

Több-test dinamikai szimulációk

6. előadás

Végeselem-módszer alkalmazása rugalmas több-test rendszerekre

Alakfüggvények

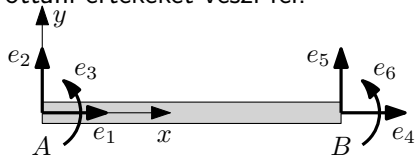
Klasszikus rúd-, lemez- és héjelemknél infinitezimális forgások is csomóponti koordináták, emiatt ezeket nem tekintjük izoparametrikus elemnek. Ilyen izoparametrikus elemek merevtestszerű mozgásával nem lehet egzakt módon meghatározni a merev test tehetetlenségi mennyiségeit. A következőkben olyan formalizmus bemutatására kerül sor, amely nagy referencia elmozdulás és kis alakváltozás esetén, ezen nem izoparametrikus elemek egzakt merevtest dinamikai leírását teszi lehetővé.

A formalizmus lényegi feltétele, hogy a feltételezett alakváltozási mező tetszőleges translációs mozgást leírjon. A forgásokat egy közbenső elem KR használatával írjuk le. Ily módon tetszőleges alakú testek merevtest tehetetlenségei egzakt módon meghatározhatók.

A végeelem módszer a Rayleigh-Ritz módszer egy speciális változatának tekinthető, melyben a vizsgált test képzelt vonalak vagy felületek mentén véges elemekre van bontva. Ezen elemek a peremeiken lévő csomópontokban illeszkednek egymáshoz. Ezen csomópontok elmozdulásai a vizsgált feladat ismeretlenjei. A feltételezett alakváltozási mezőt a csomópontok közötti interpolációs polinomokkal adjuk meg.

Csomóponti koordináták

Olyan interpoláló függvényt használunk, amely a csomópontokban az ottani értékeket veszi fel.



Tekintsünk egy rúdelemet, amelynek $\underline{w}$ elmozdulásmezőjét a rúdhoz kötött KR-ben az alábbi polinomokkal közelítjük:

$$w_x = a_0 + a_1 x$$

$$w_y = a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + a_5 x^3$$

Mátrixos alakban

$$\underline{w} = \underline{X} \underline{a} \quad (1)$$

ahol

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{a} = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5]^T$$

$\underline{X}$ helytől, míg $\underline{a}$ időtől függő.

Az $\underline{a}$ együtthatók az elem A és B végpontjaira (csomópontokra) vonatkozó feltételekből adhatók meg. Egy-egy csomópont 3 koordinátával rendelkezik: axiális és transzverzális elmozdulás, ill. meredekség. Az elem csomóponti koordinátáinak száma így 6, melyet az $\underline{e}$ vektorba írunk:

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ahol e_1 , e_2 , e_4 és e_5 elmozdulások, míg e_3 és e_6 meredekségek (ld. ábra). Az $\underline{a}$ együtthatók $\underline{e}$ koordinátákkal történő kifejezésére az alábbi feltételeket írjuk fel:

$$\begin{aligned} w_x(0) &= e_1, & w_y(0) &= e_2, & w'_y(0) &= e_3, \\ w_x(l) &= e_4, & w_y(l) &= e_5, & w'_y(l) &= e_6, \end{aligned} \quad (3)$$

Az (1) alatti interpoláció felhasználva ezen csomóponti koordináták

$$\underline{e} = \underline{\bar{X}} \underline{a}$$

módon írhatók, ahol

$$\underline{\underline{\bar{X}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & / & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & / & /^2 & /^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/ & 3/^2 \end{bmatrix}$$

Az $\underline{a}$ együtthatók $\underline{e}$ koordinátákkal történő kifejezéséhez invertáljuk $\underline{\underline{\bar{X}}}$ -et:

$$\underline{a} = \underline{\underline{\bar{X}}}^{-1} \underline{e}$$

Így a (1) alatti elmozdulásmező kifejezhető a csomóponti koordinátákkal:

$$\underline{w} = \underline{\underline{X}} \underline{\underline{\bar{X}}}^{-1} \underline{e} \quad \text{azaz} \quad \underline{w} = \underline{\underline{S}} \underline{e}$$

ahol $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{X}} \underline{\underline{\bar{X}}}^{-1}$ az elem alakfüggvénye. A $\xi = \frac{x}{l}$ jelölést használva, az $\underline{\underline{S}}$ alakfüggvény az alábbiak szerint írható:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & / (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) & 0 & 3\xi^2 - 2\xi^3 & / (\xi^3 - \xi^2) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Az elmozdulásmező csomóponti koordinátákból történő meghatározására bemutatott eljárás általános, és másmilyen elemtípusra is alkalmazható.

Merevtestszerű mozgás

A feltételezett elmozdulásmező akkor konvergál az elemszám növelésével a pontos megoldáshoz, ha teljesíti az alábbi feltételeket:

- az elmozdulásmező az elemen belül folytonos
- a feltételezett elmozdulásmező konstans nyúlás leírására alkalmas

Az alakfüggvényeknek képesnek kell lenniük merevtestszerű mozgás leírására is.

Az előző példánál maradva $e_1 = e_4 = c_1 = \text{állandó}$. és $e_2 = e_3 = e_5 = e_6 = 0$ értékek esetén x irányú transzláció, míg $e_2 = e_5 = c_2 = \text{állandó}$. és $e_1 = e_3 = e_4 = e_6 = 0$ esetén y irányú transzláció áll fenn. Így az alakfüggvény tetszőleges eltolódást képes leírni. Viszont ezek az alakfüggvények nem tudnak tetszőleges merevtestszerű forgást leírni, ha infinitezimális forgások a csomóponti koordináták.

Felhasználva azt a tényt, hogy az alakfüggvény tetszőleges translációs mozgást leír, a végeelem csomóponti koordinátái bármely, az elemhez kötött KR-rel párhuzamos KR-ben leírhatók a

$$\underline{e} = \underline{e}_0 + \underline{e}_f \quad (5)$$

módon, ahol $\underline{e}_0$ az alakváltozás előtti kezdeti konfigurációhoz tartozó értékeket tartalmazza, és $\underline{e}_f$ pedig a rugalmas alakváltozáshoz tartozó csomóponti koordinátákat.

Koordináta-rendszerek

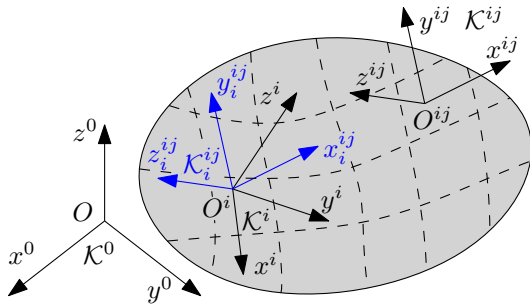
Egy több-test rendszerben a rugalmas testek általában több, mint egy elemre van felosztva. A továbbiakban az i -ik test j -ik elemének elmozdulása

$$\underline{w}^{ij} = \underline{\underline{S}}^{ij} \underline{e}^{ij} \quad (6)$$

Hasonlóan a (5) egyenlet:

$$\underline{e}^{ij} = \underline{e}_0^{ij} + \underline{e}_f^{ij} \quad (7)$$

Mivel az alakfüggvény tetszőleges translációs mozgást leír, a végeelem csomóponti koordinátái bármely, az elemhez kötött KR-rel kezdetben párhuzamos KR-ben leírhatók.



Legyen $\mathcal{K}^{ij}$ az elemmel mozgó KR, azaz az elem valamely pontjához kötött, $\mathcal{K}^i$ a test referencia KR-e, és $\mathcal{K}_i^{ij}$ az elem közbenső KR-e, melynek origója a $\mathcal{K}^i$ KR origójához van kötve, és hozzá képest fix módon van elforgatva, azaz $\mathcal{K}_i^{ij}$

KR a $\mathcal{K}^i$ referencia KR-rel együtt mozog. A $\mathcal{K}_i^{ij}$ szöghelyezete a $\mathcal{K}^i$ -hez képest úgy van megválasztva, hogy $\mathcal{K}_i^{ij}$ tengelyei kezdeti állapotban párhuzamosak az elem $\mathcal{K}^{ij}$ KR-ével. Következésképp a (6) és (7) egyenletek felírhatók a $\mathcal{K}^{ij}$ KR-ben, oly módon, hogy $\underline{e}^{ij}$ -t kicseréljük $\underline{e}_i^{ij}$ -re:

$$\underline{w}_i^{ij} = \underline{\underline{S}}^{ij} \underline{e}_i^{ij} \quad (8)$$

ahol $\underline{w}_i^{ij}$ az ij elem feltételezett elmozdulásmezeje és $\underline{e}_i^{ij}$ a csomóponti koordinátái a $\mathcal{K}_i^{ij}$ KR-ben.

Mivel $\mathcal{K}_i^{ij}$ KR a referencia $\mathcal{K}^i$ KR-hez képest fix szöghelyzetű, ezért az $\underline{e}_i^{ij}$ koordinátákat a referencia KR-ben is megadhatjuk a

$$\underline{e}_i^{ij} = \underline{\bar{C}}^{ij} \underline{q}_n^{ij} \quad (9)$$

módon, ahol $\underline{\bar{C}}^{ij}$ konstans transzformációs mátrix és $\underline{q}_n^{ij}$ az ij elem csomóponti koordinátái a $\mathcal{K}^i$ referencia KR-ben. Következésképp az ${}^i \underline{u}^{ij}$ elmozdulásmező megadható a testhez kötött referencia KR-ben:

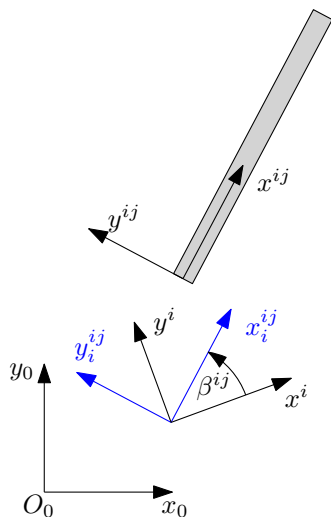
$${}^i \underline{u}^{ij} = \underline{C}^{ij} \underline{w}_i^{ij} = \underline{C}^{ij} \underline{S}^{ij} \underline{e}_i^{ij} \quad (10)$$

A $\underline{C}^{ij}$ transzformációs mátrix 2×2 méretű 2D-ben, és 3×3 méretű 3D-ben, míg $\underline{\bar{C}}^{ij}$ mérete megegyezik az elem csomóponti koordinátáinak számával. Behelyettesítve (9) egyenletet (10) kifejezésbe, kapjuk, hogy

$${}^i \underline{u}^{ij} = \underline{C}^{ij} \underline{S}^{ij} \underline{\bar{C}}^{ij} \underline{q}_n^{ij} \quad (11)$$

Ez az egyenlet az elem tetszőleges pontjának elmozdulását megadja a testhez kötött referencia KR-ben. A (11) elmozdulásmezővel tetszőleges pont helye megadható. Felhasználva a (7) egyenletet, a pont helye az alakváltozott hely és az elmozdulásvektor összege.

Példa



Tekintsük az l hosszúságú kétdimenziós rúdelemet, melyhez kötött KR a rúd egyik végpontjában van. Ez az origo a közbenső KR-ben d_x^{ij} és d_y^{ij} koordinátákkal rendelkezik. A közbenső KR alakváltozás előtti szöghelyzete a test referencia KR-éhez képest β^{ij} . A kezdeti konfigurációban zérus az alakváltozás, így az elem csomóponti koordinátái a közbenső KR-ben

$$\underline{e}_i^{ij} = \begin{bmatrix} d_x^{ij} & d_y^{ij} & 0 & d_x + l & d_y^{ij} & 0 \end{bmatrix}^T$$

A (4) alatti alakfüggvénnyel

$$\underline{\underline{S}}^{ij} \underline{e}_i^{ij} = \begin{bmatrix} x_i^{ij} + d_x^{ij} \\ d_y^{ij} \end{bmatrix}$$

az elem tetszőleges pontjának helye a $\mathcal{K}_i^{ij}$ KR-ben, mely KR fixen rögzítve van a referencia KR-hez.

Transzformálva az így kapott helyvektort a

$$\underline{\underline{C}}^{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta^{ij} & -\sin \beta^{ij} \\ \sin \beta^{ij} & \cos \beta^{ij} \end{bmatrix}$$

transzformációs mátrixszal, megkapjuk a tetszőleges pont koordinátáit a test referencia KR-ében.

Hasonló eljárás térbeli elemek esetén is alkalmazható.

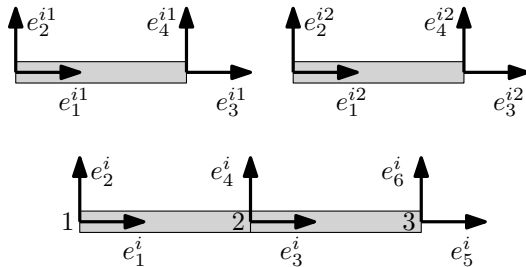
Illesztési feltételek

Az i test $\mathcal{K}^i$ KR-ében az összes elem megadható, így az illesztést itt végezzük. Legyen $\underline{q}_n^i$ az i -ik test összes csomóponti koordinátájának vektora.

A j elem csomóponti koordinátái az alábbi módon fejezhetők ki:

$$\underline{q}_n^{ij} = \underline{\underline{B}}_1^{ij} \underline{q}_n^i \quad (12)$$

ahol $\underline{\underline{B}}_1^{ij}$ kapcsoló mátrix, amelynek csak nulla és egy elemei vannak, és az elem illesztését fejezi ki.



Példaként tekintsünk két rúdelemet, melyeknek csomópontjaiban 2 csomóponti koordinátát értelmezünk. A két elem a 2-es csomópontnál illeszkedik. Az egyes elemek 4 koordinátája a test referencia KR-ében a következők:

$$\underline{q}_n^{i1} = [e_1^{i1} \quad e_2^{i1} \quad e_3^{i1} \quad e_4^{i1}]^T \quad \text{és} \quad \underline{q}_n^{i2} = [e_1^{i2} \quad e_2^{i2} \quad e_3^{i2} \quad e_4^{i2}]^T$$

Az összeillesztett testen a $\underline{q}_n^i$ vektor pedig:

$$\underline{q}_n^i = [e_1^i \quad e_2^i \quad e_3^i \quad e_4^i \quad e_5^i \quad e_6^i]^T \quad (13)$$

A (12) alatti összefüggésben szereplő illesztési transzformációs mátrix az egyes elemekre

$$\underline{\underline{B}}_1^{i1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{B}}_1^{i2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A (12) illesztési transzformációt használva, az ij elem elmozdulása az i -ik test $\underline{q}_n^i$ csomóponti koordinátáinak függvényében a (11) egyenletbe történő behelyettesítés után

$${}^i \underline{u}^{ij} = \underline{\underline{C}}^{ij} \underline{\underline{S}}^{ij} \bar{\underline{\underline{C}}}^{ij} \underline{\underline{B}}_1^{ij} \underline{q}_n^i \quad (14)$$

Amelyet tömören

$${}^i \underline{u}^{ij} = \underline{\underline{N}}^{ij} \underline{q}_n^i \quad (15)$$

alakban írhatunk, ahol

$$\underline{\underline{N}}^{ij} = \underline{\underline{C}}^{ij} \underline{\underline{S}}^{ij} \bar{\underline{\underline{C}}}^{ij} \underline{\underline{B}}_1^{ij} \quad (16)$$

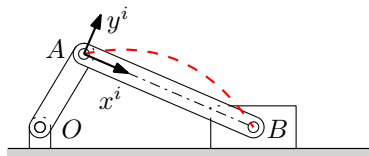
helytől függő mátrix.

A (14) elmozdulás tartalmazza az elemek merevtestszerű mozgását, így a teljes test merevtestszerű mozgásai is lehetségesek a referencia KR-hez képest. Több-test dinamikában viszont ezeket eliminálni kell, hogy a referencia KR-ben egyedülálló elmozdulásmezőt definiálhassunk. A test merevtestszerű mozgását a referencia KR mozgási koordinátaival írjuk le.

Referenciafeltételek

Mivel a testek merevtestszerű mozgását a referencia helyzetváltoztatásával szeretnénk leírni, olyan egyedülálló elmozdulásmező kell definiálnunk, amely nem tartalmaz merevtestszerű mozgásokat.

Ez oly módon lehet elérni, hogy referenciafeltételeket fogalmazunk meg. Ezek a referenciafeltételek a referencia KR természetét is meghatározzák. A referenciafeltételekkel szemben elvárás, hogy konzisztensek legyenek a kinematikai kényszerekkel, melyeket a rugalmas test peremén alkalmazunk.



Példaként tekintsünk egy csúszkás mechanizmust. A hajtórúdunkat tekintsük rugalmasnak, és osszuk fel valahány számú végelemekre. Legyen az előző példánál látott két elemű felosztás, ahol a csomóponti koordináták a (13) egyenlet szerint vannak megadva.

A hajtórúd csuklókkal kapcsolódik a forgatúhoz és a csúszkatesthez A és B pontokban. Következésképp a feltételezett elmozdulásmező kéttámaszú tartó alakja kell legyen.

Így a példában az A pont axiális és transzverzális, míg a B pont transzverzális elmozdulása zérus. Ezen a feltételeket referenciafeltételeknek nevezzük. A referenciafeltételek száma legalább akkora, mint ahány merevtestszerű mozgást az alakfüggvények megengednek.

A referencia x^i tengelye az A és B pontokon megy át, de nincs a hajtórúd A pontjához kötve, mivel az A elfordul az x^i tengelyhez képest.

Az i -ik test csomóponti koordináták vektora felírható a

$$\underline{q}_n^i = \underline{q}_0^i + \underline{\bar{q}}_f^i \quad (17)$$

módon, ahol $\underline{q}_0^i$ az alakváltozás előtti konfiguráció csomóponti koordinátái, míg $\underline{\bar{q}}_f^i$ az alakváltozás csomóponti koordinátái. A referenciafeltételek ez utóbbi koordinátákra vonatkoznak. A referenciafeltételek felhasználhatók arra, hogy a csomóponti rugalmas koordinátákat felírjuk a koordináták egy új független csoportjának függvényében, azaz

$$\underline{\bar{q}}_f^i = \underline{\underline{B}}_2^i \underline{q}_f^i \quad (18)$$

ahol $\underline{\underline{B}}_2^i$ a referenciafeltételekt kifejező lineáris transzformáció mátrixa, míg $\underline{q}_f^i$ az új csomóponti koordináták vektora.

A csúszkás mechanizmusban a két elemre felosztott hajtórúd esetén Ezen mátrix és vektor

$$\underline{\underline{B}}_2^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{q}_f^i = \begin{bmatrix} (e_f^i)_3 \\ (e_f^i)_4 \\ (e_f^i)_5 \end{bmatrix}$$

Behelyettesítve (18) egyenletet (17) egyenletbe, kapjuk, hogy

$$\underline{q}_n^i = \underline{q}_0^i + \underline{\underline{B}}_2^i \underline{q}_f^i \quad (19)$$

A későbbiek miatt jegyezzük meg, hogy

$$\dot{\underline{q}}_n^i = \underline{\underline{B}}_2^i \dot{\underline{q}}_f^i$$

Felhasználva a referencia origójának helyét és tájolását leíró

$$\underline{q}_r = \begin{bmatrix} \underline{r}^i \\ \underline{\theta}^i \end{bmatrix}$$

referencia-koordinátákat, lehetőségünk nyílik az i -ik j -ik elemének tetszőleges pontjának $\underline{r}^{ij}$ helyvektorát meghatározni:

$$\underline{r}^{ij} = \underline{r}^i + {}^i\underline{T} \, {}^i\underline{u}^{ij} \quad (20)$$

Felhasználva a (15) és (19) összefüggéseket, írhatjuk, hogy

$$\underline{r}^{ij} = \underline{r}^i + {}^i\underline{T} \underline{N}^{ij} \underline{q}_n^i = \underline{r}^i + {}^i\underline{T} \underline{N}^{ij} \left(\underline{q}_0^i + \underline{B}_2^i \underline{q}_f^i \right) \quad (21)$$

Azaz a tetszőleges j pont helye a referencia és rugalmas koordináták függvényében írható fel.

Mozgási energia

A j elem tetszőleges pontjának helyét megadó (20) kifejezést idő szerint deriválva

$$\dot{\underline{r}}^{ij} = \dot{\underline{r}}^i + \underline{\underline{T}}^i (\dot{\underline{\omega}}^i \times \underline{u}^{ij}) + \underline{\underline{T}}^i \underline{\underline{N}}^{ij} \underline{\underline{B}}_2^i \dot{\underline{q}}_f^i \quad (22)$$

A vektoriális szorzatra vonatkozó

$$\dot{\underline{\omega}}^i \times \underline{u}^{ij} = -\tilde{u}^{ij} \dot{\underline{\omega}}^i$$

és a szögsebességre vonatkozó

$$\dot{\underline{\omega}}^i = \underline{\underline{H}}^{-1} \dot{\underline{\theta}}^i$$

összefüggésekből

$$\dot{\underline{\omega}}^i \times \underline{u}^{ij} = -\tilde{u}^{ij} \underline{\underline{H}}^{-1} \dot{\underline{\theta}}^i$$

melyet behelyettesítve (22) egyenletbe, kapjuk, hogy

$$\dot{\underline{r}}^{ij} = \dot{\underline{r}}^i - \underline{\underline{T}}^i \tilde{u}^{ij} \underline{\underline{H}}^{-1} \dot{\underline{\theta}}^i + \underline{\underline{T}}^i \underline{\underline{N}}^{ij} \underline{\underline{B}}_2^i \dot{\underline{q}}_f^i \quad (23)$$

Az utóbbi összefüggést partícionált alakban az alábbi alakban írhatunk:

$$\underline{\dot{r}}^{ij} = \begin{bmatrix} \underline{1} & -{}^i\underline{T} \underline{\tilde{u}}^{ij} {}^i\underline{H}^{-1} & {}^i\underline{T} \underline{N}^{ij} \underline{B}_2^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{r}}^i \\ \underline{\dot{\theta}}^i \\ \underline{\dot{q}}_f^i \end{bmatrix} \quad (24)$$

A j -ik elem mozgási energiája:

$$E^{ij} = \frac{1}{2} \int_{V^{ij}} \rho^{ij} \underline{\dot{r}}^{ijT} \underline{\dot{r}}^{ij} dV^{ij}$$

Behelyettesítve (24) képletet, kapjuk, hogy

$$E^{ij} = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^i{}^T \underline{M}^{ij} \underline{\dot{q}}^i$$

ahol $\underline{\dot{q}}^i$ az általánosított koordináta-sebességek vektora:

$$\underline{\dot{q}}^i = \begin{bmatrix} \underline{\dot{r}}^i \\ \underline{\dot{\theta}}^i \\ \underline{\dot{q}}_f^i \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{M}}^{ij}$ az ij elem tömegmátrixa, ami a (24) egyenletet felhasználva, és a transzformációs mátrix ortogonalitását figyelembe véve:

$$\underline{\underline{M}}^{ij} = \int_{V^i} \rho^i \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & -{}^i\mathbf{T}^T \underline{\underline{\tilde{u}}}^{ij} {}^i\mathbf{H}^{-1} & {}^i\mathbf{T}^T \underline{\underline{N}}^{ij} \underline{\underline{B}}_2^i \\ {}^i\mathbf{H}^{-T} \underline{\underline{\tilde{u}}}^{ij T} {}^i\mathbf{H}^{-1} & {}^i\mathbf{H}^{-T} \underline{\underline{\tilde{u}}}^{ij} \underline{\underline{N}}^{ij T} \underline{\underline{B}}_2^i \\ \text{szimm.} & \underline{\underline{B}}_2^{iT} \underline{\underline{N}}^{ij T} \underline{\underline{N}}^{ij} \underline{\underline{B}}_2^i \end{bmatrix} dV^i$$

Tömör alakban

$$\underline{\underline{M}}^{ij} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{m}}_{TT}^{ij} & \underline{\underline{m}}_{TR}^{ij} & \underline{\underline{m}}_{Tf}^{ij} \\ & \underline{\underline{m}}_{RR}^{ij} & \underline{\underline{m}}_{Rf}^{ij} \\ \text{szimm.} & & \underline{\underline{m}}_{ff}^{ij} \end{bmatrix}$$

Tehetetlenségi alak-integrálok

Az egyes almátrixokat sorra véve, azt látjuk, hogy bizonyos tehetetlenségi alak-integrálok segítségével számíthatók.

Az $\underline{\underline{m}}_{TT}^{ij}$ almátrix konstans:

$$\underline{\underline{m}}_{TT}^{ij} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} \underline{\underline{1}} dV^i = \begin{bmatrix} m^{ij} & 0 & 0 \\ 0 & m^{ij} & 0 \\ 0 & 0 & m^{ij} \end{bmatrix} = m^{ij} \underline{\underline{1}}$$

Az $\underline{\underline{m}}_{TR}^{ij}$ a transláció és rotációs tehetetlenségek csatolása, értelmezés szerint

$$\underline{\underline{m}}_{TR}^{ij} = - \int_{V^{ij}} \rho^{ij} \underline{\underline{T}} \underline{\underline{u}}^{ij} \underline{\underline{H}}^{-1} dV^{ij} = - \underline{\underline{T}} \left[\int_{V^{ij}} \rho^{ij} \underline{\underline{u}}^{ij} dV^{ij} \right] \underline{\underline{H}}^{-1}$$

Felhasználva az $\underline{\underline{u}}^{ij}$ (14) alatti értelmezését, belátható, hogy $\underline{\underline{m}}_{TR}^{ij}$ meghatározásához, a

$$\underline{\underline{S}}_f^{ij} = \underline{\underline{C}}^{ij} \left[\int_{V^{ij}} \rho^{ij} \underline{\underline{S}}^{ij} dV^{ij} \right] \underline{\underline{C}}^{ij} \underline{\underline{B}}_1^{ij}$$

tehetetlenségi integrál kiszámítása szükséges. Ugyanez a mátrix szükséges az $\underline{\underline{m}}_{Tf}^{ij}$ almátrix meghatározásához is, mely a translációs és rugalmas tehetetlenségek csatolásából származik. Ehhez a következőt írhatjuk:

$$\underline{\underline{m}}_{Tf}^{ij} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} \underline{\underline{T}} \underline{\underline{N}}^{ij} \underline{\underline{B}}_2^i dV^{ij} = \underline{\underline{T}} \left[\int_{V^{ij}} \rho^{ij} \underline{\underline{N}}^{ij} dV^{ij} \right] \underline{\underline{B}}_2^i$$

Felhasználva az $\underline{\underline{N}}^{ij}$ (16) alatti értelmezését, az utóbbi kifejezés tovább írható:

$$\underline{\underline{m}}_{Tf}^{ij} = {}^i\underline{\underline{T}} \underline{\underline{C}}^{ij} \left[\int_{V^{ij}} \rho^{ij} \underline{\underline{S}}^{ij} dV^{ij} \right] \bar{\underline{\underline{C}}}^{ij} \underline{\underline{B}}_1^{ij} \underline{\underline{B}}_2^i$$

amely tömören

$$\underline{\underline{m}}_{Tf}^{ij} = {}^i\underline{\underline{T}} {}^i\underline{\underline{S}}_f^{ij} \underline{\underline{B}}_2^i$$

A rotációval kapcsolatos $\underline{\underline{m}}_{RR}^{ij}$ almátrix az alábbi módon írható:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{m}}_{RR}^{ij} &= \int_{V^{ij}} \rho^{ij} {}^i\underline{\underline{H}}^{-T} {}^i\underline{\underline{u}}^{ijT} {}^i\underline{\underline{u}}^{ij} {}^i\underline{\underline{H}}^{-1} dV^{ij} = \\ &= {}^i\underline{\underline{H}}^{-T} \left[\int_{V^{ij}} \rho^{ij} {}^i\underline{\underline{u}}^{ijT} {}^i\underline{\underline{u}}^{ij} dV^{ij} \right] {}^i\underline{\underline{H}}^{-1} = {}^i\underline{\underline{H}}^{-T} {}^i\underline{\underline{\Theta}}^{ij} {}^i\underline{\underline{H}}^{-1} \end{aligned}$$

ahol ${}^i\underline{\underline{\Theta}}^{ij}$ az ij elem tehetetlenségi tenzora a referencia KR-ben.

A tehetetlenségi tenzor értelmezése, és koordinátái:

$${}^i\Theta_{ij} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} {}^i\tilde{u}^{ijT} {}^i\tilde{u}^{ij} dV^{ij} = \begin{bmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \text{szimm.} & & \Theta_{zz} \end{bmatrix}$$

amelyben a Θ_{kl} ($k, l = x, y, z$) koordináták a mátrixszorzás kifejtése után az alábbiak szerint értelmezett:

$$\begin{aligned} \Theta_{xx} &= \int_{V^{ij}} \rho^{ij} \left[\left({}^i u_y^{ij} \right)^2 + \left({}^i u_z^{ij} \right)^2 \right] dV^{ij} & \Theta_{xy} &= - \int_{V^{ij}} \rho^{ij} {}^i u_y^{ij} {}^i u_x^{ij} dV^{ij} \\ \Theta_{xz} &= - \int_{V^{ij}} \rho^{ij} {}^i u_z^{ij} {}^i u_x^{ij} dV^{ij} & \Theta_{yy} &= \int_{V^{ij}} \rho^{ij} \left[\left({}^i u_z^{ij} \right)^2 + \left({}^i u_x^{ij} \right)^2 \right] dV^{ij} \\ \Theta_{yz} &= - \int_{V^{ij}} \rho^{ij} {}^i u_z^{ij} {}^i u_y^{ij} dV^{ij} & \Theta_{zz} &= \int_{V^{ij}} \rho^{ij} \left[\left({}^i u_x^{ij} \right)^2 + \left({}^i u_y^{ij} \right)^2 \right] dV^{ij} \end{aligned}$$

Felhasználva $\underline{i}\underline{u}^j$ (15) szerinti képletét, az utóbbi integrálok az alábbiak szerint írhatók:

$$\Theta_{xx} = \underline{q}_n^i{}^T \left[\int_{V^{ij}} \rho^{ij} \left(\underline{N}_{\underline{y}}^{ij}{}^T \underline{N}_{\underline{y}}^{ij} + \underline{N}_{\underline{z}}^{ij}{}^T \underline{N}_{\underline{z}}^{ij} \right) dV^{ij} \right] \underline{q}_n^i$$

$$\Theta_{xy} = - \underline{q}_n^i{}^T \left[\int_{V^{ij}} \rho^{ij} \underline{N}_{\underline{y}}^{ij}{}^T \underline{N}_{\underline{x}}^{ij} dV^{ij} \right] \underline{q}_n^i, \quad \Theta_{xz} = - \underline{q}_n^i{}^T \left[\int_{V^{ij}} \rho^{ij} \underline{N}_{\underline{z}}^{ij}{}^T \underline{N}_{\underline{x}}^{ij} dV^{ij} \right] \underline{q}_n^i$$

$$\Theta_{yy} = \underline{q}_n^i{}^T \left[\int_{V^{ij}} \rho^{ij} \left(\underline{N}_{\underline{z}}^{ij}{}^T \underline{N}_{\underline{z}}^{ij} + \underline{N}_{\underline{x}}^{ij}{}^T \underline{N}_{\underline{x}}^{ij} \right) dV^{ij} \right] \underline{q}_n^i$$

$$\Theta_{yz} = - \underline{q}_n^i{}^T \left[\int_{V^{ij}} \rho^{ij} \underline{N}_{\underline{z}}^{ij}{}^T \underline{N}_{\underline{y}}^{ij} dV^{ij} \right] \underline{q}_n^i$$

$$\Theta_{zz} = \underline{q}_n^i{}^T \left[\int_{V^{ij}} \rho^{ij} \left(\underline{N}_{\underline{y}}^{ij}{}^T \underline{N}_{\underline{y}}^{ij} + \underline{N}_{\underline{x}}^{ij}{}^T \underline{N}_{\underline{x}}^{ij} \right) dV^{ij} \right] \underline{q}_n^i$$

Az utóbbi egyenletben $\underline{\underline{N}}_k^{ij}$, $k = x, y, z$ az $\underline{\underline{N}}^{ij}$ mátrix k -ik sora, míg legyen $\underline{\underline{S}}_k^{ij}$, $k = x, y, z$ az $\underline{\underline{S}}^{ij}$ alakfüggvényének k -ik sora, azaz

$$\underline{\underline{N}}^{ij} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{N}}_x^{ij} \\ \underline{\underline{N}}_y^{ij} \\ \underline{\underline{N}}_z^{ij} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{S}}^{ij} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{S}}_x^{ij} \\ \underline{\underline{S}}_y^{ij} \\ \underline{\underline{S}}_z^{ij} \end{bmatrix}$$

Felidézve, hogy $\underline{\underline{N}}^{ij}$ értelmezése (16) szerint

$$\underline{\underline{N}}^{ij} = \underline{\underline{C}}^{ij} \underline{\underline{S}}^{ij} \bar{\underline{\underline{C}}}^{ij} \underline{\underline{B}}_1^{ij}$$

igazolható, hogy az alábbi 6 tehetetlenségi alak-integrál szükséges az elem tehetetlenségi tenzorának kiszámításához:

$$\underline{\underline{S}}_{kl}^{ij} = \underline{\underline{B}}_1^{ij T} \bar{\underline{\underline{C}}}^{ij T} \left[\int_{V^{ij}} \rho^{ij} \underline{\underline{S}}_k^{ij T} \underline{\underline{S}}_l^{ij} dV^{ij} \right] \bar{\underline{\underline{C}}}^{ij} \underline{\underline{B}}_1^{ij}, \quad k, l = x, y, z$$

Ugyanezen 6 konstans mátrix szükséges $\underline{\underline{m}}_{Rf}^{ij}$ számításához, amely almátrix a rotációs és rugalmas mozgásokkal kapcsolatos tehetetlenségek csatolását fejezi ki. Ehhez írjuk fel $\underline{\underline{m}}_{Rf}^{ij}$ értelmezését:

$$\underline{\underline{m}}_{Rf}^{ij} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} {}^i \underline{\underline{H}}^{-T} {}^i \underline{\underline{\tilde{u}}}^{ij} \underline{\underline{N}}^{ij} \underline{\underline{B}}_2^i dV^{ij} = {}^i \underline{\underline{H}}^{-T} \left[\int_{V^{ij}} \rho^{ij} {}^i \underline{\underline{\tilde{u}}}^{ij} \underline{\underline{N}}^{ij} dV^{ij} \right] \underline{\underline{B}}_2^i$$

Az integranduszban szereplő kifejezés részletesen:

$${}^i \underline{\underline{\tilde{u}}}^{ij} \underline{\underline{N}}^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^i u_z^{ij} & {}^i u_y^{ij} \\ {}^i u_z^{ij} & 0 & -{}^i u_x^{ij} \\ -{}^i u_y^{ij} & {}^i u_x^{ij} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{N}}_x^{ij} \\ \underline{\underline{N}}_y^{ij} \\ \underline{\underline{N}}_z^{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^i u_y^{ij} \underline{\underline{N}}_z^{ij} - {}^i u_z^{ij} \underline{\underline{N}}_y^{ij} \\ {}^i u_z^{ij} \underline{\underline{N}}_x^{ij} - {}^i u_x^{ij} \underline{\underline{N}}_z^{ij} \\ {}^i u_x^{ij} \underline{\underline{N}}_y^{ij} - {}^i u_y^{ij} \underline{\underline{N}}_x^{ij} \end{bmatrix}$$

Továbbírva a (15) alatti ${}^i \underline{\underline{u}}^{ij} = \underline{\underline{N}}^{ij} \underline{\underline{q}}_n^i$ összefüggéssel:

$${}^i \underline{\underline{\tilde{u}}}^{ij} \underline{\underline{N}}^{ij} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_n^i{}^T \left(\underline{\underline{N}}_y^{ij} \underline{\underline{N}}_z^{ij} - \underline{\underline{N}}_z^{ij} \underline{\underline{N}}_y^{ij} \right) \\ \underline{\underline{q}}_n^i{}^T \left(\underline{\underline{N}}_z^{ij} \underline{\underline{N}}_x^{ij} - \underline{\underline{N}}_x^{ij} \underline{\underline{N}}_z^{ij} \right) \\ \underline{\underline{q}}_n^i{}^T \left(\underline{\underline{N}}_x^{ij} \underline{\underline{N}}_y^{ij} - \underline{\underline{N}}_y^{ij} \underline{\underline{N}}_x^{ij} \right) \end{bmatrix}$$

Bevezetve az

$$\tilde{\underline{\underline{N}}}_{kl}^{ij} = \underline{\underline{N}}_{kl}^{ij} - \underline{\underline{N}}_{kl}^{ijT} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} \left(\underline{\underline{N}}_{\underline{\underline{y}}}^{ij} \underline{\underline{N}}_{\underline{\underline{z}}}^{ij} - \underline{\underline{N}}_{\underline{\underline{z}}}^{ij} \underline{\underline{N}}_{\underline{\underline{y}}}^{ij} \right) dV^{ij}, \quad k, l = x, y, z$$

ferdeszimmetrikus mátrixokat

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{\underline{N}}}_{12}^{ij} &= \underline{\underline{N}}_{12}^{ij} - \underline{\underline{N}}_{12}^{ijT} \\ \tilde{\underline{\underline{N}}}_{23}^{ij} &= \underline{\underline{N}}_{23}^{ij} - \underline{\underline{N}}_{23}^{ijT} \\ \tilde{\underline{\underline{N}}}_{31}^{ij} &= \underline{\underline{N}}_{31}^{ij} - \underline{\underline{N}}_{31}^{ijT}\end{aligned}$$

írható, és így

$$\underline{\underline{m}}_{Rf}^{ij} = {}^i \underline{\underline{H}}^{-T} \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_n^i T \tilde{\underline{\underline{N}}}_{23}^{ij} \\ \underline{\underline{q}}_n^i T \tilde{\underline{\underline{N}}}_{31}^{ij} \\ \underline{\underline{q}}_n^i T \tilde{\underline{\underline{N}}}_{12}^{ij} \end{bmatrix} \underline{\underline{B}}_2^i$$

Az $\tilde{\underline{\underline{N}}}_{kl}^{ij}$ mátrixok számításához $\underline{\underline{S}}_{kl}^{ij}$ integrálok szükségesek.

Az $\underline{\underline{N}}_{kl}^{ij}$, $k, l = x, y, z$ számításához $\underline{\underline{S}}_{kl}^{ij}$ integrálok szükségesek.

Végeztül a $\underline{\underline{m}}_{ff}^{ij}$ almatrix kifejtése annak értelmezéséből végezhető:

$$\underline{\underline{m}}_{ff}^{ij} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} \underline{\underline{B}}_2^i{}^T \underline{\underline{N}}^{ij}{}^T \underline{\underline{N}}^{ij} \underline{\underline{B}}_2^i dV^{ij} = \underline{\underline{B}}_2^i{}^T \left[\int_{V^{ij}} \rho^{ij} \underline{\underline{N}}^{ij}{}^T \underline{\underline{N}}^{ij} dV^{ij} \right] \underline{\underline{B}}_2^i$$

Behelyettesítve az $\underline{\underline{N}}^{ij}$ -et adó (16) képletet, kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{m}}_{ff}^{ij} = \underline{\underline{B}}_2^i{}^T \underline{\underline{S}}_{ff}^{ij} \underline{\underline{B}}_2^i$$

ahol a szimmetrikus $\underline{\underline{S}}_{ff}^{ij}$ mátrix

$$\underline{\underline{S}}_{ff}^{ij} = \underline{\underline{B}}_1^{ij}{}^T \underline{\underline{\bar{C}}}^{ij}{}^T \left[\int_{V^{ij}} \rho^{ij} \underline{\underline{S}}^{ij}{}^T \underline{\underline{S}}^{ij} dV^{ij} \right] \underline{\underline{\bar{C}}}^{ij} \underline{\underline{B}}_1^{ij}$$

képlettel értelmezett. A tehetetlenségi alak-integrálokat használva $\underline{\underline{S}}_{ff}^{ij}$ a

$$\underline{\underline{S}}_{ff}^{ij} = \underline{\underline{S}}_{xx}^{ij} + \underline{\underline{S}}_{yy}^{ij} + \underline{\underline{S}}_{zz}^{ij}$$

módon számítható.