



MISKOLCI EGYETEM



GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR



MECHANIKAI TANSZÉK

VEM ALAPJAI

Introduction to FEM

Dr. Baksa Attila

e-mail: mechab@uni-miskolc.hu

tel.: (46) 565 111, 16-43



5. Rúdelem vizsgálata

- Húzott-nyomott rúd
- Szerkezeti jellemzők
- Izoparametrikus elem
- Integrálás-deriválás

6. Kétváltozós feladatok

7. 2D-s leképezés

5. Rúdelem vizsgálata



Húzott-nyomott lineáris rúdelem

5. Rúdelem vizsgálata

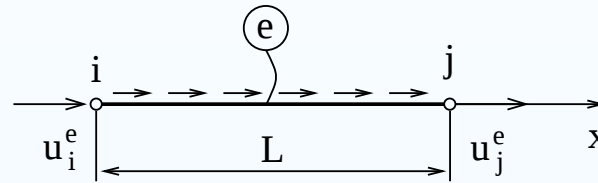
• Húzott-nyomott rúd

- Szerkezeti jellemzők
- Izoparametrikus elem
- Integrálás-deriválás

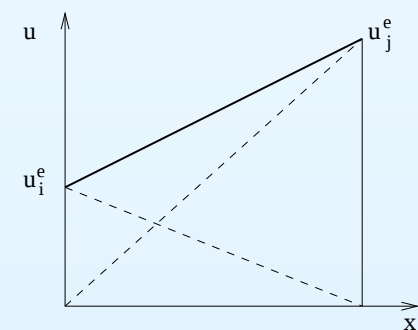
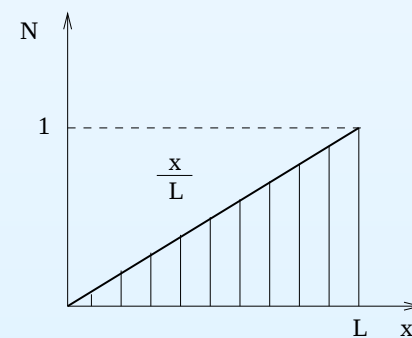
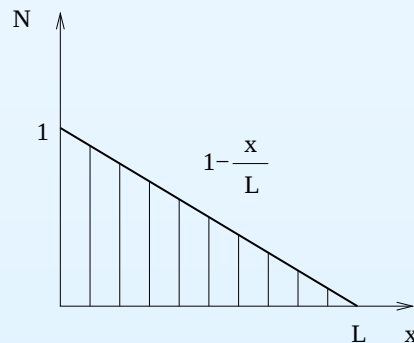
6. Kétváltozós feladatok

7. 2D-s leképezés

– közelítő elmozdulás mező



$$\begin{aligned} u^e(x) &= a^e + b^e x = u_i^e + \frac{u_j^e - u_i^e}{L} x = \\ &= \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_i^e + \frac{x}{L} u_j^e = \underbrace{\left[1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L}\right]}_{\mathbf{N}^e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}^e} = \mathbf{N}^e \mathbf{q}^e \end{aligned}$$





5. Rúdelem vizsgálata

- Húzott-nyomott rúd
- Szerkezeti jellemzők
- Izoparametrikus elem
- Integrálás-deriválás

6. Kétváltozós feladatok

7. 2D-s leképezés

Elemhez között jellemzők

– közelítő alakváltozás mező

$$\varepsilon_x^e = \frac{du^e}{dx} = \frac{u_j^e - u_i^e}{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}^e} = \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e$$

– feszültség: $\sigma_x^e = E\varepsilon_x^e$

– elem alakváltozási energiája

$$\begin{aligned} U^e &= \frac{1}{2} \int_L AE (\varepsilon_x^e)^2 dx = \frac{1}{2} \int_L AE \frac{(u_j^e - u_i^e)^2}{L^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i^e & u_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}^{eT}} \underbrace{\int_L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} AE \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx}_{\mathbf{K}^e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}^e} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e \end{aligned}$$

$$\text{ahol } \mathbf{K}^e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}^e$$



5. Rúdelem vizsgálata

- Húzott-nyomott rúd
- Szerkezeti jellemzők
- Izoparametrikus elem
- Integrálás-deriválás

6. Kétváltozós feladatok

7. 2D-s leképezés

Elemhez kötött jellemzők

– külső erők munkája

$$W_k^e = \int_L u^e p \, dx = \underbrace{\begin{bmatrix} u_i^e & u_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}^{eT}} \underbrace{\int_L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} p \, dx}_{\mathbf{f}^e} = \mathbf{q}^{eT} \mathbf{f}^e$$

ahol $\mathbf{f}^e$ a csomóponti terhelési vektor.

Ha $p = \text{áll.}$

$$\mathbf{f}^e = p \int_L \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} dx = \frac{pL}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

– az elem potenciális energiája

$$\Pi^e = U^e - W_k^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{eT} \mathbf{f}^e$$



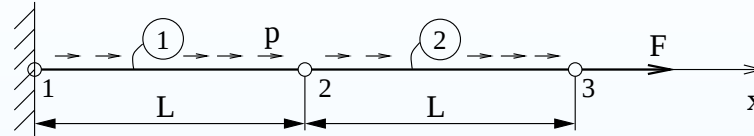
5. Rúdelem vizsgálata

- Húzott-nyomott rúd
- **Szerkezeti jellemzők**
- Izoparametrikus elem
- Integrálás-deriválás

6. Kétváltozós feladatok

7. 2D-s leképezés

Szerkezeti jellemzők: illesztés



$$u_2^1 = u_2^2 = u_2$$

$$u_1^1 = u_1 \quad u_3^2 = u_3 \quad (\text{mivel nincs más csomópont})$$

Ezáltal a szerkezet csomóponti elmozdulás vektora

$$\mathbf{q}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]$$



Szerkezeti jellemzők: potenciális energia

5. Rúdelem vizsgálata

- Húzott-nyomott rúd
- **Szerkezeti jellemzők**
- Izoparametrikus elem
- Integrálás-deriválás

6. Kétváltozós feladatok

7. 2D-s leképezés

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{1}{2} \mathbf{q}^1 T \mathbf{K}^1 \mathbf{q}^1 + \frac{1}{2} \mathbf{q}^2 T \mathbf{K}^2 \mathbf{q}^2 - \mathbf{q}^1 T \mathbf{f}^1 - \mathbf{q}^2 T \mathbf{f}^2 - u_3 F$$

$$\mathbf{K}^1 = \mathbf{K}^2 = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad p = \text{áll. } \mathbf{f}^1 = \mathbf{f}^2 = \frac{pL}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \frac{pL}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \\ & + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \end{bmatrix} \frac{pL}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - u_3 F \end{aligned}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}^T} \underbrace{\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} - \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{pL}{2} \\ pL \\ \frac{pL}{2} + F \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}}$$

ahol $\mathbf{K}$ a szerkezet merevségi mátrixa, illetve $\mathbf{f}$ a szerkezet csomóponti redukált terhelési vektora.



K és f előállítása

5. Rúdelem vizsgálata

- Húzott-nyomott rúd
- **Szerkezeti jellemzők**
- Izoparametrikus elem
- Integrálás-deriválás

6. Kétváltozós feladatok

7. 2D-s leképezés

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ & k_{22} & k_{23} \\ & & k_{33} \end{bmatrix} \quad \text{illesztés} \quad k_{ij} = \sum_{e \in i,j} K_{ij}^e$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad \text{illesztés} \quad f_i = \sum_{e \in i} f_i^e$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f}$$

Ennek képezzük a variációját, figyelembe véve, hogy

$$\delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{q}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{q}$$

megkapjuk a

$$\delta \Pi = \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{f}) = 0$$

ha $\delta \mathbf{q}^T$ tetszőleges, akkor

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f}$$



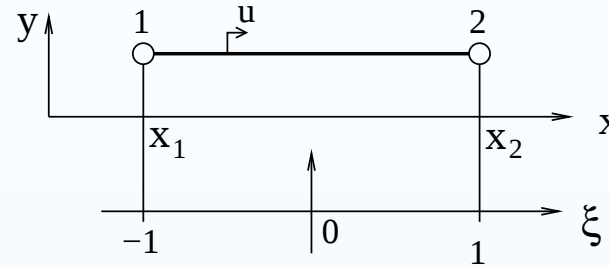
5. Rúdelem vizsgálata

- Húzott-nyomott rúd
- Szerkezeti jellemzők
- Izoparametrikus elem
- Integrálás-deriválás

6. Kétváltozós feladatok

7. 2D-s leképezés

Rúdelem mint izoparametrikus elem



– Koordináta transzformáció

- helyi sorszám: 1, 2
- globális koordináta: x
- természetes, vagy naturális koordináta: ξ

$$(x_1 \leq x \leq x_2) \xLeftrightarrow{\text{leképezés}} (-1 \leq \xi \leq 1)$$

A leképezéshez definiáljuk a következő függvényt:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} \xi =$$

$$x = \underbrace{\frac{1}{2} (1 - \xi)}_{N_1(\xi)} x_1 + \underbrace{\frac{1}{2} (1 + \xi)}_{N_2(\xi)} x_2 = N_1(\xi) x_1 + N_2(\xi) x_2$$



5. Rúdelem vizsgálata

- Húzott-nyomott rúd
- Szerkezeti jellemzők
- Izoparametrikus elem
- Integrálás-deriválás

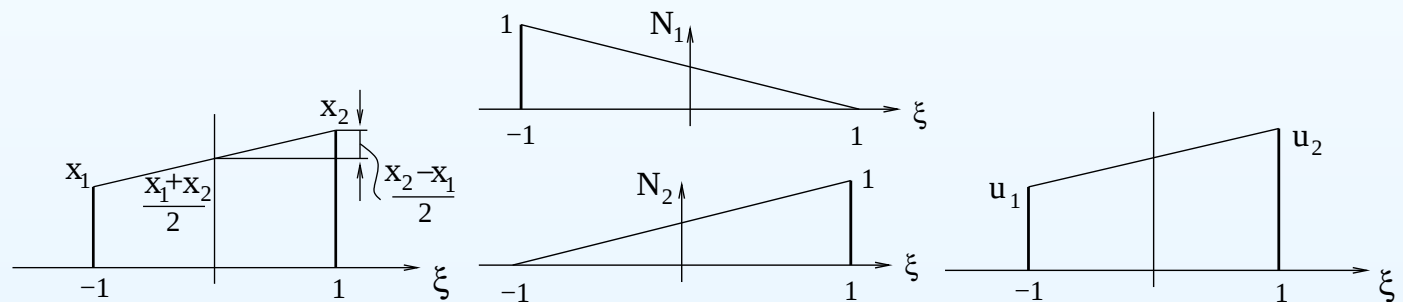
6. Kétváltozós feladatok

7. 2D-s leképezés

Izoparametrikus leképezés

Tehát leképezzük az elemet a természetes koordináta rendszerbe.

$$x = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) x_i$$



– Elmozdulásmező közelítése

$$u = u^e(\xi) = N_1^e(\xi) u_1^e + N_2^e(\xi) u_2^e$$

ahol

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

Integrálás, deriválás

$$\frac{du}{d\xi} = -\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2} = \frac{u_2 - u_1}{2}, \quad \frac{dx}{d\xi} = -\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{L}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{u_2 - u_1}{2} \frac{2}{L} = \frac{u_2 - u_1}{L} = [u_1 \quad u_2] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Ezáltal felírható az izoparametrikus elemre az alakváltozási energia diszkretizált alakja

$$U = \frac{1}{2} \int_L \varepsilon A E \varepsilon \underbrace{\frac{dx}{d\xi} d\xi}_{\frac{dx}{d\xi} d\xi} = \frac{1}{2} [u_1 \quad u_2] \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} A E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \frac{L}{2} d\xi \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e$$

illetve a külső erők munkája

$$W_k^e = \int_0^L u^e p_x dx = \int_{-1}^1 \mathbf{q}^{eT} \mathbf{N}^{eT}(\xi) p_x \frac{L}{2} d\xi = \mathbf{q}^{eT} \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{1}{2} [1 - \xi \quad 1 + \xi] \frac{L}{2} p_x d\xi}_{\mathbf{f}^{eT}} = \mathbf{q}^{eT} \mathbf{f}^{eT}$$



5. Rúdelem vizsgálata

6. Kétváltozós feladatok

- SA
- SF
- TSz

7. 2D-s leképezés

6. Kétváltozós feladatok



5. Rúdelem vizsgálata

6. Kétváltozós feladatok

● SA

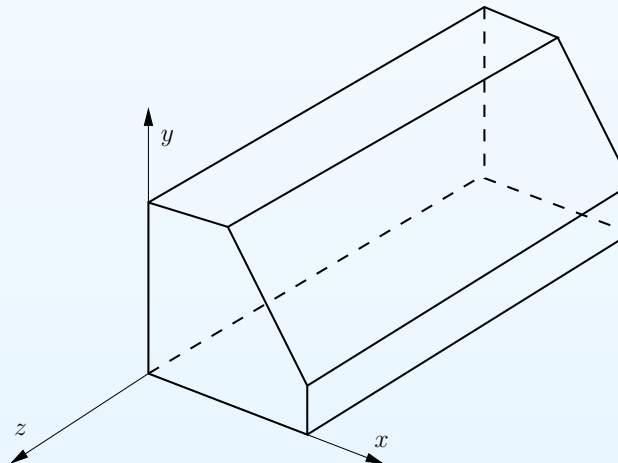
● SF

● TSz

7. 2D-s leképezés

Síkalakváltozás (SA)

Amennyiben a vizsgált test geometriája és terhelése következtében létezik egy olyan irány, amely mentén a test pontjai nem mozdulnak el, valamint ezen kitüntetett irányhoz tartozó helykoordinátától, a reá merőleges síkban fellépő elmozdulásvektor koordinátái függetlenek, síkalakváltozásról szokás beszélni.



Legyen a kitüntetett e_z irányban mért helykoordináta a z . Ekkor a szóbanforgó állapot csak akkor tud kialakulni, ha a térfogaton megoszló $\rho \mathbf{k}$ terhelésnek és az A_p felületen megoszló $\mathbf{p}$ terhelésnek nincs z irányú összetevője.



5. Rúdelem vizsgálata

6. Kétváltozós feladatok

• SA

• SF

• TSz

7. 2D-s leképezés

Síkalakváltozás (SA)

Az elmozdulásmező és a terhelési függvények

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y$$

$$\rho\mathbf{k} = \rho\mathbf{k}(x, y) = \rho(k_x\mathbf{e}_x + k_y\mathbf{e}_y)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(x, y) = p_x\mathbf{e}_x + p_y\mathbf{e}_y$$

Az $\mathbf{A}$ alakváltozási tenzor a geometriai egyenlet értelmében

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

míg a $\mathbf{T}$ feszültségi tenzor

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

ahol izotróp esetben $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$



5. Rúdelem vizsgálata

6. Kétváltozós feladatok

• SA

• SF

• TSz

7. 2D-s leképzés

Síkalakváltozás (SA)

Az $\varepsilon_z \equiv 0$ miatt az alakváltozási energia számításánál csak a $\mathbf{T}$ tenzor síkbeli részével kell dolgozni, tehát

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_z & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Így végül is, síkalakváltozás esetén

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned}$$



5. Rúdelem vizsgálata

6. Kétváltozós feladatok

• SA

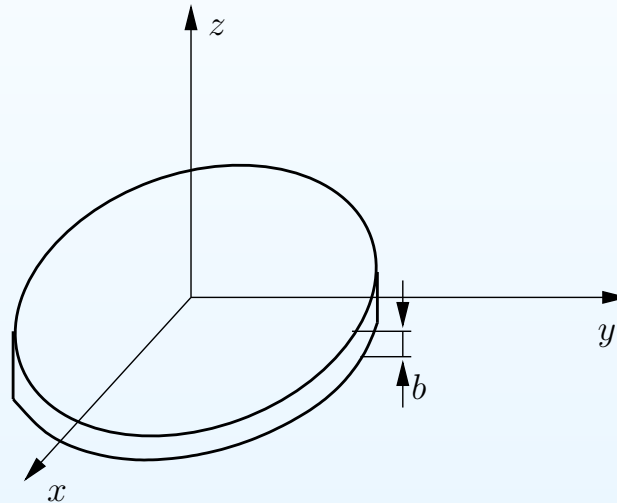
• **SF**

• TSz

7. 2D-s leképezés

Síkfeszültségi állapot (SF)

A síkfeszültségi állapotot az jellemzi, hogy most a kitüntetett z irányra merőleges síkokon nem keletkezik $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ feszültség. Ehhez az szükséges, hogy a $\rho \mathbf{k}$ és $\mathbf{p}$ terhelési függvényeknek ne legyen z irányú összetevője.



Fentiek alapján a feszültségi tenzornak csak a síkbeli része lehet zérustól különböző

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}(x, y)$$



5. Rúdelem vizsgálata

6. Kétváltozós feladatok

• SA

• **SF**

• TSz

7. 2D-s leképzés

Síkfeszültségi állapot (SF)

Ismét homogén, izotróp anyagot tételezünk fel, így a z irányú fajlagos nyúlás

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

míg az $\mathbf{A}$ alakváltozási tenzor

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \mathbf{A}(x, y) \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Tekintettel megint az alakváltozási energia kiszámítási módjára elegendő csak a tenzorok síkbeli részét megtartani. Homogén, izotróp anyagnál áll:

$$\mathbf{T} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$



5. Rúdelem vizsgálata

6. Kétváltozós feladatok

• SA

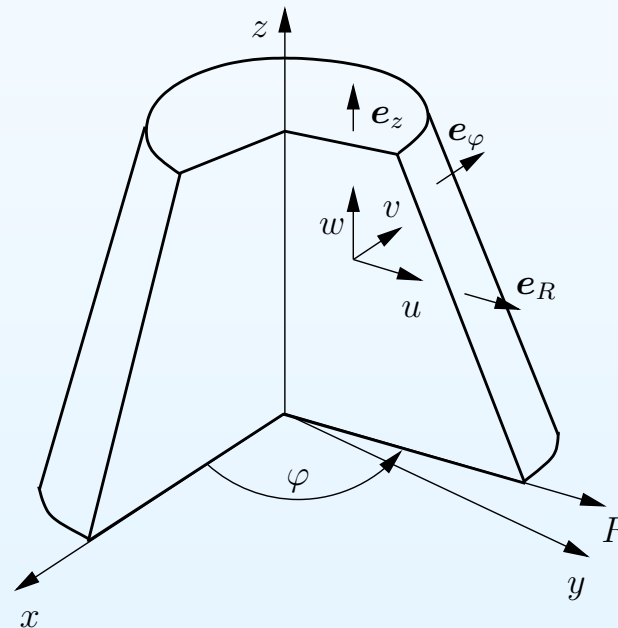
• SF

• TSz

7. 2D-s leképzés

Tengelyszimmetrikus feladatok (TSz)

Számos esetben találkozunk a mérnöki gyakorlatban forgástestekkel (tengelyek, tartályok stb.). Ezek egy része a geometriai tengelyszimmetria mellett, a megfogás és terhelés vonatkozásában is forgásszimmetriával, tengelyszimmetriával rendelkezik. Ez esetben a látható z tengelyű forgástest terhelése és megfogása független a kerületi irányban mért φ koordinátától.



$$\mathbf{u} = u(R, z)\mathbf{e}_R + w(R, z)\mathbf{e}_z$$



5. Rúdelem vizsgálata

6. Kétváltozós feladatok

• SA

• SF

• **TSz**

7. 2D-s leképezés

Tengelyszimmetrikus feladatok (TSz)

Az alakváltozási és feszültségi vektorok

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_R \\ \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{Rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial R} \\ \frac{u}{R} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial R} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_R \\ \sigma_\varphi \\ \sigma_z \\ \tau_{Rz} \end{bmatrix}$$

között homogén izotróp anyagra az anyagállandók mátrixa

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

teremt kapcsolatot.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$



5. Rúdelem vizsgálata

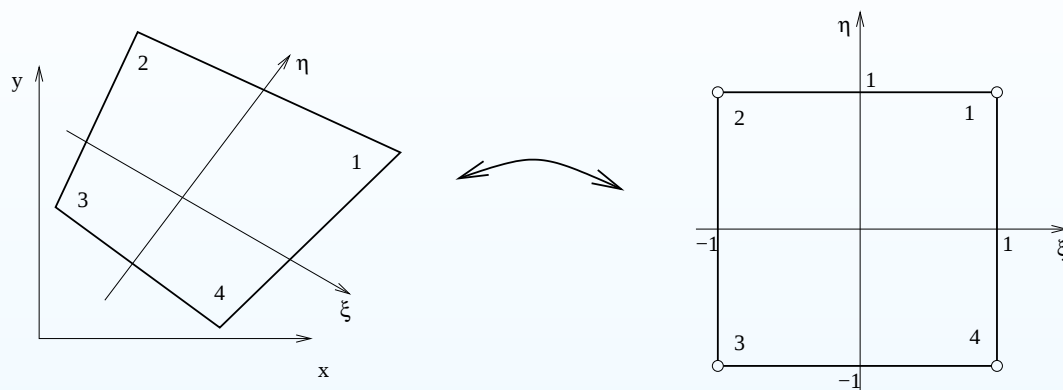
6. Kétváltozós feladatok

7. 2D-s leképzés

- Alakfüggvények
- 8 csomópontú elem
- Elmozdulásmező
- Deriváltak előállítás
- Merevségi mátrix
- Numerikus integrálás
- Leképzés?
- Kinematiakai előírás

7. 2D-s leképzés

2D-s izoparametrikus leképzés – négycsomópontú elem



$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i$$

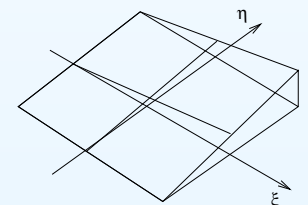
$$y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i$$

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \frac{1}{2}(1 + \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \frac{1}{2}(1 + \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

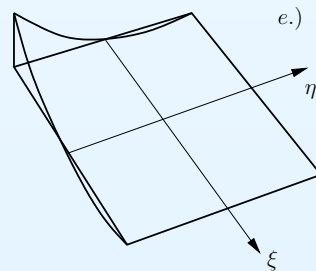
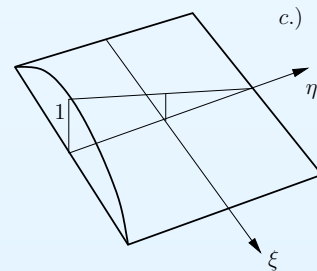
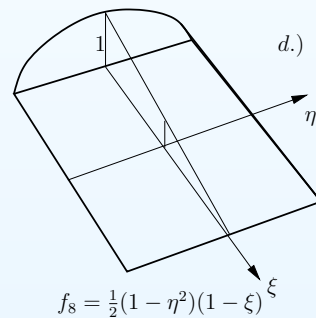
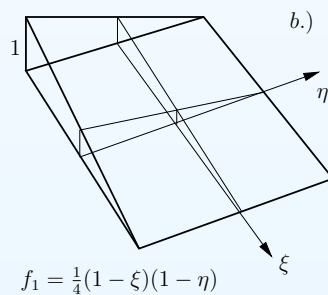
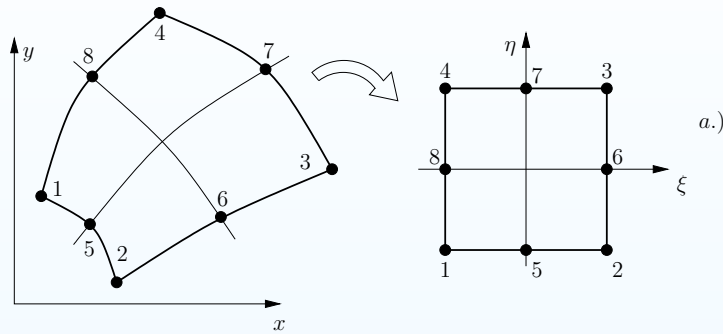
$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \frac{1}{2}(1 - \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \frac{1}{2}(1 - \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$



$$N_i(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Nyolccsomópontú elem



$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi)$$



5. Rúdelem vizsgálata

6. Kétváltozós feladatok

7. 2D-s leképezés

- Alakfüggvények
- 8 csomópontú elem
- **Elmozdulásmező**
- Deriváltak előállítás
- Merevségi mátrix
- Numerikus integrálás
- Leképezés?
- Kinematiakai előírás

Elmozdulásmező

A két koordináta-rendszer közötti leképezést az előzőekkel összhangban

$$x = \sum_{i=1}^{n_{cs}} N_i(\xi, \eta) x_i \quad y = \sum_{i=1}^{n_{cs}} N_i(\xi, \eta) y_i$$

formulák adják, ahol n_{cs} az adott elemmodell csomópontjainak száma. Kétváltozós feladatok esetén az elmozdulás koordináták közelítése

$$u = \sum_{i=1}^{n_{cs}} N_i(\xi, \eta) u_i \quad v = \sum_{i=1}^{n_{cs}} N_i(\xi, \eta) v_i$$

A szokás szerinti tömör felírás

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_{n_{cs}} & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_{n_{cs}} \end{bmatrix} \mathbf{q}^e \equiv \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{q}$$

ahol $\mathbf{q}^{eT} = [u_1, v_1, \dots, u_i, v_i, \dots, u_{n_{cs}}, v_{n_{cs}}]$ az elem $2n_{cs}$ méretű elmozdulás-vektora.



5. Rúdelem vizsgálata

6. Kétváltozós feladatok

7. 2D-s leképezés

- Alakfüggvények
- 8 csomópontú elem
- Elmozdulásmező
- **Deriváltak előállítás**
- Merevségi mátrix
- Numerikus integrálás
- Leképezés?
- Kinematiakai előírás

Deriváltak előállítása

A globálrendszerbeli alakváltozási vektor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i \\ \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \\ \sum_i \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i \right) \end{bmatrix}$$

amiből látszik, hogy a ehhez szükséges az alakfüggvények globál koordináta-rendszerbeli $\frac{\partial N_i}{\partial x}$, $\frac{\partial N_i}{\partial y}$ parciális deriváltjai

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Tömörebben felírva

$$(\boldsymbol{\partial}_G N_i) = \mathbf{J}^{-1} (\boldsymbol{\partial}_L N_i) = \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} \\ J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} \end{bmatrix} (\boldsymbol{\partial}_L N_i)$$

ahol $\mathbf{J}^{-1}$ a Jacobi-mátrix inverze, $(\boldsymbol{\partial}_G)$ a globálrendszerbeli deriváltak vektora, $(\boldsymbol{\partial}_L)$ a lokálrendszerbeli deriváltak vektora.



5. Rúdelem vizsgálata

6. Kétfváltozós feladatok

7. 2D-s leképzés

- Alakfüggvények
- 8 csomópontú elem
- Elmozdulásmező
- **Deriváltak előállítás**
- Merevségi mátrix
- Numerikus integrálás
- Leképzés?
- Kinematiakai előírás

Deriváltak előállítás

A ξ, η rendszerbeli parciális deriváltakra

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$(\partial_L N_i) = \mathbf{J} (\partial_G N_i) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} (\partial_G N_i)$$

így a Jacobi-mátrix felhasználásával

$$\mathbf{J}_{(2,2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sum_i N_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial \sum_i N_i}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial \sum_i N_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial \sum_i N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \dots \\ \dots \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_i & y_i \\ x_{n_{cs}} & y_{n_{cs}} \end{bmatrix}$$

módon számítható.



5. Rúdelem vizsgálata

6. Kétváltozós feladatok

7. 2D-s leképezés

- Alakfüggvények
- 8 csomópontú elem
- Elmozdulásmező
- **Deriváltak előállítása**
- Merevségi mátrix
- Numerikus integrálás
- Leképezés?
- Kinematikai előírás

Deriváltak előállítása

Látjuk tehát, hogy a két koordinátarendszerben értelmezett deriváltak között a Jacobi-mátrix, vagy annak inverze teremti kapcsolatot.

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial x} &= J_{11}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{12}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} &= J_{21}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{22}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy így előállítható a következő formula által definiált **B** elmozdulás-alakváltozás transzformációs mátrixszal felírható

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_i \\ v_i \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{B}(\xi, \eta) \mathbf{q}^e$$



5. Rúdelem vizsgálata

6. Kétváltozós feladatok

7. 2D-s leképezés

- Alakfüggvények
- 8 csomópontú elem
- Elmozdulásmező
- Deriváltak előállítása
- **Merevségi mátrix**
- Numerikus integrálás
- Leképezés?
- Kinematiakai előírás

Merevségi mátrix

Az előző pontokban ismertetett kétdimenziós feladattípusok sajátosságait figyelembe véve az elem teljes potenciális energia kifejezése mátrixos formában

$$\Pi_p^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \int_{(A^e)} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} b dA \mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{eT} (\mathbf{f}_\varepsilon^e + \mathbf{f}_p^e + \mathbf{f}_{qk}^e)$$

ahol

$\mathbf{K}^e = \int_{A^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} b dA$ az elemi merevségi mátrix,

$\mathbf{f}_\varepsilon^e = \int_{A^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \varepsilon_0 b dA$ a kezdeti alakváltozásból,

$\mathbf{f}_p^e = \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \mathbf{p} b d\Gamma$ a felületi terhelésből, és

$\mathbf{f}_{\rho k}^e = \int_{A^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{k} b dA$ a térfogati terhelésből

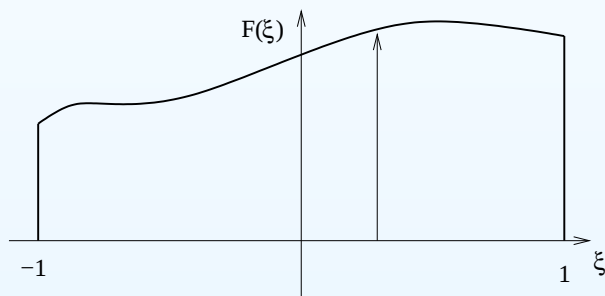
számítandó redukált csomóponti terhelési vektor.

Numerikus integrálás

A merevségi mátrix : $\mathbf{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}^e b \det \mathbf{J} d\xi d\eta$

Ennek az elvégzését megtehetjük numerikus úton a *Gauss-kvadratúra* szerint is.

$$\int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^{NG} w_i F(\xi_i)$$



$\pm \xi_i$	NG	w_i
0	1	2
0,577	2	1
0,774		0,555
0	3	0,888

A numerikus integrálás hasonlóan elvégezhető két, vagy három változóra is:

$$\mathbf{K}^e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{NG} \sum_{j=1}^{NG} w_i w_j \mathbf{F}(\xi_i, \eta_j), \quad F(\xi, \eta) = \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}^e b \det \mathbf{J}$$



5. Rúdelem vizsgálata

6. Kétváltozós feladatok

7. 2D-s leképezés

- Alakfüggvények
- 8 csomópontú elem
- Elmozdulásmező
- Deriváltak előállítása
- Merevségi mátrix
- Numerikus integrálás
- **Leképezés?**
- Kinematiakai előírás

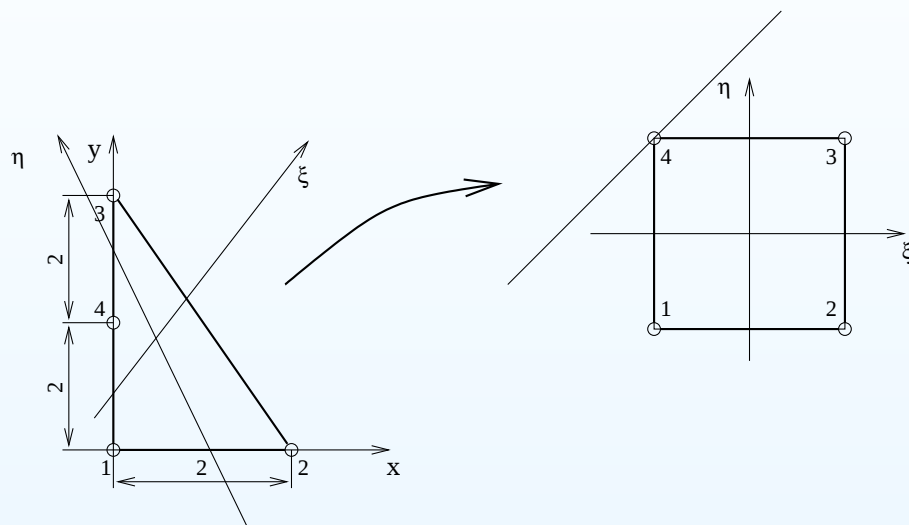
Kölcsönösen egyértelmű leképezés

A végeelem ténylegesen az x, y rendszerben létezik, vagyis a mezők simaságához az $N_i(\xi(x, y), \eta(x, y))$ függvénynek is simának kell lennie. Az $N_i(\xi, \eta)$ függvények simák (folytonos deriváltakkal rendelkeznek a ξ, η rendszerben). Azonban, ha az elem valamelyik csomópontjánál az oldalak közötti szög 180° , vagy annál nagyobb (a belső szög tompa), akkor az x, y és ξ, η koordinátarendszerek közötti leképezés már nem lesz egyértelmű, amelyet a **J Jacobi-mátrix** determinánsának nem pozitív volta is jelez. Az x, y és a ξ, η koordináta-rendszerek közötti egyértelmű leképezéshez szükséges, hogy

$$\det \mathbf{J} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} > 0,$$

azaz a **J Jacobi-mátrix** determinánsának pozitívnak kell lennie, tehát **J** invertálható.

4 csomópontú elem szingularitás vizsgálata



Négycsomópontú elem
alakfüggvényei:

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta)$$

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i (\xi, \eta) x_i \quad x \longleftrightarrow y$$

Mivel $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, illetve $y_1 = y_2 = 0$, így írhatjuk, hogy

$$x = N_2 x_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) \cdot 2 = \frac{1}{2} (1 + \xi) (1 - \eta)$$

$$y = N_3 x_3 + N_4 y_4 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) \cdot 4 + \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) \cdot 2 = \frac{1}{2} (3 + \xi) (1 + \eta)$$

Szingularitás vizsgálat folyt.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\eta}{2} & \frac{1+\eta}{2} \\ -\frac{1+\xi}{2} & \frac{3+\xi}{2} \end{bmatrix}$$

amiből látható, hogy

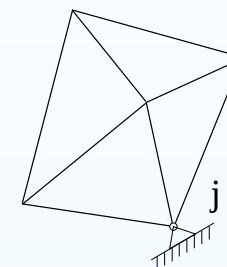
$$\begin{aligned} \det \mathbf{J} &= \frac{1}{4} [(1 - \eta)(3 + \xi) + (1 + \xi)(1 + \eta)] = \\ &= \xi - 3\eta + 3 - \xi\eta + 1 + \xi\eta + \xi + \eta = 4 + 2\xi - 2\eta = 0 \quad \implies \quad \boxed{\eta = \xi + 2} \end{aligned}$$

Tehát ezen fenti egyenes mentén az elem pontjainak leképezése szinguláris, látható ebben a feladatban ez csak a 4. csomópont leképezését érinti.

Kinematikai előírás biztosítása

Legyen $\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_{ju}$ – adott elmozdulás, mely azt jelenti, hogy $\delta \mathbf{q}_j = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}_1^T & \dots & \delta \mathbf{q}_j^T & \dots \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \dots & \mathbf{K}_{1j} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \\ \mathbf{K}_{i1} & \dots & \mathbf{K}_{ij} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{ju} \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_j \\ \vdots \end{bmatrix} \right) = \mathbf{0}$$



ahol a j . blokk sor 0-val szorzódik.

– CSERE: kicseréljük a j . csomópontbeli elmozdulást az $\mathbf{R}_j$ külső terheléssel, mely a j . pontbeli reakció erő

$$\mathbf{K}_{j1}\mathbf{q}_1 + \dots + \underbrace{\mathbf{K}_{jj}\mathbf{q}_{ju}}_{\text{ismert}} + \dots = \mathbf{f}_j + \underbrace{\mathbf{R}_j}_{\text{ismeretlen}}$$

Az ismert és az ismeretlen mennyiségek cseréjével kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \dots & \mathbf{0} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \\ \mathbf{K}_{i1} & \dots & \mathbf{E} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_j \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 - \mathbf{K}_{1j}\mathbf{q}_{ju} \\ \vdots \\ f_j - \mathbf{K}_{jj}\mathbf{q}_{ju} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

ahol $\mathbf{E}$ egy megfelelő méretű egységmátrix.

Kinematikai előírás biztosítása, folyt.

- TÖRLÉS: kihagyjuk a j . sort, oszlopot, ezáltal kapunk egy csökkentett méretű egyenletrendszert.
- BÜNTETŐPARAMÉTERES ELJÁRÁS: bevezetjük $\mathcal{B}$ funkcionált a következő módon

$$\mathcal{B} = \Pi + \frac{1}{2} (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_{ju}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_{ju}) \quad \mathbf{C} = c \mathbf{E} \quad \mathbf{C} \gg \mathbf{K}_{jj}$$

képezve ennek $\mathbf{q}_i$ szerinti deriváltját, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \mathbf{q}_i} = \mathbf{0} \quad i = 1, \dots, N_{cs}$$

ahol $\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f}$ a teljes potenciális energia. Ha $i = j$ akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{j1} \mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{K}_{jj} \mathbf{q}_j + \mathbf{C} \mathbf{q}_j - \mathbf{f}_j - \mathbf{C} \mathbf{q}_{ju} &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{K}_{jj} + \mathbf{C}) \mathbf{q}_j &\approx \mathbf{C} \mathbf{q}_{ju} \\ \mathbf{C} \mathbf{q}_j &\approx \mathbf{C} \mathbf{q}_{ju} \implies \mathbf{q}_j \approx \mathbf{g}_{ju} \end{aligned}$$

Alakilag egy az előzőekben már felírt egyenletrendszert kapunk

$$\boxed{\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f}}$$

azzal a fontos megjegyzéssel, hogy $\mathbf{K}$: a módosított merevségi mátrix és $\mathbf{f}$: a módosított terhelési vektor.

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!