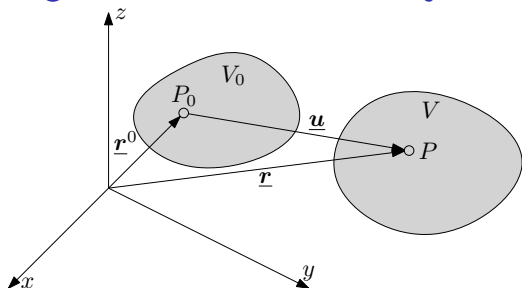


Több-test dinamikai szimulációk

3. előadás

Rugalmas testek mechanikája,
Mozgó referencia koordináta-rendszeres formalizmus

Rugalmas testek kinematikája



A P_0 -ban elhelyezkedő pont P -be mozdul el. Elmozdulásvektora:

$$\underline{u} = \underline{r} - \underline{r}^0$$

ahol

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}, \quad \underline{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \underline{r}_0 = \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix}$$

A mozgástörvényből és az elmozdulásfüggvényből képezhetők az $\underline{\underline{F}}$ alakváltozási gradiens, és az $\underline{\underline{U}}$ elmozdulás gradiens tenzorok:

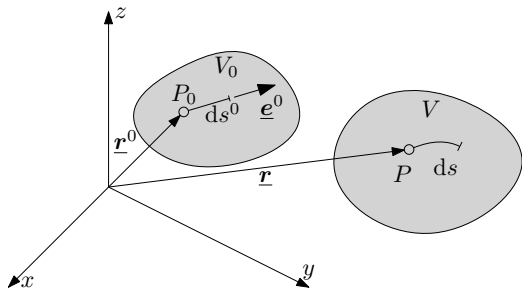
$$\underline{\underline{F}} = \underline{r} \circ \nabla^0 = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{r}^0}, \quad \underline{\underline{U}} = \underline{u} \circ \nabla^0 = \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{r}^0}, \quad \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{U}}$$

mátrixaik:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^0} & \frac{\partial x}{\partial y^0} & \frac{\partial x}{\partial z^0} \\ \frac{\partial y}{\partial x^0} & \frac{\partial y}{\partial y^0} & \frac{\partial y}{\partial z^0} \\ \frac{\partial z}{\partial x^0} & \frac{\partial z}{\partial y^0} & \frac{\partial z}{\partial z^0} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x^0} & \frac{\partial u_x}{\partial y^0} & \frac{\partial u_x}{\partial z^0} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x^0} & \frac{\partial u_y}{\partial y^0} & \frac{\partial u_y}{\partial z^0} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x^0} & \frac{\partial u_z}{\partial y^0} & \frac{\partial u_z}{\partial z^0} \end{bmatrix}$$

Alakváltozási mértékek

Vizsgáljuk a $\hat{P}$ anyagi pont elemi környezetében lévő környezetében lévő anyagi vonal hosszát.



Ahol $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}$ a Cauchy-Green féle alakváltozási tenzor. Figyelembe véve, hogy $d\underline{r}^0 = ds^0 \underline{e}^0$, írható, hogy

$$ds^2 = (ds^0)^2 (\underline{e}^0)^T \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} \underline{e}^0$$

Az elemi vonalelem hossza:

$$(ds^0)^2 = (d\underline{r}^0)^2, \quad ds^2 = d\underline{r}^2$$

ahol

$$d\underline{r} = \underline{\underline{F}} d\underline{r}^0$$

Ezt behelyettesítve a fenti egyenletbe, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} ds^2 &= (d\underline{r}^0)^T \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} d\underline{r}^0 = \\ &= (d\underline{r}^0)^T \underline{\underline{C}} d\underline{r}^0 \end{aligned}$$

Felhasználva az előző összefüggést, a Lagrange-féle nyúlás az alábbi módon számítható:

$$\varepsilon^L = \frac{1}{2} \frac{ds^2 - (ds^0)^2}{(ds^0)^2} = \underline{e}^0{}^T \frac{1}{2} \left(\underline{F}^T \underline{F} - \underline{\underline{1}} \right) \underline{e}^0 = \underline{e}^0{}^T \underline{\underline{E}} \underline{e}^0$$

ahol $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{F}^T \underline{F} - \underline{\underline{1}})$ a Green-Lagrange alakváltozási tenzor. Az elmozdulási gradienssel kifejezve:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}}^T + \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{U}} \right)$$

Az alakváltozási tenzor szimmetrikus, ezért 6 független koordinátával rendelkezik. Ezt a 6 koordinátát az $\underline{\underline{\varepsilon}}$ vektorba írjuk:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} \end{bmatrix}^T$$

Mivel $\underline{\underline{E}}$ az $\underline{u}$ elmozdulás gradienséből származtatott, fel lehet írni az $\underline{u}$ segítségével egy $\underline{\underline{D}}$ differenciál operátor mátrix felhasználásával:

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{D}} \underline{u}$$

Kis alakváltozások

Kis alakváltozások esetén $\underline{\underline{U}} = \underline{u} \circ \nabla^0$ minden koordinátája kicsi. Ebből következik, hogy $\underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{U}}$ elhanyagolható: $\underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{U}} \approx \underline{\underline{0}}$. Következésképp a Green-Lagrange alakváltozási tenzor az

$$\underline{\underline{E}} \approx \frac{1}{2} (\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}}^T) = \underline{\underline{A}}$$

kis alakváltozások esetén használt alakváltozási tenzor.

Ilyenkor az $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{D}} \underline{u}$ módon számolt összefüggésben a $\underline{\underline{D}}$ mátrixa a következőképp írható:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y^0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z^0} \\ \frac{\partial}{\partial y^0} & \frac{\partial}{\partial x^0} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z^0} & 0 & \frac{\partial}{\partial x^0} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z^0} & \frac{\partial}{\partial y^0} \end{bmatrix}$$

Az alakváltozási tenzor ε_{xx} , ε_{yy} és ε_{zz} a fajlagos nyúlások míg $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$, $\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz}$ és $\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz}$ koordinátái a fajlagos szögtorzulások.

Kis alakváltozások esetén az $\underline{e} \approx \underline{e}^0$ irányú anyagi vonal nyúlása

$$\varepsilon^L \approx \varepsilon = \underline{e}^T \underline{\underline{A}} \underline{e}$$

Az $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}}^T)$ alakváltozási tenzor az $\underline{\underline{U}}$ elmozdulás gradiens szimmetrikus része. Az $\underline{\underline{U}}$ aszimmetrikus része a

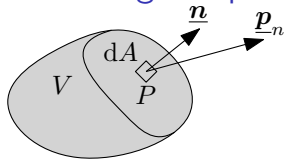
$$\underline{\underline{\Psi}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{U}} - \underline{\underline{U}}^T)$$

forgástenzor a $\hat{P}$ anyagi pont környezetének kis mértékű alakváltozás során fellépő szögelfordulását írja le:

$$\underline{\underline{\Psi}} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{bmatrix}$$

ahol ϕ_x , ϕ_y és ϕ_z az anyagi pont x , y és z tengelyek körüli kis mértékű merevtestszerű elforgása.

Feszültségi állapot



Tekintsük egy test P pontját, ahol a testet egy $\underline{n}$ normálisú síkkal képzeletben kettévágjuk. A P pont dA felületén $\underline{p}_n = \underline{p}_n(\underline{n})$ megoszló erő ébred, melyet feszültségvektornak hívunk.

A feszültségvektort a P pontbeli $\underline{\underline{T}}$ feszültségtenzor segítségével számíthatjuk:

$$\underline{p}_n = \underline{\underline{T}} \underline{n}$$

A feszültségtenzor mátrixa:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

A feszültségi tenzor szimmetrikus, ezért 6 független koordinátával rendelkezik. Ezt a 6 koordinátát az $\underline{\sigma}$ vektorba írjuk:

$$\underline{\sigma} = \left[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \right]^T$$

Egyensúlyi egyenletek (mozgásegyenletek)

Egy testre felírt impulzustételből levezethető a mozgásegyenlet:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} \nabla^0 + \underline{\underline{\mathbf{q}}} = \rho \underline{\underline{\ddot{\mathbf{u}}}}$$

ahol $\underline{\underline{\mathbf{q}}}$ a térfogati terhelés.

Mátrixos alakban a $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ differenciál-operátor mátrixszal:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}^T \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \underline{\underline{\mathbf{q}}} = \rho \underline{\underline{\ddot{\mathbf{u}}}}$$

A testre felírt perdülettételből a feszültségtenzor szimmetriája következik:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T$$

Anyagegyenletek

A test $\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} \end{bmatrix}^T$ alakváltozási és $\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{bmatrix}^T$ feszültségi állapota között az anyagegyenletek jelentenek kapcsolatot.

Lineárisan rugalmas anyag esetén a kettő között a

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{C}} \underline{\varepsilon}$$

összefüggés érvényes, ahol $\underline{\underline{C}}$ az anyagállandók mátrixa.

Homogén izotrop anyag esetén

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}$$

ahol λ és μ Lamé-féle anyagállandók. ($G = \mu$, $E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$, $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$)

Virtuális munka és belső erők munkája

A virtuális mennyiségek mátrixos írásmódban:

$$\delta \underline{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \delta u_x & \delta u_y & \delta u_z \end{bmatrix}^T$$

$$\delta \underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \delta \epsilon_{xx} & \delta \epsilon_{yy} & \delta \epsilon_{zz} & \delta \epsilon_{xy} & \delta \epsilon_{xz} & \delta \epsilon_{yz} \end{bmatrix}^T$$

$$\delta \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}} \delta \underline{\mathbf{u}} \quad \delta \underline{\underline{\epsilon}}^T = \delta \underline{\mathbf{u}}^T \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T$$

A virtuális munka elv xyz KR-ben:

$$\delta W = \delta W_b + \delta W_t - \delta W_i = 0 \quad (1)$$

ahol δW_b a belső erők munkája:

$$\begin{aligned} \delta W_b &= - \int_{(V)} \underline{\underline{\mathbf{T}}} : \delta \underline{\underline{\mathbf{A}}} dV = - \int_{(V)} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^T \delta \underline{\underline{\epsilon}} = - \int_{(V)} \underline{\underline{\epsilon}}^T \underline{\underline{\mathbf{C}}} \delta \underline{\underline{\epsilon}} = \\ &= - \int_{(V)} \underline{\mathbf{u}}^T \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T \underline{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \delta \underline{\mathbf{u}} dV \end{aligned}$$

δW_t a külső ER virtuális munkája ($\underline{\bar{p}}$ az előírt terhelés):

$$\delta W_t = \int_{(V)} \underline{q}^T \delta \underline{u} dV + \int_{(S_p)} \underline{\bar{p}}^T \delta \underline{u} dS$$

δW_i a tehetetlenségi erők virtuális munkája:

$$\delta W_i = \int_{(V)} \rho \ddot{\underline{u}}^T \delta \underline{u} dV$$

Behelyettesítve a virtuális munka elv (1) egyenletébe, kapjuk, hogy

$$- \int_{(V)} \underline{u}^T \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{D}} \delta \underline{u} dV + \int_{(V)} \underline{q}^T \delta \underline{u} dV + \int_{(S_p)} \underline{\bar{p}}^T \delta \underline{u} dS - \int_{(V)} \rho \ddot{\underline{u}}^T \delta \underline{u} dV = 0$$

amely kinematikailag lehetséges elmozdulásmező esetén áll fenn, azaz $\underline{u} = \underline{\bar{u}}$ és $\delta \underline{u} = \underline{0}$ ahol $\underline{\bar{u}}$ az előírt elmozdulás S_u felületen.

Mozgó referencia koordináta-rendszeres formalizmus

A továbbiakban rugalmas testeket is tartalmazó több-test rendszereket vizsgálunk. Célunk a mozgásegyenletek olyan formalizmusának kifejlesztése, amelyben az alakváltozásra képes test nagymértékű transzlációs és rotációs mozgást végez. Ennek érdekében a mozgó referencia koordináta-rendszeres formalizmust használjuk.

Ilyen rendszerek esetén a merev testeknél előforduló tömeg-, tehetetlenségi tenzoron és általánosított erőkön kívül a lineárisan rugalmas szerkezeteknél jelentkező tömeg- merevségi és általánosított erők vektora továbbá inercia alak-integrálok jelennek meg a mozgásegyenletek felírásánál. Ezek az inercia alak-integrálok a referencia és rugalmas mozgások csatolásánál jelentkező nemlineáris tehetetlenségi tagoknál jelentkeznek.

A bemutatásra kerülő formalizmusban a testek konfigurációja két koordináta-csoporttal írható le:

- referencia koordináták: a test referencia KR-ének helyzetét írják le
- rugalmas koordináták: a test referencia KR-ben elszenvedett alakváltozását írják le

A mozgási energia és a virtuális munka ezen két koordináta-csoport függvényében írható le.

A rendszerben fellelhető kényszerek a kényszeregyenletekkel írhatók le, amelyek szintén függhetnek referencia- és rugalmas koordinátáktól, illetve időtől is.

A rendszer kényszerei felhasználhatók a mozgásegyenletek minimálkoordinátás vagy Lagrange-multiplikátoros megfogalmazására.

Kinematikai leírás

Több-test rendszerek kétféle tagokból tevődnek össze:

- ➊ Merev testeknek tekinthető tagok, melyek mozgás leírható véges számú koordinátával. Pl. térbeli mozgás esetén 6 független koordinátával.
- ➋ Rugalmas testek, mint pl. rudak, lemezek, héjak. Ilyen test bármely pontjának elmozdulását leíró koordináták száma elvben végtelen.

A rugalmas tagok viselkedése, mint korábban azt láttuk, parciális differenciálegyenletekkel írható le.

A változók szétválasztásának módszerével a vonatkozó egyenletek megoldása végtelen sorba fejtett elmozdulásmező segítségével adható meg:

$$\begin{aligned} {}^i u_{fx} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k & \text{ahol } f_k &= f_k(x, y, z) \\ {}^i u_{fy} &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k g_k & \text{ahol } g_k &= g_k(x, y, z) \\ {}^i u_{fz} &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k h_k & \text{ahol } h_k &= h_k(x, y, z) \end{aligned} \quad (2)$$

ahol ${}^i u_{fx}$, ${}^i u_{fy}$ és ${}^i u_{fz}$ tetszőleges, alakváltozás előtt x , y , z koordinátákkal rendelkező pont $\underline{{}^i u_f} = [{}^i u_{fx} \quad {}^i u_{fy} \quad {}^i u_{fz}]^T$ elmozduláskoordinátái, mely így helytől és időtől függ. Az a_k , b_k és c_k együtthatók időtől függő koordináták, míg f_k , g_k , h_k az ún. bázisfüggvények, melyek helytől függenek. Mindegyik bázisfüggvény kinematikailag lehetséges kell legyen. További kritérium, hogy a sorozatnak a pontos megoldáshoz kell konvergálnia.

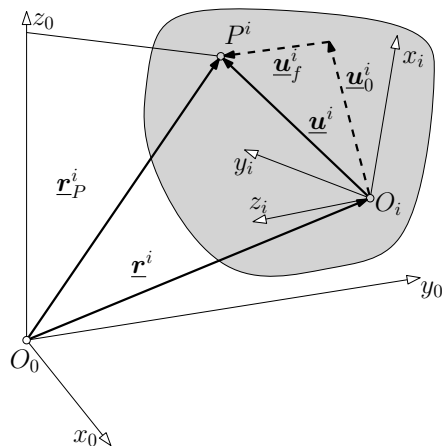
Rayleigh-Ritz közelítés

Mivel végtelen számú koordinátával nehéz számolni, ezért a klasszikus Rayleigh-Ritz-módszert (vagy Galerkin-módszert) alkalmazunk, ahol minden pont elmozdulását véges számú koordinátával fejezzük ki. A (2) egyenlet esetén a sorfejtést véges számú tagra korlátozzuk:

$$\begin{aligned} {}^i u_{fx} &= \sum_{k=1}^l a_k f_k \\ {}^i u_{fy} &= \sum_{k=1}^m b_k g_k \\ {}^i u_{fz} &= \sum_{k=1}^n c_k h_k \end{aligned} \tag{3}$$

Ezek a sorok Cauchy-sorok, azaz a (2) függvényekhez konvergálnak, tehát megfelelő számú koordináta felhasználásával az egzakt megoldás tetszőleges mértékben megközelíthető.

Mozgó KR-es leírás



A test mozgását a referencia KR mozgásával plusz a pontjainak a referenciához képesti (alakváltozásból származó) elmozdulása. Ha a feltételezett elmozdulásmező merevtestszerű mozgást is leír, akkor ezt megfelelő peremfeltétek előírásával ki kell küszöbölni.

A (3) egyenletet az alábbi mátrixegyenletként írhatjuk fel:

$${}^i \underline{u}_f^i = \underline{\underline{S}} \underline{q}_f$$

ahol $\underline{\underline{S}}$ az alakmátrix, ami az f_k , g_k , h_k bázisfüggvényeket tartalmazza, míg $\underline{q}_f$ az általánosított rugalmas koordináták vektora, amely az a_k , b_k és c_k együtthatókat tartalmazza.

A test $\mathcal{K}_i$ referencia KR-ének helyzetét az álló $\mathcal{K}_0$ KR-ben az origójának helyét megadó $\underline{r}^i$ helyvektort és az orientációját megadó $\underline{\theta}^i$ forgáskoordinátákat tartalmazó általánosított

$$\underline{q}_r^i = \underline{\check{r}}_r^i = \begin{bmatrix} \underline{r}^i \\ \underline{\theta}^i \end{bmatrix}$$

referencia-koordináta vektor adja meg. A test referencia KR-e nem kell valamely pontjához kötve legyen, de fontos, hogy a testnek ne legyen merevtestszerű mozgása a referencia KR-hez képest.

Helykoordináták

Ha rugalmas testeket vizsgálunk két pont távolsága nem állandó. Az i -ik test egy tetszőleges P pont helyét a referencia KR-ben az

$${}^i\underline{u}^i = {}^i\underline{u}_0^i + {}^i\underline{u}_f^i = {}^i\underline{u}_0^i + \underline{\underline{S}}^i \underline{q}_f^i \quad (4)$$

összefüggéssel adhatunk meg, ahol ${}^i\underline{u}_0^i$ a P helyvektora, és ${}^i\underline{u}_f^i$ a rugalmas elmozdulásvektor.

A tetszőleges P pont helyét az álló $\mathcal{K}_0$ KR-ben az

$$\underline{r}_P^i = \underline{r}^i + {}^i\underline{\mathbb{T}} \, {}^i\underline{u}^i = \underline{r}^i + {}^i\underline{\mathbb{T}} \left({}^i\underline{u}_0^i + \underline{\mathbb{S}}^i \underline{q}_f^i \right) \quad (5)$$

összefüggéssel írható le. Mivel a P pont helye az i -ik test általánosított referencia és rugalmas koordinátaival írható le, bevezetjük az i -ik test

$$\underline{q}^i = \begin{bmatrix} \underline{q}_r^i \\ \underline{q}_f^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{r}^i \\ \underline{\theta}^i \\ \underline{q}_f^i \end{bmatrix}$$

általánosított koordinátáinak vektorát.

Sebességek

Deriváljuk idő szerint az (5) egyenletet:

$$\dot{\underline{r}}_P^i = \dot{\underline{r}}^i + {}^i\dot{\underline{\mathbb{T}}} \, {}^i\underline{u}^i + {}^i\underline{\mathbb{T}} \, {}^i\dot{\underline{u}}^i \quad (6)$$

A (4) összefüggésből kapjuk, hogy az ${}^i\dot{\underline{u}}$ derivált a $\dot{\underline{q}}_f^i$ rugalmas koordináták sebességének a függvénye:

$${}^i\dot{\underline{u}}^i = \underline{\mathbb{S}}^i \dot{\underline{q}}_f^i$$

Behelyettesítve a (6) egyenletbe:

$$\dot{\underline{r}}_P^i = \dot{\underline{r}}^i + \dot{\underline{\underline{T}}}^i \underline{u}^i + \underline{\underline{T}}^i \underline{\underline{S}}^i \dot{\underline{q}}_f^i$$

Annak érdekében, hogy kiemelhessük a koordináta-sebességeket, a középső tag általánosságban átalakítható az alábbi módon:

$$\dot{\underline{\underline{T}}}^i \underline{u}^i = \underline{\underline{B}}^i \dot{\underline{\theta}}^i \quad (7)$$

ahol $\dot{\underline{\theta}}^i$ a referencia $\dot{\theta}_k^i$ forgási koordináta-sebességeket tartalmazó vektor, és a $\underline{\underline{B}}^i = \underline{\underline{B}}^i(\underline{\theta}^i, \underline{q}_f^i)$ mátrixot következőképp definiáljuk:

$$\underline{\underline{B}}^i = \left[\frac{\partial}{\partial \theta_1^i} \left(\underline{\underline{T}}^i \underline{u}^i \right) \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial \theta_{n_R}^i} \left(\underline{\underline{T}}^i \underline{u}^i \right) \right]$$

ahol n_R^i az i -ik test forgási koordinátáinak száma. A (7) egyenletet a deriválás láncszabálya alapján kapjuk meg:

$$\dot{\underline{\underline{T}}}^i \underline{u}^i = \sum_{k=1}^{n_R} \frac{\partial}{\partial \theta_k^i} \left(\underline{\underline{T}}^i \underline{u}^i \right) \dot{\theta}_k^i$$

Behelyettesítés után, kapjuk, hogy

$$\dot{\underline{r}}_P^i = \dot{\underline{r}}^i + \underline{\underline{B}}^i \dot{\underline{\theta}}^i + {}^i\underline{\underline{T}} \underline{\underline{S}}^i \dot{\underline{q}}_f^i \quad (8)$$

amelyet márixos formában

$$\dot{\underline{r}}_P^i = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{B}}^i & {}^i\underline{\underline{T}} \underline{\underline{S}}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{r}}^i \\ \dot{\underline{\theta}}^i \\ \dot{\underline{q}}_f^i \end{bmatrix}$$

módon írhatunk. Az $\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{B}}^i & {}^i\underline{\underline{T}} \underline{\underline{S}}^i \end{bmatrix}$ mátrixszal és $\dot{\underline{q}}^i$ általános koordináta-sebességek vektorával tömören is írhatjuk:

$$\dot{\underline{r}}_P^i = \underline{\underline{L}} \dot{\underline{q}}^i \quad (9)$$

A P pont sebességét az $\dot{\underline{\theta}}^i$ helyett az $\underline{\underline{\omega}}^i$ szögsebességgel is kifejezhetjük, ha figyelembe vesszük, hogy

$$\underline{\underline{T}}^i \dot{\underline{u}}^i = \underline{\underline{B}}^i \dot{\underline{\theta}}^i = {}^i\underline{\underline{T}} ({}^i\underline{\underline{\omega}}^i \times {}^i\underline{u}^i)$$

Felhasználva továbbá az álló KR-be $\underline{u}^i = {}^i\underline{\underline{T}} {}^i\underline{u}^i$ szerint transzformáló összefüggést

$${}^i\dot{\underline{\underline{T}}} {}^i\underline{u}^i = \underline{\underline{B}}^i \underline{\dot{\theta}}^i = \underline{\omega}^i \times \underline{u}^i = -\underline{u}^i \times \underline{\omega}^i$$

A ferdeszimmetrikus mátrixot képező $\sim$ operátorral

$$-\underline{u}^i \times \underline{\omega}^i = -\tilde{\underline{u}}^i \underline{\omega}^i = \tilde{\underline{u}}^i{}^T \underline{\omega}^i$$

Így kapjuk a (8) képletre, hogy

$$\underline{\dot{r}}_P^i = \underline{\dot{r}}^i + \tilde{\underline{u}}^i{}^T \underline{\omega}^i + {}^i\underline{\underline{T}} \underline{\underline{S}}^i \underline{\dot{q}}_f^i$$

vagy mátrixosan

$$\underline{\dot{r}}_P^i = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & \tilde{\underline{u}}^i{}^T & {}^i\underline{\underline{T}} \underline{\underline{S}}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{r}}^i \\ \underline{\omega}^i \\ \underline{\dot{q}}_f^i \end{bmatrix}$$

A (8) egyenletben szereplő $\underline{\underline{B}}^i$ mátrix számítására a korábbi értelmezésen kívül másik lehetőség is adódik, ha figyelembe vesszük, hogy bármilyen forgáskoordinátát használunk is, a szögsebesség a

$${}^i\underline{\underline{\omega}}^i = {}^i\underline{\underline{H}}^{-1} \dot{\underline{\underline{\theta}}}^i$$

alakban számítható. Ennek felhasználásával

$${}^i\underline{\underline{\dot{T}}}^i {}^i\underline{\underline{u}}^i = -{}^i\underline{\underline{T}}^i ({}^i\underline{\underline{u}}^i \times {}^i\underline{\underline{\omega}}^i) = -{}^i\underline{\underline{T}}^i {}^i\underline{\underline{\tilde{u}}}^i {}^i\underline{\underline{\omega}}^i = -{}^i\underline{\underline{T}}^i {}^i\underline{\underline{\tilde{u}}}^i {}^i\underline{\underline{H}}^{-1} \dot{\underline{\underline{\theta}}}^i$$

Összevetve a (8) egyenlettel a $\underline{\underline{B}}^i$ mátrixra a

$$\underline{\underline{B}}^i = -{}^i\underline{\underline{T}}^i {}^i\underline{\underline{\tilde{u}}}^i {}^i\underline{\underline{H}}^{-1}$$

számítási képletet kapjuk, amivel

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & -{}^i\underline{\underline{T}}^i {}^i\underline{\underline{\tilde{u}}}^i {}^i\underline{\underline{H}}^{-1} & {}^i\underline{\underline{T}}^i \underline{\underline{S}}^i \end{bmatrix}$$

Gyorsulások

Az i -ik test P pontja a (9) egyenlet idő szerinti deriváltjaként kapjuk meg:

$$\ddot{\underline{r}}_P^i = \dot{\underline{\underline{L}}}\dot{\underline{q}}^i + \underline{\underline{L}}\ddot{\underline{q}}^i$$

amelyben $\dot{\underline{\underline{L}}}\dot{\underline{q}}^i$ a kvadratikus sebességvektor, amely a Coriolis tagokat tartalmazza.

A gyorsulásvektor a szögsebesség és szöggyorsulás függvényében is megadható (levezetés nélkül):

$$\ddot{\underline{r}}_P^i = \ddot{\underline{r}}^i + \underline{\omega}^i \times (\underline{\omega}^i \times \underline{u}^i) + \underline{\varepsilon} \times \underline{u}^i + 2\underline{\omega}^i \times \left({}^i\underline{\underline{T}} \dot{\underline{u}}^i \right) + {}^i\underline{\underline{T}} \ddot{\underline{u}}^i$$