

Mechanizmusok és robotok

3. előadás

Merev testek kinematikája (folytatás),
dinamikai összefoglaló

Euler-szögek

Egy általános forgás három egymást követő elemi forgásként szemléletesen leírható. A három elemi forgást három, egy pontban metsződő tengelyű, csuklóból álló megtámasztásban lévő mozgásként képzelhetjük el. Ilyen mozgás pl. a giroszkópban megtalálható kinematikai láncban valósul meg.

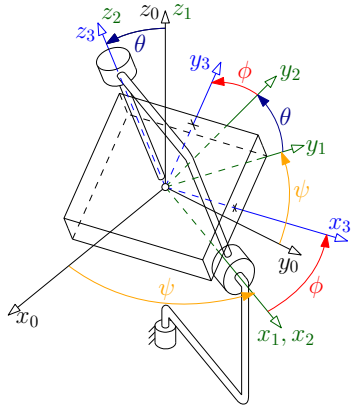
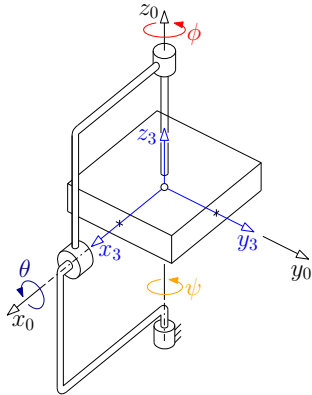


A három elemi forgásból álló forgásnál meg kell adni, hogy mely tengelyek körül és milyen sorrendben forgatunk. Az elnevezések nem egységesek a szakirodalomban. Általában az elforgatott zxz tengelyek körüli szögelfordulásokat szokás Euler-szögeknek nevezni, míg az elforgatott xyz tengelyek körüli szögelfordulást szokás Kardán- vagy Bryan- vagy Bryan-Tait szögeknek nevezni.

Az Euler szögek alatt az együtt forgó zxz tengelyek körüli

$$\underline{\beta} = [\psi \quad \theta \quad \phi]^T$$

szögeket értjük. A vizsgált test elemi forgásainak sorrendjét egy fiktív kinematikai lánc szemlélteti. A kiindulási helyzetben ($\underline{\beta} = \underline{0}$) a testhez kötött $\mathcal{K}_3$ KR tengelyei egybeesnek az álló $\mathcal{K}_0$ KR tengelyeivel.

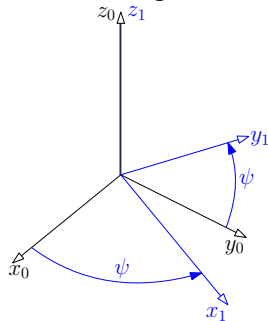


Euler-szögek forgató mátrixa

Egy testhez kötött $\underline{r}$ vektor $\mathcal{K}_3$ KR-beli koordinátáit a három elemi transzformációból álló transzformációs mátrixszal lehet a kiindulási $\mathcal{K}_0$ KR-be transzformálni:

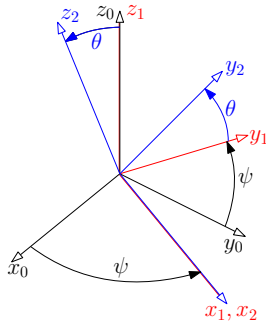
$${}^0\underline{r} = \underbrace{{}^{10}\underline{T}(\psi) {}^{21}\underline{T}(\theta) {}^{32}\underline{T}(\phi)}_{{}^{30}\underline{T}(\psi, \theta, \phi)} {}^3\underline{r} = {}^{30}\underline{T}(\psi, \theta, \phi) {}^3\underline{r}$$

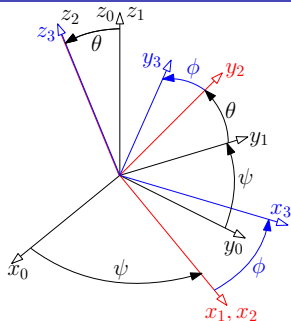
Az elemi forgatások transzformációs mátrixai:



$${}^{10}\underline{T}(\psi) = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{21}\underline{T}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix}$$





$${}^{32}\underline{\underline{T}}(\psi) = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elvégezve a mátrix-szorzást

$$\begin{aligned} {}^{30}\underline{\underline{T}}(\psi, \theta, \phi) &= \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c\psi c\phi - s\psi c\theta s\phi & -c\psi s\phi - s\psi c\theta c\phi & s\psi s\theta \\ s\psi c\phi + c\psi c\theta s\phi & -s\psi s\phi + c\psi c\theta c\phi & -c\psi s\theta \\ s\theta s\phi & s\theta c\phi & c\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Euler-szögek meghatározása forgató mátrixból

Adott ${}^{30}\underline{\underline{T}} = (T_{ij})$ mátrix koordinátákból számíthatók az Euler-szögek:

- ① $c\theta = T_{33}$ és $s\theta = \sqrt{1 - T_{33}^2}$ amiből θ számítható. Két érték is lehetséges lenne, de a többértelműség elkerülése végett a $0 < \theta < \pi$ értéktartományban lévő megoldást választjuk.
- ② $c\phi = \frac{T_{32}}{s\theta}$ és $s\phi = \frac{T_{31}}{s\theta}$ amiből ϕ számítható
 $c\psi = \frac{T_{23}}{s\theta}$ és $s\psi = \frac{T_{13}}{s\theta}$ amiből ψ számítható

A $\theta = 0, \pi$ értékeknél **szinguláris helyzetről** beszélünk. Ilyenkor az Euler-szögek kiszámítása nem lehetséges.

Euler-szögek és szögsebesség

Az Euler szögek idő szerinti deriváltjai és a szögsebesség közötti összefüggés elviekben a forgató mátrix Poisson-egyenletbe való behelyettesítésével számítható, de ez a megoldás körülményes.

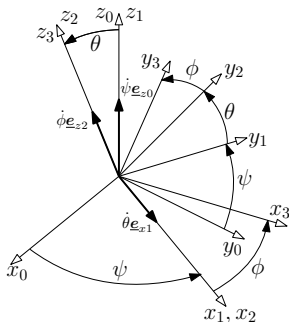
Egyszerűbb és szemléletesebb, a képzelt csuklók körüli elemi forgómozgások összegeként felírni a szögsebességet:

$$\underline{\omega}_{03} = \dot{\psi} \underline{e}_{z0} + \dot{\theta} \underline{e}_{x1} + \dot{\phi} \underline{e}_{z2}$$

Amit oly módon is írhatunk, hogy

$$\underline{\omega}_{03} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{e}_{z0} & \underline{e}_{x1} & \underline{e}_{z2} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{H}}^{-1}} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

A mozgásegyenletekben általában az inverz összefüggés szükséges, ezért vezetjük be $\underline{\underline{H}}^{-1}$ leképező mátrix inverzét. A kiszámítás a $\mathcal{K}_0$ vagy $\mathcal{K}_3$ KR-ben is elvégezhető.



Az $\underline{\omega}_{03}$ koordinátái a $\mathcal{K}_0$ KR-ben

Az előzőekben ismertetett egyenlet a $\mathcal{K}_0$ KR-ben:

$${}^0\underline{\omega}_{03} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0\underline{e}_{z0} & {}^0\underline{e}_{x1} & {}^0\underline{e}_{z2} \end{bmatrix}}_{{}^0\underline{H}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}}_{\underline{\beta}}$$

A tengelyek egységvektorait az alábbiak szerint kapjuk meg:

- ${}^0\underline{e}_{z0}$ a $\mathcal{K}_0$ KR z_0 tengelyének bázisvektora
- ${}^0\underline{e}_{x1}$ a ${}^{10}\underline{T} = \begin{bmatrix} {}^0\underline{e}_{x1} & {}^0\underline{e}_{y1} & {}^0\underline{e}_{z1} \end{bmatrix}$ első oszlopa
- ${}^0\underline{e}_{z2}$ a ${}^{20}\underline{T} = {}^{10}\underline{T} {}^{21}\underline{T} = \begin{bmatrix} {}^0\underline{e}_{x2} & {}^0\underline{e}_{y2} & {}^0\underline{e}_{z2} \end{bmatrix}$ harmadik oszlopa

Ezeket behelyettesítve

$${}^0\underline{H}^{-1}(\underline{\beta}) = \begin{bmatrix} 0 & c\psi & s\psi s\theta \\ 0 & s\psi & -c\psi s\theta \\ 1 & 0 & c\theta \end{bmatrix}$$

Invertálva a ${}^0\mathbf{H}^{-1}$ mátrixot megkapjuk a koordinátasebességekre vonatkozó összefüggést:

$$\underline{\dot{\beta}} = {}^0\mathbf{H} {}^0\omega_{03} \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{s\theta} \begin{bmatrix} -s\psi c\theta & c\psi c\theta & s\theta \\ c\psi s\theta & s\psi s\theta & 0 \\ s\psi & -c\psi & 0 \end{bmatrix}}_{{}^3\mathbf{H}(\underline{\beta})} \begin{bmatrix} {}^0\omega_{03x} \\ {}^0\omega_{03y} \\ {}^0\omega_{03z} \end{bmatrix}$$

Az ω_{03} koordinátái a $\mathcal{K}_3$ KR-ben

A testhez kötött $\mathcal{K}_3$ KR-ben

$${}^3\omega_{03} = \begin{bmatrix} {}^3\mathbf{e}_{z0} & {}^3\mathbf{e}_{x1} & {}^3\mathbf{e}_{z2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad {}^3\omega_{03} = {}^3\mathbf{H}^{-1}(\underline{\beta}) \underline{\dot{\beta}}$$

Részletesen kifejtve:

$$\begin{bmatrix} {}^3\omega_{03x} \\ {}^3\omega_{03y} \\ {}^3\omega_{03z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\theta s\phi & c\phi & 0 \\ s\theta c\phi & -s\phi & 0 \\ c\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

A művelet inverze

$$\underline{\dot{\beta}} = {}^3\underline{H} {}^3\omega_{03} \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \frac{1}{s\theta} \begin{bmatrix} -s\phi & c\phi & 0 \\ s\theta c\phi & -s\theta s\phi & 0 \\ -c\theta s\phi & -c\theta c\phi & s\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^3\omega_{03x} \\ {}^3\omega_{03y} \\ {}^3\omega_{03z} \end{bmatrix}$$

A szinguláris helyzetekben a $\underline{\dot{\beta}}$ koordinátasebességek meghatározása nem lehetséges.

A $\theta = 0$ esetén fellépő szingularitás elkerülhető pl. az xyz-Bryan szögek ($\underline{\beta} = [\alpha \ \beta \ \gamma]^T$) alkalmazásával. Ilyenkor

$${}^{30}\underline{T}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & -s\alpha c\gamma + c\alpha s\beta s\gamma & s\alpha s\gamma + c\alpha s\beta c\gamma \\ s\alpha c\beta & c\alpha c\gamma + s\alpha s\beta s\gamma & -c\alpha s\gamma + s\alpha s\beta c\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{\beta}} = {}^0\underline{H} {}^0\omega_{03} \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \frac{1}{c\beta} \begin{bmatrix} c\alpha s\beta & s\alpha s\beta & c\beta \\ -s\alpha c\beta & c\alpha c\beta & 0 \\ c\alpha & s\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0\omega_{03x} \\ {}^0\omega_{03y} \\ {}^0\omega_{03z} \end{bmatrix}$$

Szingularitás a $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$ helyzetekben.

Euler-paraméterek (Euler-Rodrigues-paraméterek)

Az Euler-paraméterek az $(\underline{u}, \varphi)$ forgásvektor segítségével értelmezhetők. Az $\underline{u}$ három koordinátájából és a φ szögből négy Euler-paramétert vezetünk be, melyet egy (4×1) méretű $\underline{\hat{p}}$ mátrixba foglalunk:

$$\underline{\hat{p}} = \begin{bmatrix} p_s \\ \underline{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \underline{u} \sin \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \quad \text{ill.} \quad \underline{\hat{p}} = \begin{bmatrix} p_s \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ u_x \sin \frac{\varphi}{2} \\ u_y \sin \frac{\varphi}{2} \\ u_z \sin \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}$$

Ebben az írásmódban $p_s = \cos \varphi$ az Euler-paraméterek skalár része és $\underline{p} = \underline{u} \sin \frac{\varphi}{2}$ az Euler-paraméterek vektorrésze.

Az Euler-paraméterek ki kell elégítsék az alábbi normálási feltételt:

$$\phi(\underline{\hat{p}}) = p_s^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - 1 = 0 \quad \text{vagy} \quad p_s^2 + \underline{p}^T \underline{p} - 1 = 0$$

Ezáltal a négy érték egymástól függő. Következésképp a szabad forgás szabadságfoka három.

Az Euler-paraméterek nem rendelkeznek szingularitásokkal.

Euler-paraméterek és forgástenzor

Az $\underline{\underline{R}}(\underline{u}, \varphi) = \cos \varphi \underline{\underline{1}} + \sin \varphi \underline{\underline{\tilde{u}}} + (1 - \cos \varphi) \underline{u} \underline{u}^T$ forgástenzor a

$$\cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1, \quad \sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}, \quad 1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

trigonometrikus azonosságok segítségével átalakítható úgy, hogy abban az Euler-paraméterek szerepeljenek:

$$\underline{\underline{R}}(\underline{\hat{p}}) = (2p_s^2 - 1) \underline{\underline{1}} + 2p_s \underline{\underline{\tilde{p}}} + 2\underline{p} \underline{p}^T$$

Felhasználva az 1. előadás, 17.o. (1) összefüggést és a 11.o.-n található normálási feltételt, az $\underline{p} \underline{p}^T = \underline{\underline{\tilde{p}}} \underline{\underline{\tilde{p}}} + (\underline{p}^T \underline{p}) \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{\tilde{p}}} \underline{\underline{\tilde{p}}} + (1 - p_s^2) \underline{\underline{1}}$ átalakítást behelyettesítve a forgástenzor másik alakja:

$$\underline{\underline{R}}(\underline{\hat{p}}) = \underline{\underline{1}} + 2p_s \underline{\underline{\tilde{p}}} + 2\underline{\underline{\tilde{p}}} \underline{\underline{\tilde{p}}}$$

Az Euler paraméterek ($\underline{p}$) értéke függ a kiválasztott KR-től. Így pl. a $\mathcal{K}_0$ KR-ben

$${}^0 \underline{\hat{p}} = \begin{bmatrix} p_s \\ 0 \\ \underline{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ 0 \\ \underline{u} \sin \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}$$

Ennek megfelelően a forgatómátrix:

$$\underline{\underline{R}} \left({}^0\hat{\underline{p}} \right) = {}^0 \begin{bmatrix} p_s^2 + p_x^2 - \frac{1}{2} & p_x p_y - p_s p_z & p_x p_z + p_s p_y \\ p_x p_y + p_s p_z & p_s^2 + p_y^2 - \frac{1}{2} & p_y p_z - p_s p_x \\ p_x p_z - p_s p_y & p_y p_z + p_s p_x & p_s^2 + p_z^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = {}^{10} \underline{\underline{T}}$$

Tulajdonságok:

- A forgástengely a forgással nem változik, ezért koordinátái megegyeznek a kiindulási és az elforgatott KR-ben, ezért:

$${}^0\underline{p} = {}^1\underline{p} \quad \text{valamint} \quad {}^0\hat{\underline{p}} = {}^1\hat{\underline{p}}$$

- A $\hat{\underline{p}}$ és $-\hat{\underline{p}}$ Euler-paraméterek ugyanazt a forgást írják le:

$$\underline{\underline{R}} \left(\hat{\underline{p}} \right) = \underline{\underline{R}} \left(-\hat{\underline{p}} \right)$$

A többértelműség elkerülése végett az Euler paramétereket úgy szokás megadni, hogy a skalár rész $p_s \geq 0$.

- A fordított irányú forgás leírásához a $\underline{p}$ vektorrész előjelét változtatják meg:

$$\underline{\underline{R}}^T \left(p_s, \underline{p} \right) = \underline{\underline{R}} \left(p_s, -\underline{p} \right)$$

Euler-paraméterek meghatározása forgatómátrixból

A ${}^0\hat{\underline{p}}$ Euler-paramétereket a $\mathcal{K}_0$ KR-ben az adott $\underline{\underline{R}}({}^0\hat{\underline{p}}) = {}^{10}\underline{\underline{T}} = (T_{ij})$ forgatómátrixból az alábbi egyenletekből határozhatjuk meg:

Főátló-beli elemek egyenletei

- A főátló elemeinek összege:

$$S = T_{11} + T_{22} + T_{33} = 2(3p_s^2 + \overbrace{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}^{1-p_s^2}) - 3 = 4p_s^2 - 1$$

amiből $p_s^2 = \frac{1}{4}(1 + S)$, illetve formálisan kiegészítve

$$p_s^2 = \frac{1}{4}(1 + 2T_{00} - S) \quad \text{ahol} \quad T_{00} = S \quad (1)$$

- Az egyes főátló-beli elemek:

$$T_{11} = 2(p_s^2 + p_x^2) - 1, \quad T_{22} = 2(p_s^2 + p_y^2) - 1, \quad T_{33} = 2(p_s^2 + p_z^2) - 1$$

A p_s^2 -re kapott összefüggést és S -et beírva:

$$p_x^2 = \frac{1}{4}(1 + 2T_{11} - S) \quad (2)$$

$$p_y^2 = \frac{1}{4}(1 + 2T_{22} - S) \quad (3)$$

$$p_z^2 = \frac{1}{4}(1 + 2T_{33} - S) \quad (4)$$

Főátlón kívüli elemek egyenletei

- Az aszimmetrikus részből
- A szimmetrikus részből

$$4p_s p_x = T_{32} - T_{23} \quad (5)$$

$$4p_s p_y = T_{13} - T_{31} \quad (6)$$

$$4p_s p_z = T_{21} - T_{12} \quad (7)$$

$$4p_y p_z = T_{32} + T_{23} \quad (8)$$

$$4p_z p_x = T_{13} + T_{31} \quad (9)$$

$$4p_x p_y = T_{21} + T_{12} \quad (10)$$

Algoritmus az Euler-paraméterek számításához

- 1 $S = T_{00} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$ számítása.
- 2 A p_0, p_1, p_2, p_3 Euler-paraméter közül a legnagyobb kiszámítása. Mivel az (1)-(4) egyenletek ugyanolyan felépítésűek, ezért a legnagyobb értékű p_i Euler-paramétert a $T_{ii} = \max(T_{00}, T_{11}, T_{22}, T_{33})$ egyenletből

$$p_i = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2T_{ii} - S}$$

alapján számítható. Előjel szabadon választható.

- 3 A maradék (5)-(10) egyenletekből a p_i -t tartalmazókból a másik három paraméter számítása.
- 4 Ha $p_0 = p_s < 0$, akkor az Euler-paraméterek beszorzása -1 -gyel.

Euler-paraméterek mint kvaterniók

Kvaternió: négyelemű komplex szám, mely egy valós és három imaginárius részből áll:

$$\hat{\mathbf{a}} = a_s + \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z$$

ahol $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ imaginárius egységek. A kapcsolat a vektorkszámítással akkor jelentkezik, ha a valós a_s részt a skalár résznek, az imaginárius a_x, a_y, a_z részeket a vektor résznek definiáljuk. Így (4×1) -es mátrixban

$$\underline{\hat{\mathbf{a}}} = \begin{bmatrix} a_s \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_s \\ \underline{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{skalár rész} \\ \text{vektor rész} \end{array}$$

Kvaterniók legfontosabb jellemzői:

- Összeadás: $\underline{\hat{\mathbf{c}}} = \underline{\hat{\mathbf{a}}} + \underline{\hat{\mathbf{b}}}$ elemenként
- Szorzás: $\underline{\hat{\mathbf{c}}} = \underline{\hat{\mathbf{a}}} \otimes \underline{\hat{\mathbf{b}}}$ számítása ($\underline{\hat{\mathbf{a}}} \otimes \underline{\hat{\mathbf{b}}} \neq \underline{\hat{\mathbf{b}}} \otimes \underline{\hat{\mathbf{a}}}$)

$$\begin{bmatrix} c_s \\ \underline{\mathbf{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_s \\ \underline{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_s \\ \underline{\mathbf{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_s b_s - \underline{\mathbf{a}}^T \underline{\mathbf{b}} \\ a_s \underline{\mathbf{b}} + b_s \underline{\mathbf{a}} + \tilde{\underline{\mathbf{a}}} \underline{\mathbf{b}} \end{bmatrix}$$

- mátrixosan: $\underline{\hat{a}} \otimes \underline{\hat{b}} = \begin{bmatrix} a_s & -\underline{a}^T \\ \underline{a} & a_s \underline{1} + \tilde{\underline{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_s \\ \underline{b} \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}(\underline{\hat{a}}) \underline{\hat{b}}$, ill.

$$\underline{\hat{a}} \otimes \underline{\hat{b}} = \begin{bmatrix} b_s & -\underline{b}^T \\ \underline{b} & b_s \underline{1} - \tilde{\underline{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_s \\ \underline{a} \end{bmatrix} = \underline{\underline{B}}(\underline{\hat{b}}) \underline{\hat{a}}$$

további jell.: $\underline{\hat{a}} \otimes (\underline{\hat{b}} \otimes \underline{\hat{c}}) = (\underline{\hat{a}} \otimes \underline{\hat{b}}) \otimes \underline{\hat{c}} = \underline{\hat{a}} \otimes \underline{\hat{b}} \otimes \underline{\hat{c}}$

$$\underline{\hat{a}} \otimes \underline{\hat{b}} + \underline{\hat{c}} = \underline{\hat{a}} \otimes \underline{\hat{b}} + \underline{\hat{a}} \otimes \underline{\hat{c}}$$

- konjugált kvaternió: $\underline{\hat{a}} = \begin{bmatrix} a_s \\ \underline{a} \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\bar{\hat{a}}} = \begin{bmatrix} a_s \\ -\underline{a} \end{bmatrix} \quad \overline{\underline{\hat{a}} \otimes \underline{\hat{b}}} = \underline{\bar{\hat{a}}} \otimes \underline{\bar{\hat{b}}}$

- kvaternió nagysága (normája):

$$|\underline{\hat{a}}| = \sqrt{a_s^2 + a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_s^2 + \underline{a}^T \underline{a}} = \sqrt{\underline{\hat{a}} \otimes \underline{\bar{\hat{a}}}}$$

- egy-kvaternió: $\underline{\hat{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{0} \end{bmatrix}$, amivel $\underline{\hat{a}} \otimes \underline{\hat{1}} = \underline{\hat{1}} \otimes \underline{\hat{a}} = \underline{\hat{a}}$

- inverz kvaternió: $\underline{\hat{a}} \otimes \underline{\hat{a}}^{-1} = \underline{\hat{a}}^{-1} \otimes \underline{\hat{a}} = \underline{\hat{1}}$, így $\underline{\hat{a}}^{-1} = \frac{\underline{\bar{\hat{a}}}}{|\underline{\hat{a}}|^2}$

- egységkvaternió: $\underline{\hat{e}} = \frac{\underline{\hat{a}}}{|\underline{\hat{a}}|}$, amivel $\underline{\hat{e}}^{-1} = \underline{\bar{\hat{e}}}$ és $\underline{\hat{e}} \otimes \underline{\bar{\hat{e}}} = \underline{\hat{1}}$

Forgatás Euler-paraméterekkel

A ${}^0\mathbf{r}(t) = {}^0\mathbf{R}(t) {}^0\mathbf{r}_0$ forgatás, ahol ${}^0\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}({}^0\mathbf{u}(t), \varphi(t))$ leírható ugyanabból a forgásvektorból képzett ${}^0\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}}({}^0\mathbf{u}, \varphi)$ Euler-paraméterekkel a kvaterniószorzással:

$${}^0\hat{\mathbf{r}}(t) = {}^0\hat{\mathbf{p}}(t) \otimes {}^0\hat{\mathbf{r}}_0 \otimes {}^0\bar{\hat{\mathbf{p}}}(t) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ {}^0\mathbf{r}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_s(t) \\ {}^0\mathbf{p}(t) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ {}^0\mathbf{r}_0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} p_s(t) \\ -{}^0\mathbf{p}(t) \end{bmatrix}$$

Mivel ${}^{10}\mathbf{T} = \mathbf{R}({}^0\mathbf{u}(t), \varphi(t))$, ezért a ${}^0\mathbf{r}(t) = {}^{10}\mathbf{T}(t) {}^1\mathbf{r}$ koordinátatranszformáció a $\mathcal{K}_1$ KR-ből a $\mathcal{K}_0$ KR-be szintén leírható a ${}^{10}\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}({}^0\mathbf{u}, \varphi)$ transzformációs kvaternióval:

$${}^0\hat{\mathbf{r}}(t) = {}^{10}\hat{\mathbf{k}}(t) \otimes {}^1\hat{\mathbf{r}} \otimes {}^{10}\bar{\hat{\mathbf{k}}}(t)$$

Mivel ${}^0\hat{\mathbf{r}}_0 = {}^1\hat{\mathbf{r}}$, a fenti két egyenlet megegyezik.

Egy $\underline{r}_0$ vektor egymást követő $(\underline{u}, \varphi)$ és $(\underline{w}, \psi)$ forgatása az alábbiak szerint történik:

$${}^0\hat{\underline{r}}_{1'} = {}^0\hat{\underline{p}}_1 \otimes {}^0\hat{\underline{r}}_0 \otimes {}^0\hat{\underline{p}}_1 \quad \text{ahol} \quad {}^0\hat{\underline{p}}_1 = \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ {}^0\underline{u} \sin \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}$$

$${}^0\hat{\underline{r}}_2 = {}^0\hat{\underline{p}}_2 \otimes {}^0\hat{\underline{r}}_{1'} \otimes {}^0\hat{\underline{p}}_2 \quad \text{ahol} \quad {}^0\hat{\underline{p}}_2 = \begin{bmatrix} \cos \frac{\psi}{2} \\ {}^0\underline{w} \sin \frac{\psi}{2} \end{bmatrix}$$

Behelyettesítés után

$${}^0\hat{\underline{r}}_2 = \underbrace{{}^0\hat{\underline{p}}_2 \otimes {}^0\hat{\underline{p}}_1}_{{}^0\hat{\underline{p}}_{02}} \otimes {}^0\hat{\underline{r}}_0 \otimes \underbrace{{}^0\hat{\underline{p}}_1 \otimes {}^0\hat{\underline{p}}_2}_{{}^0\hat{\underline{p}}_{02}}$$

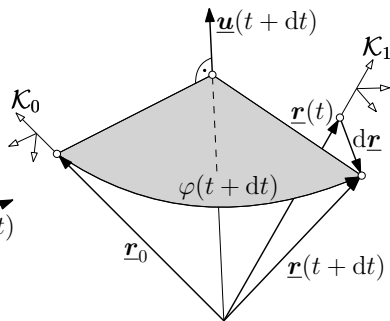
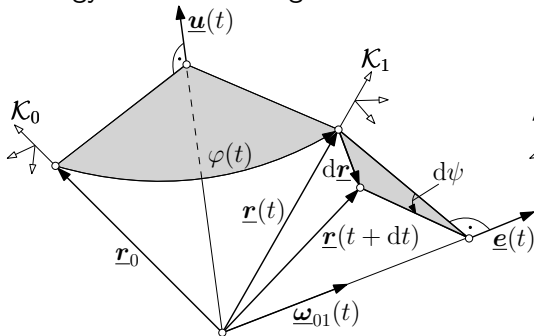
Az $\underline{r}_2$ vektor koordinátáinak egymást követő ($\mathcal{K}_2$ -ből $\mathcal{K}_1$ -be, majd $\mathcal{K}_1$ -ből $\mathcal{K}_0$ -ba) transzformációja:

$${}^0\hat{\underline{r}}_2 = \underbrace{{}^{10}\hat{\underline{k}} \otimes {}^{21}\hat{\underline{k}}}_{{}^{20}\hat{\underline{k}}} \otimes {}^2\hat{\underline{r}}_2 \otimes \underbrace{{}^{10}\hat{\underline{k}} \otimes {}^{21}\hat{\underline{k}}}_{{}^{20}\hat{\underline{k}}}$$

Ahol ${}^{10}\hat{\underline{k}} = {}^0\hat{\underline{p}}_2$ és ${}^{21}\hat{\underline{k}} = {}^0\hat{\underline{p}}_1$.

Euler-paraméterek és szögsebesség

Két egymást követő forgatást tekintünk.



1. Az $\underline{r}_0$ vektor egy véges forgatással $(\underline{u}(\varphi), \varphi(t))$ -val $\underline{r}(t)$ -be forgatása:

$$\hat{\underline{r}}(t) = \hat{\underline{p}}(t) \otimes \hat{\underline{r}}_0 \otimes \bar{\underline{p}}(t) \quad \text{ahol} \quad \hat{\underline{p}}(t) = \begin{bmatrix} p_s(t) \\ \underline{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \underline{u} \sin \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}$$

2. Az $\underline{r}(t)$ továbbforgatása $(\underline{e}, d\psi)$ -vel $\underline{r}(t+dt)$ -be:

$$\hat{\underline{r}}(t+dt) = \hat{\underline{p}}(\underline{e}, d\psi) \otimes \hat{\underline{r}}(t) \otimes \bar{\underline{p}}(\underline{e}, d\psi)$$

Az infinitezimális forgást leíró kvaternió:

$$\hat{\underline{p}}(\underline{e}, d\psi) = \begin{bmatrix} \cos \frac{d\psi}{2} \\ \underline{e} \sin \frac{d\psi}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{e} \frac{d\psi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{e} \frac{d\psi}{2} \end{bmatrix}$$

A két egymást követő forgást leíró egyenletet egymásba írva kapjuk, hogy

$$\hat{\underline{r}}(t + dt) = \hat{\underline{p}}(t + dt) \otimes \hat{\underline{r}}_0 \otimes \bar{\hat{\underline{p}}}(t + dt)$$

ahol az eredő forgást leíró kvaternió:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{p}}(t + dt) &= \hat{\underline{p}}(\underline{e}, d\psi) \otimes \hat{\underline{p}}(t) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \underline{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{e} \frac{d\psi}{2} \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} p_s(t) \\ \underline{p}(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} p_s(t) \\ \underline{p}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \underline{e} \frac{d\psi}{2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} p_s(t) \\ \underline{p}(t) \end{bmatrix}}_{d\hat{\underline{p}}} = \hat{\underline{p}}(t) + d\hat{\underline{p}} \end{aligned}$$

Ahol $d\hat{\underline{p}}$ a $\hat{\underline{p}}(t)$ kvaternió kicsiny forgásból származó megváltozása. Kicsiny dt időintervallumra vonatkoztatva, és az $\underline{\omega}_{01} = \underline{e}\dot{\psi}$ szögsebességgel

$$\frac{d\hat{\underline{p}}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dp_s}{dt} \\ \underline{0} \frac{d\underline{p}}{dt} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\omega}_{01} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} p_s \\ \underline{p} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \hat{\underline{\omega}}_{01} \otimes \hat{\underline{p}}$$

Más jelöléssel:

$${}^0\dot{\underline{\hat{p}}} = \begin{bmatrix} \dot{p}_s \\ {}^0\dot{\underline{\hat{p}}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\omega}_{01} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} p_s \\ \underline{p} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \underline{\hat{\omega}}_{01} \otimes \underline{\hat{p}}$$

A kvaterniók közötti szorzás mátrixos írásmódjával:

$${}^0\dot{\underline{\hat{p}}} = \begin{bmatrix} \dot{p}_s \\ {}^0\dot{\underline{\hat{p}}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_s & -\underline{p}^T \\ \underline{p} & p_s \underline{1} - \underline{\tilde{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\omega}_{01} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \underline{\underline{P}}(\underline{\hat{p}}) \underline{\hat{\omega}}_{01}$$

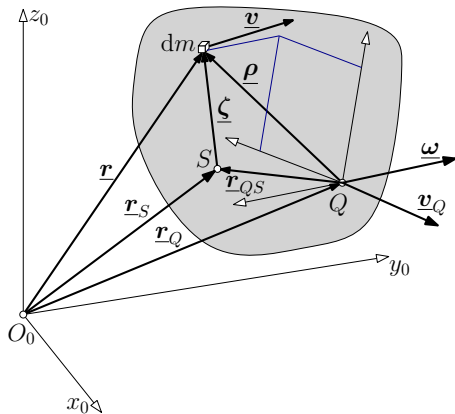
A fenti egyenlet bármely KR-ben felírható, a $\mathcal{K}_0$ -ban történő deriválás miatt $({}^0\dot{[}{}^0\dot{\underline{\hat{p}}}] = {}^0\dot{\underline{\hat{p}}})$ célszerű ebben a KR-ben elvégezni:

$${}^0\dot{\underline{\hat{p}}} = \begin{bmatrix} \dot{p}_s \\ {}^0\dot{\underline{\hat{p}}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_s & -{}^0\underline{p}^T \\ {}^0\underline{p} & p_s \underline{1} - {}^0\underline{\tilde{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ {}^0\underline{\omega}_{01} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \underline{\underline{P}}({}^0\underline{\hat{p}}) {}^0\underline{\hat{\omega}}_{01}$$

A $\underline{\underline{P}}$ mátrix ortogonális, azaz $\underline{\underline{P}}^{-1} = \underline{\underline{P}}^T$, így $\underline{\hat{\omega}}_{01}$ kifejezhető ${}^0\dot{\underline{\hat{p}}}$ függvényében:

$${}^0\underline{\hat{\omega}}_{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ {}^0\underline{\omega}_{01} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} p_s & {}^0\underline{p}^T \\ -{}^0\underline{p} & p_s \underline{1} + {}^0\underline{\tilde{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_s \\ {}^0\dot{\underline{\hat{p}}} \end{bmatrix} = 2 \underline{\underline{P}}^T({}^0\underline{\hat{p}}) {}^0\dot{\underline{\hat{p}}}$$

Merev testek dinamikája (összefoglaló)



Legyen a vizsgált testre ható összes külső erő eredője $\underline{F}$, és valamely a testhez kötött Q pontjára számított nyomatéka $\underline{M}_Q$. A test tömege m , tehetetlenségi tenzora a súlypontra:

$$\underline{J}_S = - \int_{(V)} \tilde{\underline{\zeta}} \tilde{\underline{\zeta}} \rho dV$$

míg a Q pontra:

$$\underline{J}_Q = - \int_{(V)} \tilde{\underline{\rho}} \tilde{\underline{\rho}} \rho dV = \underline{J}_S - m \tilde{\underline{r}}_{QS} \tilde{\underline{r}}_{QS}$$

Impulzustétel:

$$m \dot{\underline{v}}_S = \underline{F} \quad \text{ahol} \quad \dot{\underline{v}}_S = \underline{a}_S$$

Perdülettel egy tetszőleges, testhez kötött Q pontra:

$$m\tilde{\underline{r}}_{QS}\dot{\underline{v}}_Q + \underline{J}_Q\dot{\underline{\omega}} + \tilde{\underline{\omega}}\underline{J}_Q\omega = \underline{M}_Q$$

Az $m\tilde{\underline{r}}_{QS}\dot{\underline{v}}_Q$ tag a következő esetekben tűnik el:

- 1 A Q és S pontok egybeesnek, így $\underline{r}_{QS} = \underline{0}$. A perdülettel alakja ilyenkor:

$$\underline{J}_S\dot{\underline{\omega}} + \tilde{\underline{\omega}}\underline{J}_S\omega = \underline{M}_S$$

- 2 A test Q pontjának nincs gyorsulása (rögzített), azaz $\dot{\underline{v}}_Q = \underline{0}$. perdülettel alakja ilyenkor:

$$\underline{J}_Q\dot{\underline{\omega}} + \tilde{\underline{\omega}}\underline{J}_Q\omega = \underline{M}_Q$$

- 3 Az $\tilde{\underline{r}}_{QS}$ és $\dot{\underline{v}}_Q$ vektorok párhuzamosak.

A perdülettel lehetőség szerint egy testhez kötött KR-ben fejtik ki, mert ilyenkor a tehetetlenségi tenzor koordinátái konstansok. A számítást elvégezni legegyszerűbben a test tehetetlenségi fő tengelyeinek KR-ében lehet.

Merev test kinetikus (mozgási) energiája

$$E = \frac{1}{2} m \underline{\underline{\mathbf{v}_Q}}^T \underline{\underline{\mathbf{v}_Q}} + m \underline{\underline{\mathbf{v}_Q}}^T \tilde{\underline{\underline{\omega}}} \underline{\underline{\mathbf{r}_{QS}}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\omega}}^T \underline{\underline{\mathbf{J}_Q}} \underline{\underline{\omega}}$$

A középső tag ($m \underline{\underline{\mathbf{v}_Q}}^T \tilde{\underline{\underline{\omega}}} \underline{\underline{\mathbf{r}_{QS}}}$) eltűnik, ha

- 1 A Q és S pontok egybeesnek, így $\underline{\underline{\mathbf{r}_{QS}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$. A kinetikus energia ilyenkor:

$$E = \frac{1}{2} m \underline{\underline{\mathbf{v}_S}}^T \underline{\underline{\mathbf{v}_S}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\omega}}^T \underline{\underline{\mathbf{J}_S}} \underline{\underline{\omega}}$$

- 2 A Q pont nyugalomban van, azaz $\underline{\underline{\mathbf{v}_Q}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$.

Köszönöm a figyelmet!