

# Mechanizmusok és robotok

## 10. előadás

Nyílt láncú többtest-rendszerek dinamikája (folytatás)  
Zárt láncú többtest-rendszerek kinematikája

## Rekurzív formalizmus

A rekurzív formalizmus esetén kihasználjuk a nyílt láncú rendszerek topológiáját. Az eljárás során az  $\underline{\dot{\eta}}$  csukló-gyorsulások a rendszer  $\widehat{\underline{\underline{M}}}$  tömegmátrixának számítása nélkül történik meg. A rekurzív formalizmus előnye a nem rekurzívval szemben, hogy míg a nem rekurzív formalizmus számítási igénye a tagok számával köbösen emelkedik, addig a rekurzív formalizmus lineárisan.

## Nyílt láncú többtest-rendszerek egyenletrendszere

Kinematikai mozgásegyenlet:

$$\underline{\dot{\beta}} = \underline{\underline{H}}(\underline{\beta}) \underline{\eta} \quad (1)$$

Euler paraméterek mellékfeltételei:

$$\underline{\phi}(\underline{\beta}) = \underline{0} \quad (2)$$

Kinetikai differenciálegyenlet:

$$\underline{\underline{M}} \underline{\ddot{a}} = \underline{\check{f}}^c + \underline{\check{f}}^t + \underline{\check{f}}^k \quad (3)$$

Testekre ható eredő kényszererők és csuklók által kifejtett kényszererők:

$$\underline{\check{f}}^k = \underline{\underline{B}}^T \underline{\check{f}}^p \quad (4)$$

Csuklók explicit kényszerei:

A rendszer explicit kényszerei:

$$\underline{\check{r}}_i = \underline{\check{r}}_i \left( \underline{\check{r}}_{p(i)}, \underline{\beta}_i, t \right) \quad (5)$$

$$\underline{\check{r}} = \underline{\check{r}}(\underline{\beta}, t) \quad (8)$$

$$\underline{\underline{B}} \underline{\check{v}} = \underline{\underline{C}} \underline{\eta} + \underline{\check{v}}^{\text{rel}} \quad (6)$$

$$\underline{\check{v}} = \underline{\underline{J}} \underline{\eta} + \underline{\check{v}} \quad (9)$$

$$\underline{\underline{B}} \underline{\dot{\check{v}}} = \underline{\underline{C}} \underline{\dot{\eta}} + \underline{\check{a}}^{\text{rel}} \quad (7)$$

$$\underline{\check{a}} = \underline{\underline{J}} \underline{\dot{\eta}} + \underline{\check{a}} \quad (10)$$

$$\text{ahol } \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{C}} \quad (11)$$

ahol  $i = 1, \dots, n$  és  $p(i)$  a  $\mathcal{K}_i$ -t megelőző test.

Csuklók implicit kényszererői:

Testekre ható eredő implicit egyenletei:

$$\underline{\underline{C}}^T \underline{\check{f}}^p = \underline{0} \quad (12)$$

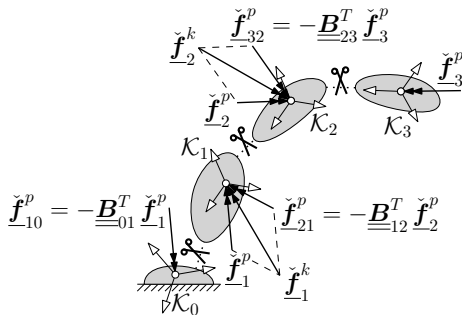
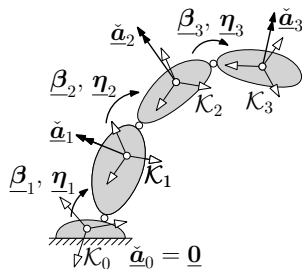
$$\underline{\underline{J}}^T \underline{\check{f}}^k = \underline{0} \quad (13)$$

A (3) együtt a (4) egyenlettel, továbbá (7) és (12) egy lineáris egyenletrendszert alkotnak  $\underline{\ddot{a}}$ -ra,  $\underline{\check{f}}^p$ -re és  $\underline{\dot{\eta}}$ -ra:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} & -\underline{\underline{B}}^T & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{B}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\ddot{a}} \\ \underline{\check{f}}^p \\ \underline{\dot{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\check{f}}^{tc} \\ -\underline{\check{a}}^{rel} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \quad (14)$$

ahol  $\underline{\check{f}}^{tc} = \underline{\check{f}}^t + \underline{\check{f}}^c$ .

## Rekurzív formalizmus egy három tagú lánc példáján



A (14) egyenletrendszer egyes részeit külön-külön részletesen is kiírhatjuk:

- Impulzus és perdülettételek  $\underline{\check{f}}^k = \underline{\underline{B}}^T \underline{\check{f}}^p$  összefüggéssel kiegészítve:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_1 & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}}_2 & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\check{a}}_1 \\ \underline{\check{a}}_2 \\ \underline{\check{a}}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & -\underline{\underline{B}}_{12}^T & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} & -\underline{\underline{B}}_{23}^T \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\check{f}}_1^p \\ \underline{\check{f}}_2^p \\ \underline{\check{f}}_3^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\check{f}}_1^{tc} \\ \underline{\check{f}}_2^{tc} \\ \underline{\check{f}}_3^{tc} \end{bmatrix}$$

- A csuklók kényszerfeltételei gyorsulásállapokra vonatkozóan:

$$\begin{bmatrix} -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{B}}_{12} & -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{B}}_{23} & -\underline{\underline{1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\check{a}}_1 \\ \underline{\check{a}}_2 \\ \underline{\check{a}}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}}_1 & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_2 & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{\eta}}_1 \\ \underline{\dot{\eta}}_2 \\ \underline{\dot{\eta}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{\check{a}}_1^{\text{rel}} \\ -\underline{\check{a}}_2^{\text{rel}} \\ -\underline{\check{a}}_3^{\text{rel}} \end{bmatrix}$$

- Kényszererők implicit egyenletei:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{C}}_1^T & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_2^T & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\check{f}}_1^p \\ \underline{\check{f}}_2^p \\ \underline{\check{f}}_3^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}$$

Ezt követően a rendszer minden tagjára külön felírjuk a (14) lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_3 & -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_3 \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_3^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\ddot{a}}}_3 \\ \underline{\underline{\check{f}}}_3^p \\ \underline{\underline{\dot{\eta}}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\check{f}}}_3^{tc} \\ -\underline{\underline{B}}_{23} \underline{\underline{\ddot{a}}}_2 - \underline{\underline{\check{a}}}_3^{\text{rel}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_2 & -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_2 \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_2^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\ddot{a}}}_2 \\ \underline{\underline{\check{f}}}_2^p \\ \underline{\underline{\dot{\eta}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\check{f}}}_2^{tc} - \underline{\underline{B}}_{23}^T \underline{\underline{\check{f}}}_3^p \\ -\underline{\underline{B}}_{12} \underline{\underline{\ddot{a}}}_1 - \underline{\underline{\check{a}}}_2^{\text{rel}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_1 & -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_1 \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_1^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\ddot{a}}}_1 \\ \underline{\underline{\check{f}}}_1^p \\ \underline{\underline{\dot{\eta}}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\check{f}}}_1^{tc} - \underline{\underline{B}}_{12}^T \underline{\underline{\check{f}}}_2^p \\ -\underline{\underline{\check{a}}}_1^{\text{rel}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

A (15) egyenletrendszer csatolva van a (16) egyenletrendszerrel, míg a (16) csatolva van (17) egyenletrendszerrel is.

Az eljárást a lánc végével kezdjük. Célunk, hogy  $\check{\underline{f}}_3^P$ -t  $\check{\underline{a}}_2$  függvényében fejezzük ki, melyet majd a megelőző  $\mathcal{K}_2$  test kinetikai mozgásegyenletébe helyettesítünk.

Ennek első lépéseként (15) első egyenletét  $\check{\underline{f}}_3^P$ -ra rendezzük:

$$\check{\underline{f}}_3^P = \underline{\underline{M}}_3 \check{\underline{a}}_3 - \check{\underline{f}}_3^{tc}$$

melyet (15) harmadik egyenletébe helyettesítünk:

$$\underline{\underline{C}}_3^T \left( \underline{\underline{M}}_3 \check{\underline{a}}_3 - \check{\underline{f}}_3^{tc} \right) = \underline{0}$$

(15) második egyenletéből

$$\check{\underline{a}}_3 = \underline{\underline{C}}_3 \dot{\underline{\eta}}_3 + \underline{\underline{B}}_{23} \check{\underline{a}}_2 + \check{\underline{a}}_3^{\text{rel}}$$

gyorsulást behelyettesítve

$$\underline{\underline{C}}_3^T \left( \underline{\underline{M}}_3 \left[ \underline{\underline{C}}_3 \dot{\underline{\eta}}_3 + \underline{\underline{B}}_{23} \check{\underline{a}}_2 + \check{\underline{a}}_3^{\text{rel}} \right] - \check{\underline{f}}_3^{tc} \right) = \underline{0}$$

ami az  $\underline{\underline{N}}_3 = \underline{\underline{C}}_3^T \underline{\underline{M}}_3 \underline{\underline{C}}_3$  jelöléssel

$$\underline{\underline{N}}_3 \dot{\underline{\eta}}_3 = -\underline{\underline{C}}_3^T \underline{\underline{M}}_3 \underline{\underline{B}}_{23} \check{\underline{a}}_2 + \underline{\underline{C}}_3^T \left( \check{\underline{f}}_3^{tc} - \underline{\underline{M}}_3 \check{\underline{a}}_3^{\text{rel}} \right)$$

Utóbbi egy  $\ddot{\mathbf{a}}_2$ -től függő lineáris egyenletrendszer  $\dot{\mathbf{f}}_3$ -ra, melynek megoldása:

$$\dot{\mathbf{f}}_3 = -\underline{\underline{\mathbf{N}}}_3^{-1} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3^T \underline{\underline{\mathbf{M}}}_3 \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{23} \ddot{\mathbf{a}}_2 + \underline{\underline{\mathbf{N}}}_3^{-1} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3^T \left( \check{\mathbf{f}}_3^{tc} - \underline{\underline{\mathbf{M}}}_3 \ddot{\mathbf{a}}_3^{\text{rel}} \right)$$

Visszahelyettesítve  $\ddot{\mathbf{a}}_3$  gyorsulást adó képletbe, megkapjuk  $\ddot{\mathbf{a}}_3$ -t  $\ddot{\mathbf{a}}_2$  függvényében:

$$\ddot{\mathbf{a}}_3 = \left( \underline{\underline{\mathbf{1}}} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \underline{\underline{\mathbf{N}}}_3^{-1} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3^T \underline{\underline{\mathbf{M}}}_3 \right) \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{23} \ddot{\mathbf{a}}_2 + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \underline{\underline{\mathbf{N}}}_3^{-1} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3^T \left( \check{\mathbf{f}}_3^{tc} - \underline{\underline{\mathbf{M}}}_3 \ddot{\mathbf{a}}_3^{\text{rel}} \right) + \ddot{\mathbf{a}}_3^{\text{rel}}$$

Ezt beírva az  $\check{\mathbf{f}}_3^p$ -ra rendezett első egyenletbe, kapjuk, hogy:

$$\check{\mathbf{f}}_3^p = \underline{\underline{\mathbf{M}}}_3 \left( \underline{\underline{\mathbf{1}}} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \underline{\underline{\mathbf{N}}}_3^{-1} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3^T \underline{\underline{\mathbf{M}}}_3 \right) \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{23} \ddot{\mathbf{a}}_2 - \left( \underline{\underline{\mathbf{1}}} - \underline{\underline{\mathbf{M}}}_3 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \underline{\underline{\mathbf{N}}}_3^{-1} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3^T \right) \left( \check{\mathbf{f}}_3^{tc} - \underline{\underline{\mathbf{M}}}_3 \ddot{\mathbf{a}}_3^{\text{rel}} \right)$$

Ezt az erőcsavart a  $\mathcal{K}_2$  test kinetikai egyenletébe, azaz (16) első egyenletébe írjuk, amely

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_2 \ddot{\mathbf{a}}_2 = \check{\mathbf{f}}_2^{tc} - \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{23}^T \check{\mathbf{f}}_3^p + \check{\mathbf{f}}_2^p$$

Az így kapott egyenlet alakilag megegyezik a záró  $\mathcal{K}_3$  testre felírttal:

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_2^* \ddot{\mathbf{a}}_2 = \check{\mathbf{f}}_2^{tc*} + \check{\mathbf{f}}_2^p$$



Ahol az új tagok:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{M}}_2^* &= \underline{\underline{M}}_2 + \underline{\underline{B}}_{23}^T \left( \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{M}}_3 \underline{\underline{C}}_3 \underline{\underline{N}}_3^{-1} \underline{\underline{C}}_3^T \right) \underline{\underline{M}}_3 \underline{\underline{B}}_{23} \\ \check{\underline{\underline{f}}}_2^{tc*} &= \check{\underline{\underline{f}}}_2^{tc} + \underline{\underline{B}}_{23}^T \left( \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{M}}_3 \underline{\underline{C}}_3 \underline{\underline{N}}_3^{-1} \underline{\underline{C}}_3^T \right) \left( \check{\underline{\underline{f}}}_3^{tc} - \underline{\underline{M}}_3 \check{\underline{\underline{a}}}_3^{\text{rel}} \right)\end{aligned}$$

Ez az eredmény úgy értelmezhető, mintha a  $\mathcal{K}_3$  tag terhelését és tömegmátrixát a  $\mathcal{K}_2$  tagra vetítenénk. A  $\mathcal{K}_2$  tag módosult egyenletrendszere alakilag megegyezik a  $\mathcal{K}_3$  záró tagéval:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_2^* & -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_2 \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_2^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{\underline{\underline{a}}}_2 \\ \check{\underline{\underline{f}}}_2^p \\ \dot{\underline{\underline{\eta}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{\underline{\underline{f}}}_2^{tc*} \\ -\underline{\underline{B}}_{12} \check{\underline{\underline{a}}}_1 - \check{\underline{\underline{a}}}_2^{\text{rel}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Ugyanezt az elvet használjuk a következő lépésben, amikor a módosított  $\underline{\underline{M}}_2^*$ -t és  $\check{\underline{\underline{f}}}_2^{tc*}$ -t vetítjük a  $\mathcal{K}_1$  tagra:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{M}}_1^* &= \underline{\underline{M}}_1 + \underline{\underline{B}}_{12}^T \left( \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{M}}_2^* \underline{\underline{C}}_2 \underline{\underline{N}}_2^{-1} \underline{\underline{C}}_2^T \right) \underline{\underline{M}}_2^* \underline{\underline{B}}_{12} \\ \check{\underline{\underline{f}}}_1^{tc*} &= \check{\underline{\underline{f}}}_1^{tc} + \underline{\underline{B}}_{12}^T \left( \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{M}}_2^* \underline{\underline{C}}_2 \underline{\underline{N}}_2^{-1} \underline{\underline{C}}_2^T \right) \left( \check{\underline{\underline{f}}}_2^{tc*} - \underline{\underline{M}}_2^* \check{\underline{\underline{a}}}_2^{\text{rel}} \right) \\ \text{ahol} \quad \underline{\underline{N}}_2 &= \underline{\underline{C}}_2^T \underline{\underline{M}}_2^* \underline{\underline{C}}_2\end{aligned}$$

Kapunk egy  $\mathcal{K}_1$  testre redukált egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_1^* & -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_1 \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_1^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\ddot{a}}}_1 \\ \underline{\underline{\check{f}}}_1^p \\ \underline{\underline{\dot{\eta}}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\check{f}}}_1^{tc*} \\ -\underline{\underline{\check{a}}}_1^{\text{rel}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer jobb oldalán immár nem szerepelnek ismeretlenek. A  $\mathcal{K}_3$  testre vonatkozó egyenletek analógiájára megkapjuk a megoldást  $\underline{\underline{\ddot{a}}}_1$ ,  $\underline{\underline{\check{f}}}_1^p$ ,  $\underline{\underline{\dot{\eta}}}_1$  ismeretlenekre:

$$\underline{\underline{\dot{\eta}}}_1 = \underline{\underline{N}}_1^{-1} \underline{\underline{C}}_1^T \left( \underline{\underline{\check{f}}}_1^{tc*} - \underline{\underline{M}}_1^* \underline{\underline{\check{a}}}_1^{\text{rel}} \right) \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{N}}_1 = \underline{\underline{C}}_1^T \underline{\underline{M}}_1^* \underline{\underline{C}}_1$$

$$\underline{\underline{\ddot{a}}}_1 = \underline{\underline{C}}_1 \underline{\underline{\dot{\eta}}}_1 + \underline{\underline{\check{a}}}_1^{\text{rel}} \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{\dot{\eta}}}_1 \text{ az előző képletből számítható}$$

$$\underline{\underline{\check{f}}}_1^p = \underline{\underline{M}}_1^* \underline{\underline{\ddot{a}}}_1 - \underline{\underline{\check{f}}}_1^{tc*} \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{\ddot{a}}}_1 \text{ az előző képletből számítható}$$

Az eddig kiküszöbölt változók egy, a haladási iránynak megfelelő rekurzív számítással számíthatók. Így például a  $\mathcal{K}_2$  tag változói a  $\mathcal{K}_1$  tagra kapott eredmények felhasználásával:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{n}}_2 &= \underline{N}_2^{-1} \underline{C}_2^T \left( \check{\underline{f}}_2^{tc*} - \underline{M}_2^* \left( \underline{B}_{12} \check{\underline{a}}_1 + \check{\underline{a}}_2^{\text{rel}} \right) \right) \\ \check{\underline{a}}_2 &= \underline{B}_{12} \check{\underline{a}}_1 + \underline{C}_2 \dot{\underline{n}}_2 + \check{\underline{a}}_2^{\text{rel}} \\ \check{\underline{f}}_2^p &= \underline{M}_2^* \check{\underline{a}}_2 - \check{\underline{f}}_2^{tc*}\end{aligned}$$

Ehhez hasonlóképpen számíthatók a  $\mathcal{K}_3$  tag  $\check{\underline{a}}_3$ ,  $\check{\underline{f}}_3^p$ ,  $\dot{\underline{n}}_3$  mennyiségei.

## Rekurzív számítási eljárás lépései

Az előbbi példában bemutatott eljárás általánosítható tetszőleges (elágazásokkal is rendelkező) nyílt láncú többtest-rendszerre.

*Feladat:* adott  $t$  időpontban ismert  $\underline{\beta}$  és  $\underline{\eta}$  mennyiségek esetén keressük az  $\underline{\dot{\eta}}_i$  csukló-gyorsulásokat, tagok  $\underline{\dot{a}}_i$  gyorsulásait és a csuklók által kifejtett  $\underline{\dot{f}}_i^p$  erőcsavarokat.

Lépések:

1. A helyzet- és sebességállapot haladási iránynak megfelelő számítása a csuklók explicit kényszereivel:

$$\underline{\dot{r}}_i = \underline{\dot{r}}_i \left( \underline{\dot{r}}_{i-1}, \underline{\beta}_i, t \right) \quad i = 1, \dots, n$$

$$\underline{\dot{v}}_i = \underline{B}_{pi} \underline{\dot{v}}_p + \underline{C}_i \underline{\eta}_i + \underline{\dot{v}}_i^{\text{rel}} \quad i = 1, \dots, n$$

A  $p$  index a  $\mathcal{K}_i$  testet megelőző  $\mathcal{K}_{p(i)}$  tagra utal. Az álló  $\mathcal{K}_0$  állványra érvényes, hogy  $\underline{\dot{r}}_0 = \underline{0}$  és  $\underline{\dot{v}}_i = \underline{0}$ .

2. Az utolsó tag(ok)tól kezdve visszafelé haladva a terhelő erőcsavarok és tömegmátrixok vetítése minden tagnak az őt megelőző tagra:

$$\underline{\underline{M}}_p^* = \underline{\underline{M}}_p + \underline{\underline{B}}_{pi}^T \left( \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{M}}_i^* \underline{\underline{C}}_i \underline{\underline{N}}_i^{-1} \underline{\underline{C}}_i^T \right) \underline{\underline{M}}_i^* \underline{\underline{B}}_{pi}$$

$$\check{\underline{\underline{f}}}_p^{tc*} = \check{\underline{\underline{f}}}_p^{tc} + \underline{\underline{B}}_{pi}^T \left( \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{M}}_i^* \underline{\underline{C}}_i \underline{\underline{N}}_i^{-1} \underline{\underline{C}}_i^T \right) \left( \check{\underline{\underline{f}}}_i^{tc*} - \underline{\underline{M}}_i^* \check{\underline{\underline{a}}}_i^{\text{rel}} \right)$$

ahol  $\underline{\underline{N}}_i = \underline{\underline{C}}_i^T \underline{\underline{M}}_i^* \underline{\underline{C}}_i$

Az  $i$  index  $n$ -től 2-ig fut. Elágazási hely esetén mindegyik, az elágazást követő test erőcsavarját és tömegmátrixát vetíteni kell az elágazási testre.

3. A  $\mathcal{K}_1$  testre vonatkozó

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_1^* & -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_1 \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_1^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{\underline{\underline{a}}}_1 \\ \check{\underline{\underline{f}}}_1^p \\ \dot{\underline{\underline{n}}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{\underline{\underline{f}}}_1^{tc*} \\ -\check{\underline{\underline{a}}}_1^{\text{rel}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}$$

lineáris egyenletrendszer megoldása:

$$\dot{\underline{\underline{n}}}_1 = \underline{\underline{N}}_1^{-1} \underline{\underline{C}}_1^T \left( \check{\underline{\underline{f}}}_1^{tc*} - \underline{\underline{M}}_1^* \check{\underline{\underline{a}}}_1^{\text{rel}} \right) \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{N}}_1 = \underline{\underline{C}}_1^T \underline{\underline{M}}_1^* \underline{\underline{C}}_1$$

$$\check{\underline{\underline{a}}}_1 = \underline{\underline{C}}_1 \dot{\underline{\underline{n}}}_1 + \check{\underline{\underline{a}}}_1^{\text{rel}} \quad \check{\underline{\underline{f}}}_1^p = \underline{\underline{M}}_1^* \check{\underline{\underline{a}}}_1 - \check{\underline{\underline{f}}}_1^{tc*}$$

4. Az eliminált változók kiszámítása a  $\mathcal{K}_2$  testtől kezdődően. Az  $i$  index 2-től  $n$ -ig fut. A számítási képletek:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{n}}_i &= \underline{\underline{N}}_i^{-1} \underline{\underline{C}}_i^T \left( \check{\underline{f}}_i^{tc*} - \underline{\underline{M}}_i^* \left( \underline{\underline{B}}_{pi} \check{\underline{a}}_p + \check{\underline{a}}_i^{\text{rel}} \right) \right) \\ \check{\underline{a}}_i &= \underline{\underline{B}}_{pi} \check{\underline{a}}_p + \underline{\underline{C}}_i \dot{\underline{n}}_i + \check{\underline{a}}_i^{\text{rel}} \\ \check{\underline{f}}_i^p &= \underline{\underline{M}}_i^* \check{\underline{a}}_i - \check{\underline{f}}_i^{tc*}\end{aligned}$$

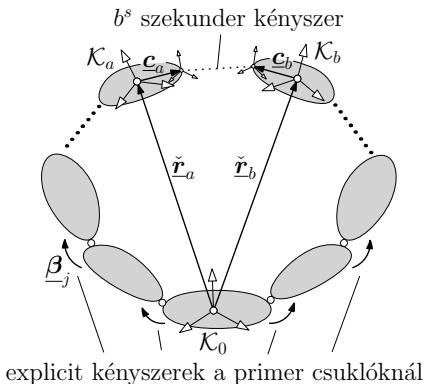
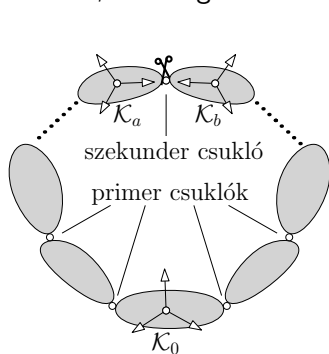
A szakirodalomban leírt tapasztalatok szerint nyílt láncú rendszerek esetén rekurzív formalizmusok kb. 6-10 testtől kezdve kevesebb lebegőpont-számítást igényelnek, mint nem rekurzív formalizmusok.

# Zárt láncú többtest-rendszerek kinematikája

- Míg nyílt láncú rendszereknél a csukló-koordináták egyben a rendszer minimálkoordinátái is, addig zárt láncú rendszereknél a kinematikai hurkok zárási feltételei miatt a csukló-koordináták már egymástól nem függetlenek.
- A hurkok szétvágásával a szekunder (másodlagos) csuklóknál az eredményként kapott elágazásokkal rendelkező nyitott láncok végeire implicit zárási feltételeket fogalmazhatunk meg.
- Fennáll továbbá explicit zárási feltételek megfogalmazásának lehetősége, melyeket felhasználva, megfelelően választott minimálkoordináták segítségével fejezzük ki a csukló-koordinátákat.

# Egyetlen hurok kinematikája - implicit zárási feltételek

Egy többtest-hurkot egy csuklónál elvágva elágazással rendelkező nyílt láncú többtest-rendszerré alakul. A nyílt láncú rendszer csuklói a primer csuklók, az elvágott csukló a szekunder csukló.





A primer csuklókhoz  $f^0$  számú  $\underline{\beta}$  csukló-helyzetkoordináta és  $\underline{\eta}$  csukló-sebesség tartozik:

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \underline{\beta}_1 \\ \vdots \\ \underline{\beta}_{f^0} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\eta} = \begin{bmatrix} \underline{\eta}_1 \\ \vdots \\ \underline{\eta}_{f^0} \end{bmatrix}$$

Ahol  $f^0$  a nyílt lánc szekunder kényszerek nélküli szabadságfoka.

A primer csukló-helyzetkoordinátákra és sebességekre érvényes kinematikai mozgásegyenlet alakja

$$\dot{\underline{\beta}} = \underline{\underline{H}}(\underline{\beta}) \underline{\eta}$$

A primer csukló-koordinátáknak implicit zárási feltételeket kell kielégíteniük.

## Helyzetállapot

A szekunder csukló a  $\mathcal{K}_a$  és  $\mathcal{K}_b$  testek egymáshoz viszonyított helyzetét  $b^s$  számú implicit kényszerfeltételen keresztül korlátozza (6.ea., 5.o.):

$$\underline{\mathbf{g}}^s(\underline{\mathbf{r}}_a, \underline{\mathbf{r}}_b, t) = \underline{\mathbf{0}}$$

Az  $\underline{\mathbf{r}}_a$  és  $\underline{\mathbf{r}}_b$  helyzeteket a nyílt lánc explicit kényszerei segítségével, azaz  $\underline{\beta}$  csukló-helyzetkoordinátákkal is kifejezhetjük (8.ea., 5.o.):

$$\underline{\mathbf{r}}_a = \underline{\mathbf{r}}_a(\underline{\beta}, t) \quad , \quad \underline{\mathbf{r}}_b = \underline{\mathbf{r}}_b(\underline{\beta}, t)$$

Behelyettesítés révén megkapjuk a  $\underline{\beta}$  csukló-helyzetkoordinátákra vonatkozó implicit zárási feltételeket:

$$\underline{\mathbf{g}}^\ell(\underline{\beta}, t) = \underline{\mathbf{0}}$$

## Sebességállapot

A szekunder csukló sebességállapotra vonatkozó alakja a  $\mathcal{K}_a$  és  $\mathcal{K}_b$  testek sebességeinek vonatkozásában (6.ea., 6.o.):

$$\underline{\gamma}^s = \underline{\underline{G}}_a^s \underline{\check{v}}_a + \underline{\underline{G}}_b^s \underline{\check{v}}_b + \underline{\bar{\gamma}}_{ab}^s = \underline{0}$$

Az  $\underline{\check{v}}_a$  és  $\underline{\check{v}}_b$  sebességeket a nyílt lánc explicit kényszerei segítségével is kifejezhetjük (8.ea., 11.o.):

$$\underline{\check{v}}_a = \underline{\underline{J}}_a \underline{\eta} + \underline{\check{v}}_a, \quad \underline{\check{v}}_b = \underline{\underline{J}}_b \underline{\eta} + \underline{\check{v}}_b$$

Behelyettesítve a sebességállapot implicit kényszereibe, megkapjuk a  $\underline{\beta}$  csukló-helyzetkoordinátákra és  $\underline{\eta}$  csukló-sebességekre vonatkozó zárási feltételeket:

$$\underline{\underline{G}}^\ell(\underline{\beta}, t) \underline{\eta} + \underline{\bar{\gamma}}^\ell(\underline{\beta}, t) = \underline{0}$$

Ahol  $\underline{\underline{G}}^\ell$  a zárási feltételek ( $b^s \times f^0$ ) méretű kényszermátrixa:

$$\underline{\underline{G}}^\ell = \underline{\underline{G}}_a^s \underline{\underline{J}}_a + \underline{\underline{G}}_b^s \underline{\underline{J}}_b$$

$\underline{\bar{\gamma}}^\ell$  pedig csak a reonom kényszereknél fellépő  $b^s$  elemű vektor:

$$\underline{\bar{\gamma}}^\ell = \underline{\underline{G}}_a^s \underline{\check{v}}_a + \underline{\underline{G}}_b^s \underline{\check{v}}_b + \underline{\bar{\gamma}}_{ab}^s$$

## Gyorsulásállapot

A sebességállapot zárási feltételeinek idő szerinti deriváltja (6.ea., 7.o.):

$$\underline{\dot{\gamma}}^s = \underline{\underline{G}}_a^s \underline{\ddot{a}}_a + \underline{\underline{G}}_b^s \underline{\ddot{a}}_b + \underline{\bar{\gamma}}_{ab}^s = \underline{0}$$

Ahol az  $\underline{\ddot{a}}_a$  és  $\underline{\ddot{a}}_b$  gyorsulásokat a nyílt lánc explicit kényszerei segítségével is kifejezhetjük (8.ea., 15.o.):

$$\underline{\ddot{a}}_a = \underline{\underline{J}}_a \underline{\dot{\eta}} + \underline{\ddot{a}}_a, \quad \underline{\ddot{a}}_b = \underline{\underline{J}}_b \underline{\dot{\eta}} + \underline{\ddot{a}}_b$$

Behelyettesítés után megkapjuk a gyorsulásállapot implicit zárási feltételeit a  $\underline{\beta}$  csukló-helyzetkoordináták,  $\underline{\eta}$  csukló-sebességek és  $\underline{\eta}$  csukló-gyorsulások vonatkozásában:

$$\underline{\underline{G}}^\ell(\underline{\beta}, t) \underline{\dot{\eta}} + \underline{\bar{\gamma}}^\ell(\underline{\beta}, \underline{\eta}, t) = \underline{0}$$

Ahol  $\underline{\bar{\gamma}}^\ell$  az  $\underline{\dot{\eta}}$  gyorsulásoktól független  $b^s$  elemű vektor:

$$\underline{\bar{\gamma}}^\ell = \underline{\underline{G}}_a^s \underline{\ddot{a}}_a + \underline{\underline{G}}_b^s \underline{\ddot{a}}_b + \underline{\bar{\gamma}}_{ab}^s$$

vagy a sebességállapot zárási feltételének deriválása útján:

$$\underline{\bar{\gamma}}^\ell = \underline{\underline{\dot{G}}}^\ell \underline{\eta} + \underline{\dot{\gamma}}^\ell$$

## Túlhatározottság

Ha a  $(b^s \times f^0)$  méretű  $\underline{\underline{G}}^l$  kényszermátrix rangja  $\text{rank}(\underline{\underline{G}}^l) = b^s$  akkor a zárási feltételek egymástól függetlenek. A rendszer szabadságfokát a Grübler-Kutzbach képletből számíthatjuk.

Ha  $\underline{\underline{G}}^l$  kényszermátrix rangja csökken, azaz  $\text{rank}(\underline{\underline{G}}^l) < b^s$ , akkor

$$b^{sr} = b^s - \text{rank}(\underline{\underline{G}}^l)$$

számú redundáns zárófeltételünk van. Ilyenkor  $\underline{\underline{G}}^l$  mátrix sorai egymástól nem függetlenek.

A rendszer szabadságfoka a Grübler-Kutzbach képlet módosításával:

$$f = \sum_{i=1}^{n_c} f_i - 6n_h + b^{sr}$$

Ha a rang csökkenése globálisan, a rendszer minden helyzetében fennáll, akkor a rendszer *túlhatározott*. Mozgatható  $f$  szabadságfokkal. A  $b^{sr}$  redundáns zárási feltétel miatt viszont statikailag határozatlan (a kényszererők merevtest modellel nem számíthatók ki).

## Implicit zárési feltételek szingularitása

Amennyiben a  $\underline{\underline{G}}^\ell$  kényszermátrix rangjának csökkenése csak lokálisan, a rendszer bizonyos helyzeteiben tapasztalható, akkor a *zárési feltételek szingularitása* tapasztalható.

# Egyetlen hurok kinematikája - explicit zárási feltételek

## Helyzetállapot

A  $b^s$  számú implicit zárási feltétel segítségével  $b^s$  számú  $\underline{\beta}^d$  csukló-koordináta kifejezhető a maradék  $\beta^i$  csuklókoordináta függvényében.

A  $\underline{\beta}$  vektor ennek megfelelően úgy rendezhető, hogy

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \underline{\beta}^i \\ \underline{\beta}^d \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} f = f^0 - b^s & \text{független csuklókoordináta (independent)} \\ b^s & \text{függő csuklókoordináta (dependent)} \end{array}$$

A független csukló-koordináták száma a hurok szabadságfoka, így a független csuklókoordináták megegyeznek a minimálkoordinátákkal:

$$\underline{q} = \underline{\beta}^i$$

Az implicit zárási feltételek a felosztott csukló-koordinátákkal együtt

$$\underline{g}^l \left( \underline{\beta}^i, \underline{\beta}^d, t \right) = \underline{0} \quad (19)$$

definiálják a helyzetállapot explicit zárási feltételeit:

$$\begin{bmatrix} \underline{\beta}^i \\ \underline{\beta}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{\beta}^d(\underline{q}, t) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{értelmezés} \\ \text{a (19) megoldása } \underline{\beta}^d\text{-re} \end{array}$$

Azaz

$$\underline{\beta} = \underline{\beta}(\underline{q}, t)$$

- $\underline{\beta}^d$  kiszámítása (19)-ből egy nemlineáris egyenletrendszer megoldását jelenti (általánosságban numerikus módszerrel).
- A függő csukló-koordináták lehetőleg kis számúak legyenek. Ennek érdekében a vágást célszerűen egy kevés zárási feltételt adó szekunder csuklónál végezzük.

### Sebességállapot

Az  $\underline{\eta}$  csukló-sebességeket is felosztjuk függő és független koordinátákra:

$$\underline{\eta} = \begin{bmatrix} \underline{\eta}^i \\ \underline{\eta}^d \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} f = f^0 - b^s & \text{független csuklósebesség} \\ b^s & \text{függő csuklósebesség} \end{array}$$

A független csukló-sebességek egyben minimálsebességek is:  $\underline{s} = \underline{\eta}^i$

A sebességállapot explicit zárási feltételei megkapjuk, ha az implicit zárási feltételekben a felosztott csukló-sebességeket használjuk:

$$\underline{\underline{G}}^\ell \underline{\eta} + \underline{\bar{\gamma}}^\ell = \underline{0} : \quad \left[ \underline{\underline{G}}^{\ell i} \quad \underline{\underline{G}}^{\ell d} \right] \begin{bmatrix} \underline{\eta}^i \\ \underline{\eta}^d \end{bmatrix} + \underline{\bar{\gamma}}^\ell = \underline{0}$$



Az  $\underline{\eta}^d$  kifejezésével az utóbbi egyenletből megkapjuk a sebességállapot explicit zárási feltételeit:

$$\begin{bmatrix} \underline{\eta}^i \\ \underline{\eta}^d \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} \\ - \left( \underline{\underline{G}}^{\ell d} \right)^{-1} \underline{\underline{G}}^{li} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{J}}^\ell(\underline{\underline{q}}, t)} \underline{\underline{s}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ - \left( \underline{\underline{G}}^{\ell d} \right)^{-1} \underline{\underline{\gamma}}^l \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\bar{\eta}}}(\underline{\underline{q}}, t)}$$

azaz

$$\underline{\eta} = \underline{\underline{J}}^\ell(\underline{\underline{q}}, t) \underline{\underline{s}} + \underline{\underline{\bar{\eta}}}(\underline{\underline{q}}, t)$$

ahol  $\underline{\underline{J}}^\ell$  a zárási feltételek Jacobi-mátrixa,  $\underline{\underline{\bar{\eta}}}$  pedig  $\underline{\underline{s}}$ -től nem függő, csak reonom csuklóknál fellépő vektor.

Az explicit zárási feltételek tetszőleges  $\underline{\underline{s}}$  értékek mellett kielégítik az implicit zárási feltételeket. Érvényes a következő ortogonalitási összefüggés:

$$\underline{\underline{G}}^\ell \underline{\underline{J}}^\ell = \underline{\underline{0}}$$

## Explicit zárési feltételek szingularitása

Az  $\underline{\eta}^d$  kifejtése csak akkor lehetséges, ha a  $(b^s \times b^s)$  méretű  $\underline{\underline{G}}^{\ell d}$  reguláris.

Amennyiben  $\underline{\underline{G}}^{\ell d}$  rangja  $\text{rank}(\underline{\underline{G}}^{\ell d}) = b^s$ , akkor mindig lehet  $\underline{\eta}^i$ -t úgy választani, hogy ez teljesüljön.

Ha a mozgásegyenlet megoldása során  $\underline{\underline{G}}^{\ell d}$  szingulárisává válik, akkor úgy kell új  $\underline{s}$  független csukló-sebességeket választani, hogy  $\underline{\underline{G}}^{\ell d}$  reguláris legyen. Általában nem írható le egy rendszer teljes mozgási tartománya egyféle  $\underline{s}$  definiálásával.

## Kinematikai mozgásegyenletek

A  $\dot{\underline{\beta}} = \underline{\underline{H}}(\underline{\beta}) \underline{\eta}$  mozgásegyenletben, a  $\underline{\beta}$  és  $\underline{\eta}$  mennyiségek felosztását figyelembe véve, a  $\underline{\underline{H}}$  mátrixot is felosztjuk. Így a mozgásegyenlet:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{\beta}}^i \\ \dot{\underline{\beta}}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{H}}^{ii} & \underline{\underline{H}}^{id} \\ \underline{\underline{H}}^{di} & \underline{\underline{H}}^{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\eta}^i \\ \underline{\eta}^d \end{bmatrix}$$

Az explicit zárési feltételeket figyelembe véve a  $\underline{q} = \underline{\beta}^i$  minimálkoordinátákra és  $\underline{s} = \underline{\eta}^i$  minimálsebességekre vonatkozó mozgásegyenlet:

$$\dot{\underline{q}} = \underline{\underline{H}}(\underline{q}, t) \underline{s} + \underline{\bar{h}}(\underline{q}, t)$$

ahol

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{H}}^{ii} & \underline{\underline{H}}^{id} \end{bmatrix} \underline{\underline{J}}^I = \underline{\underline{H}}^{ii} - \underline{\underline{H}}^{id} \left( \underline{\underline{G}}^{\ell d} \right)^{-1} \underline{\underline{G}}^{\ell i}$$

és a reonom csuklóknál fellépő

$$\underline{\bar{h}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{H}}^{ii} & \underline{\underline{H}}^{id} \end{bmatrix} \underline{\bar{\eta}} = -\underline{\underline{H}}^{id} \left( \underline{\underline{G}}^{\ell d} \right)^{-1} \underline{\bar{\gamma}}^{\ell}$$

Forgó csuklók és csúszkák esetén  $\dot{\underline{q}} = \underline{s}$ .

## Gyorsulásállapot

Az  $\dot{\underline{\eta}}$  csukló-gyorsulásokat a csukló-sebességeknek megfelelően felosztjuk független  $\dot{\underline{\eta}}^i$  és függő  $\dot{\underline{\eta}}^d$  csukló-gyorsulásokra az implicit zárási feltételekben:

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}^\ell \dot{\underline{\eta}} + \bar{\underline{\underline{\gamma}}}^\ell = \underline{\underline{\mathbf{0}}} : \quad \left[ \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{\ell i} \quad \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{\ell d} \right] \begin{bmatrix} \dot{\underline{\eta}}^i \\ \dot{\underline{\eta}}^d \end{bmatrix} + \bar{\underline{\underline{\gamma}}}^\ell = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Az  $\dot{\underline{\eta}}^d$  kifejezésével megkapjuk a gyorsulásállapot explicit zárási feltételeit:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{\eta}}^i \\ \dot{\underline{\eta}}^d \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{1}}} \\ - \left( \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{\ell d} \right)^{-1} \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{\ell i} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\mathbf{J}}}^\ell(\underline{\underline{\mathbf{q}}}, t)} \dot{\underline{\underline{\mathbf{s}}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ - \left( \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{\ell d} \right)^{-1} \bar{\underline{\underline{\gamma}}}^\ell \end{bmatrix}}_{\bar{\underline{\underline{\eta}}}(\underline{\underline{\mathbf{q}}}, \underline{\underline{\mathbf{s}}}, t)}$$

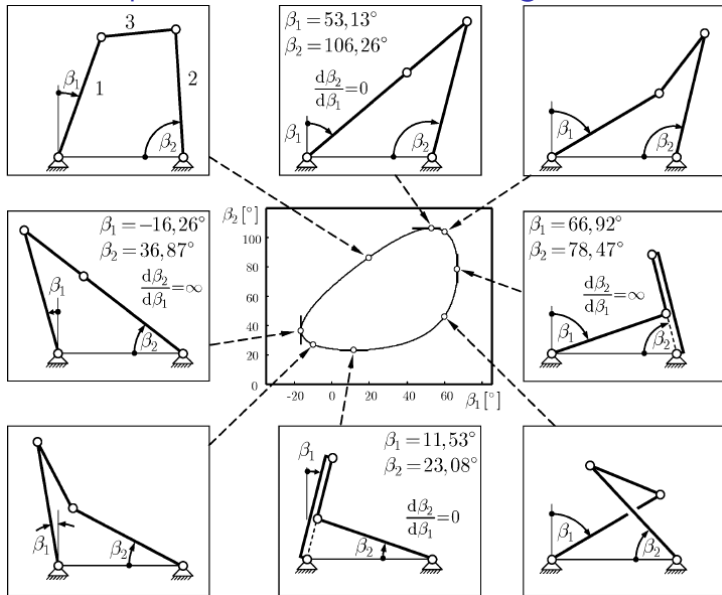
azaz

$$\dot{\underline{\eta}} = \underline{\underline{\mathbf{J}}}^\ell(\underline{\underline{\mathbf{q}}}, t) \dot{\underline{\underline{\mathbf{s}}}} + \bar{\underline{\underline{\eta}}}(\underline{\underline{\mathbf{q}}}, \underline{\underline{\mathbf{s}}}, t)$$

Az  $\bar{\underline{\underline{\eta}}}$  tagra a sebességállapot zárási feltételének deriválásával is kapunk egy összefüggést:

$$\bar{\underline{\underline{\eta}}} = \underline{\underline{\mathbf{J}}}^\ell \underline{\underline{\mathbf{s}}} + \dot{\underline{\underline{\eta}}}$$

# Példa explicit zárási feltételek szingularitására



# Példa implicit zárási feltételek szingularitására

