

Mechanizmusok és robotok

11. előadás

Zárt láncú többtest-rendszerek kinematikája (folytatás), dinamikája

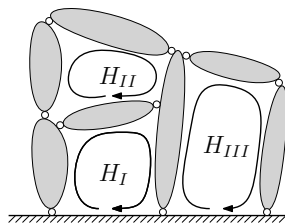
Több hurokból álló rendszerek primer csuklókoordinátái

Egy $n(=n_t)$ tagból álló többtest rendszer, amelyben n_c csukló található,

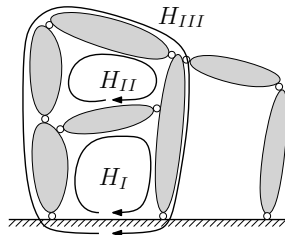
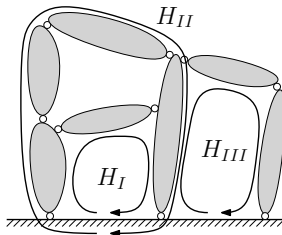
$$n_h = n_c - n$$

számú független kinematikai hurokból áll, így n_h számú szekunder csuklónál szétvágva vezethető egy nyílt láncú többtest-rendszerre vissza. A független hurkok meghatározása többféleképpen is történhet.

H_I, H_{II}, H_{III} független



H_I, H_{II}, H_{III} nem független



A primer csuklókhöz f^0 számú $\underline{\beta}$ csukló-helyzetkoordináta és $\underline{\eta}$ csukló-sebesség tartozik:

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \underline{\beta}_1 \\ \vdots \\ \underline{\beta}_{f^0} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\eta} = \begin{bmatrix} \underline{\eta}_1 \\ \vdots \\ \underline{\eta}_{f^0} \end{bmatrix}$$

Ahol f^0 a nyílt láncú rendszer szekunder kényszerek nélküli szabadságfoka. A primer csukló-helyzetkoordinátákra és sebességekre érvényes kinematikai mozgásegyenlet alakja

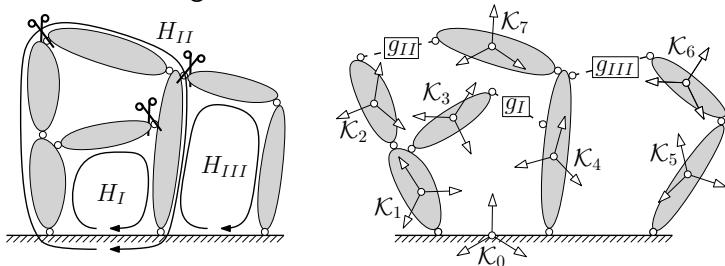
$$\dot{\underline{\beta}} = \underline{H}(\underline{\beta}) \underline{\eta}$$

A primer csukló-koordinátáknak implicit zárási feltételeket kell kielégíteniük. Ha Euler paramétereket használunk, azok mellékfeltételei:

$$\underline{\phi}(\underline{\beta}) = \underline{0}$$

Több hurokból álló rendszer implicit zárófeltételei

Az n_h független hurok zárása miatt a primer csuklókoordináták zárási feltételeknek kell eleget tenniük.



Helyzetállapot

Ha a j -ik hurok szekunder csuklójára b_j^s zárási feltétel vonatkozik, akkor az összes zárási feltétel száma

$$b^s = \sum_{j=1}^{n_h} b_j^s$$

Az n_h hurkok zárási feltételei a szekunder csuklóknál lévő $\mathcal{K}_{a,j}$ és $\mathcal{K}_{b,j}$ testek $\underline{\check{r}}_{a,j}$, $\underline{\check{r}}_{b,j}$ helyzetvektoraira vonatkozóan (ld. 10. ea. 18.o.):

$$\begin{bmatrix} \underline{g}_I^s(\underline{\check{r}}_{a,I}, \underline{\check{r}}_{b,I}, t) \\ \vdots \\ \underline{g}_{n_h}^s(\underline{\check{r}}_{a,n_h}, \underline{\check{r}}_{b,n_h}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \vdots \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \underline{g}^s(\underline{\check{r}}, t) = \underline{0}$$

Az $\underline{\check{r}}_{a,j}$ és $\underline{\check{r}}_{b,j}$ helyzeteket a nyílt lánc explicit kényszerei segítségével, azaz $\underline{\beta}$ csukló-helyzetkoordinátákkal is kifejezhetjük (8.ea., 5.o.):

$$\left. \begin{aligned} \underline{\check{r}}_a &= \underline{\check{r}}_a(\underline{\beta}, t) \\ \underline{\check{r}}_b &= \underline{\check{r}}_b(\underline{\beta}, t) \end{aligned} \right\}, \quad j = I, \dots, n_h, \quad \text{ill.} \quad \underline{\check{r}} = \underline{\check{r}}(\underline{\beta}, t)$$

Behelyettesítés révén megkapjuk a $\underline{\beta}$ csukló-helyzetkoordinátákra vonatkozó implicit zárási feltételeket:

$$\begin{bmatrix} \underline{g}_I^\ell(\underline{\beta}, t) \\ \vdots \\ \underline{g}_{n_h}^\ell(\underline{\beta}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \vdots \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \underline{g}^\ell(\underline{\beta}, t) = \underline{0}$$

Sebességállapot

A j -ik hurok szekunder csuklójának sebességállapotra vonatkozó alakja a $\mathcal{K}_{a,j}$ és $\mathcal{K}_{b,j}$ testek sebességeinek vonatkozásában (6.ea., 6.o.):

$$\underline{\gamma}_j^s = \underline{\underline{G}}_{a,j}^s \underline{\check{v}}_{a,j} + \underline{\underline{G}}_{b,j}^s \underline{\check{v}}_{b,j} + \underline{\bar{\gamma}}_{ab,j}^s = \underline{0}, \quad j = I, \dots, n_h$$

Több hurokból álló rendszer esetén célszerű ezen implicit zárási feltételeket egy mátrix egyenletbe foglalni, a rendszer topológiáját is figyelembe véve:

$$\underline{\gamma}^s = \underline{\underline{G}}^s(\underline{\check{r}}) \underline{\check{v}} + \underline{\bar{\gamma}}^s(\underline{\check{r}}, t) = \underline{0}$$

A bemutatott példát vizsgálva ezen egyenlet a következő alakot ölténé:

$$\begin{bmatrix} \underline{\gamma}_I^s \\ \underline{\gamma}_{II}^s \\ \underline{\gamma}_{III}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{\underline{G}}_{3,I}^s & \underline{\underline{G}}_{4,I}^s & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\underline{G}}_{2,II}^s & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{\underline{G}}_{7,II}^s \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{\underline{G}}_{4,III}^s & \underline{0} & \underline{\underline{G}}_{6,III}^s & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\check{v}}_1 \\ \underline{\check{v}}_2 \\ \underline{\check{v}}_3 \\ \underline{\check{v}}_4 \\ \underline{\check{v}}_5 \\ \underline{\check{v}}_6 \\ \underline{\check{v}}_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\bar{\gamma}}_{34,I}^s \\ \underline{\bar{\gamma}}_{27,II}^s \\ \underline{\bar{\gamma}}_{46,III}^s \end{bmatrix}$$

Az $\underline{\check{\mathbf{v}}}$ sebességeket a nyílt lánc explicit kényszerei segítségével is kifejezhetjük $\underline{\beta}$ és $\underline{\eta}$ függvényében (8.ea., 11.o.):

$$\begin{bmatrix} \underline{\check{\mathbf{v}}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\check{\mathbf{v}}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{J}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{J}}_n \end{bmatrix} \underline{\eta} + \begin{bmatrix} \underline{\check{\mathbf{v}}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\check{\mathbf{v}}}_n \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \underline{\check{\mathbf{v}}} = \underline{\mathbf{J}} \underline{\eta} + \underline{\check{\mathbf{v}}}$$

Behelyettesítve a sebességállapot implicit kényszereibe, megkapjuk a $\underline{\beta}$ csukló-helyzetkoordinátákra és $\underline{\eta}$ csukló-sebességekre vonatkozó zárási feltételeket:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{G}}_I^\ell(\underline{\beta}, t) \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{G}}_{n_h}^\ell(\underline{\beta}, t) \end{bmatrix} \underline{\eta} + \begin{bmatrix} \underline{\gamma}_I^\ell(\underline{\beta}, t) \\ \vdots \\ \underline{\gamma}_{n_h}^\ell(\underline{\beta}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \underline{\mathbf{G}}^\ell(\underline{\beta}, t) \underline{\eta} + \underline{\gamma}^\ell(\underline{\beta}, t) = \underline{\mathbf{0}}$$

Ahol $\underline{\mathbf{G}}^\ell$ a zárási feltételek ($b^s \times f^0$) méretű kényszermátrixa:

$$\underline{\mathbf{G}}^\ell = \underline{\mathbf{G}}^s \underline{\mathbf{J}}$$

$\underline{\gamma}^\ell$ pedig csak a reonom kényszereknél fellépő b^s elemű vektor:

$$\underline{\gamma}^\ell = \underline{\mathbf{G}}^s \underline{\check{\mathbf{v}}} + \underline{\gamma}^s$$

A vizsgált példában a nyílt láncú rendszer explicit sebességeit

$$\begin{bmatrix} \underline{\check{v}}_1 \\ \underline{\check{v}}_2 \\ \underline{\check{v}}_3 \\ \underline{\check{v}}_4 \\ \underline{\check{v}}_5 \\ \underline{\check{v}}_6 \\ \underline{\check{v}}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{J}_1 \\ \underline{J}_2 \\ \underline{J}_3 \\ \underline{J}_4 \\ \underline{J}_5 \\ \underline{J}_6 \\ \underline{J}_7 \end{bmatrix} \underline{\eta} + \begin{bmatrix} \underline{\check{v}}_1 \\ \underline{\check{v}}_2 \\ \underline{\check{v}}_3 \\ \underline{\check{v}}_4 \\ \underline{\check{v}}_5 \\ \underline{\check{v}}_6 \\ \underline{\check{v}}_7 \end{bmatrix}$$

behelyettesítjük a tagok sebességeinek zárási feltételrendszerébe, és kapjuk

$$\begin{bmatrix} \underline{G}_{3,I}^s \underline{J}_3 + \underline{G}_{4,I}^s \underline{J}_4 \\ \underline{G}_{2,II}^s \underline{J}_2 + \underline{G}_{7,II}^s \underline{J}_7 \\ \underline{G}_{4,III}^s \underline{J}_4 + \underline{G}_{6,III}^s \underline{J}_6 \end{bmatrix} \underline{\eta} + \begin{bmatrix} \underline{\gamma}_I^\ell \\ \underline{\gamma}_{II}^\ell \\ \underline{\gamma}_{III}^\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \underline{G}^\ell \underline{\eta} + \underline{\gamma}^\ell = \underline{0}$$

zárási feltételeket a csuklókoordinátákra, ahol

$$\underline{\gamma}^\ell = \begin{bmatrix} \underline{\gamma}_I^\ell \\ \underline{\gamma}_{II}^\ell \\ \underline{\gamma}_{III}^\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}_{3,I}^s \underline{\check{v}}_3 + \underline{G}_{4,I}^s \underline{\check{v}}_4 + \underline{\gamma}_{34,I}^s \\ \underline{G}_{2,II}^s \underline{\check{v}}_2 + \underline{G}_{7,II}^s \underline{\check{v}}_7 + \underline{\gamma}_{27,II}^s \\ \underline{G}_{4,III}^s \underline{\check{v}}_4 + \underline{G}_{6,III}^s \underline{\check{v}}_6 + \underline{\gamma}_{46,III}^s \end{bmatrix}$$

Gyorsulásállapot

A sebességállapot zárási feltételeinek idő szerinti deriváltja (6.ea., 7.o.):

$$\dot{\underline{\gamma}}_j^s = \underline{\underline{G}}_{a,j}^s \ddot{\underline{a}}_{a,j} + \underline{\underline{G}}_{b,j}^s \ddot{\underline{a}}_{b,j} + \ddot{\underline{\gamma}}_{ab,j}^s = \underline{\underline{0}}, \quad j = 1, \dots, n_h$$

A sebességállapothoz hasonlóan itt is a rendszer topológiájának megfelelő mátrix egyenletbe foglaljuk:

$$\dot{\underline{\gamma}}^s = \underline{\underline{G}}^s(\underline{\check{r}}) \ddot{\underline{a}} + \ddot{\underline{\gamma}}(\underline{\check{r}}, \underline{\check{v}}t) = \underline{\underline{0}}$$

Ahol az $\ddot{\underline{a}}$ gyorsulásokat a nyílt lánc explicit kényszerei segítségével is kifejezhetjük (8.ea., 15.o.):

$$\begin{bmatrix} \ddot{\underline{a}}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\underline{a}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{J}}_n \end{bmatrix} \dot{\underline{\eta}} + \begin{bmatrix} \ddot{\underline{a}}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\underline{a}}_n \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \ddot{\underline{a}} = \underline{\underline{J}} \dot{\underline{\eta}} + \ddot{\underline{a}}$$

Behelyettesítés után megkapjuk a gyorsulásállapot implicit zárási feltételeit a $\underline{\beta}$ csukló-helyzetkoordináták, $\underline{\eta}$ csukló-sebességek és $\underline{\dot{\eta}}$ csukló-gyorsulások vonatkozásában:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}_I^\ell(\underline{\beta}, t) \\ \vdots \\ \underline{\underline{G}}_{n_h}^\ell(\underline{\beta}, t) \end{bmatrix} \underline{\dot{\eta}} + \begin{bmatrix} \underline{\bar{\gamma}}_I^\ell(\underline{\beta}, \underline{\eta}, t) \\ \vdots \\ \underline{\bar{\gamma}}_{n_h}^\ell(\underline{\beta}, \underline{\eta}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix}$$

azaz

$$\underline{\underline{G}}^\ell(\underline{\beta}, t) \underline{\dot{\eta}} + \underline{\bar{\gamma}}^\ell(\underline{\beta}, \underline{\eta}, t) = \underline{\mathbf{0}}$$

Ahol $\underline{\bar{\gamma}}^\ell$ az $\underline{\dot{\eta}}$ gyorsulásoktól független b^s elemű vektor:

$$\underline{\bar{\gamma}}^\ell = \underline{\underline{G}}^s \underline{\bar{a}} + \underline{\bar{\gamma}}^s$$

vagy a sebességállapot zárási feltételének deriválása útján:

$$\underline{\bar{\gamma}}^\ell = \underline{\dot{\underline{G}}}^\ell \underline{\eta} + \underline{\dot{\bar{\gamma}}}^\ell$$

Megjegyzések a független hurkok meghatározáshoz

A független hurkok megválasztása nagy mértékben meghatározza a zárási feltételek struktúráját, és az ebből levezetett modell hatékonyságát.

A független hurkok előnyös megválasztásához az alábbi szabályokat lehet megfogalmazni:

- Zárási feltételek kis száma: ezt úgy érhetjük el, ha a hurkot egy olyan csuklónál vágjuk szét, amelynek lehetőleg nagy a szabadságfoka.
- Kerülendő a hurkok csatolása szekunder csuklókon keresztül. Ez azt jelenti, hogy a zárási feltételek csak a primer csuklókoordinátákon keresztül vannak egymással csatolva. A szekunder csuklók csuklókoordinátáit nem használjuk a tagok mozgásának számításához.

Több hurokból álló rendszer explicit zárófeltételei

Az explicit zárási feltételek a rendszer minimálkoordinátái függvényében fejezik ki a csukló-koordinátákat. Úgy kapjuk őket meg, hogy az implicit zárási feltételeket megoldjuk a függő csukló-koordinátákra.

Hasonlóan az egyetlen hurokra megfogalmazottakkal, analitikus megoldás csak speciális esetekben lehetséges így általánosságban marad a numerikus megoldás.

Egyetlen hurokra felírtakkal analóg módon járunk el.

Az f^0 elemű $\underline{\beta}$ vektort felosztjuk az alábbi módon:

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \underline{\beta}^i \\ \underline{\beta}^d \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} f = f^0 - b^s & \text{független csuklókoordináta} \\ b^s & \text{függő csuklókoordináta} \end{array}$$

A független csukló-koordináták száma a hurok szabadságfoka, így a független csuklókoordináták megegyeznek a minimálkoordinátákkal:

$$\underline{q} = \underline{\beta}^i$$

Az $\underline{\eta}$ csukló-sebességeket is felosztjuk függő és független koordinátákra:

$$\underline{\eta} = \begin{bmatrix} \underline{\eta}^i \\ \underline{\eta}^d \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} f = f^0 - b^s & \text{független csuklósebesség} \\ b^s & \text{függő csuklósebesség} \end{array}$$

A független csukló-sebességek egyben minimálsebességek is: $\underline{s} = \underline{\eta}^i$
 Az explicit zárási feltételek alakja megegyezik az egyetlen hurokra felírt képletekkel (10.ea. 24.,25.,28.o.):

$$\underline{\beta} = \underline{\beta}(\underline{q}, t)$$

$$\underline{\eta} = \underline{J}^\ell(\underline{q}, t) \underline{s} + \underline{\bar{\eta}}(\underline{q}, t)$$

$$\dot{\underline{\eta}} = \underline{J}^\ell(\underline{q}, t) \dot{\underline{s}} + \underline{\bar{\eta}}(\underline{q}, \underline{s}, t), \quad \text{ahol} \quad \underline{\bar{\eta}} = \underline{J}^\ell \underline{s} + \underline{\dot{\eta}}$$

Az explicit zárási feltételek tetszőleges $\underline{s}$ értékek mellett kielégítik az implicit zárási feltételeket. Érvényes az ortogonalitási összefüggés:

$$\underline{G}^\ell \underline{J}^\ell = \underline{0}$$

A $\underline{q}$ és $\underline{s}$ közötti kinematikai mozgásegyenlet alakja pedig:

$$\dot{\underline{q}} = \underline{\bar{H}}(\underline{q}, t) \underline{s} + \underline{\bar{h}}(\underline{q}, t)$$

Zárt láncú többtest-rendszerek dinamikája

A mozgásegyenletek felírásánál az impluzus és perdülettételekben figyelembe vesszük a szekunder csuklóknál fellépő erőcsavarokat.

Szekunder erőcsavarok

A j -ik hurok szekunder csuklójánál a $\mathcal{K}_{a,j}$ és $\mathcal{K}_{b,j}$ tagokra az $\check{\underline{f}}_{a,j}^s$ és $\check{\underline{f}}_{b,j}^s$ szekunder erőcsavarok hatnak. Az explicit kényszererők a $\underline{\underline{G}}_{a,j}^s$ és $\underline{\underline{G}}_{b,j}^s$ kényszermátrixok segítségével írhatók fel a b_j^s minimális számú $\underline{\lambda}_j^s$ kényszererő-koordináta felhasználásával (7.ea. 17.o):

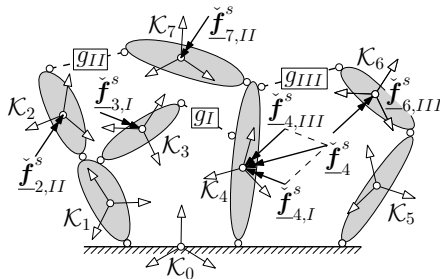
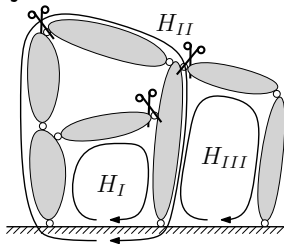
$$\begin{bmatrix} \check{\underline{f}}_{a,j}^s \\ \check{\underline{f}}_{b,j}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}_{a,j}^s \\ \underline{\underline{G}}_{b,j}^s \end{bmatrix} \underline{\lambda}_j^s, \quad j = 1, \dots, n_h$$

Egy több hurokból álló rendszer esetén az explicit kényszererők a zárási feltételek ($b^s \times 6n$) méretű $\underline{\underline{G}}^s$ mátrixának felhasználásával írhatók fel:

$$\check{\underline{f}}^s = \underline{\underline{G}}^{sT} \underline{\lambda}^s$$

Utóbbi egyenlet a rendszer összes testjére ható eredő szekunder kényszer-erőcsavarokat szolgáltatja.

A vizsgált példa esetén az 1 és 5 tagokon nem működik szekunder erőcsavar, a 4 tagon pedig kettő szekunder csuklóról ébredő erőcsavar eredője hat.



$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\check{f}_1^s}} \\ \underline{\underline{\check{f}_2^s}} \\ \underline{\underline{\check{f}_3^s}} \\ \underline{\underline{\check{f}_4^s}} \\ \underline{\underline{\check{f}_5^s}} \\ \underline{\underline{\check{f}_6^s}} \\ \underline{\underline{\check{f}_7^s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{G_{2,II}^{sT}}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{G_{3,I}^{sT}}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{G_{4,I}^{sT}}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{G_{4,III}^{sT}}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{G_{6,III}^{sT}}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{G_{7,II}^{sT}}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\lambda_I^s}} \\ \underline{\underline{\lambda_{II}^s}} \\ \underline{\underline{\lambda_{III}^s}} \end{bmatrix}$$

Impulzus- és perdülettételek

Az egyes testek impulzus- és perdülettételei (Newton-Euler egyenletei) mátrixos alakban az alábbiak szerint néznek ki: (9.ea. 13.o.)

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_1 & & \underline{\underline{0}} \\ & \ddots & \\ \underline{\underline{0}} & & \underline{\underline{M}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\ddot{a}}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{\ddot{a}}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\check{f}}}_1^c \\ \vdots \\ \underline{\underline{\check{f}}}_n^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\check{f}}}_1^t \\ \vdots \\ \underline{\underline{\check{f}}}_n^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\check{f}}}_1^k \\ \vdots \\ \underline{\underline{\check{f}}}_n^k \end{bmatrix}$$

azaz

$$\underline{\underline{M}} \underline{\underline{\ddot{a}}} = \underline{\underline{\check{f}}}^c + \underline{\underline{\check{f}}}^t + \underline{\underline{\check{f}}}^k$$

Testekre ható eredő kényszererők és primer és szekunder csuklók által kifejtett kényszererők ($\underline{\underline{\check{f}}}^p$ ill. $\underline{\underline{\check{f}}}^s$) összegeként írhatók fel:

$$\underline{\underline{\check{f}}}^k = \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{\check{f}}}^p + \underline{\underline{\check{f}}}^s, \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{\check{f}}}^s = \underline{\underline{G}}^s{}^T \underline{\underline{\lambda}}^s$$

Zárt láncú többtest-rendszerek egyenletrendszere

Kinematikai mozgásegyenlet:

$$\underline{\dot{\beta}} = \underline{H}(\underline{\beta}) \underline{\eta} \quad (1)$$

Euler paraméterek mellékfeltételei:

$$\underline{\phi}(\underline{\beta}) = \underline{0} \quad (2)$$

Kinetikai differenciálegyenlet:

$$\underline{\underline{M}} \underline{\ddot{a}} = \underline{\check{f}}^c + \underline{\check{f}}^t + \underline{\check{f}}^k \quad (3)$$

Testekre ható eredő kényszererők:

$$\underline{\check{f}}^k = \underline{\underline{B}}^T \underline{\check{f}}^p + \underline{\check{f}}^s \quad (4)$$

Primer csuklók implicit kényszererői:

$$\underline{\underline{C}}^T \underline{\check{f}}^p = \underline{0} \quad (5)$$

Szekunder csuklók explicit kényszererői (szekunder erőcsavarok):

$$\underline{\check{f}}^s = \underline{\underline{G}}^{sT} \underline{\lambda}^s \quad (6)$$

Primer csuklók explicit kényszerei:

$$\underline{\check{r}}_i = \underline{\check{r}}_i \left(\underline{\check{r}}_{p(i)}, \underline{\beta}_i, t \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

$$\underline{\underline{B}} \underline{\check{v}} = \underline{\underline{C}} \underline{\eta} + \underline{\check{v}}^{\text{rel}} \quad (8)$$

$$\underline{\underline{B}} \underline{\dot{\check{v}}} = \underline{\underline{C}} \underline{\dot{\eta}} + \underline{\check{a}}^{\text{rel}} \quad (9)$$

Szekunder csuklók implicit kényszerei:

$$\underline{\underline{g}}^s(\underline{\check{r}}, t) = \underline{0} \quad (10)$$

$$\underline{\underline{G}}^s \underline{\check{v}} + \underline{\check{\gamma}}^s = \underline{0} \quad (11)$$

$$\underline{\underline{G}}^s \underline{\check{a}} + \underline{\check{\gamma}}^s = \underline{0} \quad (12)$$

Implicit zárófeltételek a primer csuklókoordinátákra:

$$\underline{\underline{g}}^\ell(\underline{\beta}, t) = \underline{0} \quad (13)$$

$$\underline{\underline{G}}^\ell \underline{\eta} + \underline{\check{\gamma}}^\ell = \underline{0} \quad (14)$$

$$\underline{\underline{G}}^\ell \underline{\dot{\eta}} + \underline{\check{\gamma}}^\ell = \underline{0} \quad (15)$$

Nyílt láncú rendszereknél felállított lineáris egyenletrendszerhez képest annyiban történik változás, hogy a (3) mozgásegyenlet a (4) eredő kényszererőkkel kiegészülve tartalmazza a (6) szekunder csuklók explicit kényszererőit, illetve az egyenletrendszerhez hozzávesszük a (12) szekunder csuklók gyorsulásállapotra vonatkozó implicit kényszeregyenleteit. A (9) primer csuklók gyorsulásállapotának explicit kényszerei és a (5) primer csuklók implicit kényszererői változatlanul szerepelnek.

Így kapjuk a testek $\underline{\ddot{a}}$ gyorsulásainak, a primer csuklók $\underline{\check{f}}^p$ kényszererőinek, az $\underline{\dot{\eta}}$ csukló-gyorsulások és a $\underline{\lambda}^s$ szekunder erőcsavar-koordináták számítására szolgáló lineáris egyenletrendszert:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \underline{\underline{M}} & -\underline{\underline{B}}^T & \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{G}}^{sT} \\ -\underline{\underline{B}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}^T & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \hline -\underline{\underline{G}}^s & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{\ddot{a}} \\ \underline{\check{f}}^p \\ \underline{\dot{\eta}} \\ \underline{\lambda}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\check{f}}^{tc} \\ -\underline{\check{a}}^{\text{rel}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\check{\gamma}}^s \end{bmatrix} \quad (16)$$

ahol $\underline{\check{f}}^{tc} = \underline{\check{f}}^t + \underline{\check{f}}^c$.

Az egyenletrendszer megoldása itt is lehet nem rekurzív és rekurzív.

Ha a $\underline{\beta}$ csukló-helyzetkoordinátákat és $\underline{\eta}$ csukló-sebességeket összefoglaljuk az $\underline{x}$ állapotváltozóba, akkor az utóbbi (16) egyenletből kapott $\dot{\underline{\eta}}$ és a (1) kinematikai mozgásegyenletből kapott $\dot{\underline{\beta}}$ deriváltakkal megkapjuk az $\dot{\underline{x}}$ állapotváltozó idő szerinti deriváltját. Így a megoldandó elsőrendű differenciálegyenlet a szokásos alakú:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{\beta}} \\ \dot{\underline{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{H}(\underline{\beta}) \underline{\eta} \\ \underline{\eta}(\underline{\beta}, \underline{\eta}, t) \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \dot{\underline{x}} = \underline{\Psi}(\underline{x}, t)$$

A mozgásegyenlethez társulnak a következő kezdeti feltételek:

$$\begin{bmatrix} \underline{\beta}(t_0) \\ \underline{\eta}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\beta}_0 \\ \underline{\eta}_0 \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

Ahol a kezdeti feltételek a helyzet- és sebességállapotra vonatkozó zárási feltételekkel konzisztensnek kell lenniük:

$$\begin{aligned} \underline{g}^\ell(\underline{\beta}_0, t_0) &= \underline{0} \\ \underline{G}^\ell(\underline{\beta}_0, t_0) \underline{\eta}_0 + \underline{\gamma}^\ell(\underline{\beta}_0, t_0) &= \underline{0} \end{aligned}$$

Nem rekurzív formalizmus zárt láncú többtest-rendszerekre

A (16) lineáris egyenletrendszer nem rekurzív megoldásánál az $\ddot{\underline{a}}$ gyorsulások és $\check{\underline{f}}^P$ erőcsavarok ugyanúgy eliminálhatók, mint nyílt láncú rendszereknél. Ehhez a kinetikai mozgásegyenlet (a (16) ER első sora) $\check{\underline{f}}^P$ -re kifejezzük:

$$\check{\underline{f}}^P = \underline{\underline{B}}^{-T} \left(\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{a}} - \check{\underline{f}}^{tc} - \underline{\underline{G}}^{sT} \underline{\lambda}^s \right)$$

majd behelyettesítjük az ER 3. sorába ($\underline{\underline{C}}^T \check{\underline{f}}^P = \underline{0}$):

$$\underbrace{\underline{\underline{C}}^T \underline{\underline{B}}^{-T}}_{\underline{\underline{J}}^T} \left(\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{a}} - \check{\underline{f}}^{tc} - \underline{\underline{G}}^{sT} \underline{\lambda}^s \right) = \underline{0}$$

Ahol $\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{C}}$ a nyílt láncú rendszer Jacobi mátrixa.

Vegyük a nyílt rendszer gyorsulásállapotra vonatkozó explicit kényszereit:

$$\ddot{\underline{a}} = \underline{\underline{J}} \dot{\underline{\eta}} + \ddot{\underline{a}} \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{C}}, \quad \ddot{\underline{a}} = \underline{\underline{B}}^{-1} \ddot{\underline{a}}^{\text{rel}} \quad (17)$$

Ha behelyettesítjük az előző egyenletbe, megkapjuk a primer $\underline{\eta}$ csuklósebességekre és $\underline{\beta}$ csukló-helyzetkoordinátákra vonatkozó mozgásegyenletet:

$$\widehat{\underline{\underline{M}}}(\underline{\beta}, t) \dot{\underline{\eta}} = \underline{\underline{k}}^c(\underline{\beta}, \underline{\eta}, t) + \underline{\underline{k}}^t(\underline{\beta}, \underline{\eta}, t) + \underline{\underline{k}}^s$$

Ahol az $\widehat{\underline{\underline{M}}}$ tömegmátrix (részletesen: 9.ea. 21.o.):

$$\widehat{\underline{\underline{M}}} = \underline{\underline{J}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{J}}$$

A $\underline{\underline{k}}^c$ általánosított Coriolis-erők (részletesen: 9.ea. 22.o.):

$$\underline{\underline{k}}^c = -\underline{\underline{J}}^T \left(\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{a}}} - \check{\underline{\underline{f}}}^c \right)$$

A $\underline{\underline{k}}^t$ általánosított terhelő erők (részletesen: 9.ea. 23.o.):

$$\underline{\underline{k}}^t = \underline{\underline{J}}^T \check{\underline{\underline{f}}}^t$$

A nyílt lánc csukló-sebességeire vonatkozó $\underline{\underline{k}}^s$ általánosított szekunder kényszererők az explicit kényszererőkkel számíthatók:

$$\underline{\underline{k}}^s = \underline{\underline{G}}^{\ell T} \underline{\underline{\lambda}}^s \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{G}}^{\ell T} = (\underline{\underline{G}}^s \underline{\underline{J}})^T = \underline{\underline{J}}^T \underline{\underline{G}}^{sT}$$

ahol $\underline{\underline{G}}^{\ell}$ az implicit zárófeltételek kényszermátrixa.

Behelyettesítve a (17) nyílt rendszer gyorsulásállapokra vonatkozó explicit kényszereit, a szekunder csuklók gyorsulásállapokra vonatkozó (12) implicit kényszereibe, megkapjuk a gyorsulásállapokra vonatkozó (15) implicit zárófeltételeket:

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}^\ell(\underline{\beta}, t) \underline{\dot{\eta}} + \underline{\underline{\bar{\gamma}}}^\ell(\underline{\beta}, \underline{\eta}, t) = \underline{\mathbf{0}}$$

Ennek fényében egy adott t időponthoz tartozó $\underline{\beta}$ helyzethez és $\underline{\eta}$ sebességhez tartozó $\underline{\dot{\eta}}$ gyorsulások és $\underline{\lambda}^s$ szekunder kényszererő-koordináták az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldásából számíthatók:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\underline{\underline{\mathbf{M}}}} & -\underline{\underline{\mathbf{G}}}^{\ell T} \\ -\underline{\underline{\mathbf{G}}}^\ell & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{\eta}} \\ \underline{\lambda}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{k}}^c + \underline{\mathbf{k}}^t \\ \underline{\underline{\bar{\gamma}}}^\ell \end{bmatrix} \quad (18)$$

Ezen egyenletrendszer egyértelműen megoldható $\underline{\dot{\eta}}$ -re $\underline{\lambda}^s$ -re, ha $\widehat{\underline{\underline{\mathbf{M}}}}$ pozitív definit, és $\underline{\underline{\mathbf{G}}}^\ell$ teljes rangú, azaz $\text{rank}(\underline{\underline{\mathbf{G}}}^\ell) = b^s$.

A kapott $\underline{\lambda}^s$ felhasználásával a szekunder erőcsavarok

$$\underline{\check{f}}^s = \underline{\underline{G}}^{sT} \underline{\lambda}^s$$

míg az $\underline{\check{f}}^p$ primer erőcsavarok

$$\underline{\check{f}}^p = \underline{\underline{B}}^{-T} \left(\underline{\check{f}}^k - \underline{\check{f}}^s \right)$$

egyenletből számíthatók, ahol $\underline{\check{f}}^k$ a kinetikai mozgásegyenletből határozható meg:

$$\underline{\check{f}}^k = \underline{\underline{M}} \underline{\check{a}} - \underline{\check{f}}^{tc} \quad \text{ahol} \quad \underline{\check{a}} = \underline{\underline{J}} \underline{\dot{\eta}} + \underline{\check{a}}$$

Túlhatározott rendszereknél, ahol $\underline{\underline{G}}^\ell$ rangja mindig csökkentett értékű, azaz $\text{rank}(\underline{\underline{G}}^\ell) < b^s$, $\underline{\lambda}^s$ nem határozható meg (statikailag határozatlan), de a (18) ER-nek mégis egyértelmű megoldása van $\underline{\dot{\eta}}$ -re.