

Mechanizmusok és robotok

1. előadás

Bevezetés, alapfogalmak, ismételés

Gépek és mechanizmusok

- Gépekben lejátszódó folyamatok:
 - ▶ fizikai
 - ▶ kémiai
 - ▶ mechanikai
- mechanikus gép: az elvégzendő feladatot mozgás révén oldja meg

Mechanizmus (tágabb értelmezés)

A gép mechanikus elven működő részeinek együttese, melyek összefüggő rendszert alkotnak úgy, hogy a rendszer elemei egymás mozgását kényszerkapcsolatok útján kölcsönösen befolyásolják.

- A fenti értelmezés kizárja, hogy a két test:
 - ▶ teljesen független
 - ▶ teljesen kötött

Mechanizmusok tagjai

- A gépek részei az őt alkotó testjei, melyeket **tagok**nak nevezünk.
- A testek egy tulajdonsága a halmazállapotuk:
 - ▶ gáz
 - ▶ folyékony
 - ▶ szilárd
 - ★ merev
 - ★ rugalmas
 - ★ képlékeny
 - ★ stb.
- állvány: a mechanizmus egyik kitüntetett tagja, melyhez képest a többi tag mozgását leírjuk. Elvben bármely tag betöltheti.
- Mechanizmusok funkciói:
 - ▶ mozgás átalakítás
 - ▶ erő/nyomaték átvitel
 - ▶ mechanikai munkavégzés

Alkalmazási terület, példák

- Mechanizmusok alkalmazási területe a tágabb értelemben vett gépészet
- Mechanizmus rokon fogalma: többtest-rendszer (**M**ulti-**B**ody **S**ystems, **M**ehrkörpersystemes)

Példák:

- dugattyús mechanizmus



- fogaskerekes kapcsolatok, hajtóművek



- Futómű



- Kormánymű



- Láncchajtás



- bűtykös mechanizmus



- fék, fékpedál



- ipari robotok



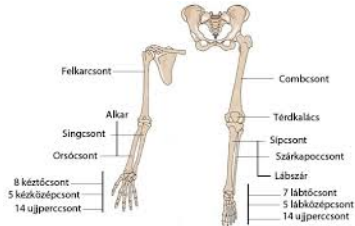
- kézi szerszámok (fogók, tűzőgép, drótvágó)



- munkagépek (markoló, daru)



- emberi végtagok



- himbás olajszivattyú



Vektorok és tenzorok jelölései

- skalár:

írásban	nyomtatva	jegyzet
s	s	s

- vektor:

írásban	nyomtatva	jegyzet
$\vec{v}$	$\mathbf{v}$	$\vec{v}$

- vektor mátrixa:

írásban	nyomtatva	jegyzet
$[\vec{v}]$	$\mathbf{v}$	$\underline{\mathbf{v}}$

- tenzor:

írásban	nyomtatva	jegyzet
$\underline{\underline{T}}$	$\mathbf{T}$	$\underline{\underline{T}}$

- tenzor mátrixa:

írásban	nyomtatva	jegyzet
$[\underline{\underline{T}}]$	$\mathbf{T}$	$\underline{\underline{T}}$

Vektorok és koordinátáik

Tekintsük az $\vec{a}$ vektort az adott $\mathcal{K}_1$ koordinátarendszerben (KR), melynek x_1, y_1, z_1 a koordináta-tengelyei és a hozzá tartozó $\vec{e}_{x1}, \vec{e}_{y1}, \vec{e}_{z1}$ a bázisvektorai.

$$\vec{a} = {}^1a_x \vec{e}_{x1} + {}^1a_y \vec{e}_{y1} + {}^1a_z \vec{e}_{z1}$$

Ezzel a jelöléssel ${}^1a_x \vec{e}_{x1}, {}^1a_y \vec{e}_{y1}, {}^1a_z \vec{e}_{z1}$ a vektor komponensei, ${}^1a_x, {}^1a_y, {}^1a_z$ a vektor koordinátái a $\mathcal{K}_1$ KR-ben.

A vektor mátrixa:

$${}^1\underline{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} {}^1a_x \\ {}^1a_y \\ {}^1a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1a_x & {}^1a_y & {}^1a_z \end{bmatrix}^T$$

vagy

$${}^1\underline{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T$$

Műveletek vektorokkal

- Vektor szorzása skalárral

$$\vec{\mathbf{b}} = m\vec{\mathbf{a}} \quad \text{azaz} \quad \underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ma_x \\ ma_y \\ ma_z \end{bmatrix} = m\underline{\mathbf{a}}$$

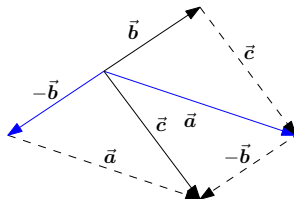
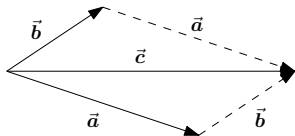
sorrend felcserélhető: $m\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{a}}m$

- Vektorok összeadása/kivonása

$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} \quad \text{mátrixosan} \quad \underline{c} = \underline{a} \pm \underline{b}$$

azaz

$$\begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{bmatrix}$$



- Vektorok skalár szorzata

$$s = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

tulajdonságok:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

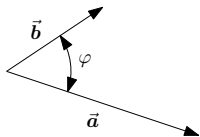
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

kiszámítása:

$$s = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

mátrixosan:

$$s = \underline{\mathbf{a}}^T \underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\mathbf{a}}^T \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{b}}^T \underline{\mathbf{a}}$$



- Vektorok vektoriális szorzata

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

nagyság és irány:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$$

$\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$ +jobbkez-szabály

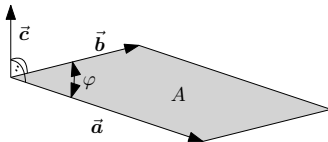
tulajdonságok:

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$m(\vec{a} \times \vec{b}) = (m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) =$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$



kiszámítás:

- kifejtés + műveleti tulajdonságok alkalmazása a bázisvektorokra ($\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0}$, $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$, $\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$ stb.):

$$\begin{aligned}\vec{c} &= (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \times (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{e}_z\end{aligned}$$

- determináns segítségével: $\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$
- mátrixosan: Képezzünk az $\vec{a}$ vektor koordinátáiból egy aszimmetrikus mátrixot. Ennek műveleti jele $\tilde{a}$ operátor.

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

Ezt használva

$$\underline{c} = \tilde{a} \underline{b}$$

Érvényes, hogy $\tilde{a} = -\tilde{a}^T$, illetve $\tilde{a} \underline{b} = -\tilde{b} \underline{a}$. Visszafelé: $\vec{a} = \text{vec}(\tilde{a})$.

- Vektor szorzása skalár szorzattal

- ▶ vektoriálisan

$$\vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c}) = \vec{a} m$$

egy $\vec{a}$ irányú vektor

- ▶ mátrixosan:

$$\underline{a} (\underline{b}^T \underline{c}) = (\underline{a} \underline{b}^T) \underline{c} = \underline{a} \underline{b}^T \underline{c}$$

itt a zárójel elhagyható.

Mivel $\vec{a} m = m \vec{a}$, így

$$\underline{a} (\underline{b}^T \underline{c}) = \underline{a} \underline{b}^T \underline{c} = (\underline{b}^T \underline{c}) \underline{a}$$

de itt $(\underline{b}^T \underline{c}) \underline{a}$ kifejezésben nem hagyhatók el a zárójelek.

- Vektorok vegyes szorzata

- ▶ vektoriálisan

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

sorrend ciklikusan cserélhető:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

- ▶ mátrixosan

$$\underline{a}^T (\underline{\tilde{b}c}) = (\underline{a}^T \underline{\tilde{b}}) \underline{c} = \underline{a}^T \underline{\tilde{b}c}$$

ciklikus és nem ciklikus sorrendcsere:

$$\underline{a}^T \underline{\tilde{b}c} = \underline{b}^T \underline{\tilde{c}a} = \underline{c}^T \underline{\tilde{a}b}$$

$$\underline{a}^T \underline{\tilde{b}c} = -\underline{b}^T \underline{\tilde{a}c} = -\underline{c}^T \underline{\tilde{b}a} = -\underline{a}^T \underline{\tilde{c}b}$$

- Kétszeres vektoriális szorzat kifejtési tétele

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})\end{aligned}$$

az $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ kétszeres vektoriális szorzat mátrixosan

$$\underline{\tilde{a}}(\underline{\tilde{b}}\underline{c}) = (\underline{\tilde{a}}\underline{\tilde{b}})\underline{c} = \underline{\tilde{a}}\underline{\tilde{b}}\underline{c}$$

a kifejtési tétel és annak átalakítása

$$\begin{aligned}\underline{\tilde{a}}\underline{\tilde{b}}\underline{c} &= \underline{b}(\underline{a}^T \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}^T \underline{b}) = (\underline{b}\underline{a}^T)\underline{c} - (\underline{a}^T \underline{b})\underline{c} \\ \underline{\tilde{a}}\underline{\tilde{b}}\underline{c} &= [\underline{b}\underline{a}^T - (\underline{a}^T \underline{b})\underline{1}]\underline{c}\end{aligned}$$

amelyből

$$\underline{\tilde{a}}\underline{\tilde{b}} = \underline{b}\underline{a}^T - (\underline{a}^T \underline{b})\underline{1} \quad (1)$$

az $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ kétszeres vektoriális szorzat mátrixosan: $\widetilde{\underline{\underline{a}}} \underline{\underline{b}} \underline{\underline{c}}$
 melyet a kifejtési tétellel a következőképp írhatjuk át:

$$\begin{aligned}\widetilde{\underline{\underline{a}}} \underline{\underline{b}} \underline{\underline{c}} &= \underline{\underline{b}} (\underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{c}}) - \underline{\underline{a}} (\underline{\underline{b}}^T \underline{\underline{c}}) = (\underline{\underline{b}} \underline{\underline{a}}^T) \underline{\underline{c}} - (\underline{\underline{a}} \underline{\underline{b}}^T) \underline{\underline{c}} \\ \widetilde{\underline{\underline{a}}} \underline{\underline{b}} \underline{\underline{c}} &= (\underline{\underline{b}} \underline{\underline{a}}^T - \underline{\underline{a}} \underline{\underline{b}}^T) \underline{\underline{c}}\end{aligned}$$

amiből

$$\widetilde{\underline{\underline{a}}} \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{b}} \underline{\underline{a}}^T - \underline{\underline{a}} \underline{\underline{b}}^T \quad (2)$$

Az (1) egyenletből $\widetilde{\underline{\underline{a}}} \underline{\underline{b}} - \underline{\underline{b}} \widetilde{\underline{\underline{a}}} = \underline{\underline{b}} \underline{\underline{a}}^T - \underline{\underline{a}} \underline{\underline{b}}^T$ és így a (2) egyenlettel összehasonlítva

$$\widetilde{\underline{\underline{a}}} \underline{\underline{b}} = \widetilde{\underline{\underline{a}}} \underline{\underline{b}} - \underline{\underline{b}} \widetilde{\underline{\underline{a}}}$$

- két vektorszorzat skaláris szorzata (Lagrange-azonosság)

$$\left(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\right) \cdot \left(\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{d}}\right) = \left(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}}\right) \left(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\right) - \left(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}}\right) \left(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{d}}\right)$$

az eredmény egy skalár.

mátrixosan:

$$\left(\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b}\right)^T \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{d} = \left(\mathbf{a}^T \mathbf{c}\right) \left(\mathbf{b}^T \mathbf{d}\right) - \left(\mathbf{b}^T \mathbf{c}\right) \left(\mathbf{a}^T \mathbf{d}\right)$$

Deriválások mátrixos írásmódban

Legyen $\underline{\mathbf{x}}$ egy oszlopvektor (koordinátavektor):

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$$

Egy az $\underline{\mathbf{x}}$ -től függő skálár $y(\underline{\mathbf{x}}) = y(x_1, \dots, x_n)$ függvény $\underline{\mathbf{x}}$ szerinti deriváltja egy sorvektor:

$$\frac{\partial y(\underline{\mathbf{x}})}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Az $y(\underline{\mathbf{x}})$ függvény $\underline{\mathbf{x}}^T$ szerinti deriváltja pedig oszlopvektor:

$$\frac{\partial y(\underline{\mathbf{x}})}{\partial \underline{\mathbf{x}}^T} = \left(\frac{\partial y(\underline{\mathbf{x}})}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \right)^T$$

Az $y(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{a}}^T \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\mathbf{a}}$ *lineáris alak* esetében

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{a}}^T \underline{\mathbf{x}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = \underline{\mathbf{a}}^T \quad \text{és} \quad \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\mathbf{a}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}^T} = \underline{\mathbf{a}}$$

illetve az $y(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\mathbf{x}}$ ahol $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$, *kvadrátikus alak* esetében

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\mathbf{x}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = 2 \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}} \quad \text{és} \quad \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\mathbf{x}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}^T} = 2 \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\mathbf{x}}$$

Egy m méretű $\underline{\mathbf{y}}$ vektor deriváltja egy n méretű $\underline{\mathbf{x}}$ vektor szerint egy $(m \times n)$ méretű mátrixot eredményez (Jacobi-mátrix):

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{y}}(\underline{\mathbf{x}})}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Egy m méretű, időtől függő $\underline{\mathbf{y}}(\underline{\mathbf{x}}(t), t)$ vektor t idő szerinti teljes deriváltja az n méretű, időtől függő $\underline{\mathbf{x}}(t)$ vektorral a láncszabály szerint számítható:

$$\frac{d\underline{\mathbf{y}}(\underline{\mathbf{x}}(t), t)}{dt} = \frac{\partial \underline{\mathbf{y}}(\underline{\mathbf{x}}, t)}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \frac{d\underline{\mathbf{x}}(t)}{dt} + \frac{\partial \underline{\mathbf{y}}(\underline{\mathbf{x}}, t)}{\partial t}$$

azaz

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dy_m}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial t} \end{bmatrix}$$

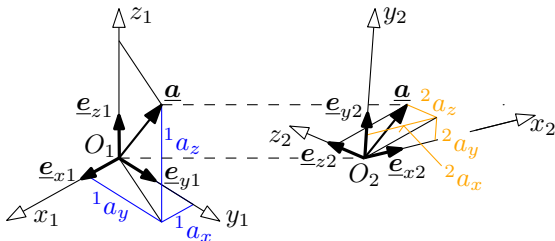
Vektorkoordináták transzformációja

Legyenek ismertek az

$$\vec{a} = {}^2a_x \underline{e}_{x2} + {}^2a_y \underline{e}_{y2} + {}^2a_z \underline{e}_{z2}$$

vektor koordinátái a $\mathcal{K}_2$ KR-ben. Keresettek ugyanennek a vektornak a koordinátái a $\mathcal{K}_1$ KR-ben:

$$\vec{a} = {}^1a_x \underline{e}_{x1} + {}^1a_y \underline{e}_{y1} + {}^1a_z \underline{e}_{z1}$$



Mivel mindkét KR-ben ugyanaz a vektor

$${}^1a_x \underline{\mathbf{e}}_{x1} + {}^1a_y \underline{\mathbf{e}}_{y1} + {}^1a_z \underline{\mathbf{e}}_{z1} = {}^2a_x \underline{\mathbf{e}}_{x2} + {}^2a_y \underline{\mathbf{e}}_{y2} + {}^2a_z \underline{\mathbf{e}}_{z2}$$

Ezen egyenletet megszorozzuk skalárisan rendre az $\underline{\mathbf{e}}_{x1}$, $\underline{\mathbf{e}}_{y1}$ és $\underline{\mathbf{e}}_{z1}$ vektorokkal, miközben figyelembe vesszük a skaláris szorzás bázisvektorokra vonatkozó tulajdonságait.

$${}^1a_x = {}^2a_x \underline{\mathbf{e}}_{x1}^T \underline{\mathbf{e}}_{x2} + {}^2a_y \underline{\mathbf{e}}_{x1}^T \underline{\mathbf{e}}_{y2} + {}^2a_z \underline{\mathbf{e}}_{x1}^T \underline{\mathbf{e}}_{z2}$$

$${}^1a_y = {}^2a_x \underline{\mathbf{e}}_{y1}^T \underline{\mathbf{e}}_{x2} + {}^2a_y \underline{\mathbf{e}}_{y1}^T \underline{\mathbf{e}}_{y2} + {}^2a_z \underline{\mathbf{e}}_{y1}^T \underline{\mathbf{e}}_{z2}$$

$${}^1a_z = {}^2a_x \underline{\mathbf{e}}_{z1}^T \underline{\mathbf{e}}_{x2} + {}^2a_y \underline{\mathbf{e}}_{z1}^T \underline{\mathbf{e}}_{y2} + {}^2a_z \underline{\mathbf{e}}_{z1}^T \underline{\mathbf{e}}_{z2}$$

Ez a három egyenlet egy mátrixba összefoglalható:

$$\begin{bmatrix} {}^1a_x \\ {}^1a_y \\ {}^1a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{e}}_{x1}^T \underline{\mathbf{e}}_{x2} & \underline{\mathbf{e}}_{x1}^T \underline{\mathbf{e}}_{y2} & \underline{\mathbf{e}}_{x1}^T \underline{\mathbf{e}}_{z2} \\ \underline{\mathbf{e}}_{y1}^T \underline{\mathbf{e}}_{x2} & \underline{\mathbf{e}}_{y1}^T \underline{\mathbf{e}}_{y2} & \underline{\mathbf{e}}_{y1}^T \underline{\mathbf{e}}_{z2} \\ \underline{\mathbf{e}}_{z1}^T \underline{\mathbf{e}}_{x2} & \underline{\mathbf{e}}_{z1}^T \underline{\mathbf{e}}_{y2} & \underline{\mathbf{e}}_{z1}^T \underline{\mathbf{e}}_{z2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2a_x \\ {}^2a_y \\ {}^2a_z \end{bmatrix}$$

azaz

$${}^1\underline{\mathbf{a}} = {}^{21}\underline{\mathbf{T}} {}^2\underline{\mathbf{a}}$$

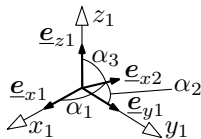
Az előző egyenletben ${}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ a transzformációs mátrix, amely egy tetszőleges vektor $\mathcal{K}_2$ KR-beli koordinátáit a $\mathcal{K}_1$ KR-beli koordinátákká transzformálja. Tulajdonságai:

- ${}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ oszlopaiban az $\underline{\mathbf{e}}_{x2}$, $\underline{\mathbf{e}}_{y2}$, $\underline{\mathbf{e}}_{z2}$ egységvektorok koordinátái állnak a $\mathcal{K}_1$ KR-ben, míg ${}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ soraiban az $\underline{\mathbf{e}}_{x1}$, $\underline{\mathbf{e}}_{y1}$, $\underline{\mathbf{e}}_{z1}$ egységvektorok koordinátái állnak a $\mathcal{K}_2$ KR-ben

$${}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} {}^1\underline{\mathbf{e}}_{x2} & {}^1\underline{\mathbf{e}}_{y2} & {}^1\underline{\mathbf{e}}_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^2\underline{\mathbf{e}}_{x1}^T \\ {}^2\underline{\mathbf{e}}_{y1}^T \\ {}^2\underline{\mathbf{e}}_{z1}^T \end{bmatrix}$$

- ${}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ oszlopai a $\mathcal{K}_2$ KR bázisvektorainak a $\mathcal{K}_1$ bázisvektoraival bezárt szögeinek koszinusz értékeit tartalmazza. Pl. ${}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ az első oszlopa:

$${}^1\underline{\mathbf{e}}_{x2} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{e}}_{x1}^T \underline{\mathbf{e}}_{x2} \\ \underline{\mathbf{e}}_{y1}^T \underline{\mathbf{e}}_{x2} \\ \underline{\mathbf{e}}_{z1}^T \underline{\mathbf{e}}_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_3 \end{bmatrix}$$



Emiatt ${}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ másik neve: iránykoszinusz-mátrix

- ${}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ sorai és oszlopai egy ortonormált jobbsodratú rendszert alkotnak.

A determinánsának értéke $\det({}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}}) = +1$, ezért a ${}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ transzformációs mátrix ortogonális. Következésképp létezik a transzformációs mátrix ${}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} = {}^{12}\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ inverze, amely ellentett irányban, tehát $\mathcal{K}_1$ KR-ből transzformál $\mathcal{K}_2$ KR-be. Az ortogonalitásból következik, hogy az inverz megegyezik a mátrix transzponáltjával, azaz:

$${}^2\underline{\underline{\mathbf{a}}} = {}^{12}\underline{\underline{\mathbf{T}}} {}^1\underline{\underline{\mathbf{a}}} \quad \text{ahol} \quad {}^{12}\underline{\underline{\mathbf{T}}} = {}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} = {}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}}^T$$

Az inverzre, és transzponáltjára is igaz, hogy

$${}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}} {}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}}^T = {}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}}^T {}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}}$$

Ezen fenti egyenletből 6 ortonormálási feltétel adódik: a bázisvektorok egységnyiek, és egymásra merőlegesek. Mivel érvényes a 6 ortonormálási feltétel, ezért ${}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ mátrix 9 eleméből csak 6 független.
 $\rightarrow \mathcal{K}_2$ KR forgásának $\mathcal{K}_1$ KR-hez képest 3 szabadságfoka van.

Másodrendű tenzorok

- Elsőrendű tenzor = vektor
- Másodrendű tenzor (továbbiakban:tenzor) egy homogén lineáris vektor-vektor függvény operátora vektoriálisan:

$$\vec{s} = \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \vec{r}$$

mátrixosan (adott, pl. $\mathcal{K}_1$ KR-ben):

$${}^1\underline{\underline{s}} = {}^1\underline{\underline{\mathbf{D}}} {}^1\underline{r} \quad \text{azaz} \quad {}^1\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{bmatrix} {}^1\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}$$

- Egységtenzor: az $\underline{\underline{\mathbf{1}}}$ egységtenzor tetszőleges $\vec{r}$ vektort önmagára képez le:

$$\vec{r} = \underline{\underline{\mathbf{1}}} \cdot \vec{r}$$

Az egységtenzor mátrixa a (3×3) méretű $\underline{\underline{\mathbf{1}}}$ egységmátrix.

- Vektoriális szorzás is lineáris leképezés. A $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ szorzat úgy is előállítható, hogy $\vec{a}$ vektorból képzünk egy olyan aszimmetrikus **A** tenzort, amelyre

$$\vec{c} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \vec{b}$$

Ilyenkor $\vec{a}$ vektor az **A** tenzor vektorinvariánsa. Az **A** mátrixa pedig **a**.

Diadikus (tenzoriális) szorzat

Két vektor diadikus szorzata egy tenzort eredményez. Jele: $\circ$ Pl.

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \vec{a} \circ \vec{b}$$

Érvényes a következő azonosság:

$$\vec{r} = \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Mátrixos írásmódban

$$\underline{\underline{\mathbf{r}}} = \underline{\underline{\mathbf{a}}} \underline{\underline{\mathbf{b}}}^T \underline{\underline{\mathbf{c}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{c}}} \quad \text{ahol}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{a}}} \underline{\underline{\mathbf{b}}}^T = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}$$

Tenzorkoordináták transzformációja

Egy $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ tenzor $\mathcal{K}_1$ KR-beli ${}^1\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ koordinátáit a $\mathcal{K}_2$ KR-beli ${}^2\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ koordinátáiba transzformálhatjuk a ${}^{12}\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ transzformációs mátrix segítségével. Vizsgáljuk a $\mathcal{K}_1$ KR-ben felírt

$${}^1\underline{\mathbf{s}} = {}^1\underline{\underline{\mathbf{D}}} {}^1\underline{\mathbf{r}}$$

leképezést. A vektorokra érvényes

$${}^1\underline{\mathbf{s}} = {}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}} {}^2\underline{\mathbf{s}} \quad \text{és} \quad {}^1\underline{\mathbf{r}} = {}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}} {}^2\underline{\mathbf{r}}$$

transzformációkat behelyettesítve kapjuk, hogy

$${}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}} {}^2\underline{\mathbf{s}} = {}^1\underline{\underline{\mathbf{D}}} {}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}} {}^2\underline{\mathbf{r}}$$

melyet balról beszorzunk ${}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}}^T$ -tal (${}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}}^T {}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}}$):

$${}^2\underline{\mathbf{s}} = {}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}}^T {}^1\underline{\underline{\mathbf{D}}} {}^{21}\underline{\underline{\mathbf{T}}} {}^2\underline{\mathbf{r}}$$

Vessük össze az egyenletet ugyanannak a leképezésnek a $\mathcal{K}_2$ KR-ben felírt

$${}^2\mathbf{s} = {}^2\mathbf{D} {}^2\mathbf{r}$$

alakjával. Az összehasonlításból és ${}^{21}\mathbf{T}^T = {}^{12}\mathbf{T}$ figyelembevételével kapjuk, hogy

$${}^2\mathbf{D} = {}^{21}\mathbf{T}^T {}^1\mathbf{D} {}^{21}\mathbf{T} = {}^{12}\mathbf{T} {}^1\mathbf{D} {}^{12}\mathbf{T}^T$$

a tenzor koordinátáinak transzformációja $\mathcal{K}_1$ -ből $\mathcal{K}_2$ -be.
A fordított irányú transzformáció az előzőekkel összhangban

$${}^1\mathbf{D} = {}^{21}\mathbf{T} {}^2\mathbf{D} {}^{21}\mathbf{T}^T$$

Köszönöm a figyelmet!