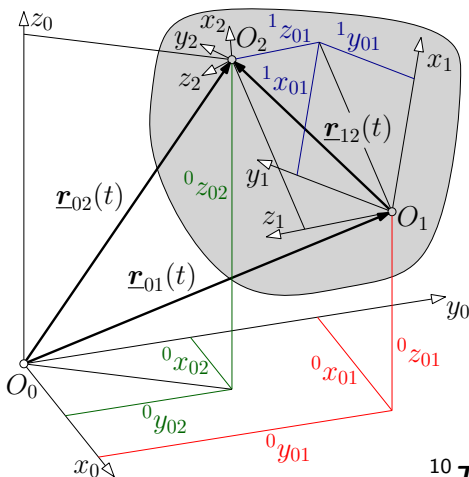


Mechanizmusok és robotok

2. előadás

Merev testek kinematikája

Merev test általános mozgása



Egy test általános mozgását úgy írjuk le a $\mathcal{K}_0$ KR-ben, hogy a testhez kötött $\mathcal{K}_1$ KR mozgását vizsgáljuk. Euler tétele értelmében a test mozgása egy haladó és egy forgó mozgás összegeként leírható:

- O_1 pont pályamozgása:

$${}^0\underline{r}_{01}(t) = \begin{bmatrix} x_{01}(t) \\ y_{01}(t) \\ z_{01}(t) \end{bmatrix}$$

- A $\mathcal{K}_1$ KR forgómozgása, melyet az időben változó ${}^{10}\underline{T}(t)$ transzformációs mátrixszal írunk le:

$${}^{10}\underline{T}(t) = \begin{bmatrix} {}^0\underline{e}_{x1}(t) & {}^0\underline{e}_{y1}(t) & {}^0\underline{e}_{z1}(t) \end{bmatrix}$$

Mivel a ${}^{10}\underline{\underline{T}}(t)$ transzformációs mátrix a $\mathcal{K}_1$ KR relatív irányítottságát (orientációját) a $\mathcal{K}_0$ KR-hez képest, szokás *forogató mátrix*nak is nevezni.

A továbbiakban vizsgálunk egy szintén a testhez kötött $\mathcal{K}_2$ KR-t is, melynek helyét az időben állandó, O_1 -ből O_2 -be mutató

$${}^1\underline{r}_{12} = \begin{bmatrix} x_{12} \\ y_{12} \\ z_{12} \end{bmatrix}$$

helyvektor írja le. A $\mathcal{K}_2$ KR orientációját a $\mathcal{K}_1$ KR-hez képest az időben állandó

$${}^{21}\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} {}^1\underline{e}_{x2} & {}^1\underline{e}_{y2} & {}^1\underline{e}_{z2} \end{bmatrix}$$

forogató mátrix írja le.

Az általános mozgás leírásához meghatározzuk az O_2 pont helyét, sebességét, gyorsulását valamint a $\mathcal{K}_2$ KR orientációját a $\mathcal{K}_0$ KR-hez képest.

Merev test helyzete

Az O_2 pont helye O_0 -hoz képest a testhez kötött $\underline{r}_{12}$ vektorral:

$$\underline{r}_{02}(t) = \underline{r}_{01}(t) + \underline{r}_{12}(t)$$

A $\mathcal{K}_0$ KR-ben: ${}^0\underline{r}_{02}(t) = {}^0\underline{r}_{01}(t) + {}^0\underline{r}_{12}(t)$.

Az ${}^0\underline{r}_{12}(t)$ időtől függő, mivel mozog ebben a KR-ben. A $\mathcal{K}_1$ KR-ben viszont időben állandó, és az időtől függő transzformációs mátrixszal kifejezhető:

$${}^0\underline{r}_{12}(t) = {}^{10}\underline{\underline{T}}(t) {}^1\underline{r}_{12} \quad (1)$$

Így

$${}^0\underline{r}_{02}(t) = {}^0\underline{r}_{01}(t) + {}^{10}\underline{\underline{T}}(t) {}^1\underline{r}_{12}$$

A $\mathcal{K}_2$ KR relatív orientációja $\mathcal{K}_0$ KR-hez képest a forgató mátrixszal írható le:

$${}^{20}\underline{\underline{T}}(t) = {}^{10}\underline{\underline{T}}(t) {}^{21}\underline{\underline{T}}$$

Sebességállapot

Az O_2 pont sebessége a helyvektor idő szerinti deriváltja:

$$\underline{\dot{r}}_{02}(t) = \underline{\dot{r}}_{01}(t) + \underline{\dot{r}}_{12}(t) \quad \text{avagy} \quad \underline{\mathbf{v}}_{02}(t) = \underline{\mathbf{v}}_{01}(t) + \underline{\mathbf{v}}_{12}(t)$$

amelyben

$$\underline{\dot{r}}_{12}(t) = \underline{\mathbf{v}}_{12}(t) = \underline{\tilde{\omega}}_{01}(t) \underline{\mathbf{r}}_{12}(t) \quad (2)$$

ahol

$$\underline{\tilde{\omega}}_{01} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{01z} & \omega_{01y} \\ \omega_{01z} & 0 & -\omega_{01x} \\ -\omega_{01y} & \omega_{01x} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\omega}_{01} = \begin{bmatrix} \omega_{01x} \\ \omega_{01y} \\ \omega_{01z} \end{bmatrix}$$

a testhez kötött $\mathcal{K}_1$ KR szögsebessége a $\mathcal{K}_0$ KR-hez képest.
Ezt behelyettesítve a fenti egyenletbe:

$$\underline{\mathbf{v}}_{02}(t) = \underline{\mathbf{v}}_{01}(t) + \underline{\tilde{\omega}}_{01}(t) \underline{\mathbf{r}}_{12}(t)$$

Az összefüggés merev test két pontjának (O_2 és O_1) sebessége között.

Szögsebesség és forgató mátrix kapcsolata

Deriváljuk ${}^0\mathbf{r}_{12}$ (1) transzformációs egyenletét idő szerint:

$${}^0\dot{\mathbf{r}}_{12}(t) = {}^{10}\underline{\underline{\dot{\mathbf{T}}}}(t) {}^1\mathbf{r}_{12}$$

Helyettesítsük be a ${}^1\mathbf{r}_{12}(t) = {}^{10}\underline{\underline{\mathbf{T}}}^T(t) {}^0\mathbf{r}_{12}$ fordított irányú transzformációt:

$${}^0\dot{\mathbf{r}}_{12}(t) = {}^{10}\underline{\underline{\dot{\mathbf{T}}}}(t) {}^{10}\underline{\underline{\mathbf{T}}}^T(t) {}^0\mathbf{r}_{12}$$

Ha összevetjük a (2) egyenlet $\mathcal{K}_0$ KR-ben felírt ${}^0\mathbf{r}_{12}(t) = {}^0\tilde{\underline{\underline{\omega}}}_{01}(t) {}^0\mathbf{r}_{12}$ alakjával, akkor megkapjuk a *Poisson* egyenletet:

$${}^0\tilde{\underline{\underline{\omega}}}_{01}(t) = {}^{10}\underline{\underline{\dot{\mathbf{T}}}}(t) {}^{10}\underline{\underline{\mathbf{T}}}^T(t)$$

Amiből ${}^0\tilde{\underline{\underline{\omega}}}_{01}(t)$ kifejezhető:

$${}^0\tilde{\underline{\underline{\omega}}}_{01}(t) = \text{vec} \left({}^{10}\underline{\underline{\dot{\mathbf{T}}}}(t) {}^{10}\underline{\underline{\mathbf{T}}}^T(t) \right)$$

Gyorsulásállapot

Az O_2 pont $\underline{v}_{02}(t)$ sebességét idő szerint deriválva kapjuk, hogy

$$\dot{\underline{v}}_{02}(t) = \dot{\underline{v}}_{01}(t) + \dot{\underline{v}}_{12}(t) \quad \text{avagy} \quad \underline{a}_{02}(t) = \underline{a}_{01}(t) + \underline{a}_{12}(t)$$

A $\underline{v}_{12} = \underline{\tilde{\omega}}_{01} \underline{r}_{12}$ idő szerinti deriváltja

$$\dot{\underline{v}}_{12}(t) = \underline{a}_{12}(t) = \underline{\dot{\tilde{\omega}}}_{01}(t) \underline{r}_{12}(t) + \underline{\tilde{\omega}}_{01}(t) \dot{\underline{r}}_{12}(t)$$

ahol $\underline{\dot{\omega}}_{01} = \underline{\varepsilon}_{01}$ a $\mathcal{K}_1$ KR szöggyorsulása a $\mathcal{K}_0$ KR-hez képest, továbbá $\dot{\underline{r}}_{12} = \underline{\tilde{\omega}}_{01} \underline{r}_{12}$, így írhatjuk, hogy

$$\underline{a}_{12}(t) = \underline{\tilde{\varepsilon}}_{01}(t) \underline{r}_{12}(t) + \underline{\tilde{\omega}}_{01}(t) \underline{\tilde{\omega}}_{01}(t) \underline{r}_{12}(t)$$

Ezt behelyettesítve a felső egyenletbe kapjuk, hogy

$$\underline{a}_{02}(t) = \underline{a}_{01}(t) + \underline{\tilde{\varepsilon}}_{01}(t) \underline{r}_{12}(t) + \underline{\tilde{\omega}}_{01}(t) \underline{\tilde{\omega}}_{01}(t) \underline{r}_{12}(t)$$

Az összefüggés merev test két pontjának (O_2 és O_1) gyorsulása között között.

Merev testek relatív mozgása

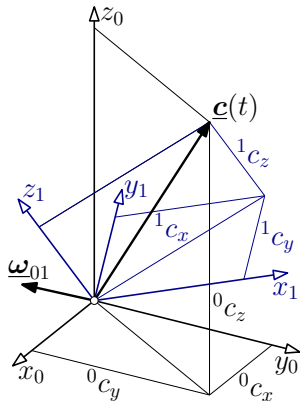
Vizsgáljuk a $\mathcal{K}_0$ és hozzá képest $\underline{\omega}_{01}$ forgó $\mathcal{K}_1$ KR-ben egy időtől függő $\underline{c}(t)$ vektort. A két KR-ben számított idő szerinti deriváltak közötti összefüggés

$${}_0\frac{d\underline{c}(t)}{dt} = {}_1\frac{d\underline{c}(t)}{dt} + \underline{\tilde{\omega}}_{01}(t) \underline{c}(t)$$

illetve

$${}_0\dot{\underline{c}}(t) = {}_1\dot{\underline{c}}(t) + \underline{\tilde{\omega}}_{01}(t) \underline{c}(t)$$

ahol ${}_0\frac{d\underline{c}(t)}{dt} = {}_0\dot{\underline{c}}(t)$ és ${}_1\frac{d\underline{c}(t)}{dt} = {}_1\dot{\underline{c}}(t)$ kifejezésekben a bal alsó 0 és 1 indexek azt jelzik, hogy melyik vonatkoztatási rendszerben ($\mathcal{K}_0$ ill. $\mathcal{K}_1$ KR-ben) végezzük el a deriválást.



A küldönböző KR-ekben elvégzett deriválásoknál a következőket kell figyelembe venni a vektor fizikai tartalma és koordinátákkal történő ábrázolása során:

- A fenti egyenlet bármely vektorra általánosan érvényes, a koordináta szerinti leírás bármely $\mathcal{K}_i$ KR-ben megtörténhet:

$${}^i[\underline{\dot{c}}](t) = {}^i[\underline{\dot{c}}_1](t) + {}^i\tilde{\omega}_{01}(t) {}^i\underline{c}(t)$$

- Egy $\underline{c}(t)$ vektor ${}^i\underline{c}(t)$ koordinátáinak $\mathcal{K}_i$ KR-beli idő szerinti deriváltja az ${}_i\dot{\underline{c}}(t)$ derivált vektor $\mathcal{K}_i$ KR-beli koordinátáit adja, mivel ilyenkor a skalár koordinátákat deriváljuk idő szerint.
→ Koordíátavektor idő szerinti deriváltjánál nem szükséges feltüntetni, hogy mely rendszerben végezzük az idő szerinti deriválást.

$$\frac{d {}^i\underline{c}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} {}^i c_x(t) \\ {}^i c_y(t) \\ {}^i c_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} {}^i c_x(t) \\ \frac{d}{dt} {}^i c_y(t) \\ \frac{d}{dt} {}^i c_z(t) \end{bmatrix} = {}^i[\underline{\dot{c}}](t)$$

- Ha ugyanannak az $\underline{c}(t)$ vektornak a $\mathcal{K}_0$ ill. $\mathcal{K}_1$ KR-beli koordináta-vektorait deriváljuk, akkor az előzőek szerint az egymástól fizikailag eltérő ${}^0\underline{\dot{c}}(t)$ és ${}^1\underline{\dot{c}}(t)$ vektoroknak az adott KR-beli ${}^0[{}^0\underline{\dot{c}}](t)$ és ${}^1[{}^1\underline{\dot{c}}](t)$ koordinátavektorait kapjuk. Ezeket transzformálhatjuk a transzformációs mátrixszal:

$${}^1[{}^0\underline{\dot{c}}](t) = {}^{01}\underline{T}(t) {}^0[{}^0\underline{\dot{c}}](t) \quad \text{és} \quad {}^0[{}^1\underline{\dot{c}}](t) = {}^{10}\underline{T}(t) {}^1[{}^1\underline{\dot{c}}](t)$$

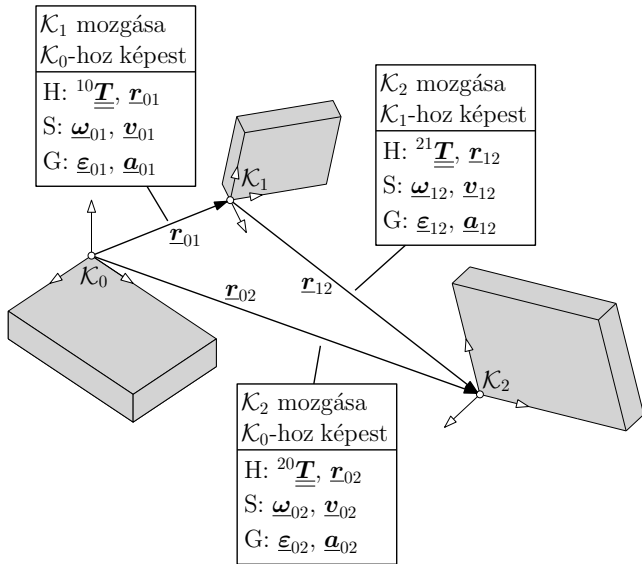
- A szögsebesség idő szerinti deriváltjára vonatkozóan megállapítható, hogy

$${}^0\underline{\dot{\omega}}_{01}(t) = {}^1\underline{\dot{\omega}}_{01}(t) + \underbrace{{}^0\underline{\omega}_{01}(t) \underbrace{{}^1\underline{\omega}_{01}(t)}_0}_{\underline{0}}$$

azaz a $\mathcal{K}_0$ és $\mathcal{K}_1$ KR-ben megegyeznek. A szögsebesség deriváltja a $\mathcal{K}_1$ KR $\underline{\varepsilon}_{01}$ szöggyorsulása a $\mathcal{K}_0$ KR-hez képest:

$$\underline{\varepsilon}_{01}(t) = {}^0\underline{\dot{\omega}}_{01}(t) = {}^1\underline{\dot{\omega}}_{01}(t)$$

Kétféle mozgás összegzése



Feladat:

A $\mathcal{K}_2$ KR $\mathcal{K}_0$ KR-hez viszonyított mozgásának leírása az ismert $\mathcal{K}_1$ KR $\mathcal{K}_0$ KR-hez viszonyított és a $\mathcal{K}_2$ KR $\mathcal{K}_1$ KR-hez viszonyított mozgásainak összegeként.

A relatív mozgásokat leíró mennyiségek

$\mathcal{K}_1$ relatív mozgása $\mathcal{K}_0$ -hoz képest

Helyzet

Forgatómátrix $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_0$ között

$${}^{10}\underline{\underline{T}}$$

Helyvektor O_0 -ból O_1 -be

$$\underline{r}_{01}$$

Sebesség

Szögsebesség $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_0$ között

$$\underline{\omega}_{01}$$

O_1 sebessége O_0 -hoz képest

$$\underline{v}_{01} = {}^0\frac{d\underline{r}_{01}}{dt} = {}_0\underline{\dot{r}}_{01}$$

Gyorsulás

Szöggyorsulás $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_0$ között

$$\underline{\varepsilon}_{01} = {}^0\frac{d\underline{\omega}_{01}}{dt} = {}_0\underline{\dot{\omega}}_{01}$$

O_1 gyorsulása O_0 -hoz képest

$$\underline{a}_{01} = {}^0\frac{d\underline{v}_{01}}{dt} = {}_0\underline{\dot{v}}_{01}$$

$\mathcal{K}_2$ relatív mozgása $\mathcal{K}_1$ -hoz képest*Helyzet*Forgatómátrix $\mathcal{K}_2$ és $\mathcal{K}_1$ között

$${}^{21}\underline{\underline{T}}$$

Helyvektor O_1 -ből O_2 -be

$$\underline{r}_{12}$$

*Sebesség*Szögsebesség $\mathcal{K}_2$ és $\mathcal{K}_1$ között

$$\underline{\omega}_{12}$$

 O_2 sebessége O_1 -hoz képest

$$\underline{v}_{12} = {}^1\frac{d\underline{r}_{12}}{dt} = {}^1\underline{\dot{r}}_{12}$$

*Gyorsulás*Szöggyorsulás $\mathcal{K}_2$ és $\mathcal{K}_1$ között

$$\underline{\epsilon}_{12} = {}^1\frac{d\underline{\omega}_{12}}{dt} = {}^1\underline{\dot{\omega}}_{12}$$

 O_2 gyorsulása O_1 -hoz képest

$$\underline{a}_{12} = {}^1\frac{d\underline{v}_{12}}{dt} = {}^1\underline{\dot{v}}_{12}$$

$\mathcal{K}_2$ relatív mozgása $\mathcal{K}_0$ -hoz képest

Helyzet

Forgatómátrix $\mathcal{K}_2$ és $\mathcal{K}_0$ között
Helyvektor O_1 -ből O_2 -be

$$\begin{aligned}\underline{\underline{T}}^{20} &= \underline{\underline{T}}^{10} \underline{\underline{T}}^{21} \\ \underline{r}_{02} &= \underline{r}_{01} + \underline{r}_{12}\end{aligned}$$

Sebesség

Szögsebesség $\mathcal{K}_2$ és $\mathcal{K}_1$ között
 O_2 sebessége O_1 -hoz képest

$$\begin{aligned}\underline{\omega}_{02} &= \underline{\omega}_{01} + \underline{\omega}_{12} \\ \underline{v}_{02} &= \underbrace{\underline{v}_{01} + \tilde{\underline{\omega}}_{01} \underline{r}_{12}}_{\text{szállító seb.}(\underline{v}_{O_2sz})} + \underbrace{\underline{v}_{12}}_{\text{rel. seb.}(\underline{\beta}_{O_2})}\end{aligned}$$

Gyorsulás

Szöggyorsulás $\mathcal{K}_2$ és $\mathcal{K}_1$ között
 O_2 gyorsulása O_1 -hoz képest

$$\begin{aligned}\underline{\varepsilon}_{02} &= \underline{\varepsilon}_{01} + \underline{\varepsilon}_{12} + \tilde{\underline{\omega}}_{01} \underline{\omega}_{12} \\ \underline{a}_{02} &= \underbrace{\underline{a}_{01} + \underline{\varepsilon}_{01} \underline{r}_{12} + \tilde{\underline{\omega}}_{01} \tilde{\underline{\omega}}_{01} \underline{r}_{12}}_{\text{szállító gyors.}(\underline{a}_{O_2sz})} + \\ &\quad + \underbrace{2\tilde{\underline{\omega}}_{01} \underline{v}_{12}}_{\text{Coriolis gy.}(\underline{a}_{O_2Cor})} + \underbrace{\underline{a}_{12}}_{\text{rel. gy.}(\underline{\alpha}_{O_2})}\end{aligned}$$

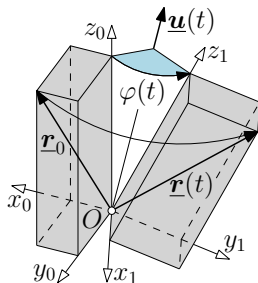
Forgásvektor (Euler-vektor)

Tekintsünk egy testet, egy hozzá kötött $\mathcal{K}_1$ KR-rel, melyet a fix O pont körül a kezdeti $\mathcal{K}_0$ helyzetből forgatunk. Egy tetszőleges testhez kötött vektor kiindulási helyzete $\underline{r}_0$, forgatott (időtől függő) helyzete pedig $\underline{r}(t)$.

Euler tétele fix pont körüli elforgatásról

Egy testhez kötött $\underline{r}_0$ kiindulási helyzetből $\underline{r}(t)$ elforgatott helyzetbe forgatott vektor mozgása leírható egyetlen, O ponton átmenő, egység hosszúságú $\underline{u}$ irányvektor körüli, jobbkéz-szabály szerint φ szöggel történő elforgatással.

- A $\mathcal{K}_0$ KR $\underline{e}_{x0}$, $\underline{e}_{y0}$, $\underline{e}_{z0}$ bázisvektorai is át lesznek forgatva a $\mathcal{K}_1$ KR $\underline{e}_{x1}$, $\underline{e}_{y1}$, $\underline{e}_{z1}$ bázisvektoraiba.
- Egy forgatás során $\underline{u}$ és φ is változnak időben: minden t időponthoz tartozik olyan $(\underline{u}(t), \varphi(t))$, amely a kezdeti $\underline{r}_0$ vektort az $\underline{r}(t)$ vektorba forgatja.



Forgástenzor

Az $(\underline{u}(t), \varphi(t))$ forgásvektorral $\underline{r}_0$ -ból $\underline{r}(t)$ -be való forgatás megtörténhet egy $\underline{\underline{R}}(t)$ forgástenzorral való leképezéssel is:

$$\underline{r}(t) = \underline{\underline{R}}(t) \underline{r}_0 \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{R}}(t) = \underline{\underline{R}}(\underline{u}(t), \varphi(t))$$

Az $\underline{\underline{R}}$ meghatározásához az elforgatott $\underline{r}$ vektort három egymástól független egységvektor lineárisan független kombinációjaként állítjuk elő:

$$\underline{r} = c_1 \underline{e}_1 + c_2 \underline{e}_2 + c_3 \underline{e}_3$$

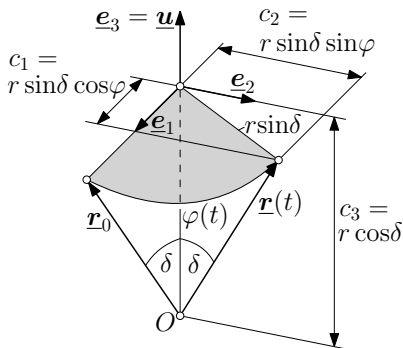
Az egységvektorok:

$$\underline{e}_1 = \frac{\underline{r}_0 - \underline{u}(\underline{u}^T \underline{r}_0)}{r \sin \delta}$$

$$\underline{e}_2 = \frac{\tilde{\underline{u}} \underline{r}_0}{r \sin \delta}$$

$$\underline{e}_3 = \underline{u}$$

$$\text{ahol } r = |\underline{r}_0| = |\underline{r}|$$



Beírva az egységvektorokat és azok együtthatóit ($r \cos \delta = \underline{u}^T \underline{r}_0$), kapjuk, hogy

$$\underline{r} = \cos \varphi \underline{r}_0 + \sin \varphi \underline{\tilde{u}} \underline{r}_0 + (1 - \cos \varphi) \underline{u} \left(\underline{u}^T \underline{r}_0 \right)$$

Felhasználjuk az $\underline{\underline{1}}$ egységtenzort, illetve, hogy $(\underline{u} \underline{u}^T) \underline{r}_0$, így $\underline{r}_0$ kiemelhető:

$$\underline{r} = \underbrace{\left[\cos \varphi \underline{\underline{1}} + \sin \varphi \underline{\tilde{u}} + (1 - \cos \varphi) \underline{u} \underline{u}^T \right]}_{\underline{\underline{R}}} \underline{r}_0 = \underline{\underline{R}} \underline{r}_0$$

Így a forgástenzor

$$\underline{\underline{R}}(\underline{u}, \varphi) = \cos \varphi \underline{\underline{1}} + \sin \varphi \underline{\tilde{u}} + (1 - \cos \varphi) \underline{u} \underline{u}^T$$

Egy másik alakját megkapjuk, ha használjuk az $\underline{u} \underline{u}^T = \underline{\tilde{u}} \underline{\tilde{u}} + (\underline{u}^T \underline{u}) \underline{\underline{1}}$ (1. előadás, 17.o), ahol $\underline{u}^T \underline{u} = 1$

$$\underline{\underline{R}}(\underline{u}, \varphi) = \underline{\underline{1}} + \sin \varphi \underline{\tilde{u}} + (1 - \cos \varphi) \underline{\tilde{u}} \underline{\tilde{u}}$$

A forgástenzor által megvalósított leképezést elvben bármely KR-ben elvégezhetjük, pl a $\mathcal{K}_0$ KR-ben

$${}^0\mathbf{r}(t) = {}^0\mathbf{\underline{\underline{R}}}(t) {}^0\mathbf{r}_0 \quad \text{ahol} \quad {}^0\mathbf{\underline{\underline{R}}}(t) = \mathbf{\underline{\underline{R}}}({}^0\mathbf{u}(t), \varphi(t))$$

Így az ${}^0\mathbf{u} = [u_x \ u_y \ u_z]^T$ koordinátákkal, és használva az $s\varphi \hat{=} \sin \varphi$, $c\varphi \hat{=} \cos \varphi$ és $k \hat{=} 1 - \cos \varphi$ rövidítéseket, írhatjuk, hogy

$${}^0\mathbf{\underline{\underline{R}}}({}^0\mathbf{u}, \varphi) = \begin{bmatrix} c\varphi + ku_x^2 & ku_x u_y - s\varphi u_z & ku_x u_z + s\varphi u_y \\ ku_x u_y + s\varphi u_z & c\varphi + ku_y^2 & ku_y u_z - s\varphi u_x \\ ku_x u_z - s\varphi u_y & ku_y u_z + s\varphi u_x & c\varphi + ku_z^2 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{\underline{\underline{R}}}(\mathbf{u}, \varphi)$ forgástenzor az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- Az $(\mathbf{u}, \varphi)$ és a $(-\mathbf{u}, -\varphi)$ forgásvektorok ugyanazt a forgást írják le, azaz

$$\mathbf{\underline{\underline{R}}}(\mathbf{u}, \varphi) = \mathbf{\underline{\underline{R}}}(-\mathbf{u}, -\varphi)$$

A többértelműség elkerülése végett érdemes mindig úgy megadni, hogy $0 < \varphi < \pi$.

- Az $\underline{\underline{R}}$ forgástenzor ortogonális, azaz $\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}}$
- Az inverz $\underline{\underline{R}}^T$ forgástenzorhoz a két egyenértékű $(\underline{u}, -\varphi) = (-\underline{u}, \varphi)$ forgásvektor tartozik, amelyek az $\underline{r}$ vektort $\underline{r}_0$ vektorba forgatását írják le. Így

$$\underline{r}_0 = \underline{\underline{R}}(\underline{u}, -\varphi) \underline{r} \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{R}}(\underline{u}, -\varphi) = \underline{\underline{R}}(-\underline{u}, \varphi) = \underline{\underline{R}}^T(\underline{u}, \varphi)$$

- A forgásvektor $\underline{u}$ tengelye forgatásra invariáns

$$\underline{\underline{R}}(\underline{u}, \varphi) \underline{u} = \underline{u}$$

Forgások aktív és passzív szemlélete

A testhez kötött KR forgását leíró ${}^{10}\underline{\underline{T}}$ transzformációs mátrix megegyezik a test forgását leíró forgástenzor $\mathcal{K}_0$ KR-ben felírt ${}^0\underline{\underline{R}}$ mátrixával:

$${}^{10}\underline{\underline{T}}(t) = {}^0\underline{\underline{R}}(t) = \underline{\underline{R}}\left({}^0\underline{u}(t), \varphi(t)\right)$$

Mivel az $\underline{u}$ forgástengely invariáns a forgatásra, koordinátái $\mathcal{K}_0$ és $\mathcal{K}_1$ KR-ben meg kell egyezzenek:

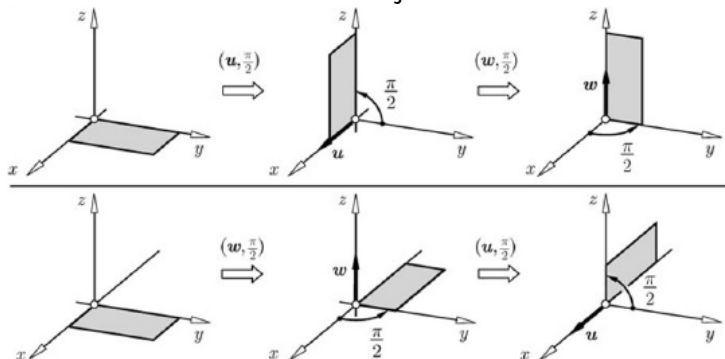
$${}^0\underline{u} = {}^1\underline{u} \quad \text{és} \quad {}^0\underline{\underline{R}} = {}^1\underline{\underline{R}}$$

A fenti egyenletből következik, hogy a forgásokat kétféle szemlélet szerint lehet leírni:

- Passzív szemlélet: a fizikai objektum ($\underline{r}$) marad és a KR-t forgatjuk.
- Aktív szemlélet: a fizikai objektumot ($\underline{r}$) forgatjuk és a KR egy helyben marad.

Többszörös forgások

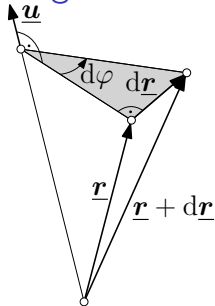
Több egymást követő forgás sorrendje nem cserélhető fel. $\rightarrow$ A forgató mátrixokkal való szorzás sorrendje sem cserélhető fel.



Többszörös forgásnál az első forgást követően forgathatunk

- a kiindulási tengelyek körül (aktív szemlélet előnyösebb)
- az elforgatott tengelyek körül (passzív szemlélet előnyösebb)

Forgásvektor és szögsebesség



A szögsebesség egy infinitezimálisan kicsi $(\underline{u}, d\varphi)$ forgásból vezethető le. Az ehhez tartozó forgástenzor

$$\underline{\underline{R}}(\underline{u}, d\varphi) = \cos d\varphi \underline{\underline{1}} + \sin d\varphi \tilde{\underline{u}} + (1 - \cos d\varphi) \underline{u} \underline{u}^T$$

Linearizálás (sorbafejtés és elsőfokú tagok megtartása révén: $\cos d\varphi \approx 1$ és $\sin d\varphi \approx d\varphi$) után

$$\underline{\underline{R}}(\underline{u}, d\varphi) \approx \underline{\underline{1}} + d\varphi \tilde{\underline{u}}$$

Az $\underline{\underline{R}}(\underline{u}, d\varphi)$ forgástenzort egy $\underline{r}$ vektoron működtetve az $\underline{r}$ vektor $d\underline{r}$ megváltozását kapjuk, amely $\underline{u}$ -ra és $\underline{r}$ -re merőleges:

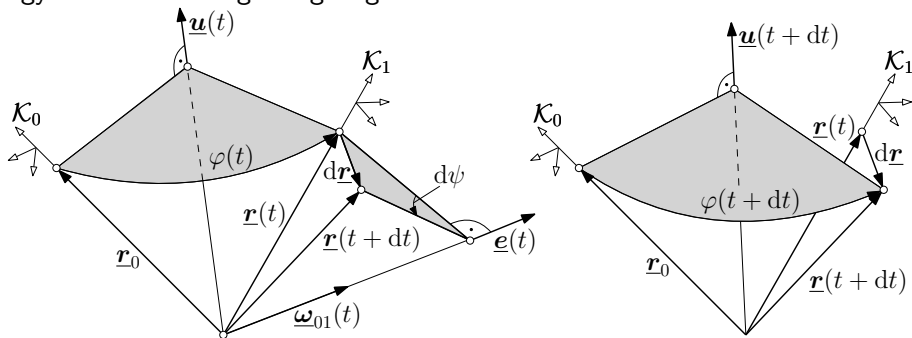
$$(\underline{\underline{1}} + d\varphi \tilde{\underline{u}}) \underline{r} = \underline{r} + d\underline{r} \quad \text{ahonnan} \quad d\underline{r} = d\varphi \tilde{\underline{u}} \underline{r}$$

Ha az $(\underline{u}, d\varphi)$ forgás egy dt időintervallumban történik, akkor az $\underline{r}$ időbeli megváltozása $\underline{u}$ tengely körüli forgás esetén az $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ szögsebességgel:

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \tilde{\underline{u}} \underline{r} \quad \text{vagy} \quad \dot{\underline{r}} = \tilde{\underline{\omega}} \underline{r} \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{\omega}} = \frac{d\varphi}{dt} \underline{u} = \omega \underline{u}$$

Forgástenzor és szögsebesség

A forgástenzor időbeli változása és a szögsebesség közötti összefüggést két egymást követő forgás segítségével értelmezhető.



Egy test fix pont körüli forgása során egy t időpontbeli $(\underline{u}(t), \varphi(t))$ forgásvektorral adott forgása az $\underline{r}_0$ vektorból az $\underline{r}(t)$ vektorba megy át az $\underline{\underline{R}}(t)$ forgástenzor segítségével:

$$\underline{r}(t) = \underline{\underline{R}}(t) \underline{r}_0 \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{R}}(t) = \underline{\underline{R}}(\underline{u}(t), \varphi(t)) \quad (3)$$

Ebben a t időpontban a test szögsebessége $\underline{\omega}_{01}$, így a test egy további infinitezimálisan kicsi dt idő alatt tovább forog az $(\underline{e}(t), d\psi(t))$ forgásvektorral:

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_{01} = |\underline{\omega}_{01}| \quad \text{és} \quad \underline{e} = \frac{\underline{\omega}_{01}}{\omega_{01}}$$

ahol $\underline{e}(t)$ a pillanatnyi forgástengely. A linearizált forgástenzorral

$$\underline{r}(t + dt) = \underline{\underline{R}}(\underline{e}, d\psi) \underline{r}(t) \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{R}}(\underline{e}, d\psi) = \underline{\underline{1}} + d\psi \underline{\underline{e}} \quad (4)$$

Az $\underline{r}_0$ vektor teljes forgását $\underline{r}(t + dt)$ -be az $(\underline{u}(t + dt), \varphi(t + dt))$ forgásvektor írja le:

$$\underline{r}(t + dt) = \underline{\underline{R}}(t + dt) \underline{r}_0 \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{R}}(t + dt) = \underline{\underline{R}}(\underline{u}(t + dt), \varphi(t + dt))$$

Beelyettesítve (3)-at (4)-be, adódik, hogy $\underline{r}(t + dt) = (\underline{\underline{1}} + d\psi \underline{\underline{e}}) \underline{\underline{R}}(t) \underline{r}_0$ amelyet az utóbbi egyenlettel összevetve, az eredő forgástenzor

$$\underline{\underline{R}}(t + dt) = (\underline{\underline{1}} + d\psi \underline{\underline{e}}) \underline{\underline{R}}(t) = \underline{\underline{R}}(t) + d\underline{\underline{R}}$$

Az előző egyenletben $d\underline{\underline{R}}$ a forgástenzor kicsiny változása az $(\underline{e}(t), d\psi(t))$ infinitezimális forgás következtében:

$$d\underline{\underline{R}} = d\psi \tilde{\underline{e}}(t) \underline{\underline{R}}(t)$$

Ha $d\underline{\underline{R}}$ a dt időintervallumra vonatkozik, akkor megkapjuk az $\underline{\underline{R}}(t)$ időbeli változását a kiindulási $\mathcal{K}_0$ KR-ben:

$$\frac{{}_0 d\underline{\underline{R}}(t)}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \tilde{\underline{e}}(t) \underline{\underline{R}}(t) \quad \text{vagy} \quad {}_0 \dot{\underline{\underline{R}}}(t) = \underline{\underline{\omega}}_{01}(t) \underline{\underline{R}}(t)$$

A Poisson-egyenlet (6. o.) vektoriális alakja.

$\underline{\underline{\omega}}_{01}$ koordinátái a kiindulási $\mathcal{K}_0$ KR-ben

A kiindulási rendszerben az idő szerinti derivált közvetlenül ${}^0 \underline{\underline{R}}$ koordinátáin végezhető, mivel ${}^0 \dot{\underline{\underline{R}}} = {}^0 \left[\dot{\underline{\underline{R}}} \right]$. Így

$${}^0 \dot{\underline{\underline{R}}} = {}^0 \underline{\underline{\omega}}_{01} {}^0 \underline{\underline{R}}$$

Figyelembe véve, hogy ${}^0 \underline{\underline{R}} = {}^{10} \underline{\underline{T}}$, visszakapjuk a Poisson-egyenletet:

$${}^{10} \dot{\underline{\underline{T}}} = {}^0 \underline{\underline{\omega}}_{01} {}^{10} \underline{\underline{T}} \quad \text{vagy} \quad {}^0 \underline{\underline{\omega}}_{01} = {}^{10} \dot{\underline{\underline{T}}} {}^{10} \underline{\underline{T}}^T$$

$\underline{\underline{\tilde{\omega}}}_{01}$ koordinátái a testhez kötöt $\mathcal{K}_1$ KR-ben

Ha ${}^0\underline{\underline{\tilde{\omega}}}_{01}$ koordinátáit a ferdeszimmetrikus ${}^1\underline{\underline{\tilde{\omega}}}_{01}$ transzformáltjaképp írjuk fel, azaz

$${}^0\underline{\underline{\tilde{\omega}}}_{01} = {}^{10}\underline{\underline{T}} {}^1\underline{\underline{\tilde{\omega}}}_{01} {}^{10}\underline{\underline{T}}^T$$

akkor a $\mathcal{K}_0$ -ban felírt egyenletekből a szögsebesség testhez kötött koordinátaival felírt Poisson egyenletet kapjuk:

$${}^{10}\underline{\underline{\dot{T}}} = {}^{10}\underline{\underline{T}} {}^1\underline{\underline{\tilde{\omega}}}_{01} \quad \text{vagy} \quad {}^1\underline{\underline{\tilde{\omega}}}_{01} = {}^{10}\underline{\underline{T}}^T {}^{10}\underline{\underline{\dot{T}}}$$

Köszönöm a figyelmet!