



MISKOLCI EGYETEM



GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR



MECHANIKAI TANSZÉK

VEM ALAPJAI

Introduction to FEM

Dr. Baksa Attila

e-mail: mechab@uni-miskolc.hu

tel.: (46) 565 111, 16-43



Tárolás-megoldás

- Egyenletrendszer
- Megoldás
- Tárolás

Modellezési kérdések

Lemezek

Rezgéstan

Tárolás-megoldás



Tárolás-megoldás

● Egyenletrendszer

● Megoldás

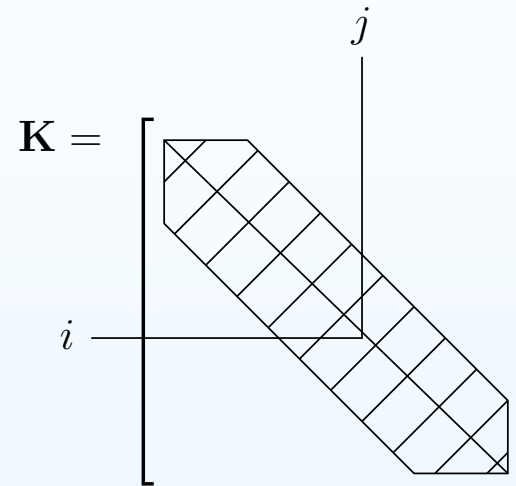
● Tárolás

Modellezési kérdések

Lemezek

Rezgésstan

Egyenletrendszer struktúrája



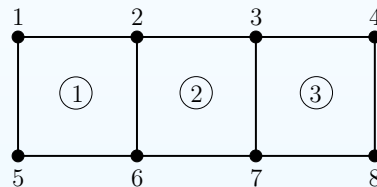
$$K_{ij} = \sum_{e \in i,j} K_{ij}^e$$

$$K_{ij} = 0 \quad \text{ha } i \text{ és } j \text{ nincs rajta egy elemen}$$

sávszélesség: egy elemen lévő sorszámkülönbség maximális csomóponti sorszámkülönbség az elemeken. Nagysága alapvetően a sorszámozástól függ.

Példa a sáv szélesség csökkentésére

Tekintsük a következő végelem felosztást és konstruáljuk meg a hozzá tartozó sematikus merevségi mátrixot!



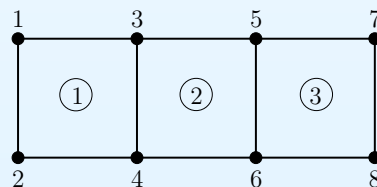
$$K = \begin{bmatrix} \times & \times & \emptyset & \emptyset & \times & \times & \emptyset & \emptyset \\ \times & \times & \emptyset & \emptyset & \times & \times & \times & \emptyset \\ \times & \times & \times & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \emptyset & \emptyset & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \emptyset \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

sáv szélesség

szimm.

Itt látható, hogy a sáv szélesség: főátló + 5 elem.

Ennél van kedvezőbb számozás is, mely optimális számozást jelent!



$$K = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \times & \times & \times & \times & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \times & \times & \times & \times & \times & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \emptyset & \emptyset \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \emptyset \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

sáv szélesség

szimm.



Tárolás-megoldás

- Egyenletrendszer
- **Megoldás**
- Tárolás

Modellezési kérdések

Lemezek

Rezgésstan

Egyenletrendszer megoldása

1. Direkt eljárások: Gauss elimináció valamilyen alkalmazása, ez a technika kb. ≤ 100 ezer ismeretlenig megbízható, illetve elfogadható sebességű.
2. Iterációs megoldások: mátrixok szorzásával jutunk egyre közelebb a megoldáshoz.



Tárolás-megoldás

- Egyenletrendszer
- Megoldás
- **Tárolás**

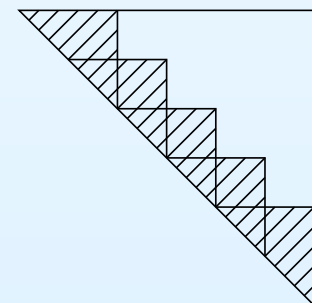
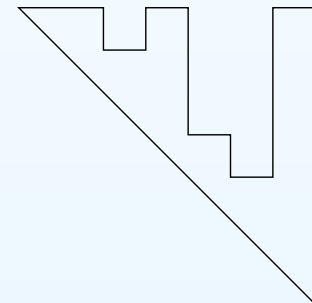
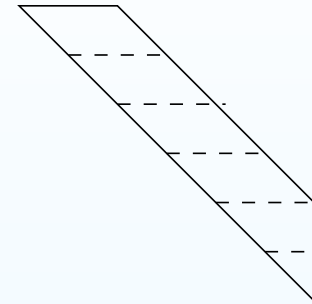
Modellezési kérdések

Lemezek

Rezgéstan

Mátrix tárolási formái

- félsáv blokkolva (min. 2 sor egy blokkban) elsősorban az optimális sorszámozással hatékony
- aktív oszlop / blokkolva
- aktív elem tárolása, (plussz vezérlő információk)
- – frontális technika (nincs tárolás
– az elemi merevségi mátrixokat rögtön felhasználja az algoritmus)





Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

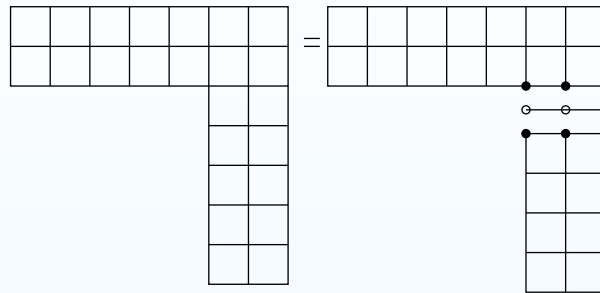
- Alszerkezet technika
- Szakadás
- Exc. csatlakozás
- Ferde görgő
- Rugalmas támasz

Lemezek

Rezgéstan

Modellezési kérdések

Alszerkezet technika



$$\mathbf{K}^1 \mathbf{q}^1 = \mathbf{f}^1 + \mathbf{r}_c^1 \quad \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bc} \\ \mathbf{K}_{cb} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix}^1 \begin{bmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_c \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_c + \mathbf{r}_c \end{bmatrix}^1$$

$\begin{cases} b - \text{belső (egyéb) csomópontok} \\ c - \text{csatlakozó csomópontok} \end{cases}$

$$\mathbf{K}_{bb}^1 \mathbf{q}_b^1 + \mathbf{K}_{bc}^1 \mathbf{q}_c^1 = \mathbf{f}_b^1$$

$$\rightarrow \mathbf{q}_b^1 = (\mathbf{K}_{bb}^1)^{-1} \mathbf{f}_b^1 - (\mathbf{K}_{bb}^1)^{-1} \mathbf{K}_{bc}^1 \mathbf{q}_c^1$$

$$\mathbf{K}_{cb}^1 \mathbf{q}_b^1 + \mathbf{K}_{cc}^1 \mathbf{q}_c^1 = \mathbf{f}_c^1 + \mathbf{r}_c^1$$

$$\rightarrow \underbrace{\left(\mathbf{K}_{cc}^1 - \mathbf{K}_{cb}^1 (\mathbf{K}_{bb}^1)^{-1} \mathbf{K}_{bc}^1 \right)}_{\mathbf{K}_{\text{red}}^1} \mathbf{q}_c^1 = \underbrace{\mathbf{f}_c^1 - \mathbf{K}_{cb}^1 (\mathbf{K}_{bb}^1)^{-1} \mathbf{K}_{bc}^1 \mathbf{f}_b^1}_{\mathbf{f}_{\text{red}}^1} + \mathbf{r}_c^1$$



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

● **Alszerkezet technika**

● Szakadás

● Exc. csatlakozás

● Ferde görgő

● Rugalmas támasz

Lemezek

Rezgéstan

Alszerkezet technika folyt.

Az előzőekből következik, hogy

$$\mathbf{K}_{\text{red}}^1 \mathbf{q}_c^1 = \mathbf{f}_{\text{red}}^1 + \mathbf{r}_c^1$$

$$\mathbf{K}_{\text{red}}^2 \mathbf{q}_c^2 = \mathbf{f}_{\text{red}}^2 + \mathbf{r}_c^2$$

összeadva

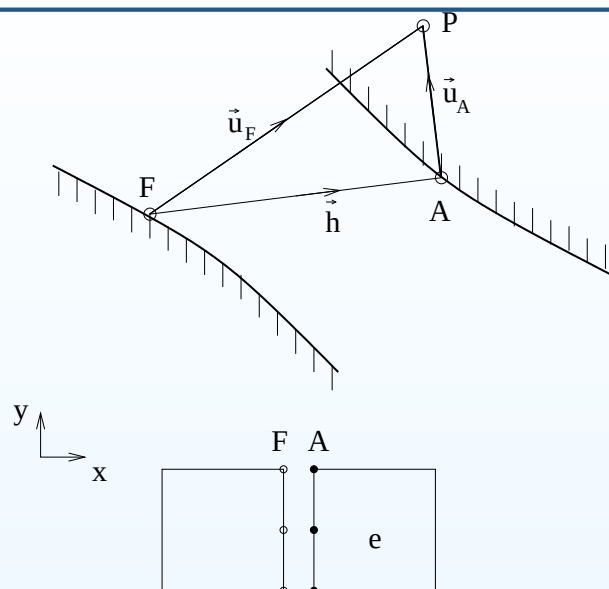
$$\mathbf{r}_c^1 = -\mathbf{r}_c^2 \quad \mathbf{q}_c^1 = \mathbf{q}_c^2$$

$$\underbrace{(\mathbf{K}_{\text{red}}^1 + \mathbf{K}_{\text{red}}^2)}_{\mathbf{K}_{\text{red}}} \mathbf{q}_c = \underbrace{\mathbf{f}_{\text{red}}^1 + \mathbf{f}_{\text{red}}^2}_{\mathbf{f}_{\text{red}}}$$

azaz

$$\mathbf{K}_{\text{red}} \mathbf{q}_c = \mathbf{f}_{\text{red}}$$

Szakadás az elmozdulásmezőben



$$\mathbf{u}_F = \mathbf{u}_A + \mathbf{h} \quad \text{ahol} \quad \begin{cases} F : \text{ fő csomópont} \\ A : \text{ al csomópont} \end{cases}$$

$$\mathbf{q}_F = \mathbf{q}_A + \mathbf{h}$$

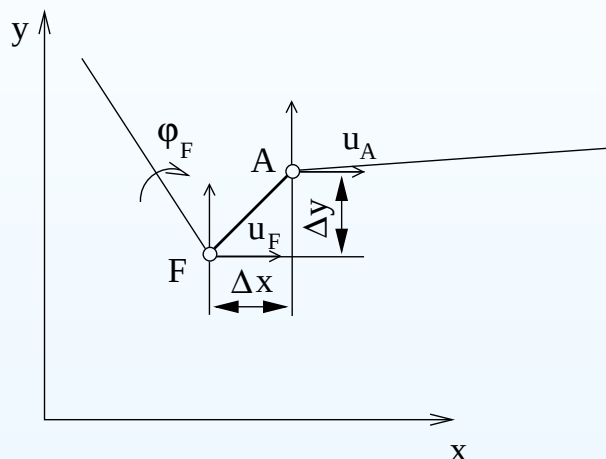
$$\mathbf{q}_A = \mathbf{F} - \mathbf{h} \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_A \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_F - \mathbf{h} \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix}^e \quad \begin{cases} A : \text{ alcsomópont} \\ m : \text{ más csomópont} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi^e &= \begin{bmatrix} \underbrace{\delta \mathbf{q}_A^T}_{\delta \mathbf{q}_F^T} & \mathbf{q}_m^T \end{bmatrix}^e \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{Am} \\ \mathbf{K}_{mA} & \mathbf{K}_{mm} \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \mathbf{q}_F - \mathbf{h} \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix}^e - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_A \\ \mathbf{f}_m \end{bmatrix}^e \right) = \\ &= \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}_F^T & \delta \mathbf{q}_m^T \end{bmatrix}^e \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{Am} \\ \mathbf{K}_{mA} & \mathbf{K}_{mm} \end{bmatrix}^e \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}_F \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix}^e}_{\tilde{\mathbf{q}}^e} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} \\ \mathbf{K}_{mA} \end{bmatrix}^e}_{\mathbf{f}_h^e} \mathbf{h} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_A \\ \mathbf{f}_m \end{bmatrix}^e}_{\mathbf{f}^e} \right) \end{aligned}$$

Excentrikus csatlakozás

Például L vagy T idom esetén, itt most az egyszerűség kedvéért tekintsük síkban a jellemző koordinátákat.



$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \varphi_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}_A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 1 & -\Delta x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{ex}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_F \\ v_F \\ \varphi_F \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}_F}$$

$$e - \text{elem: } \mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_A \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ex} \mathbf{q}_F \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix}^e \quad \delta \mathbf{q}_A^T = \delta \mathbf{q}_F^T \mathbf{T}_{ex}^T$$

$$\delta \Pi^e = [\delta \mathbf{q}_F^T \mathbf{T}_{ex}^T \quad \delta \mathbf{q}_m^T]^e \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ex}^T \mathbf{K}_{AA} \mathbf{T}_{ex} & \mathbf{T}_{ex}^T \mathbf{K}_{Am} \\ \mathbf{K}_{mA} \mathbf{T}_{ex} & \mathbf{K}_{mm} \end{bmatrix}^e}_{\mathbf{K}_{red}^e} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}_F \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix}^e}_{\tilde{\mathbf{q}}^e} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ex}^T \mathbf{f}_A \\ \mathbf{f}_m \end{bmatrix}^e}_{\mathbf{f}_{red}^e} \right)$$



Tárolás-megoldás

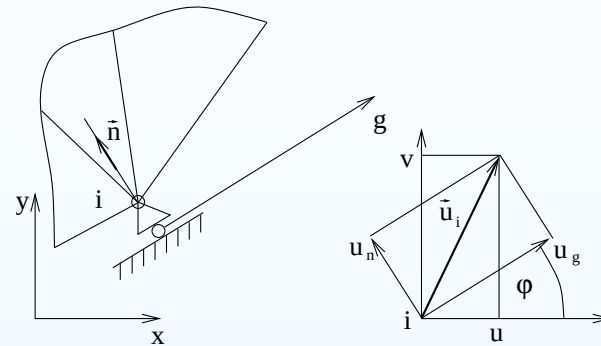
Modellezési kérdések

- Alszerkezet technika
- Szakadás
- Exc. csatlakozás
- **Ferde görgő**
- Rugalmas támasz

Lemezek

Rezgéstan

Ferde görgő



$$u = u_g \cos \varphi - u_n \sin \varphi$$

$$v = u_g \cos \varphi + u_n \sin \varphi$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_G} \underbrace{\begin{bmatrix} u_g \\ u_n \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{q}}}$$

minden $e \in i$ -re:

$$\mathbf{q}_i^e = \mathbf{T}_G \tilde{\mathbf{q}}_i^e \quad \mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i^e \\ \mathbf{q}_m^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_G \tilde{\mathbf{q}}_i \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix}^e$$

$$\delta \Pi^e = \dots \quad \text{u.a. mint az előbb csak} \quad \mathbf{T}_{ex} \rightarrow \mathbf{T}_G \quad \text{majd} \quad u_n = 0$$



Rugalmas támasz

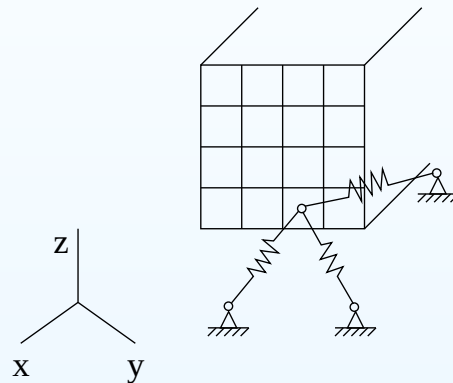
Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

- Alszerkezet technika
- Szakadás
- Exc. csatlakozás
- Ferde görgő
- Rugalmas támasz

Lemezek

Rezgéstan



$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} c_x & & \\ & c_y & \\ & & c_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{C}\mathbf{u}$$

fajlagos alakváltozási energia

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{p} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u}$$

Alakváltozási energia

$$U = \int_A u \, dA \quad \mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}$$

$$U_{\text{rugó}} = \frac{1}{2} \int_{A_{\text{rugó}}} \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u} \, dA = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \underbrace{\int_{A_{\text{rugó}}} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{N}^e \, dA}_{\mathbf{K}_{\text{rugó}}^e} \mathbf{q}^e$$

$$\Pi^e = U_{\text{alakv}}^e + U_{\text{rugó}}^e - W_k^e \quad \mathbf{K}^e = \mathbf{K}_{\text{alakv}}^e + \mathbf{K}_{\text{rugó}}^e$$



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

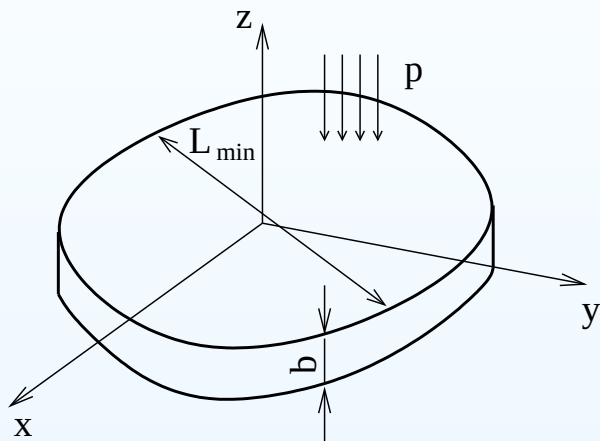
- Lemezelmélet
- Vastag lemez
- Erők, Nyomatékok
- Peremfeltételek

Rezgéstan

Lemezek

Lemezelmélet

Minden olyan vékony, felületekkel határolt testet melyeknél egyértelműen kijelölhető egy középfelület lemeznek nevezünk.



A középsíkra merőlegesen terhelt (nem úgy mint az ÁSF)

- vékony lemez:

$$b \leq \frac{L_{\min}}{10}$$

- vastag lemez:

$$b > 0.1 L_{\min}$$

Kis lehajlásról beszélünk, ha $w \leq 0.2 b$ ahol w a z irányú elmozdulás.

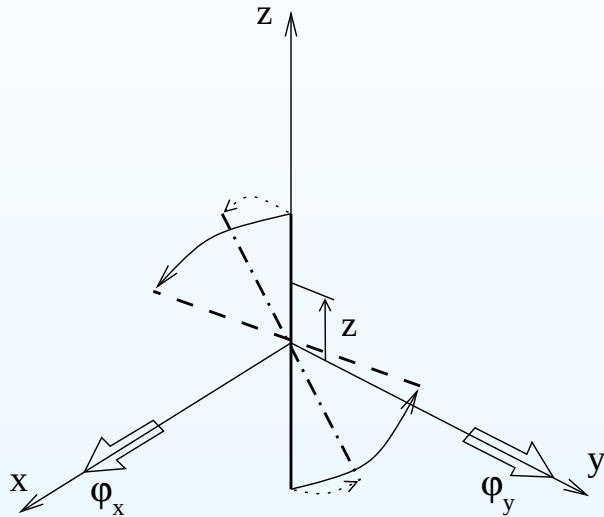
A megoldás során mindig a középfelülethez kötött mennyiségeket határozzuk meg.

Cél: az (x, y) középfelülethez kötött jellemzőket felírni, az ismert egyenletek alapján!

Vastag lemez, geometriai hipotézis

Hajlított lemez, nyírási energia

figyelembevételével, melyet a megalkotójáról: REISSNER-MIDLIN elméletnek is nevezik.



- a középfelület csak z irányba mozdul el
- a középfelület normálisa merevtestszerűen elfordul (egyenes marad és hossza nem változik, azonban nem marad merőleges a középfelületre!)
- feltételezzük, hogy kis elmozdulás és alakváltozás történik

φ_x, φ_y : a középfelület szögelfordulásai.

Elmozdulás tetszőleges P -ben.

$$u = \varphi_y(x, y) \cdot z \quad v = -\varphi_x(x, y) \cdot z \quad w = w(x, y)$$

A középfelülethez kötött $\varphi_x, \varphi_y, w(x, y)$ segítségével bármely térbeli pontban meghatározhatjuk az elmozdulást!



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

- Lemezmélet
- **Vastag lemez**
- Erők, Nyomatékok
- Peremfeltételek

Rezgésstan

Geometriai hipotézis

A fajlagos nyúlások

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z\varphi'_y = z \cdot \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

és a szögtorzulások

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \cdot \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right), \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_y$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_x$$

A fentiek alapján a lemez középfelületére merőleges egyenes szakasz a terhelés után is egyenes marad, hossza nem változik.



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

- Lemezelmélet
- **Vastag lemez**
- Erők, Nyomatékok
- Peremfeltételek

Rezgés

Geometriai hipotézis

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = z \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\kappa}} = z \boldsymbol{\kappa}$$

ahol $\boldsymbol{\kappa}$ a görbületek oszlopvektora:

$$\boldsymbol{\kappa} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

A z -től független szögtorzulások pedig a következő kételemű vektorba rendezhetők:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\gamma}}} \begin{bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix} = \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{u}$$



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

- Lemezelmélet
- **Vastag lemez**
- Erők, Nyomatékok
- Peremfeltételek

Rezgéstan

Feszültségi hipotézis

A klasszikus lemezelmélet másik hipotézise a feszültségállapottal kapcsolatos, nevezetesen, tapasztalatok alapján nem követünk el nagy hibát, ha a σ_z feszültséget elhanyagoljuk a σ_x és σ_y mellett

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

ahol $G = E/2(1 + \nu)$. Nyilvánvaló az $\varepsilon_z = \sigma_z = 0$ feltételek egyidejűsége ellentmond a Hooke-féle anyagegyenletnek.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{D}}\boldsymbol{\varepsilon} = z\tilde{\mathbf{D}}\boldsymbol{\kappa}$$



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

- Lemezmélet
- **Vastag lemez**
- Erők, Nyomatékok
- Peremfeltételek

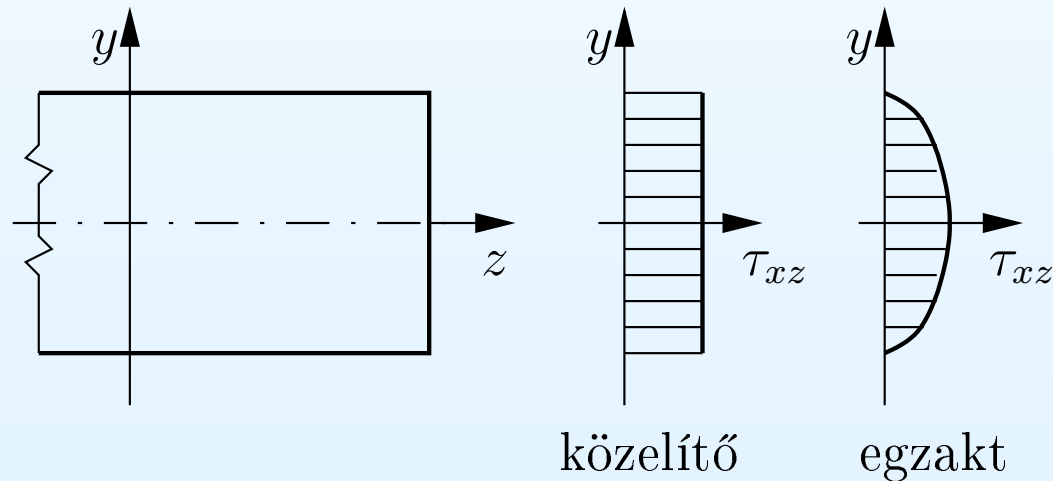
Rezgésstan

Feszültségi hipotézis

A z -től független nyírófeszültségeket mátrixosan írva:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = kG\boldsymbol{\gamma}$$

A nyírófeszültségekben szereplő k az ún. nyírási tényező, mely abból a feltételezésből határozható meg, hogy a közelítő konstans nyírófeszültséghez és az egzakt nyírófeszültséghez tartozó alakváltozási energia megegyezik. Értéke: $\frac{5}{6}$.





Erők, Nyomatékok

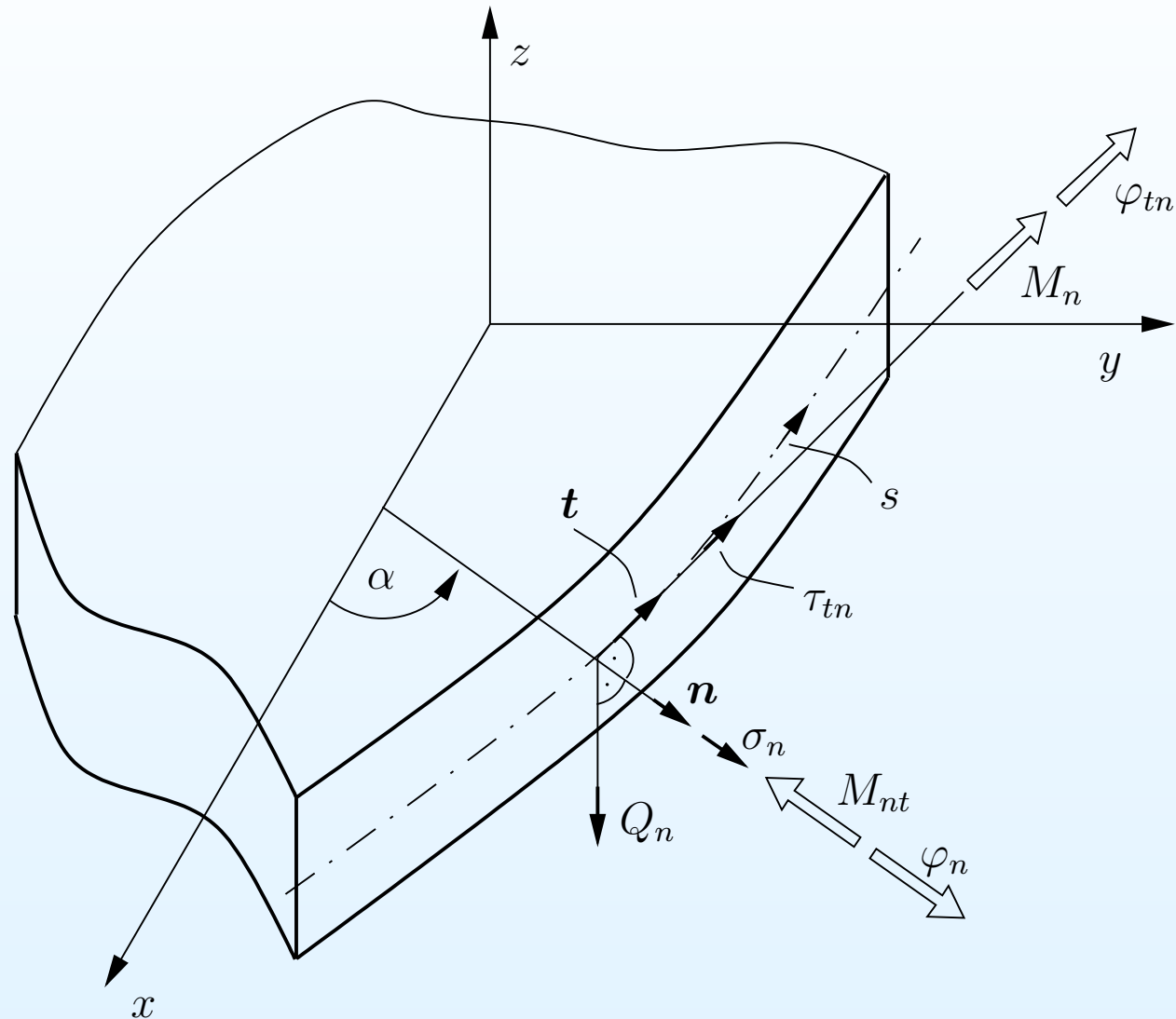
Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

- Lemezmélet
- Vastag lemez
- **Erők, Nyomatékok**
- Peremfeltételek

Rezgéstan





Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

- Lemezelmélet
- Vastag lemez
- **Erők, Nyomatékok**
- Peremfeltételek

Rezgés

Erők, Nyomatékok

Értelmezve a vastagság mentén megoszló feszültségek eredőit, nyomatékait, írhatjuk, hogy

$$Q_x = - \int_{(b)} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = - \int_{(b)} \tau_{yz} dz.$$

Továbbá

$$M_x = \int_{(b)} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{(b)} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{(b)} \tau_{xy} z dz$$

amiből a felületi feszültségek (élerők)

$$Q_x = -k G b \left(\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad Q_y = -k G b \left(-\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

- Lemezmélet
- Vastag lemez
- **Erők, Nyomatékok**
- Peremfeltételek

Rezgés

Erők, Nyomatékok

A felületi feszültségpárok (élnyomatékok)

$$M_x = \frac{Eb^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right), \quad M_y = \frac{Eb^3}{12(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right)$$

$$M_{xy} = Gb^3 \frac{1}{12} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right)$$

amelyekhez az

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x & M_{xy} \\ M_{yx} & M_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}$$

tenzor, illetve vektor is rendelhető.



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

- Lemezelmélet
- Vastag lemez
- **Erők, Nyomatékok**
- Peremfeltételek

Rezgéstan

Erők, Nyomatékok

A tetszőleges $\mathbf{n}$ normálisú és $\mathbf{t}$ érintőirányú síkon keletkező σ_n normál irányú és τ_{tn} , τ_{zn} csúsztató feszültség ($\mathbf{t} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{n}$) :

$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y$$

$$\tau_{tn} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = (\sigma_y - \sigma_x) n_x n_y + \tau_{xy} (n_x^2 - n_y^2)$$

$$\tau_{zn} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y$$

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{t} = -n_y \mathbf{e}_x + n_x \mathbf{e}_y$$

ahol $n_x = \cos \alpha$, $n_y = \sin \alpha$ a felület normálisának koordinátája.



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

- Lemezmélelet
- Vastag lemez
- **Erők, Nyomatékok**
- Peremfeltételek

Rezgésstan

Erők, Nyomatékok

Az élnyomatékok értelmezése alapján

$$M_n = \int_{(b)} \sigma_n z dz = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$$

míg

$$M_{tn} = M_{nt} = \int_{(b)} \tau_{tn} z dz = (M_y - M_x) n_x n_y + M_{xy} (n_x^2 - n_y^2) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$$

továbbá

$$Q_n = - \int_b \tau_{zn} dz = Q_x n_x + Q_y n_y \equiv \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}$$



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

- Lemezelmélet
- Vastag lemez
- Erők, Nyomatékok
- Peremfeltételek

Rezgés

Reissner-Mindlin féle lemez

A teljes potenciális energia

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_A \int_b \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dz dA + \frac{1}{2} \int_A \int_b \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\tau} dz dA - W_k$$

ahol a külső erők munkája

$$W_k = \int_A wp dA + \int_{\Gamma_p} M_n^0 \varphi_{tn} ds - \int_{\Gamma_p} M_{nt}^0 \varphi_n ds - \int_{\Gamma_p} Q_n^0 w_0 ds$$

mely kifejezésben p a középfelületre redukált megoszló z irányú terhelés intenzitása, M_n^0 , M_{nt}^0 , Q_n^0 a Γ_p^e peremen megadott értékek. A perem φ_n és φ_{tn} szögelfordulása a $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_x \mathbf{e}_x + \varphi_y \mathbf{e}_y$ vektor bevezetésével

$$\varphi_n = \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}, \quad \varphi_{tn} = \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{t}$$

alakban állítható elő.



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

- Lemezmélet
- Vastag lemez
- Erők, Nyomatékok
- **Peremfeltételek**

Rezgéstan

Peremfeltételek

A lemez megtámasztásától függően az alábbi peremfeltételeket szokás megkülönböztetni

Befogás esetén:

$$w = 0, \varphi_t = \varphi_n = 0$$

szabad perem esetén:

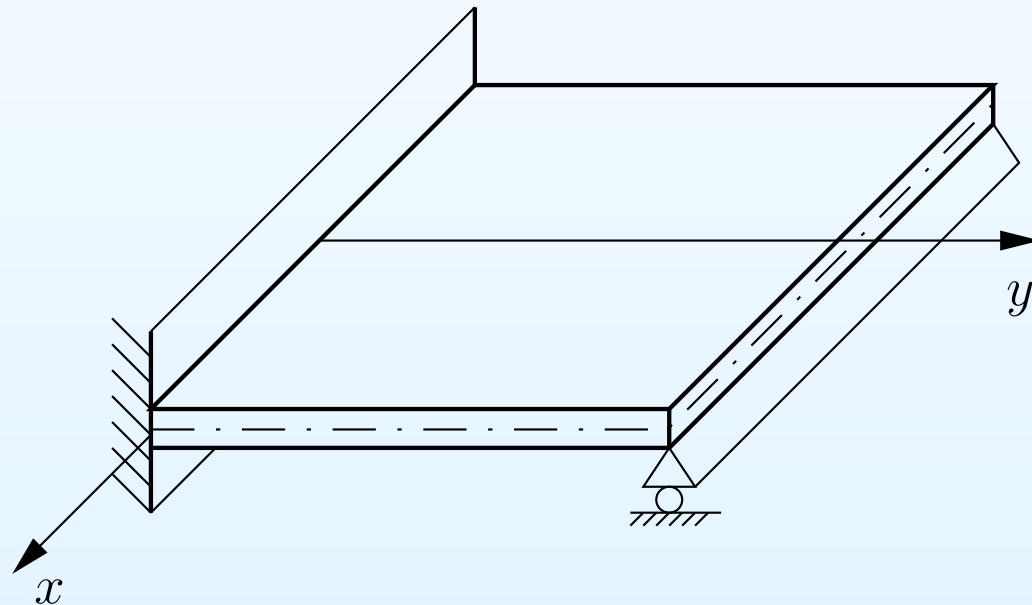
$$M_n = M_{tn} = Q_n = 0$$

egyszerű alátámasztás esetén:

$$w = 0, M_n = M_{tn} = 0$$

vagy pedig:

$$w = \varphi_n = 0, M_n = 0$$





Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

Rezgéstan

- Alapfogalmak
- Ismétlés
- A feladat
- VEM közelítés
- Elemi mátrixok
- Osztályozás
- Szabadrezgések
- Megoldási módszerek
- Stabilitás

Rezgéstan



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

Rezgéstan

- **Alapfogalmak**
- Ismétlés
- A feladat
- VEM közelítés
- Elemi mátrixok
- Osztályozás
- Szabadrezgések
- Megoldási módszerek
- Stabilitás

Alapfogalmak

MIT IS ÉRTÜNK REZGÉSEN?

A mechanikai rendszernek az egyensúlyi helyzet környezetében ide-oda történő váltakozó mozgását rezgésnek nevezzük.

Stacionérnak nevezzük a rendszert, ha annak tulajdonságai nem változnak a vizsgált időintervallumban.

Autonom a rendszer, ha a gerjesztés explicite az időt nem tartalmazza. Rezgések ebben az esetben csak akkor lépnek fel, ha a rendszer kezdeti megzavarásával a rendszer belső energiaforrással tud rendelkezni.



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

Rezgés

● **Alapfogalmak**

● Ismétlés

● A feladat

● VEM közelítés

● Elemi mátrixok

● Osztályozás

● Szabadrezgések

● Megoldási módszerek

● Stabilitás

Alapfogalmak

A rezgéstani folyamatokat az alábbi módon szokásos osztályozni:

- Szabad rezgés: Azt a rezgést, amely oly módon zajlik le, hogy külső hatás nem éri a rendszert, szabad rezgésnek nevezik. Az autonóm rendszereket ez jellemzi.
- Gerjesztett rezgés: Külső hatás következtében előálló rezgést gerjesztett rezgésnek szokás nevezni. A nem autonóm rendszereket ez jellemzi.
- Parametrikus rezgés: A rezgést parametrikusnak szokás nevezni, ha a rezgést a rendszer paramétereinek változása okozza. Ilyen rezgés csak nemstacionér rendszereknél állhat elő.
- Öngerjesztő rezgés: A rezgés által keltett energia felszabadulása által okozott rezgést öngerjesztett rezgésnek nevezik.



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

Rezgéstan

● Alapfogalmak

● Ismételés

● A feladat

● VEM közelítés

● Elemi mátrixok

● Osztályozás

● Szabadrezgések

● Megoldási módszerek

● Stabilitás

Alapfogalmak

A rezgés periódikus, ha a kitérés bármely értéke ismétlődik T idő eltelte után, vagyis áll $u(t + T) = u(t)$ $[mm]$, ahol T $[s]$ a rezgés periódus ideje. Ennek reciproka a mozgás frekvenciája $f = 1/T$ $[s^{-1}]$. A körfrekvencia

$$\alpha = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad [rad/s]$$

A rezgés frekvenciáját $[Hz]$ Hertz-ben szokás megadni.
Harmónikus rezgésnél a kitérés

$$u(t) = A \cos(\alpha t + \psi),$$

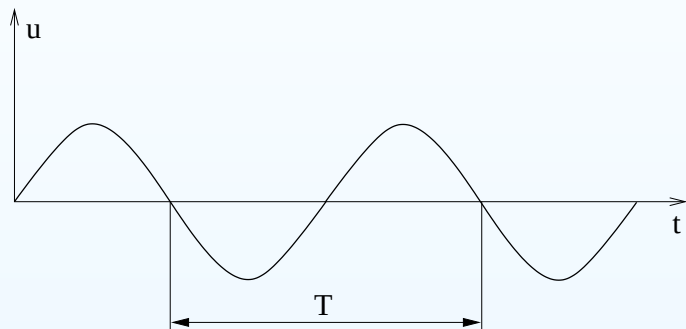
ahol A , α , ψ állandó értékű paraméterek. A a rezgés amplitudója, ψ a fázisszög. A fellépő sebesség

$$v(t) = \frac{du}{dt} = -\alpha \sin(\alpha t + \psi) \quad [mm/s]$$

a gyorsulás

$$a(t) = \frac{d^2u}{dt^2} = -\alpha^2 A \cos(\alpha t + \psi) \quad [mm/s^2],$$

Rezgéstani összefoglaló



periódikus rezgés:

$$u(t + T) = u(t)$$

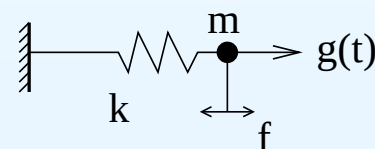
ahol T a mozgáshoz tartozó rezgésidő.

Mozgás frekvenciája:

$$f = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{s} \right]$$

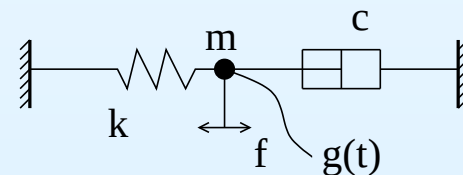
körfrekvencia: egységnyi idő alatt a kör hanyad részét teszi meg

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} \left[\frac{\text{rad}}{s} \right]$$



Példa egydimenziós rezgőmozgásra:

- csillapítatlan esetben a mozgásegyenlet: $m\ddot{q} + kq = f$
ahol k a rugómerevség.
- csillapított esetben a mozgásegyenlet: $m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = f$
ahol c a csillapítási tényező, k a rugómerevség.





Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

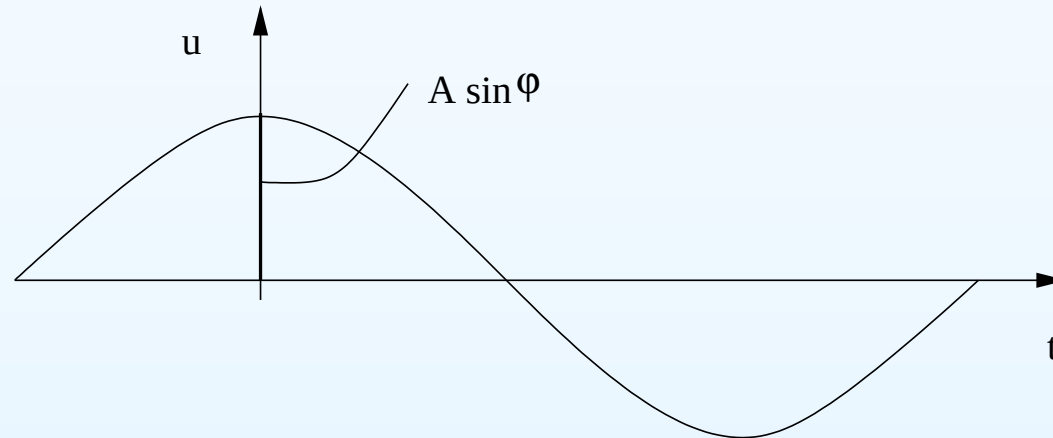
Rezgésstan

- Alapfogalmak
- **Ismétlés**
- A feladat
- VEM közelítés
- Elemi mátrixok
- Osztályozás
- Szabadrezgések
- Megoldási módszerek
- Stabilitás

Harmónikus esetben a megoldás

$$u = A \sin(\alpha t + \varphi)$$

$$\dot{u} = -\alpha A \cos(\alpha t + \varphi) \quad \ddot{u} = -\alpha^2 A \sin(\alpha t + \varphi)$$

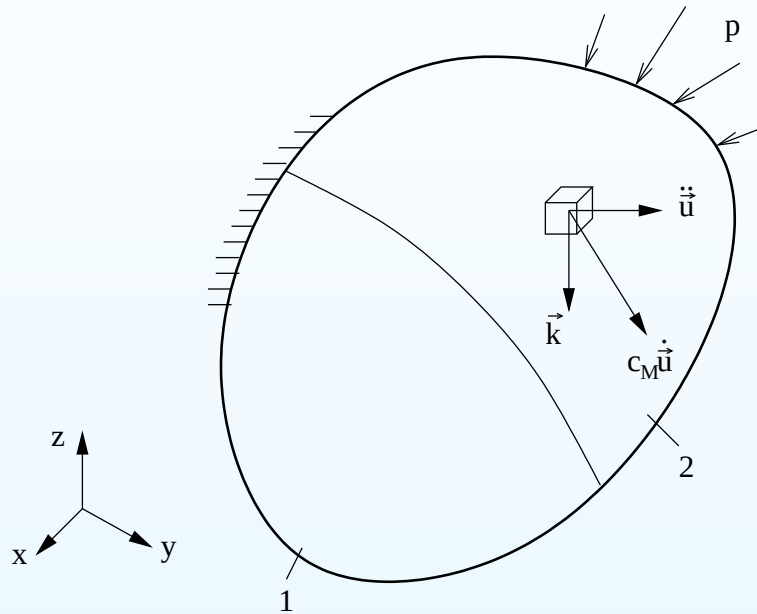


mely komplex felírásban:

$$z = A \cos(\alpha t + \varphi) + iA \sin(\alpha t + \varphi) = A e^{i(\alpha t + \varphi)}$$

Mozgásegyenlet

Egyenletek két szilárd test vagy kontinuum esetén.



Ismeretlenek:

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{A}^e(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{T}^e(\mathbf{x}, t), \quad e = 1, 2$$

ahol $\mathbf{x}(x, y, z)$ a helyvektort jelöli, t pedig az időt. A c_M a tömegelemre vonatkozó, a csillapításhoz szükséges arányossági tényező.

$\rho \mathbf{k}$ a térfogaton megoszló terhelésből származó erő. A $\rho \ddot{\mathbf{u}}$ a dV térfogatelemhez tartozik (impulzus jellegű mennyiség), $-\rho \dot{\mathbf{u}}$ a tehetetlenségi erő.

d'Alembert-elv: Ha a tehetetlenségi erőket és a külső kölcsönhatásokból származó erőket összegezzük akkor a test már egyensúlyban van.

Egyensúlyi egyenlet vagy mozgásegyenlet

$$\mathbf{T}^e \nabla + \rho (\mathbf{k} - c_M \dot{\mathbf{u}} - \ddot{\mathbf{u}})^e = \mathbf{0}$$

ehhez kapcsolódik még az anyagegyenlet és a kinematikai egyenlet.



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

Rezgéstan

- Alapfogalmak
- Ismételés
- **A feladat**
- VEM közelítés
- Elemi mátrixok
- Osztályozás
- Szabadrezgések
- Megoldási módszerek
- Stabilitás

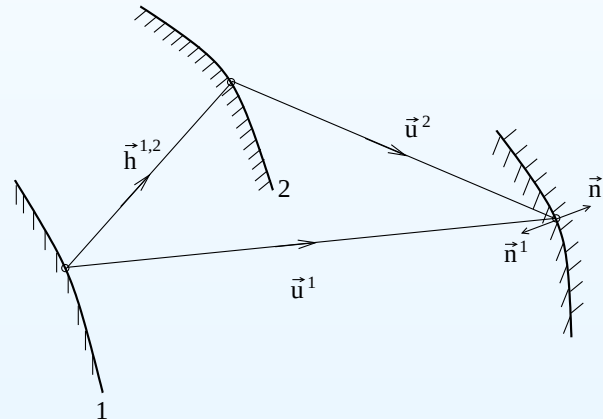
Feltételek a megoldáshoz

Peremfeltételek:

$$\text{KPF : } \mathbf{u}^e = \tilde{\mathbf{u}} \quad \mathbf{x} \in A_u^e$$

$$\text{DPF : } \mathbf{T}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{p}^e \quad \mathbf{x} \in A_p^e$$

Illesztési feltételek:



$$\text{KIF : } \mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1 + \mathbf{h}^{12} = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \in A_c^{1,2}$$

azaz

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^2 + \mathbf{h}^{12}$$

$$\text{DIF : } \mathbf{T}^1 \mathbf{n}^1 + \mathbf{T}^2 \mathbf{n}^2 = \mathbf{0}$$

Kezdeti feltétel:

$$\mathbf{u}^e(t=0) = \mathbf{u}_0^e \quad \dot{\mathbf{u}}(t=0) = \dot{\mathbf{u}}_0^e \quad \mathbf{x} \in V^e$$

A megoldandó integrál-egyenletrendszer

Bubnov-Galjorkin féle variációs elv alapján

$$\sum_{e=1}^e \left\{ \underbrace{- \int_{V^e} \delta \mathbf{A}^e \cdot \mathbf{T}^e dV}_{-\delta U^e} + \underbrace{\int_{V^e} \delta \mathbf{u}^e \rho \mathbf{k} dV + \int_{A^e} \delta \mathbf{u}^e \mathbf{p} dA}_{\delta W_k^e} - \underbrace{\int_{V^e} \delta \mathbf{u}^e \rho (c_M \dot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}})^e dV}_{\delta C^e} \right\} = 0$$

melyben δU^e az alakváltozási energia variációja, δW_k^e a külső erők munkájának variációja, míg δC^e a csillapító erő variációjának munkája.

Ezek alapján a kapott egyenlet

$$\sum_{e=1}^2 \left\{ \int_{V^e} \delta \mathbf{u}^e \rho \ddot{\mathbf{u}} dV + \delta U^e - \delta W_k^e + \delta C^e \right\} = 0$$



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

Rezgéstan

- Alapfogalmak
- Ismétlés
- A feladat
- **VEM közelítés**
- Elemi mátrixok
- Osztályozás
- Szabadrezgések
- Megoldási módszerek
- Stabilitás

Végeselemes közelítés

Tekintsük a

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV + \delta U - \delta W_k + \delta C = 0$$

egyenletet és bontsuk mindkét testet elemekre.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^e &\Rightarrow \mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{q}^e(t) \\ \dot{\mathbf{u}}^e(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{q}}^e(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}^e(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{q}}^e(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^e &\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^e = \partial \mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e(t) \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e &= \mathbf{B}^e \dot{\mathbf{q}}^e(t) \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}^e \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D}^e (\boldsymbol{\varepsilon}^e + c_K \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_0^e)$$

ahol $\mathbf{D}^e c_K \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ a belső csillapítás miatt jelenik meg, $\mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}_0^e$ pedig a kezdeti alakváltozás (pl. hő) miatt.

Elemek jellemző mátrixai

→ $\mathbf{M}^e$ – tömegmátrix

$$\int_{V^e} \delta \mathbf{u}^{eT} \rho \ddot{\mathbf{u}}^e dV = \delta \mathbf{q}^{eT} \underbrace{\int_{V^e} \mathbf{N}^{eT} \rho \mathbf{N}^e dV}_{\mathbf{M}^e} \ddot{\mathbf{q}}^e = \delta \mathbf{q}^{eT} \mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{q}}^e$$

→ $\mathbf{K}^e$ – merevségi mátrix, $\mathbf{f}_0^e$ – terhelési vektor

$$\begin{aligned} \delta U^e &= \int_{V^e} \delta \mathbf{A}^e \cdot \mathbf{T}^e dV = \int_{V^e} \delta \varepsilon^{eT} \overbrace{\sigma^e}^{\sigma^e} dV = \delta \mathbf{q}^{eT} \int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}^e (\varepsilon^e + c_K \dot{\varepsilon}^e - \varepsilon_0^e) dV = \\ &= \delta \mathbf{q}^{eT} \left[\underbrace{\int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e dV}_{\mathbf{K}^e} \mathbf{q}^e + c_K \underbrace{\int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e dV}_{\mathbf{K}^e} \dot{\mathbf{q}}^e - \underbrace{\int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}^e \varepsilon_0^e dV}_{\mathbf{f}_0^e} \right] \end{aligned}$$

$$\delta U^e = \delta \mathbf{q}^{eT} (\mathbf{K}^e \mathbf{q}^e + c_K \mathbf{K}^e \dot{\mathbf{q}}^e - \mathbf{f}_0^e)$$

Elemek jellemző mátrixai, folyt.

→ $\mathbf{f}_\rho^e, \mathbf{f}_p^e$ – terhelési vektor

$$\begin{aligned}\delta W_k^e &= \int_{V^e} \delta \mathbf{u}^e \rho \mathbf{k} dV + \int_{A_p^e} \delta \mathbf{u}^e \mathbf{p} dA = \\ &= \delta \mathbf{q}^{eT} \underbrace{\int_{V^e} \mathbf{N}^{eT} \rho \mathbf{k} dV}_{\mathbf{f}_\rho^e} + \delta \mathbf{q}^{eT} \underbrace{\int_{A_p^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{p} dA}_{\mathbf{f}_p^e} = \delta \mathbf{q}^{eT} (\mathbf{f}_\rho^e + \mathbf{f}_p^e)\end{aligned}$$

→ a csillapításból

$$\delta C^e = \int_{V^e} \delta \mathbf{u}^e \rho c_M \dot{\mathbf{u}}^e dV = \delta \mathbf{q}^{eT} c_M \underbrace{\int_{V^e} \mathbf{N}^{eT} \rho \mathbf{N}^e dV}_{\mathbf{M}^e} \dot{\mathbf{q}}^e = \delta \mathbf{q}^{eT} c_M \mathbf{M}^e \dot{\mathbf{q}}^e$$

Visszahelyettesítve a kapott mátrixokat

$$\sum_{e=1}^{N_{cs}} \delta \mathbf{q}^{eT} \left[\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{q}}^e + \underbrace{(c_K \mathbf{K}^e + c_M \mathbf{M}^e)}_{\mathbf{C}^e} \dot{\mathbf{q}}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e - (\mathbf{f}_\rho^e + \mathbf{f}_p^e + \mathbf{f}_0^e) \right] = 0$$

Végeselemes közelítés, illesztés után

- csomóponti elmozdulások vektora $\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{q}_{Ncs}^T]$
- a szerkezet tömegmátrixa $\mathbf{M} = [\mathbf{M}_{ij}] \quad i, j = 1, \dots, Ncs$

$$\mathbf{M}_{ij} = \sum_{e \in i, j} \mathbf{M}_{ij}^e \quad \mathbf{M}_{ij}^e = \int_{V^e} \mathbf{N}_i^{eT} \cdot \rho \cdot \mathbf{N}_j^e dV$$

- merevségi mátrix
 $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_{ij}^e], \quad i, j = 1, \dots, Ncs \quad \mathbf{K}_{ij}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}_i^{eT} \cdot \mathbf{D}^e \cdot \mathbf{B}_j^e dV$
- csillapítási mátrix
 $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_{ij}^e], \quad i, j = 1, \dots, Ncs \quad \mathbf{C}_{ij}^e = c_K \mathbf{K}_{ij}^e + c_M \mathbf{M}_{ij}^e$
- terhelési vektor $\mathbf{f} = \mathbf{f}_\rho + \mathbf{f}_p + \mathbf{f}_0 \quad \mathbf{f} = [\mathbf{f}_i] \quad \mathbf{f}_i = \sum_{e \in i} \mathbf{f}_i^e$

A kinematikai peremfeltételt kielégítve jutunk az egész szerkezetre érvényes mozgásegyenlethez

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{f}$$



[Tárolás-megoldás](#)

[Modellezési kérdések](#)

[Lemezek](#)

[Rezgéstan](#)

- Alapfogalmak
- Ismétlés
- A feladat
- VEM közelítés
- Elemi mátrixok
- **Osztályozás**
- Szabadrezgések
- Megoldási módszerek
- Stabilitás

Regzések osztályozása

A feladatok egyik osztálya az *autonom* rendszerrel kapcsolatos, vagyis amikor a rendszerre gerjesztés nem hat. Ekkor

$$\mathbf{f} = \mathbf{0}$$

Amennyiben $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, a rendszert *szabad, csillapítás nélkülinek* nevezzük, azaz

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

ellenkező esetben *szabad csillapításos* rendszerről beszélünk

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Amennyiben a gerjesztés is hat, a rendszert *gerjesztett* rendszernek nevezzük.



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

Rezgéstan

- Alapfogalmak
- Ismétlés
- A feladat
- VEM közelítés
- Elemi mátrixok
- **Osztályozás**
- Szabadrezgések
- Megoldási módszerek
- Stabilitás

Regzések osztályozása

1. *Determinisztikus.* Az időben lejátszódó folyamatot egyértelmű függvénykapcsolat írja le.

- (a) Egyik nagy osztálya a harmónikusan változó terhelések esete. Pl.

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_A \sin \omega t$$

- (b) Másik esetben a terhelések tetszőlegesen változnak időben

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(t)$$

2. *Sztohasztikus* terhelések többek között gépjárműveknél, forgácsoló szerszámgépeknél, veszélyes zónában lévő épületek, létesítmények földrengéseinél fordulnak elő. A rendszer válaszáda is nyilván sztohasztikus jelleggel rendelkezik. Ezek vizsgálatával kurzusunk keretében nem fogunk foglalkozni.



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

Rezgéstan

- Alapfogalmak
- Ismétlés
- A feladat
- VEM közelítés
- Elemi mátrixok
- Osztályozás
- Szabadrezgések
- Megoldási módszerek
- Stabilitás

Szabadrezgések

Tekintsük a következő diff. egyenletrendszert

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}.$$

A lineáris, homogén differenciálegyenletrendszer megoldását

$$\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}} \sin \alpha t$$

alakban keressük. Ekkor a behelyettesítés után

$$(-\alpha^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

homogén algebrai egyenletrendszerhez jutunk, aminek triviálistól eltérő megoldása az együttható mátrix determinánsának eltűnésekor áll fenn, azaz

$$\det(-\alpha^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = p(\alpha^2) = 0.$$

A determinánst kifejtve $p(\alpha^2)$ karakterisztikus polinomhoz jutunk, λ^2 -nek n a legnagyobb hatványa, azaz a kapott polinom $2n$ -ed fokú.



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

Rezgéstan

- Alapfogalmak
- Ismételés
- A feladat
- VEM közelítés
- Elemi mátrixok
- Osztályozás
- Szabadrezgések
- Megoldási módszerek
- Stabilitás

Szabadrezgések

A karakterisztikus egyenlet i -edik gyökét, a sajátfrekvenciát, jelölje α_i , a hozzá tartozó sajátvektort φ^i

$$(\alpha_1, \varphi^1), (\alpha_2, \varphi^2), \dots, (\alpha_n, \varphi^n)$$

Sajátérték problémánál a megoldást

$$\mathbf{q} = \varphi \sin \alpha t$$

alakban keressük. Sajátvektor a kitérés amplitúdó vektorának felel meg. Így a

$$(\mathbf{K} - \alpha_i^2 \mathbf{M}) \varphi^i = \mathbf{0} \equiv \mathbf{D}(\alpha_i^2) \varphi^i = 0$$

homogén algebrai egyenletrendszerhez jutunk, aminek triviálistól különböző megoldása a α_i determináns eltűnéséből adódik.



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

Rezgéstan

- Alapfogalmak
- Ismétlés
- A feladat
- VEM közelítés
- Elemi mátrixok
- Osztályozás
- Szabadrezgések
- **Megoldási módszerek**
- Stabilitás

A mozgásegyenlet közvetlen integrálása

A mozgásegyenlet egy másodrendű differenciálegyenlet rendszer:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t).$$

Cél a differenciálegyenletet diszkrét időpillanati kielégítése, és az időlépések közötti gyorsulás megváltozásának feltétele.

- időlépésenként elégítjük ki az egyenletet (azaz időben is diszkrét pontokat nézünk)
- a felvett feltételből következő időlépésen belüli vizsgálat. Ahhoz, hogy $\dot{\mathbf{q}}$ és $\ddot{\mathbf{q}}$ -t kiszámíthassuk, feltételezéseket kell tenni. Alapvetően ezek a hipotézisek, feltételezések szabják meg a megoldási módszert. Így beszélünk pl. *Differencia-* és *Newmark*-módszerről.

Az eljárások nagy számítási igényeik miatt előnyösen számítógéppel hajthatók végre. Ezzel kapcsolatban további kérdések merülnek fel:

- mennyi a megoldás időszükséglete?
- milyen a kapott megoldás pontossága?
- milyen az eljárás stabilitása?



Differencia módszer

Tárolás-megoldás

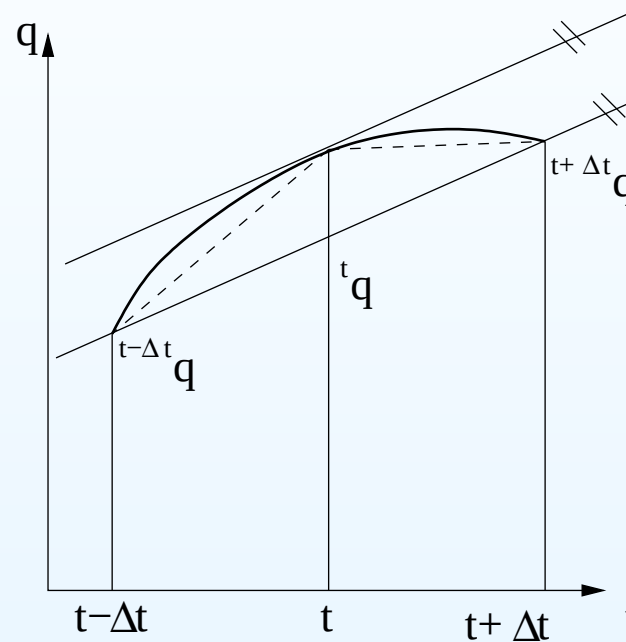
Modellezési kérdések

Lemezek

Rezgéstan

- Alapfogalmak
- Ismétlés
- A feladat
- VEM közelítés
- Elemi mátrixok
- Osztályozás
- Szabadrezgések
- **Megoldási módszerek**
- Stabilitás

Az eljárás másodrendűen pontos és feltételesen stabil.



$${}^t\dot{q} = \frac{{}^{t+\Delta t}q - {}^{t-\Delta t}q}{2\Delta t}$$

$${}^t\ddot{q} = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{{}^{t+\Delta t}q - {}^tq}{\Delta t} - \frac{{}^tq - {}^{t-\Delta t}q}{\Delta t} \right] = \frac{1}{\Delta t^2} [{}^{t+\Delta t}q - 2{}^tq + {}^{t-\Delta t}q]$$



[Tárolás-megoldás](#)

[Modellezési kérdések](#)

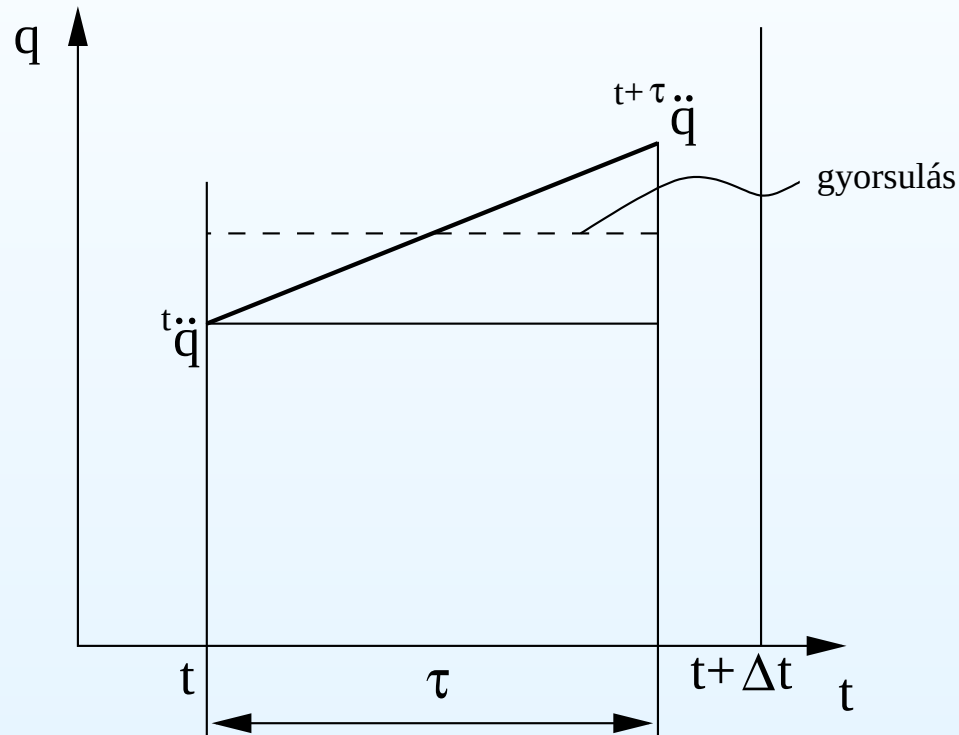
[Lemezek](#)

[Rezgéstan](#)

- Alapfogalmak
- Ismétlés
- A feladat
- VEM közelítés
- Elemi mátrixok
- Osztályozás
- Szabadrezgések
- **Megoldási módszerek**
- Stabilitás

Newmark-féle módszer

Az eljárás alapváltozata az intervallumonkénti súlyozott gyorsulás feltételezésére épül.





Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

Rezgéstan

- Alapfogalmak
- Ismétlés
- A feladat
- VEM közelítés
- Elemi mátrixok
- Osztályozás
- Szabadrezgések
- **Megoldási módszerek**
- Stabilitás

Newmark-féle módszer

Nem részletezve a levezetést a sebességre és az elmozdulásra az alábbi két összefüggést kapjuk:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{q}} = {}^t\dot{\mathbf{q}} + (1 - \gamma) (\Delta t) {}^t\ddot{\mathbf{q}} + \gamma \Delta t {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{q}}, \quad \gamma \geq \frac{1}{2}$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{q} = {}^t\mathbf{q} + \Delta t {}^t\dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) (\Delta t)^2 {}^t\ddot{\mathbf{q}} + \beta (\Delta t)^2 {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{q}}, \quad \beta \geq \frac{1}{4}$$

A számítás a választott súlyozó β , γ tényezőktől függően feltételesen stabil avagy feltételnélkülien stabil. Maga a módszer *implicit*.



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

Rezgés

- Alapfogalmak
- Ismétlés
- A feladat
- VEM közelítés
- Elemi mátrixok
- Osztályozás
- Szabadrezgések
- Megoldási módszerek
- Stabilitás

Stabilitás

Az integráló eljárások stabilitása azért vetődik fel, mert az időlépésenkénti előrehaladás során, elképzelhető, hogy egyre távolabb kerülve a pontos megoldástól, a számítógép számábrázolását is figyelembe véve, a számok túlcsordulhatnak.

Az explicit eljárások formálisan felírhatók a következő alakban is

$${}^{t+\Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^t \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \mathbf{L} {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}$$

Ha a terhelés hatásától eltekintünk, akkor az integrálás a megoldás vektor ismételt transzformációjaként interpretálható

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^t \hat{\mathbf{q}}$$

A transzformáció a megoldási vektort akkor nagyítja, ha van olyan sajátértéke, amelyik nagyobb, mint 1, és akkor kicsinyíti a megoldást, ha minden sajátérték kisebb mint 1. A numerikus integráló eljárás tehát stabil, ha

$$\rho(\mathbf{A}) \leq 1$$



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

Rezgéstan

- Alapfogalmak
- Ismétlés
- A feladat
- VEM közelítés
- Elemi mátrixok
- Osztályozás
- Szabadrezgések
- Megoldási módszerek
- Stabilitás

Newmark módszer stabilitása

A választott γ és β tényezőktől függ. Ennek értelmében a $\gamma = \frac{1}{2}$ és $\beta = \frac{1}{4}$ trapéz formula feltétel nélkül stabil és energia konzervatív, azaz megőrzi a bevitt energiát. $\gamma < \frac{1}{2}$ -nél a számítás instabil. A feltételesen stabil altartományban áll:

$$(\gamma + 0.5)^2 - 4\beta \leq \frac{4}{\alpha_n^2 \Delta t^2}$$

illetve a határgörbén

$$\beta = \frac{1}{16} + \frac{(\gamma^2 + \gamma)}{4}.$$

Vizsgálatok folytathatók az amplitudó és a rezgésperiódikus idejének pontatlansága tárgyában is. A következő táblázat összegzi az eredményeket, ahol α_n jelöli a vizsgált rendszer legnagyobb sajátkörfrekvenciájának az értékét, T a harmónikus rezgésidő exakt értékét, ΔT az eltérés értékét.



Tárolás-megoldás

Modellezési kérdések

Lemezek

Rezgéstan

- Alapfogalmak
- Ismétlés
- A feladat
- VEM közelítés
- Elemi mátrixok
- Osztályozás
- Szabadrezgések
- Megoldási módszerek
- Stabilitás

Megoldási módszerek összefoglalása

Algoritmus	γ	β	Időlépés hossz határa $\alpha_n \Delta t$	Amplitudó hiba	Periodicitási hiba $\frac{\Delta T}{T}$
Tiszta explicit explicit	0	0	0	$\frac{\alpha_n^2 \Delta t^2}{4}$	0
Centrális diff. m.	0.5	0	2	0	$-\frac{\alpha_n^2 \Delta t^2}{24}$
Lineáris gyorsulás	0.5	1/6	3.46	0	$\frac{\alpha_n^2 \Delta t^2}{24}$
Trapéz-m. (átlag gyorsulás)	0.5	0.25	∞	0	$\frac{\alpha_n^2 \Delta t^2}{12}$

Láthatóan a centrális differencia módszer feltételesen stabil, rövidebb periódus időt szolgáltatva, míg a trapéz féle módszer feltételnélküli számítást tesz lehetővé, hosszabb periódus időt adva. A tiszta explicit módszer habár feltétel nélkül stabil, de az eredmények jelentős amplitudó hibával lesznek terhelve.

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!