

Több-test dinamikai szimulációk

5. előadás

Rugalmas több-test rendszer kényszerei, mozgásegyenletei

Rugalmas több-test rendszerek kényszerei

Több-test rendszerben a koordináták nem függetlenek, mivel a tagok között kényszerkapcsolatok működnek.

A kényszerkapcsolatokat általában a testek általános koordinátáinak és az időnek a függvényében megadott kényszeregyenletek írják le. A kényszeregyenletek vektorát a

$$\underline{g}(\underline{q}, t) = \underline{0} \quad (1)$$

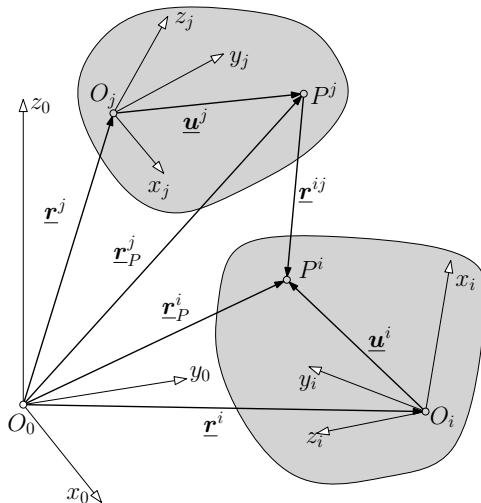
adja meg, ahol $\underline{q} = \begin{bmatrix} \underline{q}^1{}^T & \dots & \underline{q}^{n_t}{}^T \end{bmatrix}^T$ és $\underline{g} = \begin{bmatrix} g_1 & \dots & g_{n_k} \end{bmatrix}^T$

Példa

Tekintsük az i jelű test P^i ill. a j jelű test P^j pontját. A két pont egymáshoz viszonyított mozgását előírjuk a

$$\underline{r}^{ij} = \underline{f}(t)$$

egyenlettel, azaz az $\underline{r}^{ij}$ relatív hely, az $\underline{f}(t)$ az időnek a függvénye.



A relatív helyzet részletezve:

$$\underline{r}^{ij} = \underline{r}^i + {}^i\underline{T} {}^i\underline{u} - \underline{r}^j - {}^j\underline{T} {}^j\underline{u}$$

A rugalmas alakváltozást is számításba véve:

$$\begin{aligned} \underline{r}^{ij} = & \underline{r}^i + {}^i\underline{T} \left({}^i\underline{u}_0^i + \underline{S}^i \underline{q}_f^i \right) - \\ & - \underline{r}^j - {}^j\underline{T} \left({}^j\underline{u}_0^j + \underline{S}^j \underline{q}_f^j \right) = \underline{f}(t) \end{aligned}$$

Fenti egyenlet három skaláegyenletet jelent, melyek a referencia koordinátáktól és a rugalmas koordinátáktól is függenek.

Ha az egyenletben $\underline{f}(t) = \underline{0}$, akkor a két pont egybeesik, és így a gömbcsukló kényszeregyenleteit kapjuk. Megjegyzés: ahol két test egymáshoz viszonyított forgására van előírás, ott célszerű közbenső, kényszerhez kötött KR-t definiálni.

A rendszer virtuális megváltozására az (1) egyenletből

$$\underline{\underline{G}}\delta\mathbf{q} = \underline{0} \quad (2)$$

összefüggést kapjuk, ahol $\underline{\underline{G}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}$ a kényszeregyenletek Jacobi mátrixa.

Az előző példánál maradva, az i és j jelű testek koordinátáinak virtuális megváltozására az

$$\begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{\underline{B}}^i & {}^i\underline{\underline{T}}\underline{\underline{S}}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}^i \\ \delta \underline{\boldsymbol{\theta}}^i \\ \delta \mathbf{q}_f^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{\underline{B}}^j & {}^j\underline{\underline{T}}\underline{\underline{S}}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}^j \\ \delta \underline{\boldsymbol{\theta}}^j \\ \delta \mathbf{q}_f^j \end{bmatrix} = \underline{0}$$

egyenletet kapjuk, vagy tömören

$$\underline{\underline{L}}^i \delta \mathbf{q}^i - \underline{\underline{L}}^j \delta \mathbf{q}^j = \underline{0}$$

A teljes rendszerre vonatkozóan

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{L}}^i & -\underline{\underline{L}}^j \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{G}}} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}^i \\ \delta \mathbf{q}^j \end{bmatrix} = \underline{0} \quad \text{azaz} \quad \underline{\underline{G}}\delta\mathbf{q} = \underline{0} \quad (3)$$

A Jacobi mátrix a rendszer testjei koordinátáinak nemlineáris függvénye.

A későbbiekben szükségünk lesz az (1) kényszeregyenletek idő szerinti deriváltjára:

$$\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{q}} \dot{\underline{q}} = - \frac{\partial \underline{g}}{\partial t} \quad \text{azaz} \quad \underline{G} \dot{\underline{q}} = - \bar{\underline{\gamma}} \quad (4)$$

Szkleronom kényszereknél $\bar{\underline{\gamma}} = \underline{0}$.

Az előző példánál ez az egyenlet

$$\underline{L}^i \dot{\underline{q}}^i - \underline{L}^j \dot{\underline{q}}^j = \frac{\partial f}{\partial t}$$

alakot ölti.

Rugalmas több-test rendszer gyorsulásaira érvényes kényszeregyenleteket újból idő szerinti deriválással kapunk:

$$\underline{G} \ddot{\underline{q}} = - \left[\frac{\partial^2 \underline{g}}{\partial t^2} + \frac{\partial (\underline{G} \dot{\underline{q}})}{\partial \underline{q}} \dot{\underline{q}} + 2 \frac{\partial^2 \underline{g}}{\partial \underline{q} \partial t} \dot{\underline{q}} \right] = \bar{\bar{\underline{\gamma}}} \quad (5)$$

Rugalmas több-test rendszerek mozgásegyenletei

A mozgási energia felhasználásával egy több-test rendszer i -ik testjének mozgásegyenlete előállítható a Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletből. Ehhez szükségünk van a testre ható külső (terhelő) és belső (rugalmas) erők virtuális munkájára.

Ennek alakja:

$$\delta W^i = \delta W_b^i + \delta W_t^i$$

Ahol

$$\delta W_b^i = - \underline{q}_f^i{}^T \underline{K}_{ff}^i \delta \underline{q}_f^i$$

és

$$\delta W_t^i = \underline{Q}_t^i{}^T \delta \underline{q}^i$$

Egybevetve

$$\delta W^i = - \underline{q}_f^i{}^T \underline{K}_{ff}^i \delta \underline{q}_f^i + \underline{Q}_t^i{}^T \delta \underline{q}^i = \underline{Q}^i{}^T \delta \underline{q}^i$$

ahol

$$\underline{Q}^i = -\underline{K}_{ff}^i \underline{q}_f^i + \underline{Q}_t^i$$

az i jelű test általános koordinátáihoz tartozó általánosított erő.

Írjuk fel az i jelű testre a Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E^i}{\partial \dot{\underline{q}}^i} \right)^T - \left(\frac{\partial E^i}{\partial \underline{q}^i} \right)^T + \underline{\underline{G}}^i{}^T \underline{\lambda} = \underline{Q}^i{}^T$$

ahol $\underline{\lambda}$ a Lagrange-multiplikátorok vektora. Felhasználva, hogy a mozgási energia

$$E^i = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^i{}^T \underline{\underline{M}}^i \dot{\underline{q}}^i$$

a fenti egyenlet első két tagja kifejezhető:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E^i}{\partial \dot{\underline{q}}^i} \right)^T - \left(\frac{\partial E^i}{\partial \underline{q}^i} \right)^T = \underline{\underline{M}}^i \ddot{\underline{q}}^i + \underline{\underline{M}}^i \dot{\underline{q}}^i - \left[\frac{\partial}{\partial \underline{q}^i} \left(\frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^i{}^T \underline{\underline{M}}^i \dot{\underline{q}}^i \right) \right]^T$$

Értelmezhetjük a

$$\underline{Q}_v^i = -\underline{\underline{M}}^i \dot{\underline{q}}^i + \left[\frac{\partial}{\partial \underline{q}^i} \left(\frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^i{}^T \underline{\underline{M}}^i \dot{\underline{q}}^i \right) \right]^T \quad (6)$$

kvadratikus sebesség vektort, amely a giroszkopikus és Coriolis erőket tartalmazza. (Részletezés később)

Így írhatjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E^i}{\partial \dot{\underline{q}}^i} \right)^T - \left(\frac{\partial E^i}{\partial \underline{q}^i} \right)^T = \underline{\underline{M}}^i \ddot{\underline{q}}^i - \underline{Q}_v^i$$

amivel a mozgásegyenlet

$$\underline{\underline{M}}^i \ddot{\underline{q}}^i + \underline{\underline{K}}_{ff}^i \underline{q}_f^i + \underline{\underline{G}}^i{}^T \underline{\lambda} = \underline{Q}_t^i + \underline{Q}_v^i, \quad i = 1, \dots, n_t \quad (7a)$$

ahol n_t a rendszerbeli tagok (testek) száma. Részletesen kiírva:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{m}}_{TT}^i & \underline{\underline{m}}_{TR}^i & \underline{\underline{m}}_{Tf}^i \\ \text{szimm.} & \underline{\underline{m}}_{RR}^i & \underline{\underline{m}}_{Rf}^i \\ & & \underline{\underline{m}}_{ff}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{r}}^i \\ \ddot{\underline{\theta}}^i \\ \ddot{\underline{q}}_f^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{ff}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{r}^i \\ \underline{\theta}^i \\ \underline{q}_f^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{r}^i} \right)^T \\ \left(\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{\theta}^i} \right)^T \\ \left(\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{q}_f^i} \right)^T \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \left(\underline{Q}_t^i \right)^T \\ \left(\underline{Q}_t^i \right)_R \\ \left(\underline{Q}_t^i \right)_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\underline{Q}_v^i \right)^T \\ \left(\underline{Q}_v^i \right)_R \\ \left(\underline{Q}_v^i \right)_f \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n_t \quad (7b)$$

Az (7) alatti egyenletek másodrendű differenciálegyenlet-rendszert alkotnak a rendszer általános koordinátáira, amelyeknek ki kell elégíteniük a rendszerre érvényes kényszerek egyenletrendszerét is:

$$\underline{g}(\underline{q}, t) = \underline{0} \quad (8)$$

Az (7) és (8) együttesen differenciál-algebrai egyenletrendszert alkotnak. Megoldást numerikus eljárással keresünk.

Megoldás során két lehetőség adódik:

- mozgásegyenletek minimálkoordinátákkal
- mozgásegyenletek multiplikátor technikával

Kvadratikus sebesség vektor

A kvadratikus sebesség vektort a (6) alatti értelmezésből vezethetjük le. A vektort egyes tagjaival a

$$\underline{Q}_v^i = \begin{bmatrix} (\underline{Q}_v^i)^T \\ (\underline{Q}_v^i)^R \\ (\underline{Q}_v^i)^f \end{bmatrix}$$

módon írhatjuk fel.

A vektor egyes tagjainak számítási képlete (levezetés nélkül):

$$(\underline{Q}_v^i)_T = -{}^i\mathbf{T} \left[({}^i\tilde{\omega}^i)^2 {}^i\mathbf{S}_t^i + 2 {}^i\tilde{\omega}^i {}^i\mathbf{S}_f^i \underline{q}_f^i \right]$$

$$(\underline{Q}_v^i)_R = -2 {}^i\dot{\mathbf{H}}^{-T} {}^i\dot{\underline{\Theta}}^i {}^i\omega^i - -2 {}^i\dot{\mathbf{H}}^{-T} {}^i\mathbf{l}_{Rf}^i \dot{\underline{q}}_f^i - {}^i\mathbf{H}^{-T} {}^i\dot{\underline{\Theta}}^i {}^i\omega^i$$

$$(\underline{Q}_v^i)_f = - \int_{V^i} \rho^i \left\{ \mathbf{S}^{iT} \left[({}^i\tilde{\omega}^i)^2 {}^i\mathbf{u}^i + 2 {}^i\tilde{\omega}^i {}^i\dot{\mathbf{u}}_f^i \right] \right\} dV^i$$

Megoldás minimálkkordinátákkal

Két megoldási út járható:

- A minimálkoordináták kezdettől fogva ismertek, amik általában valamilyen csukló-koordináták. Ilyenkor valamilyen rekurzív formalizmus használható.
- Az egyenletek felírásánál használjuk a független és függő koordinátákat, és a kinematikai kényszerek segítségével meghatározzuk a koordináták egy független csoportját. A függő koordináták, a függetlenek függvényében írhatók fel.

Tekintsük azt az esetet, amikor ismerjük a független koordinátákat, amik összességét $\underline{q}_i$ vektorba foglaljuk. Így, amennyiben a függő koordináták eliminálva vannak az dinamikai egyenletekből, a több-test rendszer mozgása másodrendű differenciálegyenletrendszerrel leírható:

$$\underline{\underline{M}}_{ii} \ddot{\underline{q}}_i + \underline{\underline{K}}_{ii} \underline{q}_i = \underline{Q}_{ei} + \underline{Q}_{vi} \quad (9)$$

ahol $\underline{\underline{M}}_{ii}$ tömegmátrix, $\underline{\underline{K}}_{ii}$ merevségi mátrix, $\underline{Q}_{ei}$ külső erők vektora és $\underline{Q}_{vi}$ kvadratikus sebesség vektor a független $\underline{q}_i$ koordinátákhoz tartozó általánosított mennyiségek. Az egyenletben a kényszererők nem jelennek meg. Mivel az $\underline{\underline{M}}_{ii}$ tömegmátrix pozitív definit, fel lehet írni az egyenlet megoldását formálisan:

$$\ddot{\underline{q}}_i = \underline{\underline{M}}_{ii}^{-1} \left[\underline{Q}_{ei} + \underline{Q}_{vi} - \underline{\underline{K}}_{ii} \underline{q}_i \right]$$

Bevezetjük az $\underline{x}$ állapotváltozót, és annak deriváltját

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{q}_i \\ \dot{\underline{q}}_i \end{bmatrix}, \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{q}}_i \\ \ddot{\underline{q}}_i \end{bmatrix} = \underline{f}(\underline{x}, t)$$

Ily módon a másodrendű differenciálegyenlet-rendszer, elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre alakítjuk. A differenciálegyenlet-rendszer mellé megfelelő kezdeti feltételeket kell választani:

$$\underline{x}_0 = \underline{x}(t_0) = \begin{bmatrix} \underline{q}_{i0} \\ \underline{\dot{q}}_{i0} \end{bmatrix}$$

A számítógépi eljárás sematikusán a következő lépésekből áll:

1. A rugalmas testeket is tartalmazó több-test rendszerben megjelenő, a feltételezett elmozdulásmezőtől függő, tehetetlenségi alak-integrálokat kiszámítjuk. Ezt egy preprocesszorban el lehet végezni, mivel a szimuláció során egyszer elegendő kiszámítani. Ezek meghatározása történhet akár végeselem szoftverrel is.
2. Meg kell adni egy pontos értéket a független $\underline{q}_i$ koordinátákra és $\underline{\dot{q}}_i$ koordináta-sebességekre. E vektorok merevtest mozgáshoz tartozó és rugalmas koordinátákat tartalmaznak. A pontos értékek meghatározásához szükséges lehet statikus számítás elvégzése.

3. Előállítjuk a rendszer mozgásegyenleteit az állapotváltozó és a tehetetlenségi alak-integrálok segítségével. Ezen mennyiségek felhasználásával előállítható a tömegmátrix és az egyenletrendszer jobb oldala, azaz a külső erők a Coriolis és giroszkopikus erők és a rugalmas erők. Mivel az előbb említett mennyiségek az állapotváltozó nemlineáris függvényei, a szimuláció során iteratív módon újra kell őket számítani.
4. A 9 egyenlet $\ddot{\underline{q}}_i$ -re nézve lineáris egyenletrendszert meg kell oldani $\ddot{\underline{q}}_i$ -re.
5. A $\ddot{\underline{q}}_i$ koordináta-gyorsulás és $\dot{\underline{q}}_i$ ismeretében előállítjuk az $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, t)$ elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert.
6. Az adott időlépéshez tartozóan a differenciálegyenlet-rendszert egy direkt numerikus integrációs módszerrel integráljuk. Az így kapott megoldást egy következő időlépés kezdeti értékeként felhasználhatjuk, azaz a 3. lépéstől kezdve ismételjük a lépéseket míg az utolsó időlépés végéhez nem érünk.

Mozgásegyenletek multiplikátorokkal

A kinematikai kényszerek egyenletei (1) ismételten:

$$\underline{g}(\underline{q}, t) = \underline{0}$$

ahol $\underline{g} = [g_1 \ \dots \ g_{n_k}]^T$, és $\underline{q}$ általánosított koordinátákat a referencia r és a rugalmas f koordináták szerint partícionáljuk:

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \underline{q}_r \\ \underline{q}_f \end{bmatrix} \quad (10)$$

Így a kényszeregyenletek a

$$\underline{g}(\underline{q}_r, \underline{q}_f, t) = \underline{0}$$

alakot öltik.

Az (7) egyenletet használva a teljes rendszer mozgásegyenlete mátrix alakban (i index nélkül a teljes rendszerre vonatkozó mennyiségek szerepelnek):

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}}\underline{q} + \underline{\underline{G}}^T\boldsymbol{\lambda} = \underline{Q}_t + \underline{Q}_v \quad (11)$$

Az utóbbi egyenlet referencia és rugalmas koordináták szerint partícionálva:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{m}}_{rr} & \underline{\underline{m}}_{rf} \\ \text{szimm.} & \underline{\underline{m}}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\ddot{q}}_r \\ \underline{\ddot{q}}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\underline{K}}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q}_r \\ \underline{q}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{q}_r} \right)^T \\ \left(\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{q}_f} \right)^T \end{bmatrix} \underline{\lambda} \\ = \begin{bmatrix} (\underline{Q}_t^i)_r \\ (\underline{Q}_t^i)_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\underline{Q}_v^i)_r \\ (\underline{Q}_v^i)_f \end{bmatrix}$$

A (1) egyenletet idő szerint deriválva, kapjuk a (4) egyenletet:

$$\underline{\underline{G}} \underline{\dot{q}} + \underline{\bar{\gamma}} = \underline{0}$$

amelyet partícionálva

$$\underline{\underline{G}}_r \underline{\dot{q}}_r + \underline{\underline{G}}_f \underline{\dot{q}}_f + \underline{\bar{\gamma}} = \underline{0}$$

írható, azaz

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}_r & \underline{\underline{G}}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{q}}_r \\ \underline{\dot{q}}_f \end{bmatrix} + \underline{\bar{\gamma}} = \underline{0}$$

A sebességekre vonatkozó (4) egyenletet még egyszer idő szerint deriválva kapjuk a (5) egyenletet:

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}} \ddot{\underline{\mathbf{q}}} = - \left[\frac{\partial^2 \underline{\underline{\mathbf{g}}}}{\partial t^2} + \frac{\partial (\underline{\underline{\mathbf{G}}} \dot{\underline{\mathbf{q}}})}{\partial \underline{\mathbf{q}}} \dot{\underline{\mathbf{q}}} + 2 \frac{\partial^2 \underline{\underline{\mathbf{g}}}}{\partial \underline{\mathbf{q}} \partial t} \dot{\underline{\mathbf{q}}} \right] = \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}$$

amelyet szintén partícionálva, írhatjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{G}}}_r & \underline{\underline{\mathbf{G}}}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{\mathbf{q}}}_r \\ \ddot{\underline{\mathbf{q}}}_f \end{bmatrix} = \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}$$

Az egész rendszerre vonatkozó (11) egyenletet a koordinátagyorsulásokra érvényes (5) kényszeregyenletekkel egy mátrixegyenletbe foglalhatjuk:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{M}}} & \underline{\underline{\mathbf{G}}}^T \\ \underline{\underline{\mathbf{G}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{\mathbf{q}}} \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\lambda}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_t + \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_v - \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\mathbf{q}} \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \end{bmatrix}$$

illetve a partícionált alakokat használva:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{m}}}_{rr} & \underline{\underline{\mathbf{m}}}_{rf} & \underline{\underline{\mathbf{G}}}_r^T \\ \underline{\underline{\mathbf{m}}}_{fr} & \underline{\underline{\mathbf{m}}}_{ff} & \underline{\underline{\mathbf{G}}}_f \\ \underline{\underline{\mathbf{G}}}_r & \underline{\underline{\mathbf{G}}}_f & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{\mathbf{q}}}_r \\ \ddot{\underline{\mathbf{q}}}_f \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\lambda}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_t)_r + (\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_v)_r \\ (\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_t)_f + (\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_v)_f - \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ff} \underline{\mathbf{q}}_f \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \end{bmatrix}$$

Utóbbi egy lineáris egyenletrendszer a gyorsulások és Lagrange multiplikátorok számítására. A

$$\underline{q}_\lambda = \begin{bmatrix} \ddot{\underline{q}} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{M}}_\lambda = \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} & \underline{\underline{G}}^T \\ \underline{\underline{G}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \underline{Q}_t + \underline{Q}_{\underline{\gamma}} - \underline{K} \underline{q} \end{bmatrix}$$

jelölésekkel tömören

$$\underline{\underline{M}}_\lambda \underline{q}_\lambda = \underline{\underline{F}} \quad (12)$$

Egy fizikai rendszerre $\underline{\underline{M}}_\lambda$ nonsinguláris, így a $\bar{\underline{\underline{M}}} = \underline{\underline{M}}_\lambda^{-1}$ jelöléssel felírható az egyenletrendszer megoldása formálisan:

$$\underline{q}_\lambda = \bar{\underline{\underline{M}}} \underline{\underline{F}}$$

vagy partícionált alakban:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\underline{q}} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\underline{\underline{M}}}_{qq} & \bar{\underline{\underline{M}}}_{q\lambda} \\ \bar{\underline{\underline{M}}}_{\lambda q} & \bar{\underline{\underline{M}}}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{F}}_q \\ \underline{\underline{F}}_\lambda \end{bmatrix}$$

azaz

$$\begin{aligned}\ddot{\underline{q}} &= \underline{\underline{M}}_{qq} \bar{\underline{F}}_q + \underline{\underline{M}}_{q\lambda} \bar{\underline{F}}_\lambda \\ \underline{\lambda} &= \underline{\underline{M}}_{\lambda q} \bar{\underline{F}}_q + \underline{\underline{M}}_{\lambda\lambda} \bar{\underline{F}}_\lambda\end{aligned}\tag{13}$$

A $\underline{\lambda}$ Lagrange multiplikátorokra számolt megoldásokkal meghatározható az általánosított kényszererők vektora: $\underline{\underline{G}}^T \underline{\lambda}$.

Mivel a tömegmátrix az általános koordináták függvénye, és az egyenletrendszer $\bar{\underline{F}}$ jobboldala az általános koordináták és sebességek függvénye, az általános koordinátagyorsulások is az általános koordinátáktól, koordinátasebességektől és időtől függenek, azaz

$$\ddot{\underline{q}} = \underline{f}(\dot{\underline{q}}, \underline{q}, t)$$

melynek általában nem állítható elő zárt alakú megoldása, ezért használjuk a (12) egyenletnek a (13) numerikus megoldását.

Numerikus eljárások

Legpontosabb megoldást akkor kapunk, ha vagy ki lehet fejezni zárt alakban a (12) egyenletből, vagy úgy sikerül zárt alakban független koordinátákat kiválasztani, hogy azok kielégítsék a kényszerfeltételeket. Ez általában ritkán lehetséges, ezért numerikus integrációs eljárást kell alkalmaznunk egy közelítő megoldás keresésére. A numerikus hiba a kényszeregyenletek sérülését okozza.

A multiplikátor technika alkalmazásával kapcsolatosan megemlítünk néhány gyakrabban használt numerikus sémát.

1. Feltételezzük, hogy a numerikus integrálónk közel tökéletes. Így az abból származó hiba kicsi és ebből következőleg kényszeregyenletek sérülése elhanyagolható. Így a rendszer összes koordinátagyorsulását integráljuk időben, hogy megjapjuk a sebességeket és helyzeteket. Ez a séma egyszerű és sok esetben elfogadható eredményeket biztosít, viszont a hiba idővel halmozódik ami a kényszeregyenletek sérüléséhez vezet.

2. Valamilyen módon azonosítunk független koordinátákat (pl. partíciónálással). Csak a független állapotváltozókat integráljuk időben, amiből megkapjuk a független általános koordinátákat és gyorsulásokat. A függő általános koordinátákat a kényszeregyenletek révén határozzuk meg. Ennek következtében a kényszeregyenletek nem sérülnek, viszont a függő koordináták hibája legalább akkora mértékű, mint a független koordinátáké.

3. Integráljuk az összes állapotváltozót az összes független és függő koordinátával, majd a függő koordinátákat korrigáljuk a kényszeregyenletek alkalmazásával. A függő koordináták tekintetében pontosabb becslést jelent, így kevesebb iteráció szükséges a nemlineáris kényszeregyenletek megoldása során. Ezek prediktor-korrektor eljárásoknak szokás hívni. Sok közülük kifinomult hiba-kontroll eljárást is használt. A függő koordináták igazítása viszont sok esetben numerikus problémákhoz vezet.

Általánosított koordináták partícionálása

Holonom rendszerek esetén a rendszer koordinátái a független $\underline{q}_i$ koordináták függvényében megadhatók, így az $\underline{q}_d$ függő koordináták is a kényszeregyenletek segítségével. A független és függő koordinátákat szétválasztva írhatjuk a koordináták vektorára, és azok virtuális megváltozására, hogy

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \underline{q}_i \\ \underline{q}_d \end{bmatrix}, \quad \delta \underline{\ddot{q}} = \begin{bmatrix} \delta \underline{\ddot{q}}_i \\ \delta \underline{\ddot{q}}_d \end{bmatrix}$$

Így akkor (3) egyenlet ($\underline{\underline{G}} \delta \underline{q} = \underline{0}$) alakja:

$$\underline{\underline{G}}_i \delta \underline{q}_i + \underline{\underline{G}}_d \delta \underline{q}_d = 0$$

Ha a kényszerek lineárisan függetlenek, akkor $\underline{\underline{G}}_d$ rangja teljes (b), tehát nonszinguláris, következésképp invertálható. Következik, hogy

$$\delta \underline{q}_d = -\underline{\underline{G}}_d^{-1} \underline{\underline{G}}_i \delta \underline{q}_i$$

A $\underline{\underline{G}}_{di} = -\underline{\underline{G}}_d^{-1} \underline{\underline{G}}_i$ jelöléssel tömörebben is írható:

$$\delta \underline{q}_d = \underline{\underline{G}}_{di} \delta \underline{q}_i$$

Az előbbihez hasonló módon járunk el a sebességek tekintetében. A (1) kényszeregyenletek idő szerinti deriváltjából kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{G}}_i \underline{\dot{q}}_i + \underline{\underline{G}}_d \underline{\dot{q}}_d + \underline{\bar{\gamma}} = 0$$

Az egyenlet segítségével kifejezhetők a függő koordináta-sebességek a függetlenek függvényében:

$$\underline{\dot{q}}_d = -\underline{\underline{G}}_d^{-1} \left(\underline{\underline{G}}_i \underline{\dot{q}}_i + \underline{\bar{\gamma}} \right) = \underline{\underline{G}}_{di} \underline{\dot{q}}_i - \underline{\underline{G}}_d^{-1} \underline{\bar{\gamma}}$$

Miután sikerült azonosítani a független és függő változókat, az

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{q}_i \\ \underline{\dot{q}}_i \end{bmatrix}$$

állapotváltozóval a megoldandó egyenlet:

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{q}}_i \\ \underline{\ddot{q}}_i \end{bmatrix} = \underline{g}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$$

Beágyazásos technika

Felhasználva a koordináták partícionálását a (5) alatti $\underline{\underline{G}}\underline{\underline{\ddot{q}}} = \underline{\underline{\ddot{\gamma}}}$ egyenlet felírható

$$\underline{\underline{G}}_i \underline{\underline{\ddot{q}}}_i + \underline{\underline{G}}_d \underline{\underline{\ddot{q}}}_d = \underline{\underline{\ddot{\gamma}}}$$

amiből

$$\underline{\underline{\ddot{q}}}_d = -\underline{\underline{G}}_d^{-1} \underline{\underline{G}}_i \underline{\underline{\ddot{q}}}_i + \underline{\underline{G}}_d^{-1} \underline{\underline{\ddot{\gamma}}}$$

Így az összes általános koordináta vektora a függetlenek függvényében:

$$\underline{\underline{\ddot{q}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\ddot{q}}}_i \\ \underline{\underline{\ddot{q}}}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} \\ -\underline{\underline{G}}_d^{-1} \underline{\underline{G}}_i \end{bmatrix} \underline{\underline{\ddot{q}}}_i + \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{G}}_d^{-1} \underline{\underline{\ddot{\gamma}}} \end{bmatrix}$$

vagy tömören

$$\underline{\underline{\ddot{q}}} = \underline{\underline{B}}_{di} \underline{\underline{\ddot{q}}}_i + \underline{\underline{\ddot{\eta}}} \quad (14)$$

ahol

$$\underline{\underline{B}}_{di} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} \\ -\underline{\underline{G}}_d^{-1} \underline{\underline{G}}_i \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\ddot{\eta}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{G}}_d^{-1} \underline{\underline{\ddot{\gamma}}} \end{bmatrix}$$

A (11) egyenletbe behelyettesítve a (14) kifejezést, írhatjuk, hogy

$$\underline{\underline{M}} \left(\underline{\underline{B}}_{di} \ddot{\underline{q}}_i + \underline{\underline{\bar{\eta}}} \right) + \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{\lambda}} = \underline{\underline{Q}}_t + \underline{\underline{Q}}_v - \underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}}$$

Megszorozva az egyenletet $\underline{\underline{B}}_{di}^T$ -tal balról, és átrendezve, kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{B}}_{di}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{B}}_{di} \ddot{\underline{q}}_i + \underline{\underline{B}}_{di}^T \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{\lambda}} = \underline{\underline{B}}_{di}^T (\underline{\underline{Q}}_t + \underline{\underline{Q}}_v - \underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}}) - \underline{\underline{B}}_{di}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\bar{\eta}}}$$

Értelmezzük az alábbi mennyiségeket:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}_{ii} &= \underline{\underline{B}}_{di}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{B}}_{di} \\ \underline{\underline{Q}}_i &= \underline{\underline{B}}_{di}^T (\underline{\underline{Q}}_t + \underline{\underline{Q}}_v - \underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}}) - \underline{\underline{B}}_{di}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\bar{\eta}}} \end{aligned}$$

Így akkor

$$\underline{\underline{M}}_{ii} \ddot{\underline{q}}_i + \underline{\underline{B}}_{di}^T \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{\lambda}} = \underline{\underline{Q}}_i \quad (15)$$

Megmutatható, hogy $\underline{\underline{B}}_{di}^T \underline{\underline{G}}^T$ zérus mátrix. Ehhez írjuk, hogy

$$\begin{aligned}\underline{\underline{B}}_{di}^T \underline{\underline{G}}^T &= \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & -(\underline{\underline{G}}_d^{-1} \underline{\underline{G}}_i)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}_i^T \\ \underline{\underline{G}}_d^T \end{bmatrix} = \underline{\underline{G}}_i - (\underline{\underline{G}}_d^{-1} \underline{\underline{G}}_i)^T \underline{\underline{G}}_d^T = \\ &= \underline{\underline{G}}_i - \underline{\underline{G}}_i^T \underline{\underline{G}}_d^{-T} \underline{\underline{G}}_d^T = \underline{\underline{G}}_i - \underline{\underline{G}}_i^T = \underline{\underline{0}}\end{aligned}$$

Ennek megfelelően az előző oldali (15) egyenlet egyszerűsödik:

$$\underline{\underline{M}}_{ii} \ddot{\underline{\underline{q}}}_i = \underline{\underline{Q}}_i$$

Amiből látszik, hogy a kényszererők eliminálódnak, ha a mozgásegyenleteket független koordináták függvényében írjuk fel.

A beágyazásos technikának hátránya, hogy az $\underline{\underline{M}}_{ii}$ tömegmátrix teli, illetve, hogy több mátrixszorzásra és inverzióra van szükség, mintha megoldanánk (12) egyenletet.