásállapot implicit kényszeregyenleteit a sebességállapot kényszeregyenleteinek teljes idő szerinti deriváltjaként kapjuk:

$$\underline{\ddot{g}} = \underline{\underline{G}}(\underline{r}, t) \underline{\dot{v}} + \underline{\bar{\gamma}}(\underline{r}, \underline{v}, t) = \underline{0}$$

ahol

$$\underline{\bar{\gamma}} = \frac{d\underline{\underline{G}}(\underline{r}, t)}{dt} \underline{v} + \frac{d\underline{\bar{\gamma}}(\underline{r}, t)}{dt}$$

egy a $\underline{\dot{v}}$ gyorsulásoktól nem függő $(b \times 1)$ méretű vektor.

Explicit holonom kényszerek

Az implicit kényszeregyenletekből minimálkoordináták definiálása révén explicit kényszeregyenleteket kapunk.

Helyzetállapot explicit holonom kényszeregyenletei

Általánosságban az f számú q minimálkoordinátát f számú

$$\begin{bmatrix} g_1^*(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_n, t) \\ \vdots \\ g_f^*(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_n, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \underline{g}^*(\underline{r}) = \underline{q}$$

nemlineáris egyenlet segítségével definiálhatunk, oly módon, hogy az implicit kényszeregyenletekkel egy határozott $3n$ egyenletből álló nemlineáris egyenletet kapjunk a $3n$ számú helyzetkoordinátára:

$$\begin{bmatrix} \underline{g}(\underline{r}, t) \\ \underline{g}^*(\underline{r}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{q} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} b \text{ implicit kényszer} \\ f = 3n - b \text{ definiáló egyenlet} \end{array}$$

Ha az utóbbi egyenletet az $\underline{r}$ helyzetkoordinátákra megoldjuk, akkor a helyzetkoordinátákat a $\underline{q}$ minimálkoordináták függvényében kapjuk meg:

$$\begin{bmatrix} \underline{r}_1 \\ \vdots \\ \underline{r}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{r}_1(\underline{q}, t) \\ \vdots \\ \underline{r}_n(\underline{q}, t) \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \underline{r} = \underline{r}(\underline{q}, t)$$

Ezeket az egyenleteket hívjuk explicit holonóm kényszereknek. Az időtől való explicit függés csak reonóm kényszereknel lép fel. Explicit szkleronóm kényszerek $\underline{r} = \underline{r}(\underline{q})$ alakúak.

Sebességállapot explicit holonóm kényszeregyenletei

A helyzetkoordináták explicit kényszeregyenleteinek teljes időbeli deriváltjaként megkapjuk a sebességállapot explicit kényszeregyenleteit. Az i -ik tömegpont sebessége:

$$\underline{\dot{r}}_i = \underline{v}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{r}_i(\underline{q}, t)}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \underline{r}_i(\underline{q}, t)}{\partial q_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} + \frac{\partial \underline{r}_i(\underline{q}, t)}{\partial t} \quad \text{azaz}$$

$$\underline{v}_i = \underline{J}_i(\underline{q}, t) \underline{\dot{q}} + \underline{\bar{v}}_i(\underline{q}, t)$$

ahol a $(3 \times f)$ méretű $\underline{\underline{J}}_i$ az i -ik tömegpont explicit kényszereinek Jacobi-mátrixa:

$$\underline{\underline{J}}_i = \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial \underline{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial x_i}{\partial q_f} \\ \frac{\partial y_i}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial y_i}{\partial q_f} \\ \frac{\partial z_i}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial z_i}{\partial q_f} \end{bmatrix}$$

A $\underline{\dot{q}}$ -tól nem függő parciális idő szerinti (3×1) méretű

$$\underline{\bar{v}}_i = \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial t} \\ \frac{\partial y_i}{\partial t} \\ \frac{\partial z_i}{\partial t} \end{bmatrix}$$

vektor csak reonom kényszereknél lép fel.

A sebességek explicit kényszeregyenleteit összefoglalhatjuk egy egyenletbe:

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \vdots \\ \underline{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_1(\underline{q}, t) \\ \vdots \\ \underline{\underline{J}}_n(\underline{q}, t) \end{bmatrix} \underline{\dot{q}} + \begin{bmatrix} \underline{\bar{v}}_1(\underline{q}, t) \\ \vdots \\ \underline{\bar{v}}_n(\underline{q}, t) \end{bmatrix} \quad \text{azaz}$$

$$\underline{v} = \underline{\underline{J}}(\underline{q}, t) \underline{\dot{q}} + \underline{\bar{v}}(\underline{q}, t)$$

Az előző egyenletben szerepel a rendszer explicit kényszereinek $(3n \times f)$ méretű Jacobi-mátrixa:

$$\underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} \underline{J}_1 \\ \vdots \\ \underline{J}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{r}_1}{\partial \underline{q}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \underline{r}_n}{\partial \underline{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{r}_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \underline{r}_1}{\partial q_f} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \underline{r}_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \underline{r}_n}{\partial q_f} \end{bmatrix} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{q}}$$

illetve a csak reonom kényszereknél fellépő, $\underline{\dot{q}}$ -től nem függő $(3n \times 1)$ méretű vektor:

$$\underline{\bar{v}} = \begin{bmatrix} \underline{\bar{v}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\bar{v}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{r}_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \underline{r}_n}{\partial t} \end{bmatrix}$$

Szabad és gátolt irányok ortogonalitása

A sebességállapot implicit és explicit kényszeregyenletinek következő geometriai tartalmuk van:

- A $\underline{\underline{G}}$ kényszermátrix $(3n)$ elemből álló

$$\frac{\partial g_i}{\partial \underline{\underline{r}}} = \left[\frac{\partial g_i}{\partial \underline{\underline{r}}_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial g_i}{\partial \underline{\underline{r}}_n} \right], \quad i = 1, \dots, b$$

sorai jelzik az $\underline{\underline{r}}$ helyzetkoordináták i -ik $g_i(\underline{\underline{r}}, t)$ kényszer által gátolt irányait.

- A $\underline{\underline{J}}$ Jacobi-mátrix $(3n)$ elemből álló

$$\frac{\partial \underline{\underline{r}}}{\partial q_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{\underline{r}}_1}{\partial q_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial \underline{\underline{r}}_n}{\partial q_j} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, f$$

oszlopai jelzik az $\underline{\underline{r}}$ helyzetkoordinátáknak a j -ik q_j minimálkoordináta differenciális dq_j megváltozásához tartozó szabad irányát.

- A sebességállapot explicit $\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{J}}\dot{\underline{q}} + \underline{\underline{v}}$ kényszeregyenletét az implicit $\underline{\underline{G}}\underline{\underline{v}} + \underline{\underline{\gamma}} = \underline{\underline{0}}$ kényszeregyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{G}}(\underline{\underline{J}}\dot{\underline{q}} + \underline{\underline{v}}) + \underline{\underline{\gamma}} = \underline{\underline{0}} \quad \text{avagy} \quad \underline{\underline{G}}\underline{\underline{J}}\dot{\underline{q}} + (\underline{\underline{G}}\underline{\underline{v}} + \underline{\underline{\gamma}}) = \underline{\underline{0}}$$

Mivel az egyenletnek tetszőleges $\dot{\underline{q}}$ értékekre teljesülnie kell, a $\underline{\underline{G}}\underline{\underline{J}}$ és $\underline{\underline{G}}\underline{\underline{v}} + \underline{\underline{\gamma}}$ külön-külön el kell tűnjenek. Így a szabad és gátolt irányokra érvényes ortogonalitási feltétel:

$$\underline{\underline{G}}\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{0}}$$

Azaz a $\underline{\underline{J}}$ oszlopai “merőlegesek” a $\underline{\underline{G}}$ soraira.

Gyorsulásállapot explicit holonom kényszeregyenletei

A sebességkoordináták explicit kényszeregyenleteinek teljes időbeli deriváltjaként megkapjuk a gyorsulásállapot explicit kényszeregyenleteit:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{v}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\underline{v}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{J}_1(\underline{q}, t) \\ \vdots \\ \underline{J}_n(\underline{q}, t) \end{bmatrix} \underline{\ddot{q}} + \begin{bmatrix} \bar{\underline{a}}_1(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \\ \vdots \\ \bar{\underline{a}}_n(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \end{bmatrix} \quad \text{azaz}$$

$$\underline{\dot{v}} = \underline{J}(\underline{q}, t) \underline{\ddot{q}} + \bar{\underline{a}}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$$

ahol $\underline{\ddot{q}}$ -től nem függő $(3n \times 1)$ méretű $\bar{\underline{a}}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$ vektor :

$$\bar{\underline{a}} = \begin{bmatrix} \bar{\underline{a}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\underline{a}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\underline{J}_1}{dt} \underline{\dot{q}} + \frac{d\bar{\underline{v}}_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\underline{J}_n}{dt} \underline{\dot{q}} + \frac{d\bar{\underline{v}}_n}{dt} \end{bmatrix}$$

Behelyettesítve a $\underline{\dot{v}} = \underline{J} \underline{\ddot{q}} + \bar{\underline{a}}$ egyenletet, a $\underline{G} \underline{\dot{v}} + \underline{\bar{\gamma}} = \underline{0}$ egyenletbe, a

$$\underline{G}(\underline{J} \underline{\ddot{q}} + \bar{\underline{a}}) + \underline{\bar{\gamma}} = \underline{0} \quad \text{avagy} \quad \underline{G} \underline{J} \underline{\ddot{q}} + (\underline{G} \bar{\underline{a}} + \underline{\bar{\gamma}}) = \underline{0}$$

összefüggésből a $\underline{G} \underline{J} = \underline{0}$ ortogonalitás és $\underline{G} \bar{\underline{a}} + \underline{\bar{\gamma}} = \underline{0}$ következik.

Holonom rendszerek dinamikája

Impulzustétel egy képzeletben kivágott tömegpontra:

$$m_i \dot{\underline{v}}_i = \underline{F}_i \quad i = 1, \dots, n$$

ahol $\underline{F}_i$ a tömegpontra ható erők eredője. A tömegpontra ható eredő a terhelések eredőjéből ($\underline{F}_i^t$) és a kényszerők (reakcióerők) eredőjéből ($\underline{F}_i^k$) áll:

$$\underline{F}_i = \underline{F}_i^t + \underline{F}_i^k$$

Az egyes tömegpontokra felírt impulzustétel egy mátrixegyenletbe foglaljuk össze:

$$\begin{bmatrix} m_1 \underline{\underline{1}} & \dots & \underline{\underline{0}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\underline{0}} & \dots & m_n \underline{\underline{1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{v}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\underline{v}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_1^t \\ \vdots \\ \underline{F}_n^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{F}_1^k \\ \vdots \\ \underline{F}_n^k \end{bmatrix} \quad \text{azaz}$$

$$\underline{\underline{M}} \dot{\underline{v}} = \underline{F}^t + \underline{F}^k$$

Ahol $\underline{\underline{M}}$ a tömegmátrix, mely pozitív definit.

Explicit kényszererők

Az $\underline{F}_i^k$ kényszererőnek az implicit kényszerek által gátolt irányokban lehetnek koordinátái. Következésképp az $\underline{F}_i^k$ kényszererőt a $\underline{\underline{G}}_i$ soraiból kapott gátolt irányok és λ_k skalár együtthatók lineáris kombinációjaként írható fel:

$$\underline{F}_i^k = \sum_{k=1}^b \frac{\partial g_k}{\partial \underline{r}_i^T} \lambda_k, \quad i = 1, \dots, n$$

vagy

$$\underline{F}_i^k = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial \underline{r}_i^T} & \cdots & \frac{\partial g_b}{\partial \underline{r}_i^T} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_b \end{array} \right], \quad i = 1, \dots, n$$

azaz

$$\underline{F}_i^k = \underline{\underline{G}}_i^T \underline{\lambda}$$

Az összes kényszererőt összefoglalva a $(b \times 3n)$ méretű $\underline{\underline{G}}$ kényszerszármazékkal kifejezve:

$$\begin{bmatrix} \underline{F}_1^k \\ \vdots \\ \underline{F}_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}_1^T \\ \vdots \\ \underline{\underline{G}}_n^T \end{bmatrix} \underline{\lambda} \quad \text{azaz} \quad \underline{F}^k = \underline{\underline{G}}^T \underline{\lambda}$$

A $\underline{\lambda}$ skalár együtthatók a kényszererők egymástól független – és ezáltal minimális számú – koordinátái. Gyakran Lagrange multiplikátornak is szokás őket nevezni. Ezek a koordináták a fenti egyenletekben explicit módon adják meg a kényszererőket.

Implicit kényszererők

Az explicit kényszererőket balról szorozzuk az explicit kényszerek $\underline{\underline{J}}^T$ Jacobi-mátrixával.

$$\underline{\underline{J}}^T \mid \underline{F}^k = \underline{\underline{G}}^T \underline{\lambda} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{J}}^T \underline{F}^k = \underbrace{\underline{\underline{J}}^T \underline{\underline{G}}^T}_{\underline{\underline{0}}} \underline{\lambda}$$

Így az $\underline{F}^k$ kényszererők implicit egyenlete

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_1^T & \cdots & \underline{\underline{J}}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F}_1^k \\ \vdots \\ \underline{F}_n^k \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}} \quad \text{azaz} \quad \underline{\underline{J}}^T \underline{F}^k = \underline{\underline{0}}$$