

Több-test dinamikai szimulációk

4. előadás

Rugalmas test tömegmátrixa
Rugalmas testre ható általánosított erők

Rugalmas testek tömegmátrixa

A test mozgását a referencia KR mozgásával plusz a pontjainak a referenciához képesti (alakváltozásból származó) elmozdulása:

$${}^i \underline{u}^i = {}^i \underline{u}_0^i + {}^i \underline{u}_f^i = {}^i \underline{u}_0^i + \underline{\underline{S}}^i \underline{q}_f^i \quad (1)$$

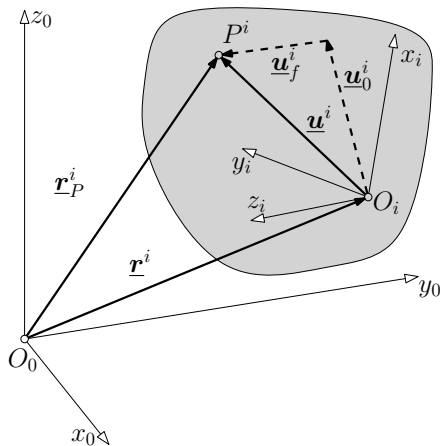
Amelyben

$${}^i \underline{u}^i = \begin{bmatrix} {}^i u_x^i \\ {}^i u_y^i \\ {}^i u_z^i \end{bmatrix}, \quad {}^i \underline{u}_0^i = \begin{bmatrix} {}^i u_{0x}^i \\ {}^i u_{0y}^i \\ {}^i u_{0z}^i \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{S}}^i = \begin{bmatrix} \underline{\underline{S}}_x^i \\ \underline{\underline{S}}_y^i \\ \underline{\underline{S}}_z^i \end{bmatrix}$$

így pl.

$${}^i u_x^i = {}^i u_{0x}^i + \underline{\underline{S}}_{x-f}^i \underline{q}_f^i$$



Az i -ik test mozgási energiája

$$E^i = \frac{1}{2} \int_{V^i} \rho^i \dot{\underline{r}}_P^i{}^T \dot{\underline{r}}_P^i dV^i$$

értelmezésből számítható. Felhasználva a $\dot{\underline{r}}_P^i = \underline{\underline{L}} \dot{\underline{q}}^i$ összefüggést, írhatjuk, hogy

$$E^i = \frac{1}{2} \int_{V^i} \rho^i \dot{\underline{q}}^i{}^T \underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{L}} \dot{\underline{q}}^i dV^i$$

Mivelhogy $\dot{\underline{q}}^i$ időtől függő, és ρ^i és $\underline{\underline{L}}$ helytől függő, így átírhatjuk

$$E^i = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^i{}^T \left[\int_{V^i} \rho^i \underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{L}} dV^i \right] \dot{\underline{q}}^i$$

alakba, amely tömören

$$E^i = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^i{}^T \underline{\underline{M}}^i \dot{\underline{q}}^i$$

Az előző egyenletben

$$\underline{\underline{M}}^i = \int_{V^i} \rho^i \underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{L}} dV^i$$

az i -ik test tömegmátrixa, mely szimmetrikus.

Felhasználva, hogy $\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{B}}^i & {}^i\underline{\underline{T}}\underline{\underline{S}}^i \end{bmatrix}$, részletesen kifejtethetjük:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}^i &= \int_{V^i} \rho^i \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} \\ \underline{\underline{B}}^i \\ ({}^i\underline{\underline{T}}\underline{\underline{S}}^i)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{B}}^i & {}^i\underline{\underline{T}}\underline{\underline{S}}^i \end{bmatrix} dV^i = \\ &= \int_{V^i} \rho^i \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{B}}^i & {}^i\underline{\underline{T}}\underline{\underline{S}}^i \\ \underline{\underline{B}}^i{}^T & \underline{\underline{B}}^i & \underline{\underline{B}}^i{}^T {}^i\underline{\underline{T}}\underline{\underline{S}}^i \\ \text{szimm.} & \underline{\underline{S}}^i{}^T {}^i\underline{\underline{T}}\underline{\underline{S}}^i & \underline{\underline{S}}^i \end{bmatrix} dV^i \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk a transzformációs mátrix ${}^i\underline{\underline{T}}^T {}^i\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{1}}$ ortogonalitását.

A tömegmátrix egyes almátrixait eljelölve írhatjuk, hogy

$$\underline{\underline{M}}^i = \begin{bmatrix} \underline{\underline{m}}_{TT}^i & \underline{\underline{m}}_{TR}^i & \underline{\underline{m}}_{Tf}^i \\ \text{szimm.} & \underline{\underline{m}}_{RR}^i & \underline{\underline{m}}_{Rf}^i \\ & & \underline{\underline{m}}_{ff}^i \end{bmatrix}$$

ahol

$$\underline{\underline{m}}_{TT}^i = \int_{V^i} \rho^i \underline{\underline{1}} dV^i,$$

$$\underline{\underline{m}}_{TR}^i = \int_{V^i} \rho^i \underline{\underline{B}}^i dV^i,$$

$$\underline{\underline{m}}_{Tf}^i = {}^i\mathbf{T} \int_{V^i} \rho^i \underline{\underline{S}}^i dV^i,$$

$$\underline{\underline{m}}_{RR}^i = \int_{V^i} \rho^i \underline{\underline{B}}^i {}^T \underline{\underline{B}}^i dV^i,$$

$$\underline{\underline{m}}_{Rf}^i = \int_{V^i} \rho^i \underline{\underline{B}}^i {}^T {}^i\mathbf{T} \underline{\underline{S}}^i dV^i,$$

$$\underline{\underline{m}}_{ff}^i = \int_{V^i} \rho^i \underline{\underline{S}}^i {}^T \underline{\underline{S}}^i dV^i$$

Az $\underline{\underline{m}}_{TT}^i$ és $\underline{\underline{m}}_{ff}^i$ almátrixok konstansok. A többi mátrix helytől függő, és emiatt implicit módon időtől is.

Az almátrixokat felhasználva a mozgási energia felírható az alábbi módon is:

$$E^i = \frac{1}{2} \left(\dot{\underline{r}}^i{}^T \underline{\underline{m}}_{TT}^i \dot{\underline{r}}^i + 2 \dot{\underline{r}}^i{}^T \underline{\underline{m}}_{TR}^i \dot{\underline{\theta}}^i + 2 \dot{\underline{r}}^i{}^T \underline{\underline{m}}_{Tf}^i \dot{\underline{q}}_f^i + \dot{\underline{\theta}}^i{}^T \underline{\underline{m}}_{RR}^i \dot{\underline{\theta}}^i \right. \\ \left. + 2 \dot{\underline{\theta}}^i{}^T \underline{\underline{m}}_{Rf}^i \dot{\underline{q}}_f^i + \dot{\underline{q}}_f^i{}^T \underline{\underline{m}}_{ff}^i \dot{\underline{q}}_f^i \right)$$

Speciális esetek

Merev test esetén $\dot{\underline{q}}_f^i$ zérus, és a mozgási energia:

$$E^i = \frac{1}{2} \left(\dot{\underline{r}}^i{}^T \underline{\underline{m}}_{TT}^i \dot{\underline{r}}^i + 2 \dot{\underline{r}}^i{}^T \underline{\underline{m}}_{TR}^i \dot{\underline{\theta}}^i + \dot{\underline{\theta}}^i{}^T \underline{\underline{m}}_{RR}^i \dot{\underline{\theta}}^i \right)$$

vagy másképp

$$E^i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\underline{r}}^i{}^T & \dot{\underline{\theta}}^i{}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{m}}_{TT}^i & \underline{\underline{m}}_{TR}^i \\ \text{szimm.} & \underline{\underline{m}}_{RR}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{r}}^i \\ \dot{\underline{\theta}}^i \end{bmatrix} \quad \text{ahol } \underline{\underline{M}}^i = \begin{bmatrix} \underline{\underline{m}}_{TT}^i & \underline{\underline{m}}_{TR}^i \\ \text{szimm.} & \underline{\underline{m}}_{RR}^i \end{bmatrix}$$

Lineárisan rugalmas elemek esetén nincs nagy elmozdulás ($\dot{\underline{r}}^i = \underline{0}$, $\dot{\underline{\theta}}^i = \underline{0}$):

$$E^i = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}_f^i{}^T \underline{\underline{m}}_{ff}^i \dot{\underline{q}}_f^i$$

Térbeli mozgás

A továbbiakban a tömegmátrix egyes komponenseinek kirészletezése következik.

Az $\underline{\underline{m}}_{TT}^i$ almátrix a test translációs mozgásával kapcsolatos. Értelmezés szerint

$$\underline{\underline{m}}_{TT}^i = \int_{V^i} \rho^i \underline{\underline{1}} dV^i = \int_{V^i} \rho^i \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} dV^i$$

integrálás után

$$\underline{\underline{m}}_{TT}^i = \begin{bmatrix} m^i & 0 & 0 \\ 0 & m^i & 0 \\ 0 & 0 & m^i \end{bmatrix}$$

ahol m^i a test össztömege. Ez a mátrix merev és rugalmas testre ugyanaz.

Felhasználva a $\underline{\underline{B}}^i = - {}^i\underline{\underline{T}} {}^i\tilde{\underline{u}}^i {}^i\underline{\underline{H}}^{-1}$ mátrix számítási képletét, az $\underline{\underline{m}}_{TR}^i$ almátrix értelmezéséből kiindulva, írhatjuk, hogy

$$\underline{\underline{m}}_{TR}^i = \int_{V^i} \rho^i \underline{\underline{B}}^i dV^i = - \int_{V^i} \rho^i {}^i\underline{\underline{T}} {}^i\tilde{\underline{u}}^i {}^i\underline{\underline{H}}^{-1} dV^i$$

Mivel ${}^i\underline{\underline{T}}$ és ${}^i\underline{\underline{H}}^{-1}$ helytől függetlenek, az integrál tovább alakítható:

$$\underline{\underline{m}}_{TR}^i = - {}^i\underline{\underline{T}} \left[\int_{V^i} \rho^i {}^i\tilde{\underline{u}}^i dV^i \right] {}^i\underline{\underline{H}}^{-1}$$

Melyet tömören

$$\underline{\underline{m}}_{TR}^i = - {}^i\underline{\underline{T}} {}^i\tilde{\underline{S}}_t^i {}^i\underline{\underline{H}}^{-1} \quad \text{ahol} \quad {}^i\tilde{\underline{S}}_t^i = \int_{V^i} \rho^i {}^i\tilde{\underline{u}}^i dV^i$$

alakban írhatunk. Az ${}^i\tilde{\underline{u}}^i$ ferdeszimmetrikus mátrix értelmezését használva

$${}^i\tilde{\underline{S}}_t^i = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix}^i \quad \text{ahol} \quad {}^i s_k^i = \int_{V^i} \rho^i {}^i u_k^i dV^i, \quad k = x, y, z$$

Vektor alakban pedig

$${}^i\underline{S}_t^i = \int_{V^i} \rho^i {}^i\underline{u}^i dV^i$$

Ezen vektor elemei az i -ik test a referencia KR tengelyeire számított statikai nyomatékait adják. Rugalmas test esetén az alábbi módon írható

$${}^i\underline{S}_t^i = \int_{V^i} \rho^i [{}^i\underline{u}_0^i + {}^i\underline{u}_f^i] dV^i \quad (2)$$

Merev test esetén ${}^i\underline{S}_t^i$ konstans vektor. Továbbá, ha a referencia KR, a súlyponthoz van kötve, akkor

$${}^i\underline{S}_0^i = \int_{V^i} \rho^i {}^i\underline{u}_0^i dV^i = \underline{0}$$

Ilyenkor a forgás és haladás egyenletei csatolatlanok. Rugalmas testek esetén utóbbi állítás nem áll fenn. Ha (2) egyenletet részletezzük, akkor

$${}^i\underline{S}_t^i = \int_{V^i} \rho^i [{}^i\underline{u}_0^i + \underline{\underline{S}}^i \underline{\underline{q}}_f^i] dV^i \quad (3)$$

Utóbbi kifejezés nem ad zérus értéket az alakváltozás miatt. A számítások során így ${}^i\underline{S}_t^i$ és emiatt $\underline{\underline{m}}_{TR}^i$ mátrixokat iteratív módon újra kell számolni. Ha az

$${}^i\underline{S}_f^i = \int_{V^i} \rho^i \underline{S}^i dV^i \quad (4)$$

tehetetlenségi alak-integrált használjuk, akkor (3) egyenlet tovább írható:

$${}^i\underline{S}_t^i = {}^i\underline{S}_O^i + {}^i\underline{S}_f^i \underline{q}_f^i$$

A (4) alatti mátrix szükséges az $\underline{\underline{m}}_{Tf}^i$ almátrix számításához, ugyanis

$$\underline{\underline{m}}_{Tf}^i = {}^i\underline{\underline{T}} \int_{V^i} \rho^i \underline{S}^i dV^i = {}^i\underline{\underline{T}} {}^i\underline{S}_f^i$$

Az $\underline{\underline{m}}_{RR}^i$ almátrix a test forgásával kapcsolatos tehetetlenség, melyet a $\underline{\underline{B}}^i = -{}^i\underline{\underline{T}} {}^i\underline{\underline{\tilde{u}}}^i {}^i\underline{\underline{H}}^{-1}$ képlettel számíthatunk:

$$\underline{\underline{m}}_{RR}^i = \int_{V^i} \rho^i \underline{\underline{B}}^{iT} \underline{\underline{B}}^i dV^i = \int_{V^i} \rho^i \left({}^i\underline{\underline{T}} {}^i\underline{\underline{\tilde{u}}}^i {}^i\underline{\underline{H}}^{-1} \right)^T {}^i\underline{\underline{T}} {}^i\underline{\underline{\tilde{u}}}^i {}^i\underline{\underline{H}}^{-1} dV^i$$

Kihasználva a ${}^i\underline{\underline{T}}$ mátrix ortogonalitását, írhatjuk, hogy

$$\underline{\underline{m}}_{RR}^i = \int_{V^i} \rho^i {}^i\underline{\underline{H}}^{-T} {}^i\underline{\underline{\tilde{u}}}^{iT} {}^i\underline{\underline{\tilde{u}}}^i {}^i\underline{\underline{H}}^{-1} dV^i$$

Mivel ${}^i\underline{\underline{H}}^{-1}$ nem függ helytől, tovább alakíthatjuk:

$$\underline{\underline{m}}_{RR}^i = {}^i\underline{\underline{H}}^{-T} \left[\int_{V^i} \rho^i {}^i\underline{\underline{\tilde{u}}}^{iT} {}^i\underline{\underline{\tilde{u}}}^i dV^i \right] {}^i\underline{\underline{H}}^{-1} \quad (5)$$

Az $\underline{\underline{m}}_{RR}^i$ tömegmátrix a forgáskoordinátáktól és a rugalmas koordinátáktól is függ.

Bevezetve a

$${}^i\mathbf{\underline{\underline{\Theta}}}^i = \int_{V^i} \rho^i {}^i\mathbf{\underline{\underline{\tilde{u}}}}^{iT} {}^i\mathbf{\underline{\underline{\tilde{u}}}}^i dV^i$$

rugalmas testek tehetetlenségi tenzorát, az (5) mátrix tömören

$$\mathbf{m}_{RR}^i = {}^i\mathbf{H}^{-T} {}^i\mathbf{\underline{\underline{\Theta}}}^i {}^i\mathbf{H}^{-1}$$

Figyelembe véve, hogy ${}^i\mathbf{\underline{\underline{\tilde{u}}}}^{iT} = -{}^i\mathbf{\underline{\underline{\tilde{u}}}}^i$, a ${}^i\mathbf{\underline{\underline{\Theta}}}^i$ tehetetlenségi tenzor:

$${}^i\mathbf{\underline{\underline{\Theta}}}^i = \int_{V^i} \rho^i \begin{bmatrix} ({}^iu_y^i)^2 + ({}^iu_z^i)^2 & -{}^iu_y^i {}^iu_x^i & -{}^iu_z^i {}^iu_x^i \\ ({}^iu_x^i)^2 + ({}^iu_z^i)^2 & -{}^iu_z^i {}^iu_y^i & -{}^iu_x^i {}^iu_y^i \\ \text{szimm.} & ({}^iu_x^i)^2 + ({}^iu_y^i)^2 & \end{bmatrix} dV^i \quad (6)$$

Fejtsük ki általánosan az összefüggésben szereplő tagokat ($k, l = x, y, z$):

$$\begin{aligned} \int_{V^i} \rho^i {}^i u_k^i {}^i u_l^i dV^i &= \int_{V^i} \rho^i \left({}^i u_{0k}^i + \underline{\underline{S}}_k^i \underline{q}_f^i \right) \left({}^i u_{0l}^i + \underline{\underline{S}}_l^i \underline{q}_f^i \right) dV^i = \\ &= \int_{V^i} \rho^i {}^i u_{0k}^i {}^i u_{0l}^i dV^i + \int_{V^i} \rho^i {}^i u_{0k}^i \underline{\underline{S}}_l^i dV^i \underline{q}_f^i + \int_{V^i} \rho^i {}^i u_{0l}^i \underline{\underline{S}}_k^i dV^i \underline{q}_f^i \\ &\quad + \underline{q}_f^{iT} \int_{V^i} \rho^i \underline{\underline{S}}_k^{iT} \underline{\underline{S}}_l^i dV^i \underline{q}_f^i \end{aligned}$$

Bevezetve az alábbi tehetetlenségi alak-integrálokat

$${}^i \Theta_{kl}^i = \int_{V^i} \rho^i {}^i u_{0k}^i {}^i u_{0l}^i dV^i, \quad {}^i \underline{\underline{I}}_{kl}^i = \int_{V^i} \rho^i {}^i u_{0k}^i \underline{\underline{S}}_l^i dV^i, \quad {}^i \underline{\underline{S}}_{kl}^i = \int_{V^i} \rho^i \underline{\underline{S}}_k^{iT} \underline{\underline{S}}_l^i dV^i \quad (7)$$

a fenti kifejezés a következő alakra hozható:

$$\int_{V^i} \rho^i {}^i u_k^i {}^i u_l^i dV^i = {}^i \Theta_{kl}^i + {}^i \underline{\underline{I}}_{kl}^i \underline{q}_f^i + {}^i \underline{\underline{I}}_{lk}^i \underline{q}_f^i + \underline{q}_f^{iT} {}^i \underline{\underline{S}}_{kl}^i \underline{q}_f^i$$

Behelyettesítve a rugalmas test (6) alatti képletébe

$${}^i\Theta^i = \begin{bmatrix} {}^i\Theta_{yy}^i + {}^i\Theta_{zz}^i + 2 \left({}^i\mathbf{l}_{=yy}^i + {}^i\mathbf{l}_{=zz}^i \right) \underline{\mathbf{q}}_f^i + \underline{\mathbf{q}}_f^{iT} \left({}^i\mathbf{S}_{=yy}^i + {}^i\mathbf{S}_{=zz}^i \right) \underline{\mathbf{q}}_f^i \\ {}^i\Theta_{xy}^i + \left({}^i\mathbf{l}_{=xy}^i + {}^i\mathbf{l}_{=yx}^i \right) \underline{\mathbf{q}}_f^i + \underline{\mathbf{q}}_f^{iT} {}^i\mathbf{S}_{=xy}^i \underline{\mathbf{q}}_f^i \\ {}^i\Theta_{xz}^i + \left({}^i\mathbf{l}_{=xz}^i + {}^i\mathbf{l}_{=zx}^i \right) \underline{\mathbf{q}}_f^i + \underline{\mathbf{q}}_f^{iT} {}^i\mathbf{S}_{=xz}^i \underline{\mathbf{q}}_f^i \\ {}^i\Theta_{yx}^i + \left({}^i\mathbf{l}_{=yx}^i + {}^i\mathbf{l}_{=xy}^i \right) \underline{\mathbf{q}}_f^i + \underline{\mathbf{q}}_f^{iT} {}^i\mathbf{S}_{=yx}^i \underline{\mathbf{q}}_f^i \\ {}^i\Theta_{xx}^i + {}^i\Theta_{zz}^i + 2 \left({}^i\mathbf{l}_{=xx}^i + {}^i\mathbf{l}_{=zz}^i \right) \underline{\mathbf{q}}_f^i + \underline{\mathbf{q}}_f^{iT} \left({}^i\mathbf{S}_{=xx}^i + {}^i\mathbf{S}_{=zz}^i \right) \underline{\mathbf{q}}_f^i \\ {}^i\Theta_{yz}^i + \left({}^i\mathbf{l}_{=yz}^i + {}^i\mathbf{l}_{=zy}^i \right) \underline{\mathbf{q}}_f^i + \underline{\mathbf{q}}_f^{iT} {}^i\mathbf{S}_{=yz}^i \underline{\mathbf{q}}_f^i \\ {}^i\Theta_{zx}^i + \left({}^i\mathbf{l}_{=zx}^i + {}^i\mathbf{l}_{=xz}^i \right) \underline{\mathbf{q}}_f^i + \underline{\mathbf{q}}_f^{iT} {}^i\mathbf{S}_{=zx}^i \underline{\mathbf{q}}_f^i \\ {}^i\Theta_{zy}^i + \left({}^i\mathbf{l}_{=zy}^i + {}^i\mathbf{l}_{=yz}^i \right) \underline{\mathbf{q}}_f^i + \underline{\mathbf{q}}_f^{iT} {}^i\mathbf{S}_{=zy}^i \underline{\mathbf{q}}_f^i \\ {}^i\Theta_{xx}^i + {}^i\Theta_{yy}^i + 2 \left({}^i\mathbf{l}_{=xx}^i + {}^i\mathbf{l}_{=yy}^i \right) + \underline{\mathbf{q}}_f^{iT} \left({}^i\mathbf{S}_{=xx}^i + {}^i\mathbf{S}_{=yy}^i \right) \underline{\mathbf{q}}_f^i \end{bmatrix}$$

A (7) egyenletekben bemutatott tehetetlenségi alak-integrálok az $\underline{\underline{m}}_{Rf}^i$ almátrix számításánál is megjelennek. Kiindulva az értelmezéséből, és kihasználva, hogy ${}^i\underline{\underline{T}}$ ortogonális, ill., hogy ${}^i\underline{\underline{u}}$ ferdeszimmetrikus

$$\begin{aligned}\underline{\underline{m}}_{Rf}^i &= \int_{V^i} \rho^i \underline{\underline{B}}^i{}^T {}^i\underline{\underline{T}} \underline{\underline{S}}^i dV^i = - \int_{V^i} \rho^i \left({}^i\underline{\underline{T}} {}^i\underline{\underline{u}}^i {}^i\underline{\underline{H}}^{-1} \right)^T {}^i\underline{\underline{T}} \underline{\underline{S}}^i dV^i \\ &= - \int_{V^i} \rho^i {}^i\underline{\underline{H}}^{-T} {}^i\underline{\underline{u}}^i{}^T \underline{\underline{S}}^i dV^i = {}^i\underline{\underline{H}}^{-T} \int_{V^i} \rho^i {}^i\underline{\underline{u}}^i \underline{\underline{S}}^i dV^i\end{aligned}$$

amelyet tömören

$$\underline{\underline{m}}_{Rf}^i = {}^i\underline{\underline{H}}^{-T} {}^i\underline{\underline{l}}_{Rf}^i$$

alakban írhatunk, ahol

$${}^i\underline{\underline{l}}_{Rf}^i = \int_{V^i} \rho^i {}^i\underline{\underline{u}}^i \underline{\underline{S}}^i dV^i$$

Részletesen kiírva az ${}^i\ddot{\underline{u}}^i$ ferdeszimmetrikus mátrix elemeivel és $\underline{\underline{S}}^i$ soraival

$$\begin{aligned}
 {}^i\mathbf{l}_{Rf}^i &= \int_{V^i} \rho^i \begin{bmatrix} {}^i u_y^i \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{z}}}^i - {}^i u_z^i \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{y}}}^i \\ {}^i u_z^i \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{x}}}^i - {}^i u_x^i \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{z}}}^i \\ {}^i u_x^i \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{y}}}^i - {}^i u_y^i \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{x}}}^i \end{bmatrix} dV^i \\
 &= \int_{V^i} \rho^i \begin{bmatrix} \left({}^i u_{0y}^i + \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{y}}}^i \mathbf{q}_f^i \right) \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{z}}}^i - \left({}^i u_{0z}^i + \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{z}}}^i \mathbf{q}_f^i \right) \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{y}}}^i \\ \left({}^i u_{0z}^i + \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{z}}}^i \mathbf{q}_f^i \right) \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{x}}}^i - \left({}^i u_{0x}^i + \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{x}}}^i \mathbf{q}_f^i \right) \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{z}}}^i \\ \left({}^i u_{0x}^i + \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{x}}}^i \mathbf{q}_f^i \right) \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{y}}}^i - \left({}^i u_{0y}^i + \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{y}}}^i \mathbf{q}_f^i \right) \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{x}}}^i \end{bmatrix} dV^i \\
 &= \mathbf{q}_f^{iT} \int_{V^i} \rho^i \begin{bmatrix} \left(\underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{y}}}^{iT} \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{z}}}^i - \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{z}}}^{iT} \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{y}}}^i \right) \\ \left(\underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{z}}}^{iT} \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{x}}}^i - \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{x}}}^{iT} \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{z}}}^i \right) \\ \left(\underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{x}}}^{iT} \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{y}}}^i - \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{y}}}^{iT} \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{x}}}^i \right) \end{bmatrix} dV^i + \int_{V^i} \rho^i \begin{bmatrix} {}^i u_{0y}^i \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{z}}}^i - {}^i u_{0z}^i \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{y}}}^i \\ {}^i u_{0z}^i \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{x}}}^i - {}^i u_{0x}^i \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{z}}}^i \\ {}^i u_{0x}^i \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{y}}}^i - {}^i u_{0y}^i \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{x}}}^i \end{bmatrix} dV^i
 \end{aligned}$$

Kihasználva a (7) tehetetlenségi alak-integrálokat, írhatjuk, hogy

$${}^i\mathbf{I}_{=Rf}^i = \mathbf{q}_f^i{}^T \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{S}_{=yz}^i - {}^i\mathbf{S}_{=yz}^{iT} \\ {}^i\mathbf{S}_{=zx}^i - {}^i\mathbf{S}_{=zx}^{iT} \\ {}^i\mathbf{S}_{=xy}^i - {}^i\mathbf{S}_{=xy}^{iT} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{I}_{=yz}^i - {}^i\mathbf{I}_{=zy}^i \\ {}^i\mathbf{I}_{=zx}^i - {}^i\mathbf{I}_{=xz}^i \\ {}^i\mathbf{I}_{=xy}^i - {}^i\mathbf{I}_{=yx}^i \end{bmatrix}$$

Végeztül az $\mathbf{m}_{ff}^i$ almátrix nem függ az általános koordinátáktól, emiatt konstans. Tehetlenségi alak-integrál függvényében számítható:

$$\mathbf{m}_{ff}^i = \int_{V^i} \rho^i \mathbf{S}^i{}^T \mathbf{S}^i dV^i = {}^i\mathbf{S}_{=xx}^i + {}^i\mathbf{S}_{=yy}^i + {}^i\mathbf{S}_{=zz}^i$$

Koncentrált tömegek

Az előzőekben bemutatott formalizmust konzisztens tömeg formalizmusnak nevezik.

A mozgási energia előállításának másik módja koncentrált tömegek alkalmazása. Ilyenkor a rugalmas test egyes csomópontjainak elmozdulását vizsgáljuk. Alakfüggvények helyett alak-vektorokat használunk a csomópontok közötti relatív mozgás leírásához. Ezen vektorok származhatnak feltételezésekéből, mérésekből vagy modális alakokból. Az alak-vektorok lineárisan függetlennek kell lenniük és tartalmazniuk kell az alacsony sajátfrekvenciákhoz tartozó rezgéseképeket. A test teljes tömeg szét van osztva a csomópontok között.

Az i -ik test j -ik csomópontjának rugalmas alakváltozásból származó elmozdulása:

$$\underline{u}_f^i = \underline{\underline{N}}^{ij} \underline{q}_f^j, \quad j = 1, \dots, n_j$$

ahol $\underline{\underline{N}}^{ij}$ a feltételezett alak-mátrix azon partíciója, amely a j csomópont elmozdulásával kapcsolatos, és n_j a csomópontok száma. Az $\underline{\underline{N}}^{ij}$ egy $3 \times n_f$ méretű mátrix, ahol n_f az i -ik test összes rugalmas koordinátájának száma.

Az $\underline{\underline{N}}^{ij}$ numerikus számításának egyik lehetősége a végeelem-módszer használata a sajátfrekvenciák és rezgések meghatározására.

A csomópont globális helyének számítására szolgáló összefüggést az alábbiak szerint írhatjuk:

$$\underline{r}^{ij} = \underline{r}^i + {}^i\underline{\underline{T}} \left({}^i\underline{u}_0^{ij} + {}^i\underline{u}_f^{ij} \right)$$

ahol ${}^i\underline{u}_0^{ij}$ a j -ik csomópont helyvektora alakváltozás előtti állapotban.
Idő szerint deriválva:

$$\dot{\underline{r}}^{ij} = \dot{\underline{r}}^i + {}^i\dot{\underline{\underline{T}}} {}^i\underline{u}_0^{ij} + {}^i\underline{\underline{T}} \underline{\underline{N}}^{ij} \dot{\underline{q}}_f^i$$

A mozgási energia a koncentrált tömegek mozgási energiáinak összege:

$$E^i = \sum_{j=1}^{n_j} E^{ij}$$

ahol

$$E^{ij} = \frac{1}{2} m^{ij} \dot{\underline{r}}^{ij\ T} \dot{\underline{r}}^{ij}$$

ahol m^{ij} a csomópont tömege.

Koncentrált tömegpontokra elvégezve hasonló számítást, mint a konzisztens tömeg formalizmusnál, a mozgási energia felírható következőképp (levezetés nélkül):

$$E^i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\underline{r}}^i{}^T & \dot{\underline{\theta}}^i{}^T & \dot{\underline{q}}_f^i{}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{m}}_{TT}^i & \text{szimm.} \\ \underline{\underline{m}}_{RT}^i & \underline{\underline{m}}_{RR}^i \\ \underline{\underline{m}}_{fT}^i & \underline{\underline{m}}_{fR}^i & \underline{\underline{m}}_{ff}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{r}}^i \\ \dot{\underline{\theta}}^i \\ \dot{\underline{q}}_f^i \end{bmatrix}$$

ahol a tömegmátrix almatrixai:

$$\underline{\underline{m}}_{TT}^i = \sum_{j=1}^{n_j} m^{ij} \underline{\underline{1}}^j,$$

$$\underline{\underline{m}}_{RT}^i = \sum_{j=1}^{n_j} m^{ij} \underline{\underline{B}}^{ij}{}^T$$

$$\underline{\underline{m}}_{RR}^i = \sum_{j=1}^{n_j} m^{ij} \underline{\underline{B}}^{ij}{}^T \underline{\underline{B}}^{ij}$$

$$\underline{\underline{m}}_{fT}^i = \sum_{j=1}^{n_j} m^{ij} \underline{\underline{N}}^{ij}{}^T {}^i\underline{\underline{T}}$$

$$\underline{\underline{m}}_{fR}^i = \sum_{j=1}^{n_j} m^{ij} \underline{\underline{N}}^{ij}{}^T {}^i\underline{\underline{T}} \underline{\underline{B}}^{ij}$$

$$\underline{\underline{m}}_{ff}^i = \sum_{j=1}^{n_j} m^{ij} \underline{\underline{N}}^{ij}{}^T \underline{\underline{N}}^{ij}$$

Ahol a $\underline{\underline{B}}^{ij}$ -t annak oszlopaival adjuk meg: $\text{Col}(\underline{\underline{B}}^{ij})_k = \frac{\partial}{\partial \theta_k^i} ({}^i\underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{u}}^{ij})$

Általánosított erők

Az i -ik testre ható általánosított erőket vizsgáljuk. Figyelembe vesszük:

- alakváltozásból származó rugalmas erők
- terhelő (külső) erők
- rugók és csillapítások által kifejtett erők

Általánosított rugalmas erők

A következőkben lineáris izotrop anyagú tagokat vizsgálunk.

A rugalmas (belső) erők virtuális munkája:

$$\delta W_b^i = - \int_{(V)} \underline{\underline{T}}^i : \delta \underline{\underline{A}}^i dV = - \int_{(V)} \underline{\underline{\sigma}}^i{}^T \delta \underline{\underline{\epsilon}}^i dV = - \int_{(V)} \underline{\underline{\epsilon}}^i{}^T \underline{\underline{C}}^i \delta \underline{\underline{\epsilon}}^i dV$$

Ahol figyelembe vettük, hogy $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\epsilon}}$ ($\underline{\underline{C}}$ az anyagállandók mátrixa).

Mivel a merevtestszerű mozgás állandó nyúlásokhoz tartozik, és az alakváltozást a referencia KR-ben írtuk le, az általános leírást nem sérti, ha a nyúlásokat az alábbi összefüggés szerint adjuk meg:

$$\underline{\underline{\epsilon}}^i = \underline{\underline{D}}^i{}^i \underline{\underline{u}}_f^i = \underline{\underline{D}}^i \underline{\underline{S}}^i \underline{\underline{q}}_f^i$$

Behelyettesítés után kapjuk, hogy

$$\delta W_b^i = - \int_{(V)} \underline{q}_f^i{}^T (\underline{D}^i \underline{S}^i)^T \underline{C} \underline{D}^i \underline{S}^i \delta \underline{q}_f^i dV = - \underline{q}_f^i{}^T \left[\int_{(V)} (\underline{D}^i \underline{S}^i)^T \underline{C} \underline{D}^i \underline{S}^i dV \right] \delta \underline{q}_f^i$$

Tömören:

$$\delta W_b^i = - \underline{q}_f^i{}^T \underline{K}_{ff}^i \delta \underline{q}_f^i$$

Ahol

$$\underline{K}_{ff}^i = \int_{(V)} (\underline{D}^i \underline{S}^i)^T \underline{C} \underline{D}^i \underline{S}^i dV$$

a szimmetrikus, pozitív definit merevségi mátrix, amely az i test rugalmas koordinátáival van kapcsolatban.

A virtuális munka az összes koordinátával kifejezve:

$$\delta W_b^i = - \begin{bmatrix} \underline{r}^i{}^T & \underline{\theta}^i{}^T & \underline{q}_f^i{}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{K}_{ff}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \underline{r}^i \\ \delta \underline{\theta}^i \\ \delta \underline{q}_f^i \end{bmatrix}$$

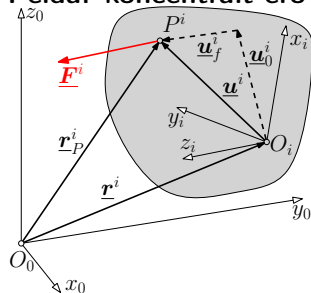
Általánosított külső erők

Az i -ik testen működő összes külső erő virtuális munkája

$$\delta W_t^i = \underline{Q}_t^i{}^T \delta \underline{q}^i = \begin{bmatrix} \underline{Q}_T^i{}^T & \underline{Q}_R^i{}^T & \underline{Q}_f^i{}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{r}^i \\ \underline{\theta}^i \\ \underline{q}_f^i \end{bmatrix}$$

alakban írható, ahol $\underline{Q}_t^i$ az i -ik testhez tartozó általános koordinátákhoz tartozó általánosított erők vektora.

Példa: koncentrált erő



Az i -ik rugalmas test P pontjában az $\underline{F}^i(\underline{q}^i, t)$ erő hat, amelynek álló KR-beli koordinátái:

$$\underline{F}^i = \begin{bmatrix} F_x^i & F_y^i & F_z^i \end{bmatrix}$$

Az $\underline{F}^i$ erő virtuális munkája

$$\delta W_t^i = \underline{F}^i{}^T \delta \underline{r}_P^i$$

Figyelembe véve, hogy az $\underline{r}_P^i$ álló KR-beli helye

$$\underline{r}_P^i = \underline{r}^i + {}^i\underline{T} {}^i\underline{u}^i$$

amelynek virtuális megváltozása

$$\begin{aligned} \delta \underline{r}_P^i &= \delta \underline{r}^i + \frac{\partial}{\partial \underline{\theta}^i} [{}^i\underline{T} {}^i\underline{u}^i] \delta \underline{\theta}^i + {}^i\underline{T} \underline{S}^i \delta \underline{q}_f^i = \delta \underline{r}^i + \underline{B}^i \delta \underline{\theta}^i + {}^i\underline{T} \underline{S}^i \delta \underline{q}_f^i \\ &= \begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{B}^i & {}^i\underline{T} \underline{S}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{r}^i \\ \underline{\theta}^i \\ \underline{q}_f^i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Behlyettesítve:

$$\delta W_t^i = \underline{F}^{iT} \begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{B}^i & {}^i\underline{T} \underline{S}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{r}^i \\ \underline{\theta}^i \\ \underline{q}_f^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Q}_T^{iT} & \underline{Q}_R^{iT} & \underline{Q}_f^{iT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{r}^i \\ \underline{\theta}^i \\ \underline{q}_f^i \end{bmatrix}$$

Amiből beazonosítható, hogy

$$\underline{Q}_T^{iT} = \underline{F}^{iT}, \quad \underline{Q}_R^{iT} = \underline{F}^{iT} \underline{B}^i, \quad \underline{Q}_f^{iT} = \underline{F}^{iT} {}^i\underline{T} \underline{S}^i$$