

Mechanizmusok és robotok

12. előadás

Zárt láncú többtest-rendszerek dinamikája

Zárt láncú többtest-rendszerek egyenletrendszere

Kinematikai mozgásegyenlet:

$$\underline{\dot{\beta}} = \underline{H}(\underline{\beta}) \underline{\eta} \quad (1)$$

Euler paraméterek mellékfeltételei:

$$\underline{\phi}(\underline{\beta}) = \underline{0} \quad (2)$$

Kinetikai differenciálegyenlet:

$$\underline{\underline{M}} \underline{\ddot{a}} = \underline{\check{f}}^c + \underline{\check{f}}^t + \underline{\check{f}}^k \quad (3)$$

Testekre ható eredő kényszererők:

$$\underline{\check{f}}^k = \underline{\underline{B}}^T \underline{\check{f}}^p + \underline{\check{f}}^s \quad (4)$$

Primer csuklók implicit kényszererői:

$$\underline{\underline{C}}^T \underline{\check{f}}^p = \underline{0} \quad (5)$$

Szekunder csuklók explicit kényszererői (szekunder erőcsavarok):

$$\underline{\check{f}}^s = \underline{\underline{G}}^s{}^T \underline{\lambda}^s \quad (6)$$

Primer csuklók explicit kényszerei:

$$\underline{\check{r}}_i = \underline{\check{r}}_i \left(\underline{\check{r}}_{p(i)}, \underline{\beta}_i, t \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

$$\underline{\underline{B}} \underline{\check{v}} = \underline{\underline{C}} \underline{\eta} + \underline{\check{v}}^{\text{rel}} \quad (8)$$

$$\underline{\underline{B}} \underline{\dot{\check{v}}} = \underline{\underline{C}} \underline{\dot{\eta}} + \underline{\check{a}}^{\text{rel}} \quad (9)$$

Szekunder csuklók implicit kényszerei:

$$\underline{\underline{g}}^s(\underline{\check{r}}, t) = \underline{0} \quad (10)$$

$$\underline{\underline{G}}^s \underline{\check{v}} + \underline{\bar{\gamma}}^s = \underline{0} \quad (11)$$

$$\underline{\underline{G}}^s \underline{\check{a}} + \underline{\bar{\gamma}}^s = \underline{0} \quad (12)$$

Implicit zárófeltételek a primer csuklókoordinátákra:

$$\underline{\underline{g}}^\ell(\underline{\beta}, t) = \underline{0} \quad (13)$$

$$\underline{\underline{G}}^\ell \underline{\eta} + \underline{\bar{\gamma}}^\ell = \underline{0} \quad (14)$$

$$\underline{\underline{G}}^\ell \underline{\dot{\eta}} + \underline{\bar{\gamma}}^\ell = \underline{0} \quad (15)$$

A testek $\underline{\ddot{a}}$ gyorsulásainak, a primer csuklók $\underline{\check{f}}^p$ kényszererőinek, az $\underline{\dot{\eta}}$ csukló-gyorsulások és a $\underline{\lambda}^s$ szekunder erőcsavar-koordináták számítására szolgáló lineáris egyenletrendszer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \underline{\underline{M}} & -\underline{\underline{B}}^T & \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{G}}^{sT} \\ -\underline{\underline{B}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}^T & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \hline -\underline{\underline{G}}^s & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \underline{\ddot{a}} \\ \underline{\check{f}}^p \\ \underline{\dot{\eta}} \\ \underline{\lambda}^s \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \underline{\check{f}}^{tc} \\ -\underline{\check{a}}^{\text{rel}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\bar{\gamma}}^s \end{array} \right] \quad (16)$$

ahol $\underline{\check{f}}^{tc} = \underline{\check{f}}^t + \underline{\check{f}}^c$. A megoldandó elsőrendű differenciálegyenlet:

$$\left[\begin{array}{c} \underline{\dot{\beta}} \\ \underline{\dot{\eta}} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \underline{\underline{H}}(\underline{\beta}) \underline{\eta} \\ \underline{\dot{\eta}}(\underline{\beta}, \underline{\eta}, t) \end{array} \right] \quad \text{azaz} \quad \underline{\dot{\mathbf{x}}} = \underline{\Psi}(\underline{\mathbf{x}}, t)$$

Melyekhez társulnak az alábbi, a helyzet- és sebességállapatra vonatkozó zárási feltételekkel konzisztens kezdeti feltételek:

$$\left[\begin{array}{c} \underline{\beta}(t_0) \\ \underline{\eta}(t_0) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \underline{\beta}_0 \\ \underline{\eta}_0 \end{array} \right] \quad \text{amelyre} \quad \underline{\underline{g}}^\ell(\underline{\beta}_0, t_0) = \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{G}}^\ell(\underline{\beta}_0, t_0) \underline{\eta}_0 + \underline{\bar{\gamma}}^\ell(\underline{\beta}_0, t_0) = \underline{\underline{0}}$$

Rekurzív formalizmus

A nyílt láncú többtest-rendszerek tagjai $\underline{\ddot{a}}$ gyorsulásainak, a primer csuklók $\underline{\check{f}}^p$ kényszererőinek, az $\underline{\dot{\eta}}$ csukló-gyorsulásainak számítására ismertetett rekurzív formalizmus kiterjeszthető a (16) ER-re is.

A Megoldás lépései

Az $\underline{\ddot{a}}$, $\underline{\check{f}}^p$, $\underline{\dot{\eta}}$ és $\underline{\lambda}^s$ kiszámítása 3 lépésben történik.

1. lépés

A (16) ER első 3 egyenletét a $\underline{\underline{D}}$ együtthatómátrixszal átírjuk:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} & -\underline{\underline{B}}^T & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{B}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{D}}} \begin{bmatrix} \underline{\ddot{a}} \\ \underline{\check{f}}^p \\ \underline{\dot{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\check{f}}^{tc} \\ -\underline{\check{a}}^{\text{rel}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}^{sT} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \underline{\lambda}^s \quad (17)$$

Ebből az $\underline{\ddot{a}}$, $\underline{\check{f}}^p$ és $\underline{\dot{\eta}}$ meghatározhatók, a még ismeretlen $\underline{\lambda}^s$ függvényében:

$$\begin{bmatrix} \underline{\ddot{a}} \\ \underline{\check{f}}^p \\ \underline{\dot{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\ddot{a}}^\circ \\ \underline{\check{f}}^{p^\circ} \\ \underline{\dot{\eta}}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \\ \underline{\underline{F}} \\ \underline{\underline{L}} \end{bmatrix} \underline{\lambda}^s \quad (18)$$

ahol

$$\begin{bmatrix} \underline{\ddot{a}}^\circ \\ \underline{\check{f}}^{p^\circ} \\ \underline{\dot{\eta}}^\circ \end{bmatrix} = \underline{\underline{D}}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\check{f}}^{tc} \\ -\underline{\check{a}}^{rel} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \\ \underline{\underline{F}} \\ \underline{\underline{L}} \end{bmatrix} = \underline{\underline{D}}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}^{sT} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

Az $\underline{\ddot{a}}^\circ$, $\underline{\check{f}}^{p^\circ}$ és $\underline{\dot{\eta}}^\circ$ vektorok a szekunder csuklók kényszererői nélkül (azaz $\underline{\lambda}^s = \underline{0}$ értékre) számított gyorsulások, primer kényszererők és primer csukló-gyorsulások.

Az $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{L}}$ mátrixok i -ik oszlopa az egység értékűnek képzelt $\lambda_i^s = 1$ szekunder erőkoordináta hozzájárulása a testek gyorsulásaihoz, a primer kényszererőkhöz és a primer csukló-gyorsulásokhoz.

2. lépés

Az $\underline{\ddot{a}} = \underline{\ddot{a}}^o + \underline{\underline{A}}\underline{\lambda}^s$ testek gyorsulásait a (12) számú $\underline{\underline{G}}^s \underline{\ddot{a}} + \underline{\bar{\gamma}}^s = \underline{0}$ implicit szekunder kényszerekbe helyettesítjük. Adódik b^s számú lineáris egyenlet a b^s számú $\underline{\lambda}^s$ koordinátára:

$$\underline{\underline{G}}^s \underline{\underline{A}} \underline{\lambda}^s = -\underline{\underline{G}}^s \underline{\ddot{a}}^o - \underline{\bar{\gamma}}^s$$

3. lépés

A $\underline{\lambda}^s$ -re kapott megoldással kiszámítjuk $\underline{\dot{\eta}}$ csukló-gyorsulásokat a (18) 3. egyenlete szerint:

$$\underline{\dot{\eta}} = \underline{\dot{\eta}}^o + \underline{\underline{L}} \underline{\lambda}^s$$

Rekurzív számítási eljárás menete

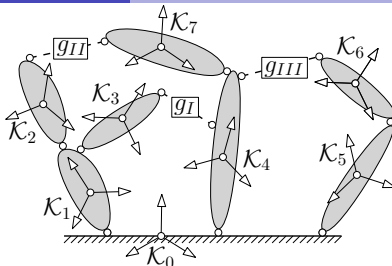
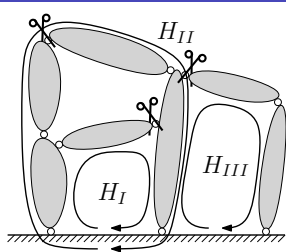
Ahhoz, hogy az $\underline{\ddot{a}}^\circ$, $\underline{\check{f}}^{p^\circ}$ és $\underline{\dot{\eta}}^\circ$ vektorokat ill. az $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{F}}$ és $\underline{\underline{L}}$ mátrixokat kiszámítsuk, az alábbi lineáris egyenletrendszert kell megoldani $1 + b^s$ számú jobb oldallal:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} & -\underline{\underline{B}}^T & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{B}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\ddot{a}} \\ \underline{\check{f}}^{p^\circ} \\ \underline{\dot{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\check{f}}^{tc} \\ -\underline{\check{a}}^{rel} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}^{sT} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}$$

Az együtthatómátrix megegyezik a nyílt láncú többtest-rendszer együtthatómátrixával (10. ea. 4.o.). Így az arra ismertetett rekurzív eljárás alkalmazható jelen esetben is.

Az ott ismertetett eljárásban az egyenletek szétosztásra kerültek az egyes tagokra. Ennek érdekében felbontjuk az $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{L}}$ továbbá a $\underline{\underline{G}}^{sT}$ mátrixokat az egyes tagokhoz tartozóan:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} [\underline{\underline{A}}]_1 \\ \vdots \\ [\underline{\underline{A}}]_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} [\underline{\underline{F}}]_1 \\ \vdots \\ [\underline{\underline{F}}]_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} [\underline{\underline{L}}]_1 \\ \vdots \\ [\underline{\underline{L}}]_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{G}}^{sT} = \begin{bmatrix} [\underline{\underline{G}}^{sT}]_1 \\ \vdots \\ [\underline{\underline{G}}^{sT}]_n \end{bmatrix}$$



A korábbi példát tekintve, a $\underline{\underline{G}}^{sT}$ felbontása az alábbiak szerint néz ki:

$$\underline{\underline{G}}^{sT} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{G}}_{2,II}^{sT} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{G}}_{3,I}^{sT} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{G}}_{4,I}^{sT} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{G}}_{4,III}^{sT} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{G}}_{6,III}^{sT} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{G}}_{7,II}^{sT} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} [\underline{\underline{G}}^{sT}]_1 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \\ [\underline{\underline{G}}^{sT}]_2 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{G}}_{2,II}^{sT} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \\ [\underline{\underline{G}}^{sT}]_3 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}_{3,I}^{sT} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \\ [\underline{\underline{G}}^{sT}]_4 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}_{4,I}^{sT} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{G}}_{4,III}^{sT} \end{bmatrix} \\ [\underline{\underline{G}}^{sT}]_5 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \\ [\underline{\underline{G}}^{sT}]_6 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{G}}_{6,III}^{sT} \end{bmatrix} \\ [\underline{\underline{G}}^{sT}]_7 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{G}}_{7,II}^{sT} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

A rekurzív megoldásnál a szétvágással kapott nyílt rendszer esetén a $[\underline{\underline{G}}^{sT}]$ mátrixokat úgy vetítjük az adott tagot megelőző tagra, mint tettük $\check{\underline{\underline{f}}}^{tc}$ esetén. Ehhez az $\check{\underline{\underline{f}}}^{tc}$ esetén használt (10.ea. 13.o.)

$$\check{\underline{\underline{f}}}_p^{tc*} = \check{\underline{\underline{f}}}_p^{tc} + \underline{\underline{B}}_{pi}^T \left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{M}}_i^* \underline{\underline{C}}_i \underline{\underline{N}}_i^{-1} \underline{\underline{C}}_i^T \right) \left(\check{\underline{\underline{f}}}_i^{tc*} - \underline{\underline{M}}_i^* \check{\underline{\underline{a}}}_i^{\text{rel}} \right)$$

összefüggésben kicseréljük $\check{\underline{\underline{f}}}^{tc}$ -t $[\underline{\underline{G}}^{sT}]$ -re, és az $\check{\underline{\underline{a}}}_i^{\text{rel}}$ tag nem szerepel:

$$[\underline{\underline{G}}^{sT}]_p^* = [\underline{\underline{G}}^{sT}]_p + \underline{\underline{B}}_{pi}^T \left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{M}}_i^* \underline{\underline{C}}_i \underline{\underline{N}}_i^{-1} \underline{\underline{C}}_i^T \right) [\underline{\underline{G}}^{sT}]_i^*$$

A rekurzív számítás menete

Egy n_h hurokból álló zárt láncú többtest-rendszert tekintünk. Ezt n_h számú szekunder csuklón történő vágással nyílt láncú többtest-rendszerre alakítunk, melyben emelkedő sorrendben számozzuk a tagokat.

Adott t időpontban ismerjük a $\underline{\underline{\beta}}$ és $\underline{\underline{\eta}}$ mennyiségeket, melyek a helyzet- és sebességállapokra vonatkozó zárási feltételekkel konzisztensek. Az $\dot{\underline{\underline{\eta}}}_i$ csukló-gyorsulásokat, tagok $\check{\underline{\underline{a}}}_i$ gyorsulásait és a csuklók által kifejtett $\check{\underline{\underline{f}}}_i^p$ erőcsavarokat és a $\underline{\underline{\lambda}}^s$ szekunder kényszererő-koordinátákat az alábbiakban ismertetett lépések szerint számoljuk.

1. A nyílt láncú rendszer helyzet- és sebességállapot haladási irányának megfelelő számítása a csuklók explicit kényszereivel:

$$\underline{\check{r}}_i = \underline{\check{r}}_i \left(\underline{\check{r}}_{i-1}, \underline{\beta}_i, t \right) \quad i = 1, \dots, n$$

$$\underline{\check{v}}_i = \underline{B}_{pi} \underline{\check{v}}_p + \underline{C}_i \underline{\eta}_i + \underline{\check{v}}_i^{\text{rel}} \quad i = 1, \dots, n$$

A p index a $\mathcal{K}_i$ testet megelőző $\mathcal{K}_{p(i)}$ tagra utal. Az álló $\mathcal{K}_0$ állványra érvényes, hogy $\underline{\check{r}}_0 = \underline{0}$ és $\underline{\check{v}}_i = \underline{0}$.

2. Az utolsó tag(ok)tól kezdve visszafelé haladva a terhelő erőcsavarok és tömegmátrixok vetítése minden tagnak az őt megelőző tagra:

$$\begin{aligned} \underline{M}_p^* &= \underline{M}_p + \underline{B}_{pi}^T \left(\underline{1} - \underline{M}_i^* \underline{C}_i \underline{N}_i^{-1} \underline{C}_i^T \right) \underline{M}_i^* \underline{B}_{pi} \\ \underline{\check{f}}_p^{tc*} &= \underline{\check{f}}_p^{tc} + \underline{B}_{pi}^T \left(\underline{1} - \underline{M}_i^* \underline{C}_i \underline{N}_i^{-1} \underline{C}_i^T \right) \left(\underline{\check{f}}_i^{tc*} - \underline{M}_i^* \underline{\check{a}}_i^{\text{rel}} \right) \\ \text{ahol} \quad \underline{N}_i &= \underline{C}_i^T \underline{M}_i^* \underline{C}_i \end{aligned}$$

Ezen felül a szekunder kényszerek kényszermátrixait is visszavetítjük:

$$\left[\underline{G}^{sT} \right]_p^* = \left[\underline{G}^{sT} \right]_p + \underline{B}_{pi}^T \left(\underline{1} - \underline{M}_i^* \underline{C}_i \underline{N}_i^{-1} \underline{C}_i^T \right) \left[\underline{G}^{sT} \right]_i^*$$

Az i index n -től 2-ig fut. Elágazási hely esetén mindegyik, az elágazást követő test erőcsavarját és tömegmátrixát vetíteni kell az elágazási testre.

3. A nyílt láncú rendszerhez képest kibővített, $\mathcal{K}_1$ testre vonatkozó

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_1^* & -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\ddot{a}}}_1^\circ \mid \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \\ \underline{\underline{F}} \\ \underline{\underline{L}} \end{bmatrix}_1 \\ \underline{\underline{\check{f}}}_1^{p^\circ} \\ \underline{\underline{\dot{\eta}}}_1^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\check{f}}}_1^{tc*} \mid \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}^{sT} \end{bmatrix}_1^* \\ -\underline{\underline{\bar{a}}}_1^{\text{rel}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}$$

egyenletrendszerek megoldása.

Az $\underline{\underline{\ddot{a}}}_1^\circ$, $\underline{\underline{\check{f}}}_1^{p^\circ}$, $\underline{\underline{\dot{\eta}}}_1^\circ$ megoldása megegyezik a nyílt láncú rendszer esetére ismertetettel:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{\eta}}}_1^\circ &= \underline{\underline{N}}_1^{-1} \underline{\underline{C}}_1^T \left(\underline{\underline{\check{f}}}_1^{tc*} - \underline{\underline{M}}_1^* \underline{\underline{\bar{a}}}_1^{\text{rel}} \right) & \text{ahol} \quad \underline{\underline{N}}_1 &= \underline{\underline{C}}_1^T \underline{\underline{M}}_1^* \underline{\underline{C}}_1 \\ \underline{\underline{\ddot{a}}}_1^\circ &= \underline{\underline{C}}_1 \underline{\underline{\dot{\eta}}}_1^\circ + \underline{\underline{\bar{a}}}_1^{\text{rel}} & \underline{\underline{\check{f}}}_1^{p^\circ} &= \underline{\underline{M}}_1^* \underline{\underline{\ddot{a}}}_1^\circ - \underline{\underline{\check{f}}}_1^{tc*} \end{aligned}$$

Az $\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \\ \underline{\underline{F}} \\ \underline{\underline{L}} \end{bmatrix}_1$ megoldása megegyezik az utóbbi összefüggésekkel, ha $\underline{\underline{\check{f}}}_1^{tc*}$ -t $\begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}^{sT} \end{bmatrix}_1^*$ -re cseréljük, míg $\underline{\underline{\bar{a}}}_1^{\text{rel}} = \underline{\underline{0}}$. Így:

$$\underline{\underline{L}}_1 = \underline{\underline{N}}_1^{-1} \underline{\underline{C}}_1^T \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}^{sT} \end{bmatrix}_1^*, \quad \underline{\underline{A}}_1 = \underline{\underline{C}}_1 \underline{\underline{L}}_1, \quad \underline{\underline{F}}_1 = \underline{\underline{M}}_1^* \underline{\underline{A}}_1 - \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}^{sT} \end{bmatrix}_1^*$$

4. Az eliminált változók kiszámítása a $\mathcal{K}_2$ testtől kezdődően. Az i index 2-től n -ig fut. A nyílt láncú rendszerre vonatkozó számítási képletek a szekunder erőcsavarok nélkül:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\mathbf{q}}}_i^o &= \underline{\mathbf{N}}_i^{-1} \underline{\mathbf{C}}_i^T \left(\underline{\check{\mathbf{f}}}_i^{tc*} - \underline{\mathbf{M}}_i^* \left(\underline{\mathbf{B}}_{pi} \underline{\check{\mathbf{a}}}_p^o + \underline{\check{\mathbf{a}}}_i^{\text{rel}} \right) \right) \\ \underline{\check{\mathbf{a}}}_i^o &= \underline{\mathbf{B}}_{pi} \underline{\check{\mathbf{a}}}_p^o + \underline{\mathbf{C}}_i \dot{\underline{\mathbf{q}}}_i^o + \underline{\check{\mathbf{a}}}_i^{\text{rel}} \\ \underline{\check{\mathbf{f}}}_i^{po} &= \underline{\mathbf{M}}_i^* \underline{\check{\mathbf{a}}}_i^o - \underline{\check{\mathbf{f}}}_i^{tc*}\end{aligned}$$

A szekunder kényszererők befolyását leíró mátrixok alakja ezzel megegyezik, annyi különbséggel, hogy $\underline{\check{\mathbf{f}}}_i^{tc*}$ -t $[\underline{\mathbf{G}}^{sT}]_i^*$ -re cseréljük, míg $\underline{\check{\mathbf{a}}}_i^{\text{rel}} = \underline{\mathbf{0}}$. Így:

$$\begin{aligned}[\underline{\mathbf{L}}]_i &= \underline{\mathbf{N}}_i^{-1} \underline{\mathbf{C}}_i^T \left([\underline{\mathbf{G}}^{sT}]_i^* - \underline{\mathbf{M}}_i^* \underline{\mathbf{B}}_{pi} [\underline{\mathbf{A}}]_p \right) \\ [\underline{\mathbf{A}}]_i &= \underline{\mathbf{B}}_{pi} [\underline{\mathbf{A}}]_i + \underline{\mathbf{C}}_i [\underline{\mathbf{L}}]_i \\ [\underline{\mathbf{F}}]_i &= \underline{\mathbf{M}}_i^* [\underline{\mathbf{A}}]_i - [\underline{\mathbf{G}}^{sT}]_i^*\end{aligned}$$

5. A

$$\underline{\underline{G}}^s \underline{\underline{A}} \underline{\lambda}^s = -\underline{\underline{G}}^s \underline{\check{a}}^\circ - \underline{\check{\gamma}}^s$$

lineáris egyenletrendszer megoldása $\underline{\lambda}^s$ -re. Az egyenletrendszerben

$$\underline{\underline{G}}^s = \begin{bmatrix} [\underline{\underline{G}}^s]_1 & \cdots & [\underline{\underline{G}}^s]_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} [\underline{\underline{A}}]_1 \\ \vdots \\ [\underline{\underline{A}}]_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\check{a}}^\circ = \begin{bmatrix} \underline{\check{a}}_1^\circ \\ \vdots \\ \underline{\check{a}}_n^\circ \end{bmatrix}$$

6. Az $\underline{\dot{\eta}}$ csukló-gyorsulások számítása:

$$\underline{\dot{\eta}}_i = \underline{\dot{\eta}}_i^\circ + [\underline{\underline{L}}]_i \underline{\lambda}^s, \quad i = 1, \dots, n$$

7. A szekunder erőcsavarok számítása:

$$\underline{\check{f}}_i^s = [\underline{\underline{G}}^{sT}]_i \underline{\lambda}^s, \quad i = 1, \dots, n$$

valamint a primer erőcsavarok számítása:

$$\underline{\check{f}}_i^p = \underline{\check{f}}_i^{p^\circ} + [\underline{\underline{F}}]_i \underline{\lambda}^s, \quad i = 1, \dots, n$$

Mozgásegyenlet minimálkoordinátákkal

Ha a független $\underline{q} = \underline{\beta}^i$ csukló-kordinátákat és a $\underline{s} = \underline{\eta}^i$ csukló-sebességeket tekintjük, mint minimál-koordinátákat és -sebességeket, akkor az

$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{q} & \underline{s} \end{bmatrix}^T$ állapotváltozóra felírt mozgásegyenlet alakja:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{q}} \\ \dot{\underline{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\bar{H}}(\underline{q}, t) \underline{s} + \underline{\bar{h}}(\underline{q}, t) \\ \underline{\dot{s}}(\underline{q}, \underline{s}, t) \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \dot{\underline{x}} = \underline{\Psi}(\underline{x}, t)$$

A mozgásegyenlethez társulnak a következő kezdeti feltételek:

$$\begin{bmatrix} \underline{q}(t_0) \\ \underline{s}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{q}_0 \\ \underline{s}_0 \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

Egy adott t időpontban ismert $\underline{q}$ és $\underline{s}$ értékekre a $\dot{\underline{q}}$ és $\dot{\underline{s}}$ a korábban ismertetett eljárás szerint számíthatók, ha előtte elvégezzük a helyzet- és sebességállapokra vonatkozó explicit zárófeltételek kiértékelését.

A minimálkoordinátákkal való számítás előnye, hogy numerikus stabilizálás nélkül végezhető el a mozgásegyenlet integrálása. Akkor különösen célszerű használni, ha a helyzetállapokra vonatkozó explicit zárási feltétel analitikusan megfogalmazható. Máskülönben a függő koordinátákat valamilyen numerikus nemlineáris egyenletmegoldóval kell kifejezni.

A $\underline{\dot{q}}$ és $\underline{\dot{s}}$ számításához az alábbi egyenletrendszerből indulunk ki.
Kinematikai mozgásegyenlet:

$$\underline{\dot{q}} = \underline{\underline{H}}(\underline{q}, t) \underline{s} + \underline{\bar{h}}(\underline{q}, t) \quad (19)$$

Kinetikai differenciálegyenlet ($\underline{\beta}$ és $\underline{\eta}$ primer koordinátákra):

$$\widehat{\underline{\underline{M}}}(\underline{\beta}, t) \underline{\dot{\eta}} = \underline{k}^c(\underline{\beta}, \underline{\eta}, t) + \underline{k}^t(\underline{\beta}, \underline{\eta}, t) + \underline{k}^s \quad (20)$$

Explicit zárási feltételek:

$$\underline{\beta} = \underline{\beta}(\underline{q}, t) \quad (21)$$

$$\underline{\eta} = \underline{\underline{J}}^\ell(\underline{q}, t) \underline{s} + \underline{\bar{\eta}}(\underline{q}, t) \quad (22)$$

$$\underline{\dot{\eta}} = \underline{\underline{J}}^\ell(\underline{q}, t) \underline{\dot{s}} + \underline{\bar{\eta}}(\underline{q}, \underline{s}, t), \quad \text{ahol} \quad \underline{\bar{\eta}} = \underline{\underline{J}}^\ell \underline{s} + \underline{\dot{\eta}} \quad (23)$$

Implicit egyenletek az általánosított szekunder kényszererőkre:

$$\underline{\underline{J}}^{\ell T} \underline{k}^s = \underline{0} \quad (24)$$

A $\underline{k}^s = \underline{\underline{G}}^{\ell T} \underline{\lambda}^s$ általánosított szekunder kényszererőre vonatkozó egyenletet úgy kapjuk meg, hogy balról $\underline{\underline{J}}^{\ell T}$ -vel szorozzuk:

$$\underline{\underline{J}}^{\ell T} \underline{k}^s = \underbrace{\underline{\underline{J}}^{\ell T} \underline{\underline{G}}^{\ell T}}_{\underline{\underline{0}}} \underline{\lambda}^s \rightarrow \underline{\underline{J}}^{\ell T} \underline{k}^s = \underline{\underline{0}}$$

A (20), (23) és (24) egyenletek egy lineáris egyenletrendszert alkotnak:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\underline{\underline{M}}} & -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{J}}^{\ell} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{J}}^{\ell T} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{\eta}} \\ \underline{k}^s \\ \underline{\dot{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}^c + \underline{k}^t \\ -\bar{\underline{\eta}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}$$

Ezen egyenletrendszer megoldása úgy történik, hogy a kinetikai egyenletet (1.sor) $\underline{k}^s$ -re kifejezzük:

$$\underline{k}^s = \widehat{\underline{\underline{M}}} \dot{\underline{\eta}} - \underline{k}^c - \underline{k}^t$$

Majd behelyettesítjük a szekunder kényszererők implicit egyenletébe (3.sor):

$$\underline{\underline{J}}^{\ell T} \widehat{\underline{\underline{M}}} \dot{\underline{\eta}} = \underline{\underline{J}}^{\ell T} \underline{k}^c + \underline{\underline{J}}^{\ell T} \underline{k}^t$$

Ha ebbe beírjuk az $\dot{\underline{\eta}} = \underline{\underline{J}}^\ell \dot{\underline{s}} + \bar{\underline{\eta}}$ explicit zárási feltételt (2.sor), akkor kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{J}}^{\ell T} \widehat{\underline{\underline{M}}} \underline{\underline{J}}^\ell \dot{\underline{s}} = -\underline{\underline{J}}^{\ell T} \widehat{\underline{\underline{M}}} \bar{\underline{\eta}} + \underline{\underline{J}}^{\ell T} \underline{\underline{k}}^c + \underline{\underline{J}}^{\ell T} \underline{\underline{k}}^t$$

További jelöléseket vezetünk be. A pozitív definit tömegmátrix:

$$\bar{\underline{\underline{M}}} = \underline{\underline{J}}^{\ell T} \widehat{\underline{\underline{M}}} \underline{\underline{J}}^\ell$$

Az általánosított Coriolis-erők:

$$\bar{\underline{\underline{k}}}^c = -\underline{\underline{J}}^{\ell T} \widehat{\underline{\underline{M}}} \bar{\underline{\eta}} + \underline{\underline{J}}^{\ell T} \underline{\underline{k}}^c$$

Az általánosított terhelő erők:

$$\bar{\underline{\underline{k}}}^t = \underline{\underline{J}}^{\ell T} \underline{\underline{k}}^t$$

Ezeket felhasználva, az $\dot{\underline{s}}$ minimálsebesség idő szerinti deriváltjának számítására felírt kinetikai mozgásegyenletet végső alakja:

$$\bar{\underline{\underline{M}}}(\underline{q}, t) \dot{\underline{s}} = \bar{\underline{\underline{k}}}^c(\underline{q}, \underline{s}, t) + \bar{\underline{\underline{k}}}^t(\underline{q}, \underline{s}, t)$$

Az $\underline{x}$ állapotváltozóra felírt mozgásegyenlet végső alakja:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{q}} \\ \dot{\underline{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\bar{H}}(\underline{q}, t) \underline{s} + \underline{\bar{h}}(\underline{q}, t) \\ \underline{\bar{M}}^{-1}(\underline{q}, t) \left(\underline{\bar{k}}^c(\underline{q}, \underline{s}, t) + \underline{\bar{k}}^t(\underline{q}, \underline{s}, t) \right) \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \dot{\underline{x}} = \underline{\Psi}(\underline{x}, t)$$