

# Több-test dinamikai szimulációk

## 7. előadás

Végeselem-módszer alkalmazása rugalmas több-test rendszerekre  
(folytatás),  
Numerikus módszerek

## Rugalmas test mozgási energiája

A test mozgási energiája az egyes elemek mozgási energiáinak összege:

$$E^i = \sum_{j=1}^{n_e} E^{ij}$$

ahol  $n_e$  az elemek száma. Behelyettesítve az egy elemre érvényes

$E^{ij} = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^i{}^T \underline{\underline{M}}^{ij} \underline{\dot{q}}^i$  összefüggést, írhatjuk, hogy

$$E^i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\dot{q}}^i{}^T \underline{\underline{M}}^{ij} \underline{\dot{q}}^i = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^i{}^T \left[ \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{M}}^{ij} \right] \underline{\dot{q}}^i = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^i{}^T \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{M}}^i \underline{\dot{q}}^i$$

ahol  $\underline{\underline{M}}^i$  az  $i$ -ik test tömegmátrixa:

$$\underline{\underline{M}}^i = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{M}}^i = \begin{bmatrix} \underline{\underline{m}}_{TT}^i & \underline{\underline{m}}_{TR}^i & \underline{\underline{m}}_{Tf}^i \\ \text{szimm.} & \underline{\underline{m}}_{RR}^i & \underline{\underline{m}}_{Rf}^i \\ & & \underline{\underline{m}}_{ff}^i \end{bmatrix}$$

Az egyes almatríxokat is összegzéssel kapjuk meg.

Az  $\underline{\underline{m}}_{TT}^i$  almatríx konstans:

$$\underline{\underline{m}}_{TT}^i = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{m}}_{TT}^{ij} = \begin{bmatrix} m^i & 0 & 0 \\ 0 & m^i & 0 \\ 0 & 0 & m^i \end{bmatrix} \quad \text{ahol} \quad m^i = \sum_{j=1}^{n_e} m^{ij}$$

$m^i$  a test össztömege.

Az  $\underline{\underline{m}}_{TR}^i$  mátrixot szintén összegzés útján kapjuk meg:

$$\underline{\underline{m}}_{TR}^i = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{m}}_{TR}^{ij} = -{}^i\underline{\underline{T}} \left[ \sum_{j=1}^{n_e} \int_{V^{ij}} \rho^{ij} {}^i\underline{\underline{u}}^{ij} dV^{ij} \right] {}^i\underline{\underline{H}}^{-1}$$

Az integrál kiszámításához a konstans  ${}^i\underline{\underline{S}}_f^{ij}$  tehetetlenségi alak-integrálok meghatározása szükséges. Az egy elemre kiszámított mátrixokat egy, a testre vonatkozó mátrixban egyesíthetjük:

$${}^i\underline{\underline{S}}_f^i = \sum_{j=1}^{n_e} {}^i\underline{\underline{S}}_f^{ij}$$

Ugyanez a mátrix szükségeltetik az  $\underline{\underline{m}}_{Tf}^i$  almátrix számításához is. Figyelembe véve az összegzést, írhatjuk, hogy

$$\underline{\underline{m}}_{Tf}^i = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{m}}_{Tf}^{ij} = {}^i\mathbf{T} \sum_{j=1}^{n_e} {}^i\mathbf{S}_f^{ij} \mathbf{B}_2^i = {}^i\mathbf{T} {}^i\mathbf{S}_f^i \mathbf{B}_2^i$$

A forgásokkal kapcsolatos  $\underline{\underline{m}}_{RR}^i$  almátrix a következőképp írható:

$$\underline{\underline{m}}_{RR}^i = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{m}}_{RR}^{ij} = {}^i\mathbf{H}^{-T} \left[ \sum_{j=1}^{n_e} {}^i\mathbf{\Theta}^{ij} \right] {}^i\mathbf{H}^{-1} = {}^i\mathbf{H}^{-T} {}^i\mathbf{\Theta}^i {}^i\mathbf{H}^{-1}$$

ahol  ${}^i\mathbf{\Theta}^i$  a rugalmas test tehetetlenségi tenzora a referencia KR-ben. Igazolható, hogy  ${}^i\mathbf{\Theta}^i$  tehetetlenségi tenzor számításához az alábbi tehetetlenségi alak-integrálok összegének kiértékelése szükséges:

$$\underline{\underline{S}}_{kl}^i = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{S}}_{kl}^{ij}, \quad k, l = x, y, z$$

Hasonlóan az  $\underline{\underline{m}}_{Rf}^i$  mátrix az alábbiak szerint adódik:

$$\underline{\underline{m}}_{Rf}^i = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{m}}_{Rf}^{ij} = {}^i \underline{\underline{H}}^{-T} \begin{bmatrix} \underline{q}_n^i T \tilde{\underline{\underline{N}}}_{23}^i \\ \underline{q}_n^i T \tilde{\underline{\underline{N}}}_{31}^i \\ \underline{q}_n^i T \tilde{\underline{\underline{N}}}_{12}^i \end{bmatrix} \underline{\underline{B}}_2^i$$

ahol

$$\tilde{\underline{\underline{N}}}_{12}^i = \sum_{j=1}^{n_e} \tilde{\underline{\underline{N}}}_{12}^{ij}, \quad \tilde{\underline{\underline{N}}}_{23}^i = \sum_{j=1}^{n_e} \tilde{\underline{\underline{N}}}_{23}^{ij}, \quad \tilde{\underline{\underline{N}}}_{31}^i = \sum_{j=1}^{n_e} \tilde{\underline{\underline{N}}}_{31}^{ij}$$

$\tilde{\underline{\underline{N}}}_{kl}^i$  számításához is ugyanazon  $\underline{\underline{S}}_{kl}^i$  tehetetlenségi alak-integrálokra van szükség.

Végeztül az  $\underline{\underline{m}}_{ff}^i$  almátrix is összegzéssel felírható alábbi módon:

$$\underline{\underline{m}}_{ff}^i = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{m}}_{ff}^{ij} = \underline{\underline{B}}_2^i T \underline{\underline{S}}_{ff}^i \underline{\underline{B}}_2^i \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{S}}_{ff}^i = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{S}}_{ff}^{ij}$$

Összehasonlítva a Ritz-módszerrel a végeselemes formalizmus esetén kevesebb tehetetlenségi alak-integrált szükséges kiszámítani (térben hetet).

## Általánosított rugalmas erők

Lineáris izotrop anyagmodellt használunk. Az  $i$ -ik test  $j$ -ik elemére vonatkozóan a rugalmas erők virtuális munkája

$$\delta W_b^{ij} = - \int_{(V)} \underline{\sigma}^{ij T} \delta \underline{\epsilon}^{ij} dV^{ij}$$

ahol  $\underline{\sigma}^{ij}$  és  $\underline{\epsilon}^{ij}$  a feszültségkoordináták ill. nyúláskoordináták vektora. Az anyagegyenlet alakja a következő:

$$\underline{\sigma}^{ij} = \underline{\underline{C}}^{ij} \underline{\epsilon}^{ij}$$

A fajlagos nyúlásokat a  $\underline{\underline{D}}$  differenciál-operátor mátrix segítségével írjuk fel:

$$\underline{\epsilon}^{ij} = \underline{\underline{D}}^{ij} {}^i \underline{u}_f^{ij}$$

Az  ${}^i \underline{u}_f^{ij}$  elmozdulásmezőt a csomóponti koordinátákból és az alakfüggvényekből származtatjuk:

$${}^i \underline{u}_f^{ij} = \underline{\underline{N}}^{ij} \underline{\underline{B}}_2^i \underline{q}_f^i = \underline{\underline{\bar{N}}}^{ij} \underline{q}_f^i \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{\bar{N}}}^{ij} = \underline{\underline{N}}^{ij} \underline{\underline{B}}_2^i$$

Behelyettesítve a fajlagos nyúlásokat adó képletbe

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{ij} = \underline{\underline{D}}^{ij} \underline{\underline{N}}^{ij} \underline{q}_f^i$$

Ez utóbbi és az anyagegyenletet behelyettesítve a virtuális munkát adó összefüggésbe, kapjuk, hogy

$$\delta W_b^{ij} = - \underline{q}_f^i{}^T \underline{\underline{K}}_{ff}^{ij} \delta \underline{q}_f^i$$

ahol  $\underline{\underline{K}}_{ff}^{ij}$  az elem merevségi mátrixa, mely értelmezés szerint

$$\underline{\underline{K}}_{ff}^{ij} = \int_{(V)} \left( \underline{\underline{D}}^{ij} \underline{\underline{N}}^{ij} \right)^T \underline{\underline{C}}^{ij} \left( \underline{\underline{D}}^{ij} \underline{\underline{N}}^{ij} \right) dV^{ij}$$

Az  $i$ -ik test rugalmas erőinek virtuális munkája

$$\delta W_b^i = \sum_{j=1}^{n_e} \delta W_b^{ij}$$

Az összeillesztett

$$\underline{\underline{K}}_{ff}^i = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{K}}_{ff}^{ij}$$

merevségi mátrixszal a virtuális munka

$$\delta W_b^i = - \underline{q}_f^{iT} \underline{\underline{K}}_{ff}^i \delta \underline{q}_f^i$$

Az általános koordináták partícionálását felhasználva úgy is írható, hogy

$$\delta W_b^i = - \begin{bmatrix} \underline{r}^i{}^T & \underline{\theta}^i{}^T & \underline{q}_f^{iT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{ff}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \underline{r}^i \\ \delta \underline{\theta}^i \\ \delta \underline{q}_f^i \end{bmatrix}$$

azaz

$$\delta W_b^i = - \underline{q}^i{}^T \underline{\underline{K}}^i \delta \underline{q}^i \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{K}}^i = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{ff}^i \end{bmatrix}$$



## Koordináta redukció

Nagyméretű mechanikai problémák vége-selems leírásához nagyszámú csomóponti koordinátát kell használni. A számítási idő csökkentése végett a csomóponti koordináták számát csökkentetni kell.

Többféle technika is létezik, melyek hasonló eljárást követnek. Ezek közül az alszerkezettechnika kerül bemutatásra, de megemlítjük még a kondenzációs technikákat is, mint lehetséges eljárást.

Az eljárás során a csomóponti koordinátákat egy transzformációval modális koordinátákká alakítjuk, melynek kisebb a dimenziója. A módszer azon alapszik, hogy a rugalmas test sajátérték-problémáját egyszer oldjuk meg. Mint azt korábban már láthattuk, az  $i$ -ik test mozgásegyenlete mátrixos alakban a következő:

$$\underline{\underline{M}}^i \ddot{\underline{q}}^i + \underline{\underline{K}}^i \underline{q}^i = \underline{\underline{Q}}_t^i + \underline{\underline{Q}}_v^i - \underline{\underline{G}}^{iT} \underline{\lambda}$$

Miután partícionáljuk az általános koordinátákat referencia- és rugalmas koordináták szerint, azaz

$$\underline{q}^i = \begin{bmatrix} \underline{q}_r^i \\ \underline{q}_f^i \end{bmatrix}$$

A mozgásegyenlet eképp partícionálva:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{m}}_{rr}^i & \underline{\underline{m}}_{rf}^i \\ \underline{\underline{m}}_{fr}^i & \underline{\underline{m}}_{ff}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\ddot{q}}}_r^i \\ \underline{\underline{\ddot{q}}}_f^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{ff}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_r^i \\ \underline{\underline{q}}_f^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{\underline{Q}}_t^i)_r \\ (\underline{\underline{Q}}_t^i)_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\underline{\underline{Q}}_v^i)_r \\ (\underline{\underline{Q}}_v^i)_f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \underline{\underline{g}}}{\partial \underline{\underline{q}}_r^i} \right)^T \\ \left( \frac{\partial \underline{\underline{g}}}{\partial \underline{\underline{q}}_f^i} \right)^T \end{bmatrix} \underline{\underline{\lambda}} \quad (1)$$

Ha feltételezzük, hogy az  $i$ -ik test szabadon rezeg a referencia konfigurációban, akkor az (1) egyenletből következik, hogy

$$\underline{\underline{m}}_{ff}^i \underline{\underline{\ddot{q}}}_f^i + \underline{\underline{K}}_{ff}^i \underline{\underline{q}}_f^i = \underline{\underline{0}} \quad (2)$$

Amennyiben alkalmazunk referencia-feltételeket  $\underline{\underline{K}}_{ff}^i$  pozitív definit. A (2) egyenlet megoldására használt próbafüggvény legyen

$$\underline{\underline{q}}_f^i = \underline{\underline{a}}^i e^{j\omega t}$$

ahol  $j = \sqrt{-1}$  az imaginárius egység. Behelyettesítve a (2) egyenletbe, kapjuk, hogy

$$-\omega^2 \underline{\underline{m}}_{ff}^i \underline{\underline{a}}^i + \underline{\underline{K}}_{ff}^i \underline{\underline{a}}^i = \underline{\underline{0}}$$

Ez utóbbi egyenlet átrendezve

$$\underline{\underline{K}}_{ff}^i \underline{a}^i = \omega^2 \underline{\underline{m}}_{ff}^i \underline{a}^i \quad (3)$$

ami az általánosított sajátérték probléma, amelyet megoldva kapjuk az  $\omega_k^2$  sajátértékeket és a hozzájuk tartozó  $\underline{a}_k^i$  sajátvektorokat ( $k = 1, \dots, n_f$ ). A sajátvektorok a normál móduszok vagy sajátalakok (lengésképek).

Csökkentett rendű modellt akkor kapunk, ha csak  $n_m$  sajátalakot számítunk ki:  $n_m < n_f$ . A fizikai csomóponti koordinátákból a modális rugalmas koordinátákba történő transzformáció az alábbi alakban írható le:

$$\underline{q}_f^i = \underline{\underline{B}}_m^i \underline{p}_f^i \quad (4)$$

ahol  $\underline{\underline{B}}_m^i$  a modális transzformációs mátrix, amelynek oszlopaiban az alacsony frekvenciájú  $n_m$  számú sajátalakok vannak. A  $\underline{p}_f^i$  pedig a modális koordináták vektora. Az  $n_m$  számú sajátalakot úgy kell megválasztani, hogy az alakváltozott alakra jó közelítést adjanak.

A (4) egyenletet használva, a referencia és rugalmas általános koordináták a referencia és modális koordináták függvényében felírhatók az alábbi szerint

$$\begin{bmatrix} \underline{q}_r^i \\ \underline{q}_f^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\bar{B}}_m^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{p}_r^i \\ \underline{p}_f^i \end{bmatrix} \quad (5)$$

azaz tömören

$$\underline{q}^i = \underline{B}_m^i \underline{p}^i$$

ahol

$$\underline{p}^i = \begin{bmatrix} \underline{p}_r^i \\ \underline{p}_f^i \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{B}_m^i = \begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\bar{B}}_m^i \end{bmatrix}$$

A mozgásegyenleteket a referencia- és rugalmas modális koordináták függvényében magkapjuk, ha az (1) mozgásegyenletet balról megszorozzuk  $\underline{B}_m^{iT}$ -vel. Ilyenkor az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \underline{\bar{m}}_{rr}^i & \underline{\bar{m}}_{rf}^i \\ \underline{\bar{m}}_{fr}^i & \underline{\bar{m}}_{ff}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\ddot{p}}_r^i \\ \underline{\ddot{p}}_f^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\bar{K}}_{ff}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{p}_r^i \\ \underline{p}_f^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \underline{\bar{Q}}_t^i \right)_r \\ \left( \underline{\bar{Q}}_t^i \right)_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left( \underline{\bar{Q}}_v^i \right)_r \\ \left( \underline{\bar{Q}}_v^i \right)_f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{p}_r^i} \right)^T \\ \left( \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{p}_f^i} \right)^T \end{bmatrix} \underline{\lambda}$$

## Ahol

$$\underline{\bar{m}}_{rr}^i = \underline{m}_{rr}^i$$

$$\underline{\bar{m}}_{ff}^i = \underline{\bar{B}}_m^i{}^T \underline{m}_{ff}^i \underline{\bar{B}}_m^i$$

$$(\underline{\bar{Q}}_t^i)_r = (\underline{Q}_t^i)_r$$

$$(\underline{\bar{Q}}_v^i)_r = (\underline{Q}_v^i)_r$$

$$\underline{\bar{m}}_{rf}^i = \underline{\bar{m}}_{fr}^i{}^T = \underline{m}_{rf}^i \underline{\bar{B}}_m^i$$

$$\underline{\bar{K}}_{ff}^i = \underline{\bar{B}}_m^i{}^T \underline{K}_{ff}^i \underline{\bar{B}}_m^i$$

$$(\underline{\bar{Q}}_t^i)_f = \underline{\bar{B}}_m^i{}^T (\underline{Q}_t^i)_f$$

$$(\underline{\bar{Q}}_v^i)_f = \underline{\bar{B}}_m^i{}^T (\underline{Q}_v^i)_f$$

a  $\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{p}_r^i}$  és  $\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{p}_f^i}$  Jacobi mátrixokat a láncszabály szerint állítjuk elő:

$$\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{p}_r^i} = \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{q}_r^i} \frac{\partial \underline{q}_r^i}{\partial \underline{p}_r^i} = \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{q}_r^i} \underline{B}_m^i$$

azaz

$$\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{p}_r^i} = \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{q}_r^i} \quad \text{és} \quad \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{p}_f^i} = \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{q}_f^i} \underline{\bar{B}}_m^i$$

Megjegyzés: számítógépi implementáció során ez a transzformáció megegyezik azzal, hogy a tehetetlenségi alak-integrálokat a modális alakba transzformáljuk. Ilyenkor minden tehetetlenségi erő automatikusan a modális koordinátákkal fejeződik ki. Ez egyben azt is jelenti, hogy a dinamikai egyenletek struktúrája nem változik. A modális transzformációjánál használt  $\bar{\underline{\underline{B}}}^i_m$  mátrix segítségével a tehetlenségi alak-integrálok az alábbiak szerint transzformálódnak:

$$\begin{aligned} \left( \underline{\underline{S}}^i_f \right)_m &= \underline{\underline{S}}^i_f \bar{\underline{\underline{B}}}^i_m \\ \left( \underline{\underline{S}}^i_{kl} \right)_m &= \bar{\underline{\underline{B}}}^i_m{}^T \underline{\underline{S}}^i_{kl} \bar{\underline{\underline{B}}}^i_m, \quad k, l = x, y, z \end{aligned}$$

## Numerikus módszerek

A következőkben a több-test rendszerek mozgását leíró közösleges differenciálegyenletek vagy differenciál-algebrai egyenletek numerikus megoldásáról adunk rövid ismertetőt.

### Közösleges differenciálegyenletek

Közösleges differenciálegyenletek numerikus integrációját megvalósító általános eljárások elsőrendű az  $\underline{x}$  állapotváltozóban nemlineáris differenciálegyenletek rendszeréből indul ki az  $\underline{x}_0$  kezdeti feltételekkel, azaz

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}, t) , \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad \text{kezdeti feltételekkel}$$

A kezdetiérték-probléma numerikus megoldása során diszkrét  $t_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  időpontokban kiszámítjuk az állapotváltozó  $\underline{x}_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  értékeit, melyeknek minél lözelebb kell lenniük az egzakt  $\underline{x}(t)$  megoldáshoz, azaz  $\underline{x}_k \approx \underline{x}(t_k)$ . Az időpontok egymáshoz mért  $h_k = t_k - t_{k-1}$  távolsága az időlépés.

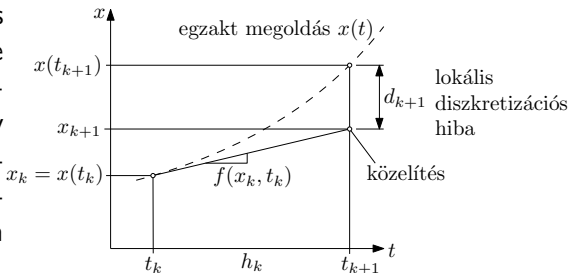
A feladat abból áll, hogy az  $(t_k, \underline{x}_k)$  értékekből kiindulva meghatározzuk a következő időpontbeli  $(t_{k+1}, \underline{x}_{k+1})$  értékeket. Kétféle eljárást különböztetünk meg:

- egylépéses eljárás:  $(t_{k+1}, \underline{x}_{k+1})$  számításához csak  $(t_k, \underline{x}_k)$  értéket használjuk
- töblépéses eljárás:  $(t_{k+1}, \underline{x}_{k+1})$  számításához korábbi  $(t_{k-1}, \underline{x}_{k-1})$ ,  $(t_{k-2}, \underline{x}_{k-2})$ , ... értékeket is felhasználunk

A legegyszerűbb egylépéses eljárás az explicit Euler-féle módszer, amelynél az ismeretlen  $\underline{x}$  állapotváltozó egy adott  $[t_k, t_{k+1}]$  időintervallumon a  $t_k$  időponthoz tartozó meredekséggel lineárisan közelítünk.

Állandó időlépés esetén a közelítő értékek számsora

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + h \underline{f}(\underline{x}_k, t_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$





Amennyiben  $\underline{x}_k$  az egzakt megoldáshoz tartozik, akkor egy lépés után fellépő lokális diszkretizációs hiba

$$d_{k+1} = |\underline{x}(t_{k+1}) - \underline{x}_{k+1}|$$

$N$  lépés után felhalmozódó globális hiba  $D(t_N)$  nagyságrendje ezen lokális diszkretizációs hibák összegéből becsülhető. Az eljárás hibájának  $p$  rendűsége:

$$D(t_N) = \mathcal{O}(h^p)$$

Ennek jelentése: ha adott  $h$  lépésköz pl. 2-szer kisebbre választjuk, akkor a globális hiba  $2^p$ -szer lesz kisebb. Az explicit Euler-féle módszer rendje  $p = 1$ .

Következésképp a  $h$  időlépés csökkentésével csökkenthető a globális hiba nagysága. Ezáltal viszont a számítási igény növekszik.

A globális hiba csökkentésére irányuló másik lehetőség a magasabb rendű eljárás választása.

Egy elterjedt egylépéses eljárás a negyedrendű Runge-Kutta-módszer:

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \frac{h}{6} \left( \underline{y}_1 + 2\underline{y}_2 + 2\underline{y}_3 + \underline{y}_4 \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ahol

$$\begin{aligned} \underline{y}_1 &= \underline{f}(\underline{x}_k, t_k) & \underline{y}_2 &= \underline{f}\left(\underline{x}_k + \frac{h}{2}\underline{y}_1, t_k + \frac{h}{2}\right) \\ \underline{y}_3 &= \underline{f}\left(\underline{x}_k + \frac{h}{2}\underline{y}_2, t_k + \frac{h}{2}\right) & \underline{y}_4 &= \underline{f}(\underline{x}_k + h\underline{y}_3, t_k + h) \end{aligned}$$

Egy időlépésen belül ugyan több a számítási igénye, de a nagyobb pontosság miatt lényegesen nagyobb időlépéseket használhatunk, ezért a teljes időre nézve kevesebb a számítási igénye.

Többlépéses eljárások akkor hatékonyak, ha  $\underline{f}(\underline{x}, t)$  függvény kellően folytonos.

Merev rendszerek esetén pedig implicit integrációs eljárásokat célszerű alkalmazni.

## Differenciál-algebrai egyenletek

A több-test rendszer mozgásegyenletét adó

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}} \underline{q} + \underline{\underline{G}}^T \underline{\lambda} = \underline{Q}_t + \underline{Q}_v$$

és a testek közötti kapcsolatokat leíró

$$\underline{g}(\underline{q}, t) = \underline{0}$$

kényszeregyenletek differenciál-algebrai egyenletrendszert alkotnak.

A kényszeregyenletek második idő szerinti deriváltja

$$\underline{\underline{G}} \ddot{\underline{q}} = \ddot{\underline{\gamma}}$$

és a mozgásegyenlet együtt a

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} & \underline{\underline{G}}^T \\ \underline{\underline{G}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{q}} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Q}_t + \underline{Q}_v - \underline{\underline{K}} \underline{q} \\ \ddot{\underline{\gamma}} \end{bmatrix} \quad (6)$$

lineáris egyenletrendszert alkotja.

Ezen lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk meg az állapotváltozót megadó  $\underline{f}(\underline{x}, t)$  függvényt (azaz  $\underline{\ddot{q}}$ -t). Az egyenletrendszerben a kényszerek gyorsulásállapotra vonatkozóan szerepelnek, de sebesség- és helyzetállapotra vonatkozóan nem.

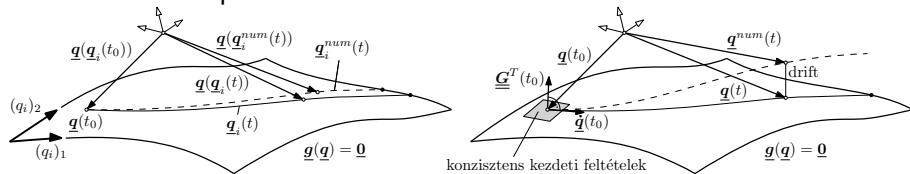
Ezért szükséges olyan kezdeti feltételeket megválasztani, amelyek a kényszerfeltételeket helyzet- és sebességállapotra vonatkozóan is kielégítik:

$$\begin{aligned}\underline{g}(\underline{q}_0, t_0) &= \underline{0} \\ \underline{G}(\underline{q}_0, t_0) \underline{\dot{q}}_0 &= \underline{\bar{\gamma}}(\underline{q}_0, t_0)\end{aligned}$$

A közöséges differenciálegyenletek minimálkoordinátákban és függő koordinátákban számolt numerikus megoldása között egy alapvető különbség van a diszkretizációs hiba hatásában.

A  $\underline{q}_i$  minimálkoordináták használata esetén numerikus hibák miatt, az abból számított  $\underline{q} = \underline{q}(\underline{q}_i)$  általános koordináták vektorában szintén hiba lép fel. Viszont, mivel a mozgásegyenletek felírásakor figyelembe vettük a  $\underline{g}(\underline{q}, t) = \underline{0}$  kényszer egyenleteket, ezért mindig kielégítik azokat.

Függő koordinátákban felírt mozgásegyenletnél azonban a kényszeregyenletek helyzet- és sebességállapotra vonatkozóan nincsenek figyelembe véve. Még ha a numerikus integrálás konzisztens kezdeti feltételekkel indul, a kényszerfeltételek sérülnek a diszkretizációs hiba miatt: numerikus drift lép fel.



Ennek oka, hogy a numerikus integrálás során a gyorsulásállapot kényszereinek  $\ddot{g} = \underline{G}\ddot{q} - \ddot{\gamma}$  reziduumát időben integráljuk a  $\underline{g}(t_0)$  és  $\dot{\underline{g}}(t_0)$  kezdeti feltételekkel:

$$\ddot{\underline{g}}(t) \xrightarrow{\int \cdot dt} \dot{\underline{g}}(t) = \ddot{\underline{g}}t + \dot{\underline{g}}(t_0) \xrightarrow{\int \cdot dt} \underline{g}(t) = \frac{1}{2}\ddot{\underline{g}}t^2 + \dot{\underline{g}}(t_0)t + \underline{g}(t_0)$$

Amennyiben a  $\ddot{g} = 0$  egzaktul ki van elégítve, és a  $\underline{g}(t_0) = 0$  ill.  $\dot{\underline{g}}(t_0) = 0$  kezdeti feltételek konzisztensek, akkor  $\underline{g}(t) \equiv 0$ .

Viszont, ha a reziduumokban numerikus hiba van, akkor a  $\underline{\dot{g}}(t)$  reziduumában lineárisan emelkedő hiba, míg  $\underline{g}(t)$  reziduumában négyzetesen emelkedő hiba jelenik meg. További lineárisan emelkedő hibarész jelenik meg  $\underline{g}(t)$ -ben, ha nem konzisztens a sebességállapotra vonatkozó kezdeti feltétel, azaz  $\underline{\dot{g}}(t_0) \neq \underline{0}$ .

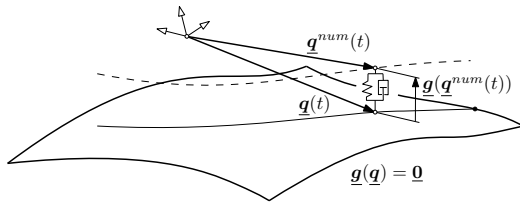
A drift korlátozására kétféle módszert mutatunk be röviden.

### Baumgarte féle stabilizálás

A (6) egyenletrendszert pótlólagos tagokkal egészítjük ki, amelyek a kényszerfeltételek sérülése esetén fiktív rugó- és csillapító tagokkal a rendszert a kényszerfeltételek felé vezeti. A kényszeregyenletek  $\underline{\ddot{g}} = \underline{0}$  második idő szerinti deriváltjának helyébe a

$$\underline{\ddot{g}} + 2\alpha\underline{\dot{g}} + \beta^2\underline{g} = \underline{0} \quad \text{ahol} \quad \underline{\ddot{g}} = \underline{G}\underline{\ddot{q}} - \underline{\ddot{\gamma}}$$

kényszeregyenlet kerül. Ez  $\beta$  sajátkörfrekvenciájú és  $\alpha$  csillapítású rezgőrendszer. Stabil viselkedést  $\alpha > 0$  esetén kapunk. Előnyös a Lehr-féle kritikus csillapításhoz tartozó értékeket megválasztani, tegát  $D = \frac{\alpha}{\beta} = 1$ , azaz  $\alpha = \beta$ .



A (6) egyenletrendszer helyett

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} & \underline{\underline{G}}^T \\ \underline{\underline{G}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{\lambda}} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Q}}_t + \underline{\underline{Q}}_v - \underline{\underline{K}}\underline{\underline{q}} \\ \underline{\bar{\gamma}} + 2\alpha\dot{\underline{\underline{g}}} + \beta^2\underline{\underline{g}} \end{bmatrix} \quad (7)$$

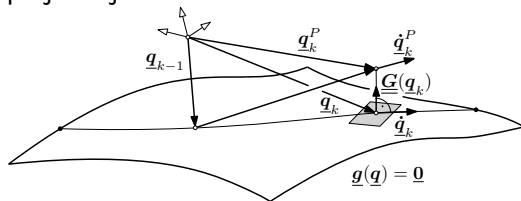
egyenletrendszert írhatjuk, mely tartalmazza a sebesség és helyzetállapot kényszeregyenleteinek reziduumát.

Az így kapott eredmények oszcillálnak a tényleges  $\underline{g}_i = 0$  körül. Ahhoz, hogy a rendszer dinamikáját ne hamisítsa el, lehetőleg a  $\beta$  sajátfrekvencia a rendszer legkisebb sajátfrekvenciájánál kisebb kell legyen.

## Stabilizálás projekcióval (prediktor-korrektor módszer)

A kényszerekfeltételek numerikus betartását úgy is el lehet érni, hogy minden integrációs lépés után a hibát egy megfelelő projekcióval a kényszerfeltételek sokaságára korigáljuk.

Egy  $[t_{k-1}, t_k]$  időintervallumon történő integrációs lépés (prediktorlépés) után a számított  $\underline{q}$  helyzet- és  $\dot{\underline{q}}$  sebességnagyságok általában nem elégítik ki a rájuk vonatkozó kényszerfeltételeket, a numerikus drift miatt. Első lépésben a helyzetkoordinátákat a  $\underline{g}(\underline{q}, t)$  kényszerfeltételekre projektáljuk.



Mivel  $\dim(\underline{g}) \leq \dim(\underline{q})$  ezért a projekció nem egyértelmű. Azon elvet használjuk, hogy azt a kényszerfeltételeket kielégítő  $\underline{q}_k$  helyzetet számítjuk ki, amely legközelebb esik a közelítő  $\underline{q}_k^P$ -hez.



Az elv az alábbi optimalizációs feladatra vezet:

$$\begin{aligned} \left\| \underline{\mathbf{q}}_k - \underline{\mathbf{q}}_k^P \right\|_2 &\stackrel{!}{=} \min_{\underline{\mathbf{r}}_k} \\ \underline{\mathbf{g}} \left( \underline{\mathbf{q}}_k, t_k \right) &= \underline{\mathbf{0}} \text{ (mellékfeltétel)} \end{aligned}$$

melynek megoldását iteratív úton keressük.

Második lépésben a  $\dot{\underline{\mathbf{q}}}_k^P$  sebességet projektáljuk a  $\dot{\underline{\mathbf{q}}}_k$  sebességgé, amely teljesíti a  $\underline{\dot{\mathbf{g}}} = \underline{\underline{\mathbf{G}}} \left( \underline{\mathbf{q}}_k, t_k \right) \dot{\underline{\mathbf{q}}}_k + \underline{\underline{\gamma}} \left( \underline{\mathbf{q}}_k, t_k \right) = \underline{\mathbf{0}}$  sebességre vonatkozó kényszerfeltételt. Ez az alábbi lineáris optimalizációs feladatra vezet:

$$\begin{aligned} \left\| \dot{\underline{\mathbf{q}}}_k - \dot{\underline{\mathbf{q}}}_k^P \right\|_2 &\stackrel{!}{=} \min_{\underline{\mathbf{r}}_k} \\ \underline{\underline{\mathbf{G}}} \left( \underline{\mathbf{q}}_k, t_k \right) \dot{\underline{\mathbf{q}}}_k + \underline{\underline{\gamma}} \left( \underline{\mathbf{q}}_k, t_k \right) &= \underline{\mathbf{0}} \text{ (mellékfeltétel)} \end{aligned}$$