



MISKOLCI EGYETEM



GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR



MECHANIKAI TANSZÉK

VEM ALAPJAI

Introduction to FEM

Dr. Baksa Attila

e-mail: mechab@uni-miskolc.hu

tel.: (46) 565 111, 16-43



Bevezetés

- A tárgy célja
- A módszerek

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat

Bevezetés



Bevezetés

- A tárgy célja

- A módszerek

- 1. Fogalmak

- 2. Hibaanalízis

- 3. Variációs elvek

- 4. Egyváltozós feladat

A tárgy célja

A végeselem-módszer oktatásának célja a műszaki mechanika alaptárgyaira és a numerikus módszerek ismeretére alapozva, illetve építve, olyan ismeret elsajátítása, amely az érdeklődőt képessé teszi

1. a módszer mechanikai alapjainak elsajátítására,
2. különféle elemek előállítására,
3. a modellezési kérdések behatóbb elemzésére,
4. a nagyméretű rendszerek numerikus kezelésére,
5. a kapott eredmények szakszerű értékelése,
6. végeselem-programrendszerek használatára.



A módszerek

Bevezetés

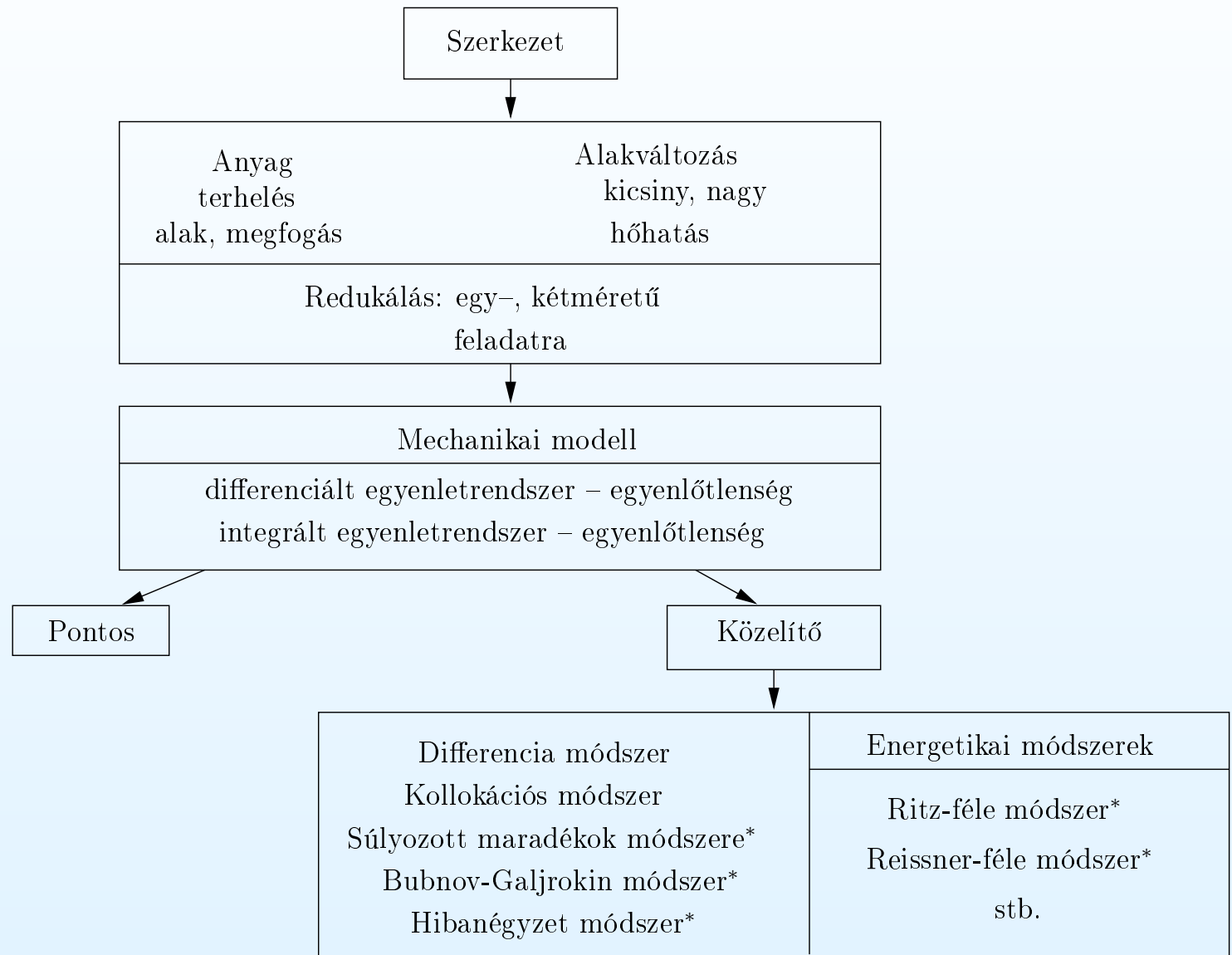
- A tárgy célja
- **A módszerek**

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat





Bevezetés

1. Fogalmak

- Mechanikai rendszer
- Funkcionál
- Variálás

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat

1. Fogalmak



Mechanikai rendszer

Bevezetés

1. Fogalmak

● Mechanikai rendszer

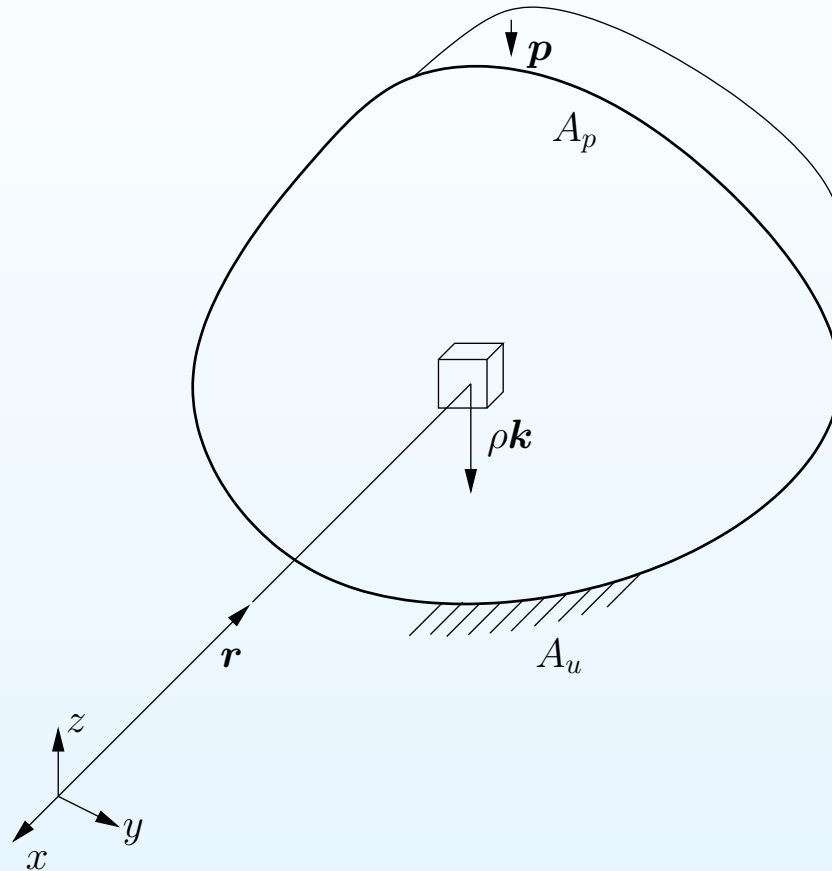
● Funkcionál

● Variálás

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat



$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z.$$



Bevezetés

1. Fogalmak

● Mechanikai rendszer

● Funkcionál

● Variálás

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat

A mechanikai rendszer

Elmozdulás $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}) = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z$

Alakváltozás $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}^T(\mathbf{r})$

Feszültség $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{r}) = \mathbf{T}^T(\mathbf{r})$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



Bevezetés

1. Fogalmak

- Mechanikai rendszer

- Funkcionál

- Variálás

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat

A mechanikai rendszer

Geometriai egyenlet

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u})$$

Egyensúlyi egyenlet

$$\mathbf{T} \cdot \nabla + \rho \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Anyagegyenlet

$$\mathbf{T} = \mathbf{D} \cdot \cdot \mathbf{A}$$

mely homogén, izotróp anyag esetén

$$\mathbf{T} = 2G \left(\mathbf{A} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \mathbf{I} \right)$$

KPF:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \mathbf{r} \in A_u$$

DPF:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p} \quad \mathbf{r} \in A_p$$



Bevezetés

1. Fogalmak

● Mechanikai rendszer

● Funkcionál

● Variálás

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat

Kinematikailag lehetséges

Definíció 1.

Kinematikailag lehetséges (megengedett) elmozdulásmezőnek nevezünk minden olyan $\mathbf{u}^*$ mezőt, amely folytonos, véges deriváltakkal rendelkezik és kielégíti a KPF-t, azaz

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_0 \quad \mathbf{r} \in A_u$$

$$\mathbf{A}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^* \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u}^*) \quad \mathbf{r} \in V$$



Bevezetés

1. Fogalmak

- Mechanikai rendszer
- Funkcionál
- Variálás

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat

Statikailag lehetséges

Definíció 2.

Statikailag lehetséges feszültségmezőnek nevezünk minden olyan $\bar{\mathbf{T}}$ tenzormezőt, mely kielégíti az egyensúlyi egyenletet és a dinamikai peremfeltételt, azaz

$$\bar{\mathbf{T}} \cdot \nabla + \rho \mathbf{k} = \mathbf{0} \quad \mathbf{r} \in V$$

$$\bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p} \quad \mathbf{r} \in A_p$$



Bevezetés

1. Fogalmak

- Mechanikai rendszer
- **Funkcionál**
- Variálás

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat

Funkcionál

Funkcionál alatt az Ω értelmezési tartományon értelmezett függvénytől, annak különböző rendű deriváltjaitól függő skalár mennyiséget értünk, azaz

$$F = F(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \dots)$$

ami egyváltozós esetben

$$F = F\left(x, u(x), \frac{du}{dx} \dots\right) = F(x, u, u' \dots)$$

Például

$$F(x, u) = \int_0^1 a \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^1 u p dx$$

A fizikai feladathoz rendelt az F -ben szereplő $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ függvény az ismeretlen, ennek meghatározása a cél.



Bevezetés

1. Fogalmak

- Mechanikai rendszer
- Funkcionál
- **Variálás**

2. Hibaanalízis

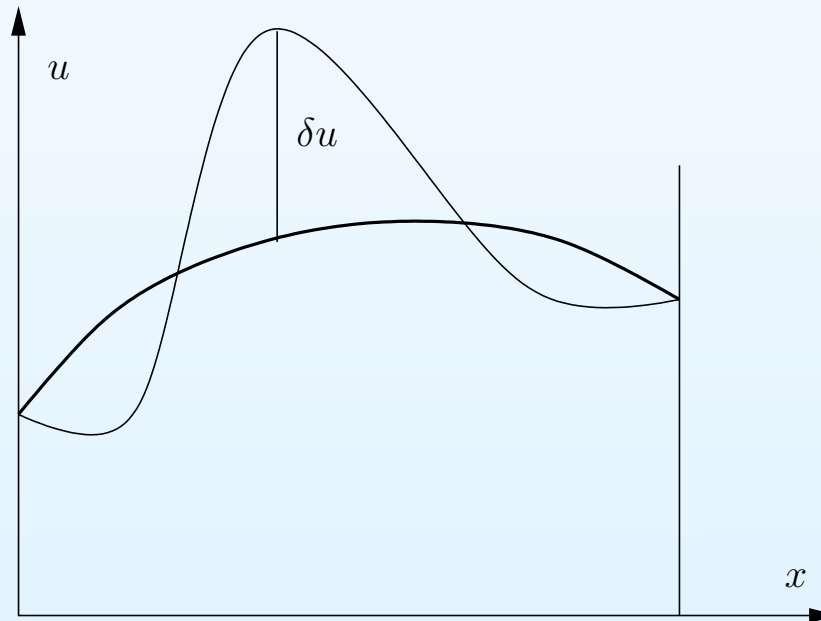
3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat

Variálás

A függvény variációja alatt, annak kismértékű megváltoztatását értjük. Általában a megváltoztatott függvénytől meg szokás követelni a folytonosságot és deriválhatóságot, illetve feladattól függően bizonyos peremfeltételek kielégítését is.

A variálás jeleként δ -t szokás használni. Így u variációja alatt δu -t értjük.





Bevezetés

1. Fogalmak

- Mechanikai rendszer
- Funkcionál
- **Variálás**

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat

Variálás

A funkcionál első variációját $F = F(x, u, u')$ esetén

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u'$$

jelenti, míg az F teljes differenciálja

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial u'} du'$$

Állnak az alábbi összefüggések

$$\delta(F_1 + F_2) = \delta F_1 + \delta F_2$$

$$\delta(F_1 \cdot F_2) = \delta F_1 \cdot F_2 + F_1 \cdot \delta F_2$$

$$\delta F^n = n F^{n-1} \delta F$$

$$\delta \left(\frac{F_1}{F_2} \right) = \frac{\delta F_1 \cdot F_2 - F_1 \cdot \delta F_2}{(F_2)^2}$$



Bevezetés

1. Fogalmak

- Mechanikai rendszer
- Funkcionál
- **Variálás**

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat

Variálás

Az u függvény megváltoztatását egy α állandó és $v(x)$ függvényen keresztül kifejezve $\delta u = \alpha v$, ahol α paraméter, amely a különböző variációknál más és más, $v(x)$ egy másik függvény. Az u függvény variációjának deriváltja

$$\frac{d}{dx}(\delta u) = \frac{d}{dx}(\alpha v) = \alpha \frac{dv}{dx} = \alpha v' = \delta u' = \delta \left(\frac{du}{dx} \right)$$

vagyis a deriválás és a variálás sorrendje felcserélhető.
Integrálásnál pedig áll

$$\delta \int_{\Omega} u(x) dx = \int_{\Omega} \delta u(x) dx.$$



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

- Energia norma
- Konvergencia
- Megoldás jellege
- Hiba mértéke

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat

2. Hibaanalízis

Energia norma

- energia norma

$\mathbf{u}$ – elmozdulás $\rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial} \cdot \mathbf{u}$ alakváltozás, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ feszültség

- elmozdulás energia normája

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{U} = \left(\frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_V (\boldsymbol{\partial} \cdot \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\partial} \cdot \mathbf{u}) dV \right)^{\frac{1}{2}}$$

- hiba

$$\mathbf{e} = \mathbf{u}_{VEM} - \mathbf{u}_{ex}$$

ahol $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ex}$ az egzakt megoldás, illetve $\mathbf{u}_{VEM}$ a végeselemes megoldás

- hiba energia norma

$$\|\mathbf{e}\| = \left[\frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\partial} \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\partial} \cdot \mathbf{e}) dV \right]^{\frac{1}{2}}$$



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

- Energia norma
- **Konvergencia**
- Megoldás jellege
- Hiba mértéke

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat

Konvergencia

Konvergens a megoldás – energia norma értelemben, ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} ||e|| = 0$$

ahol N az ismeretlenek száma ($3 \cdot NCS$).
Pontonkénti konvergenciáról beszélünk, ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} e = 0$$

A konvergencia javításának lehetőségei

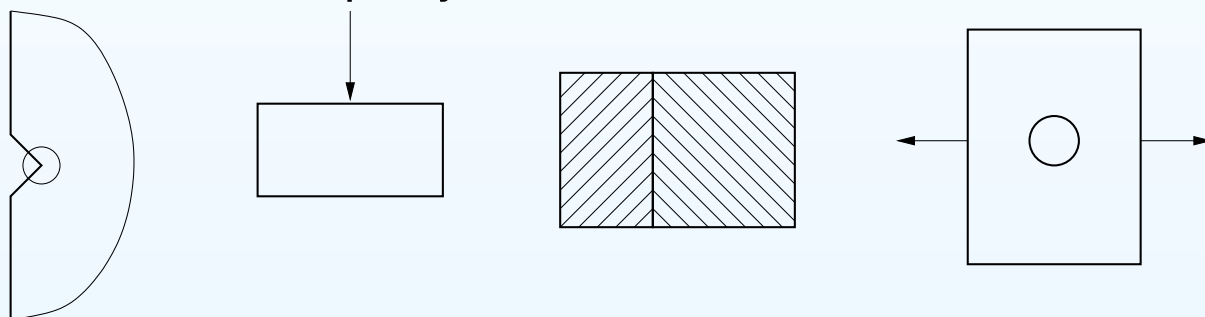
- h -típus: elem méret csökkentésével
- p -típus: polinom foksám növelésével
- hp -típus: e fenti két módszer együttesen

ezen esetekben lényegében az N ismeretlen számot növelve érjük el kívánt konvergenciát.

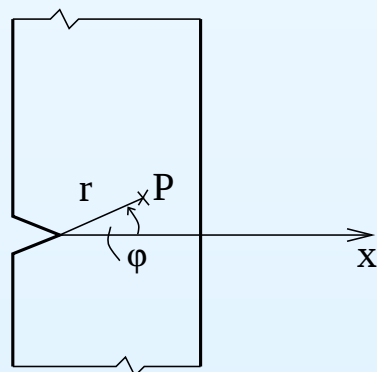
Megoldás jellege

Három fő csoportot különböztetünk meg

- A típusról beszélünk, ha analitikus megoldás van.
- B típus esetén szingularitásokat tartalmaz a feladat, de ez a szinguláris hely az elem csomópontjába esik



- C típusnál a szingularitás az elem tetszőleges pontjában lehet

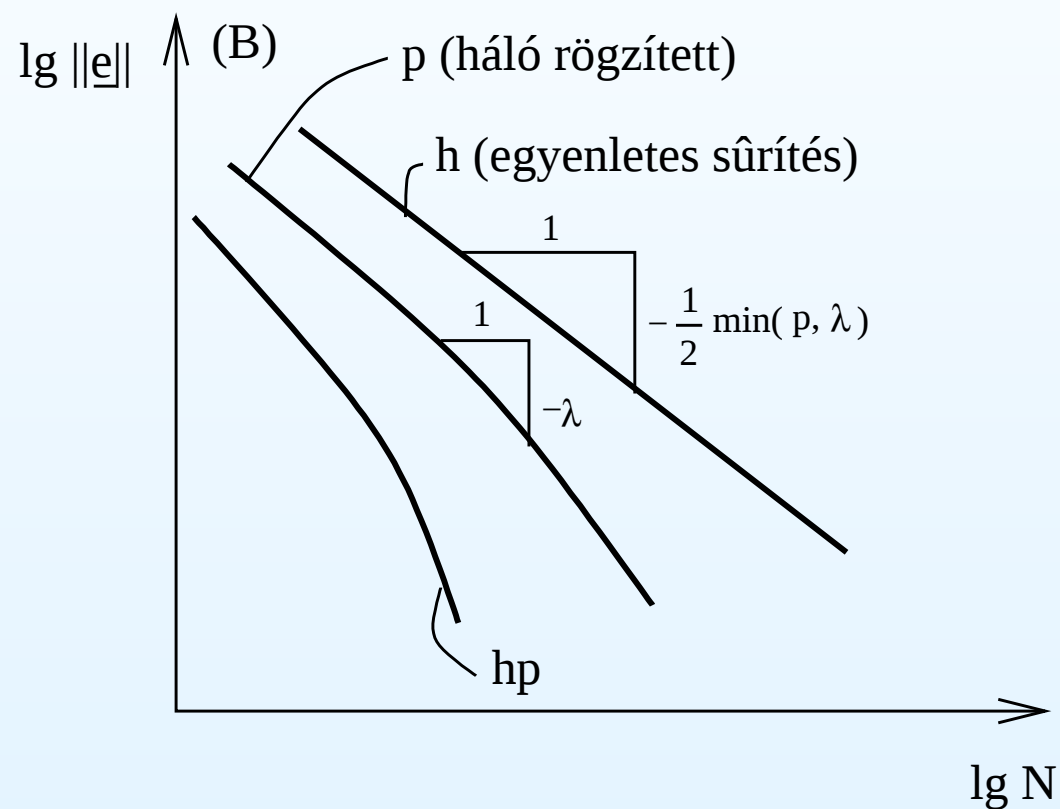


$$u = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \Phi_i(\varphi) \cdot r^{\lambda_i} \quad r \leq r_0$$

$$\lambda = \min \lambda_i \quad \begin{cases} \lambda < 1 & \text{szigorú szingularitás} \Rightarrow \sigma \rightarrow \infty \\ \lambda > 1 & \text{gyenge szingularitás} \Rightarrow \sigma \rightarrow \text{véges} \end{cases}$$

Hiba mértéke

	A	B	C
h	$\ e\ \leq k \cdot N^{-\frac{p}{2}}$	$\ e\ \leq k \cdot N^{-\frac{1}{2} \min(p, \lambda)}$	$\ e\ \leq k \cdot N^{-\frac{1}{2} \min(p, \lambda)}$
p	$\ e\ \leq [\exp(-\gamma N^\delta)] \cdot k \quad \delta > \frac{1}{2}$	$\ e\ \leq k \cdot N^{-\lambda}$	$\ e\ \leq k \cdot N^{-\frac{1}{2} \lambda}$
hp			





Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye
- Jelölések
- $\min \Pi_p$ elv
- Ritz-féle módszer
- Példa: Húzott-rúd
- $\min \Pi_p$ több testre

4. Egyváltozós feladat

3. Variációs elvek



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

● Variációs elvek előnye

- Jelölések
- $\min \Pi_p$ elv
- Ritz-féle módszer
- Példa: Húzott-rúd
- $\min \Pi_p$ több testre

4. Egyváltozós feladat

Variációs elvek előnye

1. A vizsgált variációs elvhez kapcsolódó funkcionál nagyon gyakran fizikai tartalommal bír.
2. A funkcionál alacsonyabb rendű deriváltakat tartalmaz, mint ami az eredeti feladat differenciál-egyenletrendszerében szerepel.
3. Variációs elvek révén bonyolult peremfeltételek, illesztési feltételek, mezőegyenletek vezethetők le, ill. igazolni lehet a megoldás létezését és egyértékűségét.
4. A számítás közelítésének jóságára a funkcionálban szereplő mezők „*a priori*” ki nem elégített perem és illesztési feltételeinek kielégülési mértékén keresztül kapunk szemléletes képet. A közelítés egyetlen skalárral, a funkcionál értékével minősíthető.
5. A variációs elvekre alapozva numerikusan stabil és konvergens eljárások származtathatók.
6. A közelítő mezők alkalmas megválasztásával jól kondicionáltságú algebrai egyenletrendszer nyerhető, amelynek számítógépes megoldására jól ismert hatékony eljárások használhatók.



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye

- Jelölések

- $\min \Pi_p$ elv

- Ritz-féle módszer

- Példa: Húzott-rúd

- $\min \Pi_p$ több testre

4. Egyváltozós feladat

Jelölések

Legyen az elmozdulásmező kinematikailag lehetséges. Ekkor az elmozdulásmező variációja (virtuális elmozdulás) alatt

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^* - \mathbf{u},$$

ahol $\mathbf{u}$ az egzakt elmozdulás. Nyilvánvalóan teljesül: $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$, ha $\mathbf{r} \in A_u$.

Hasonlóan értelmezhető az alakváltozás variációja:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^* &= \mathbf{A}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{A}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) = \frac{1}{2} [(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) \circ \nabla + \nabla \circ (\mathbf{u} + \delta \mathbf{u})] = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{u} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u})}_A + \underbrace{\frac{1}{2} (\delta \mathbf{u} \circ \nabla + \nabla \circ \delta \mathbf{u})}_{\delta A} \end{aligned}$$

azaz

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \delta \mathbf{A}$$



Elmozdulásmező variációja

Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

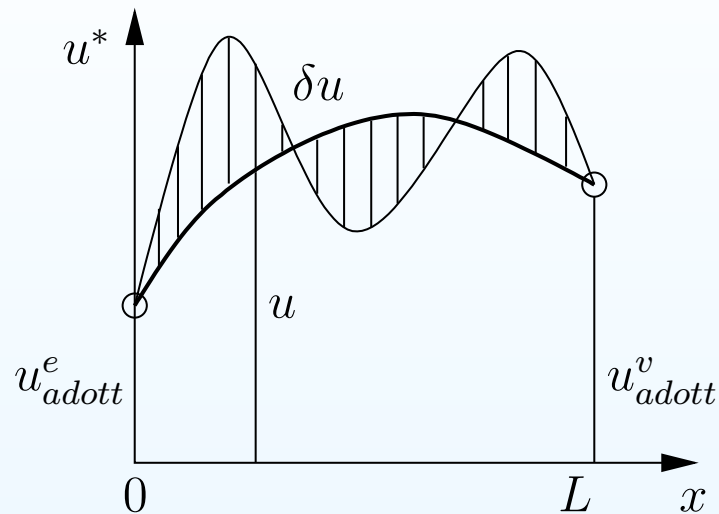
3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye

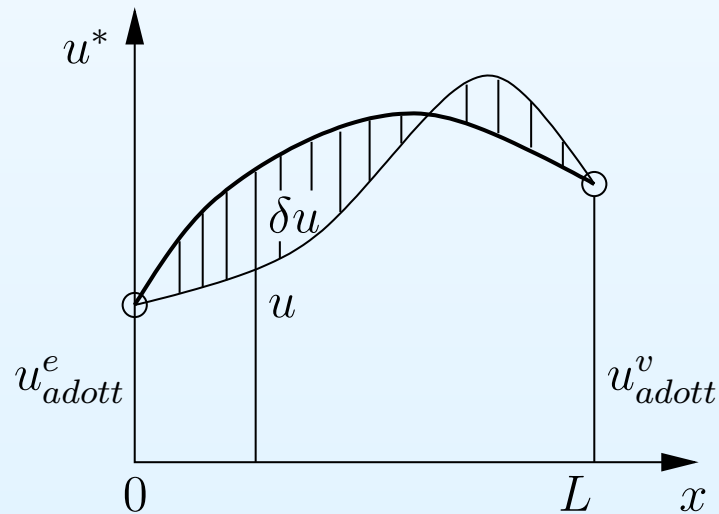
• Jelölések

- $\min \Pi_p$ elv
- Ritz-féle módszer
- Példa: Húzott-rúd
- $\min \Pi_p$ több testre

4. Egyváltozós feladat



a.)



b.)



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye

- Jelölések

- $\min \Pi_p$ elv

- Ritz-féle módszer

- Példa: Húzott-rúd

- $\min \Pi_p$ több testre

4. Egyváltozós feladat

Teljes potenciális energia

A teljes potenciális energia rugalmas anyagú testre

$$\Pi_p = \Pi_p(u) = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{D} \cdot \cdot \mathbf{A} dV - \int_V \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{k} dV - \int_{A_p} \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} dA$$

mely kifejezésében az első tag az alakváltozási energia

$$\frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{D} \cdot \cdot \mathbf{A} dV = U_{alakv}.$$

míg a második a külső erők munkája

$$W_k = \int_{A_p} \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} dA + \int_V \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{k} dV$$



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye
- Jelölések
- **min Π_p elv**
- Ritz-féle módszer
- Példa: Húzott-rúd
- min Π_p több testre

4. Egyváltozós feladat

min Π_p elv

$$\Pi_p(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}) \cdot \cdot \mathbf{D} \cdot \cdot (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}) dV -$$

$$- \int_V (\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) \cdot \rho \mathbf{k} dV - \int_{A_p} (\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) \cdot \mathbf{p} dA =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \cdot \overbrace{\mathbf{D}}^T \cdot \cdot \mathbf{A} dV - \int_V \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{k} dV - \int_{A_p} \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} dA}_{\Pi_p(\mathbf{u}): \text{ egzakt értékhez tartozó}} +$$

$$+ \underbrace{\int_V \delta\mathbf{A} \cdot \cdot \overbrace{\mathbf{D}}^T \cdot \cdot \mathbf{A} dV - \int_V \delta\mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{k} dV - \int_{A_p} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{p} dA}_{\delta\Pi_p: \text{ a potenciális energia első variációja}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \delta\mathbf{A} \cdot \cdot \overbrace{\mathbf{D}}^{\delta T} \cdot \cdot \delta\mathbf{A} dV}_{\delta^2\Pi_p \geq 0}$$



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye
- Jelölések
- **$\min \Pi_p$ elv**
- Ritz-féle módszer
- Példa: Húzott-rúd
- $\min \Pi_p$ több testre

4. Egyváltozós feladat

$\min \Pi_p$ elv

$$\Pi_p(\mathbf{u}^*) = \Pi_p(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) = \Pi_p(\mathbf{u}) + \delta \Pi_p + \delta^2 \Pi_p$$

ahol

$$\delta^2 \Pi_p = \frac{1}{2} \int_V \delta \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{D} \cdot \cdot \delta \mathbf{A} dV \geq 0$$

hisz ez utóbbi kifejezés alakváltozási energiát fejez ki. Az első variáció zérus értéke $\delta \Pi_p = 0$ a potenciális energia stacionér pontját jelöli ki, amelyben a potenciális energia abszolút minimummal rendelkezik. A kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőnél a potenciális energia mindig nagyobb, mint a tényleges mezőhöz tartozóé.

$$\Pi_p(\mathbf{u}^*) \geq \Pi_p(\mathbf{u})$$



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye
- Jelölések
- **min Π_p elv**
- Ritz-féle módszer
- Példa: Húzott-rúd
- min Π_p több testre

4. Egyváltozós feladat

min Π_p elv

A $\delta \Pi_p = 0$ feltétel a $\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{D} \cdot \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{u})$ jelöléssel

$$\delta \Pi_p = \int_V \delta \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}) dV - \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{k} dV - \int_{A_p} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} dA = 0$$

Az első integrál átalakításával

$$\underline{\int_V (\delta \mathbf{u} \circ \nabla) \cdot \cdot \mathbf{T} dV} = \int_V (\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla) dV - \int_V \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T} \cdot \nabla) dV$$

majd a Gauss-Osztrogradskij tétel felhasználásával

$$- \int_V \delta \mathbf{u} \cdot [\mathbf{T}(\mathbf{u}) \cdot \nabla + \rho \mathbf{k}] dV + \int_{A_p} \delta \mathbf{u} \cdot [\mathbf{T}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{p}] dA = 0$$

írható, mivel $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ az A_u felületen. Mit is mond ez az egyenlet?



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye
- Jelölések
- **$\min \Pi_p$ elv**
- Ritz-féle módszer
- Példa: Húzott-rúd
- $\min \Pi_p$ több testre

4. Egyváltozós feladat

$\min \Pi_p$ elv

Tétel:

A teljes potenciális energia minimumát meghatározó $\delta \Pi_p = 0$ stacionaritási feltétel által kijelölt pontban olyan elmozdulásmező alakul ki a testben, amely az eredetileg „a priori” előírt kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőre kirótt feltételeket betartva, kielégíti az előzetesen nem biztosított egyensúlyi egyenletet, mint mezőegyenletet és a dinamikai peremfeltételt, vagyis szolgáltatja a rugalmasságtani feladat egzakt megoldását.

A tételből következik, hogy közelítő számítás felépítésekor miután u helyett u^* -ot használunk, az egyensúlyi egyenlet és a DPF már nem fog pontosan kielégülni.



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye
- Jelölések
- $\min \Pi_p$ elv
- Ritz-féle módszer
- Példa: Húzott-rúd
- $\min \Pi_p$ több testre

4. Egyváltozós feladat

Ritz-féle módszer

A tényleges mezőnél a potenciális energia abszolút minimummal rendelkezik. A közelítést speciális hatványfüggvények alkotta sorral képzik. Így az $\mathbf{u}^*$ mezőt az alábbi módon közelítjük:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_0^*(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^N (c_i \varphi_i(\mathbf{r}) \mathbf{e}_x + c_{i+N} \psi_i(\mathbf{r}) \mathbf{e}_y + c_{i+2N} \chi_i(\mathbf{r}) \mathbf{e}_z)$$

ahol $\mathbf{u}_0^*(\mathbf{r})$ kinetikai peremfeltételt kielégítő mező $\mathbf{u}_0^*(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ $\mathbf{r} \in A_u$, $\varphi_i(\mathbf{r})$, $\psi_i(\mathbf{r})$, $\chi_i(\mathbf{r})$ általunk felvett közelítő függvények, amelyek eleget tesznek a $\varphi_i(\mathbf{r}) = \psi_i(\mathbf{r}) = \chi_i(\mathbf{r}) = 0$ $\mathbf{r} \in A_u$ homogén peremfeltételnek, folytonosak, deriválhatók, N a közelítő sorban felvett tagok száma, c_i ($i = 1, \dots, 3N$) ismeretlen állandók, paraméterek.



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye
- Jelölések
- $\min \Pi_p$ elv
- **Ritz-féle módszer**
- Példa: Húzott-rúd
- $\min \Pi_p$ több testre

4. Egyváltozós feladat

Ritz-féle módszer

Az $\mathbf{u}^*$ mező variációja

$$\delta \mathbf{u}^* = \sum_{i=1}^N (\delta c_i \varphi_i(\mathbf{r}) \mathbf{e}_x + \delta c_{i+N} \psi_i(\mathbf{r}) \mathbf{e}_y + \delta c_{i+2N} \chi_i(\mathbf{r}) \mathbf{e}_z)$$

A potenciális energia az ismeretlen paraméterek függvényeként áll elő

$$\Pi_p = \Pi_p(c_1, \dots, c_{3N})$$

$$\delta \Pi_p = 0 = \delta c_1 \frac{\partial \Pi_p}{\partial c_1} + \dots + \delta c_i \frac{\partial \Pi_p}{\partial c_i} + \dots + \delta c_{3N} \frac{\partial \Pi_p}{\partial c_{3N}}$$

stacionaritási (minimum) feltételből

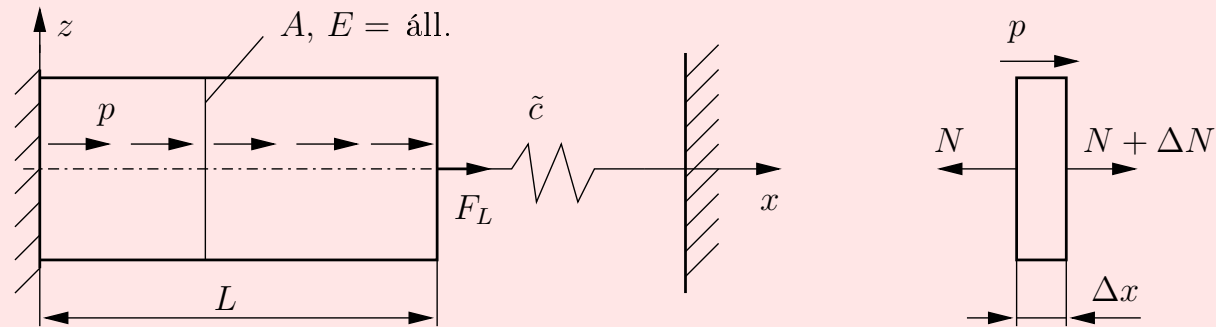
$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial c_i} = 0 \quad i = 1, \dots, 3N$$

algebrai egyenletrendszert nyerjük a c_i állandók meghatározására.

- Variációs elvek előnye
- Jelölések
- $\min \Pi_p$ elv
- Ritz-féle módszer
- **Példa: Húzott-rúd**
- $\min \Pi_p$ több testre

Példa: Húzott-rúd

3.1. feladat: A változó $A = A(x)$ keresztmetszetű rúd hossz tengelye mentén megoszló terhelés intenzitása legyen p . A rúd $x = 0$ helyen megfogott, míg az $x = L$ végén F_L koncentrált erő hat, továbbá $\tilde{c}$ állandójú rugón keresztül csatlakozik a talajhoz.



Megoldás: A teljes potenciális energia

$$\Pi_p = \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV}_{\text{rúd belső alakváltozási energiája}} - \underbrace{\int_L u p dx - u_L F_L}_{\text{külső terhelés munkája}} + \underbrace{\frac{1}{2} \tilde{c} (u_L)^2}_{\text{rúgóenergia}} \quad (3.1-a)$$



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye
- Jelölések
- $\min \Pi_p$ elv
- Ritz-féle módszer
- **Példa: Húzott-rúd**
- $\min \Pi_p$ több testre

4. Egyváltozós feladat

Példa: Húzott-rúd

A rudaknál használt hipotézis szerint a keresztmetszetben $\sigma_x = E\varepsilon_x = \text{áll. feszültség}$ keletkezik, ahol $\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \equiv u'$, E Young féle rugalmassági modulus. Így

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_L AE(u')^2 dx - \int_L pu dx - F_L u_L + \frac{1}{2} \tilde{c} u_L^2 \quad (3.1-b)$$

A variációs számítás szabálya szerint

$$\delta u^2 = 2u \cdot \delta u \quad (3.1-c)$$

és így

$$\delta \Pi_p = \int_L AEu' \delta u' dx - \int_L \delta u p dx - \delta u_L F_L + \tilde{c} u_L \delta u_L = 0$$

Az első integrált a szorzatintegrálási szabály szerint átalakítva

$$\delta \Pi_p = AEu' \delta u \Big|_0^L - \int_L [(AEu')' + p] \delta u dx - \delta u_L (F_L - \tilde{c} u_L) = 0$$

$$\delta \Pi_p = \delta u_L \cdot [AEu' \Big|_L - F_L + \tilde{c} u_L] - \int_L [(AEu')' + p] \delta u dx = 0 \quad (3.1-d)$$

variációs egyenlethez jutunk.



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye
- Jelölések
- $\min \Pi_p$ elv
- Ritz-féle módszer
- **Példa: Húzott-rúd**
- $\min \Pi_p$ több testre

4. Egyváltozós feladat

Példa: Húzott-rúd

Az első tag eltűnéséből a

$$N_L \equiv (AEu)'_L = F_L - \tilde{c}u_L \quad (3.1-e)$$

dinamikai peremfeltételt, míg az integrál eltűnéséből az

$$(AEu')' = -p, \quad (N' = -p) \quad (3.1-f)$$

egyensúlyi egyenletet nyertük. Ez utóbbit hagyományos úton is megkaphatjuk. Véve a rúd elemi részét, a rá ható tengelyirányú erők egyensúlyi feltételéből $dN + p\Delta x = 0$, illetve $N' = -p$ következik, ami egybeesik a $\delta\Pi_p = 0$ feltételnél kapottal.

Legyen $AE = \text{áll.}$ Közelítsük az u mezőt négyzetes hatvány függvényen keresztül.

$$u = c_0 + c_1x + c_2x^2 \quad (3.1-g)$$

Mivel $x = 0$ -nál $u = 0$, $c_0 = 0$ következik. A (3.1-g) alatti közelítéssel $u' = c_1 + 2c_2x$, továbbá

$$\begin{aligned} \Pi_p = \frac{1}{2} \int_L AE(c_1 + 2c_2x)^2 dx - \int p(c_1x + c_2x^2) dx - \\ - F_L(c_1L + c_2L^2) + \frac{1}{2}\tilde{c}(c_1L + c_2L^2)^2 \end{aligned}$$

illetve



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye
- Jelölések
- $\min \Pi_p$ elv
- Ritz-féle módszer
- **Példa: Húzott-rúd**
- $\min \Pi_p$ több testre

4. Egyváltozós feladat

Példa: Húzott-rúd

$$\delta \Pi_p = \int_L AE(c_1 + 2c_2x)(\delta c_1 + 2\delta c_2x) dx - \int_L p(\delta c_1x + \delta c_2x^2) dx - F_L(\delta c_1L + \delta c_2L^2) + \tilde{c}(c_1L + c_2L^2)(\delta c_1L + \delta c_2L^2)$$

Rendezve az egyenletet

$$\delta \Pi_p = 0 = \delta c_1 \left[\int_L AE(c_1 + 2c_2x) dx - \int_L px dx - F_L \cdot L + \tilde{c}(c_1L + c_2L^2)L \right] + \delta c_2 \left[\int_L AE(c_1 + 2c_2x) 2x dx - \int_L px^2 dx - F_L \cdot L^2 + \tilde{c}(c_1L + c_2L^2)L^2 \right]$$

ami rövidebben

$$\delta \Pi_p = \delta c_1 \frac{\partial \Pi_p}{\partial c_1} + \delta c_2 \frac{\partial \Pi_p}{\partial c_2} = 0 \quad (3.1-h)$$

alakban is felírható.



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye
- Jelölések
- $\min \Pi_p$ elv
- Ritz-féle módszer
- **Példa: Húzott-rúd**
- $\min \Pi_p$ több testre

4. Egyváltozós feladat

Példa: Húzott-rúd

Mivel δc_i , ($i = 1, 2$) tetszőleges, $\partial \Pi_p / \partial c_i = 0$ egyenleteket nyerjük. Ezek jelen esetben

$$\left\{ \int_L AE[1 \ 2x] dx + [\tilde{c}L^2 \ \tilde{c}L^3] \right\} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} - \int_L px dx - F_L \cdot L = 0$$

$$\left\{ \int_L AE[2x \ 4x^2] dx + [\tilde{c}L^3 \ \tilde{c}L^4] \right\} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} - \int_L px^2 dx - F_L \cdot L^2 = 0$$

$p = \text{áll. érték}$ mellett a végső megoldandó egyenletrendszer

$$\left(AE \begin{bmatrix} L & L^2 \\ L^2 & \frac{4}{3}L^3 \end{bmatrix} + \tilde{c} \begin{bmatrix} L^2 & L^3 \\ L^3 & L^4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_L L + p \frac{L^2}{2} \\ F_L L^2 + p \frac{L^3}{3} \end{bmatrix} \quad (3.1-i)$$



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye
- Jelölések
- $\min \Pi_p$ elv
- Ritz-féle módszer
- **Példa: Húzott-rúd**
- $\min \Pi_p$ több testre

4. Egyváltozós feladat

Példa: Húzott-rúd

Áltesetek

1.

$$p = 0 \quad \tilde{c} = 0 \quad (\text{húzott rúd esete}) \Rightarrow c_1 = \frac{F_L}{AE}, \quad c_2 = 0$$

2.

$$p = p_0 = \text{áll.}, \quad F_L = 0, \quad \tilde{c} = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{p_0}{AE} L, \quad c_2 = -\frac{p_0}{2AE}$$

3.

$p = p_0 = \text{áll.}, \quad F_L = 0, \quad \tilde{c} = 0$ a megoldást az előző két eset

$$\text{szuperponálásából kapjuk} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{AE} (F_L + p_0 L), \quad c_2 = \frac{p_0}{2AE}$$

4.

$$p = 0, \quad AE = 0, \quad F_L \neq 0 \Rightarrow c_1 = \frac{F_L}{\tilde{c}}, \quad u_L = \frac{F_L}{\tilde{c}}$$

@@



Bevezetés

1. Fogalmak

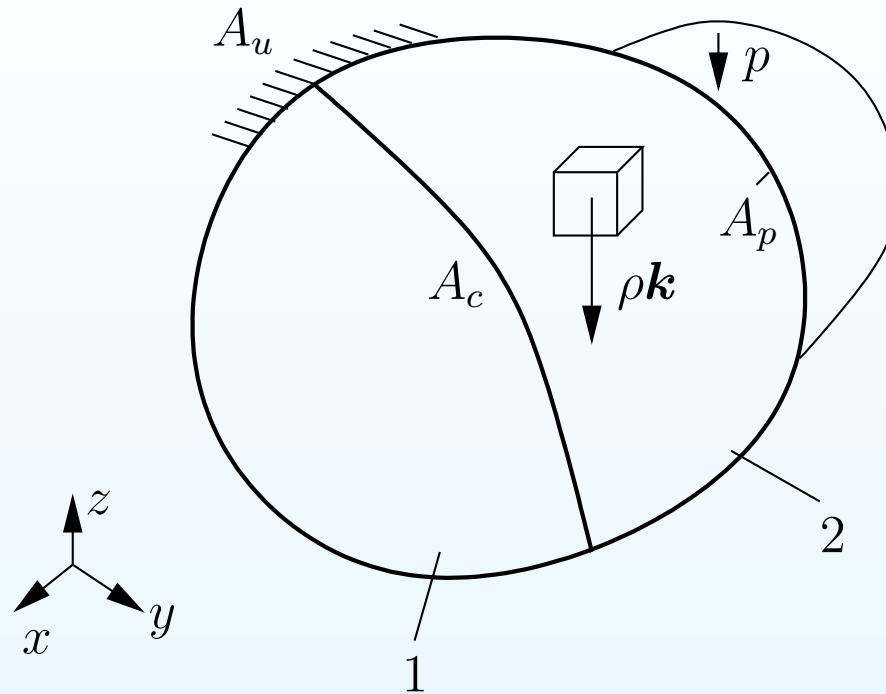
2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye
- Jelölések
- $\min \Pi_p$ elv
- Ritz-féle módszer
- Példa: Húzott-rúd
- $\min \Pi_p$ több testre

4. Egyváltozós feladat

Több testből álló rendszerre felírt $\min \Pi_p$ elv





Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye
- Jelölések
- $\min \Pi_p$ elv
- Ritz-féle módszer
- Példa: Húzott-rúd
- $\min \Pi_p$ több testre

4. Egyváltozós feladat

Több testből álló rendszerre felírt $\min \Pi_p$ elv

Mindkét testre érvényesek a rugalmasságtan egyenletei, azaz

$$\mathbf{A}^e = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^e \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u}^e) \quad \mathbf{r} \in V^e$$

$$\mathbf{T}^e = \mathbf{D}^e \cdot \cdot \mathbf{A}^e \quad \mathbf{r} \in V^e$$

$$\mathbf{T}^e \cdot \nabla + \rho \mathbf{k}^e = \mathbf{0} \quad \mathbf{r} \in V^e$$

mint mezőegyenlet, továbbá érvényesek a peremfeltételek

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{u}_0 \quad \mathbf{r} \in A_u^e$$

$$\mathbf{T}^e \cdot \mathbf{u}^e = p^e \quad \mathbf{r} \in A_p^e$$



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye
- Jelölések
- $\min \Pi_p$ elv
- Ritz-féle módszer
- Példa: Húzott-rúd
- $\min \Pi_p$ több testre

4. Egyváltozós feladat

Több testből álló rendszerre felírt $\min \Pi_p$ elv

A testek csatlakozó A_c^e közös felületén, az eddig nem ismert illesztési feltételek állnak fenn. Feltételezésünk értelmében a közös felületi pontok együtt mozognak, nem válnak el egymástól, azaz a testek között kétoldalú érintkezési feltételek állnak fenn. A felületen lévő feszültségek egyensúlyban vannak.

Ily módon a KIF (kinematikai illesztési) és a DIF (dinamikai illesztési) feltételek az alábbiak:

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^2 \quad \mathbf{r} \in A_c$$

$$\mathbf{T}^1 \cdot \mathbf{n}^1 = -\mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{n}^2 \quad \mathbf{r} \in A_c$$

Itt $\mathbf{n}^1$ és $\mathbf{n}^2$ a testekből kifelé mutató normálvektorok.



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye
- Jelölések
- $\min \Pi_p$ elv
- Ritz-féle módszer
- Példa: Húzott-rúd
- $\min \Pi_p$ több testre

4. Egyváltozós feladat

Több testből álló rendszerre felírt $\min \Pi_p$ elv

A vizsgált rendszer teljes potenciális energiája a két testre külön-külön felírható potenciális energiák összegeként áll elő:

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^2 \left\{ \frac{1}{2} \int_{V^e} \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{D} \cdot \cdot \mathbf{A} dV - \int_{V^e} \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{k} dV - \int_{A_p^e} \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} dA \right\}$$

A két testre vonatkozó variációs elv felépítéséhez induljunk ki a teljes potenciális energiák variációjából:

$$\delta \Pi_p = \sum_{e=1}^2 \delta \Pi_p^e = \sum_{e=1}^2 \{ \delta U_{alakv.}^e - \delta W_k^e \} = 0$$

$$\sum_{e=1}^2 \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} \int_{V^e} \delta \mathbf{A}^e \cdot \cdot \mathbf{T}^e dV}_{\delta U_{alakv.}^e} - \underbrace{\int_{V^e} \delta \mathbf{u}^e \cdot \rho \mathbf{k} dV - \int_{A_p^e} \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{p} dA}_{-\delta W_k^e} \right\}$$



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye
- Jelölések
- $\min \Pi_p$ elv
- Ritz-féle módszer
- Példa: Húzott-rúd
- $\min \Pi_p$ több testre

4. Egyváltozós feladat

Több testből álló rendszerre felírt $\min \Pi_p$ elv

Az első integrál az egy testre vonatkozó vizsgálatnál bemutatottak szerint átalakítható

$$\begin{aligned} \int_{V^e} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T} \cdot \nabla)^e dV &= \int_{V^e} (\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla)^e dV - \int_{V^e} \underbrace{(\delta \mathbf{u} \circ \nabla \cdot \cdot \mathbf{T}^e)}_{\delta \mathbf{A} + \delta \Psi} dV = \\ &= \int_{A^e} \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{T}^e \cdot \mathbf{n}^e dA - \int_{V^e} \delta \mathbf{A}^e \cdot \cdot \mathbf{T}^e dV \end{aligned}$$

innen

$$\int_{V^e} \delta \mathbf{A}^e \cdot \cdot \mathbf{T}^e dV = \int_{A^e} \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{T}^e \cdot \mathbf{n}^e dA - \int_{V^e} \delta \mathbf{u}^e \cdot (\mathbf{T} \cdot \nabla)^e dV$$

$$\text{ahol } A^e = \underbrace{A_u^e}_{\delta \mathbf{u}=0} + A_c^e$$



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

- Variációs elvek előnye
- Jelölések
- $\min \Pi_p$ elv
- Ritz-féle módszer
- Példa: Húzott-rúd
- $\min \Pi_p$ több testre

4. Egyváltozós feladat

Több testből álló rendszerre felírt $\min \Pi_p$ elv

A kapott formulákat visszaírva és a tagokat átrendezve:

$$\sum_{e=1}^2 \left\{ \int_{V_e} \delta \mathbf{u}^e \cdot [\mathbf{T} \cdot \nabla + \rho \mathbf{k}]^e dV - \int_{A_p^e} \delta \mathbf{u}^e \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{p})^e dA \right\} - \\ - \int_{A_c^{12}} \delta \mathbf{u}^1 \cdot (\mathbf{T}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{n}^2) dA = 0$$

variációs egyenlethez jutunk.

Nyilvánvalóan, ha a KIF nem állna fenn, akkor e fenti egyenlet utolsó integrálja két részre esne, ami a belső felület feszültségmentességét fejezné ki. Ez pedig a megfigyelésekkel ellentétes eredményt szolgáltatna. A levezetett variációs egyenlet, vagyis a variációs elv biztosítja az egyensúlyi egyenlet, a dinamikai perem-, és illesztési feltétel teljesülését.



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat

- Lokális approximáció
- Potenciális energia
- Csomóponti terhelés
- A megoldandó feladat

4. Egyváltozós feladat

Bevezetés

1. Fogalmak

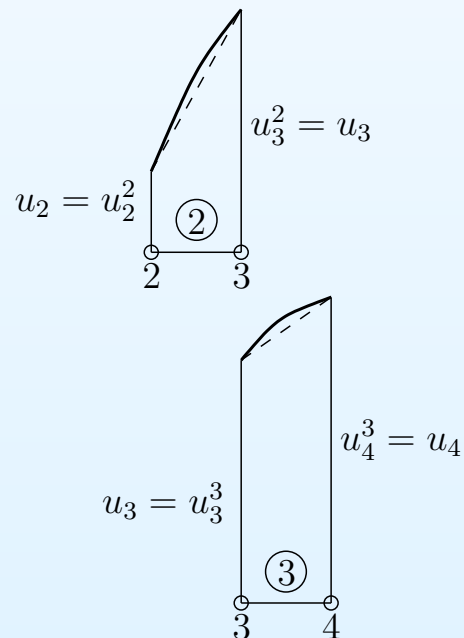
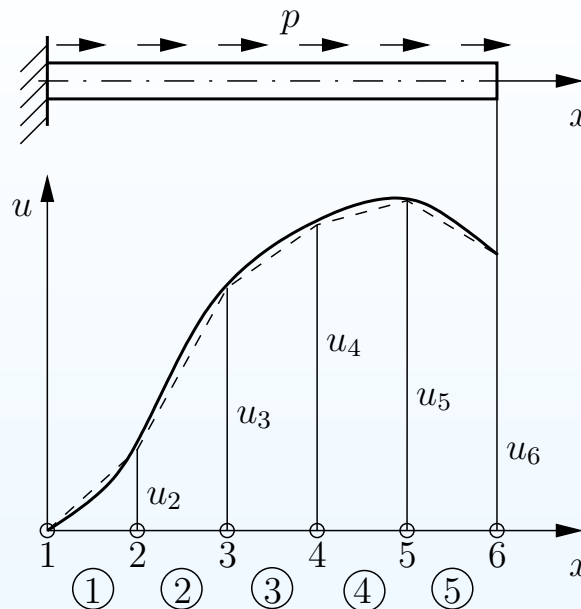
2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat

- Lokális approximáció
- Potenciális energia
- Csomóponti terhelés
- A megoldandó feladat

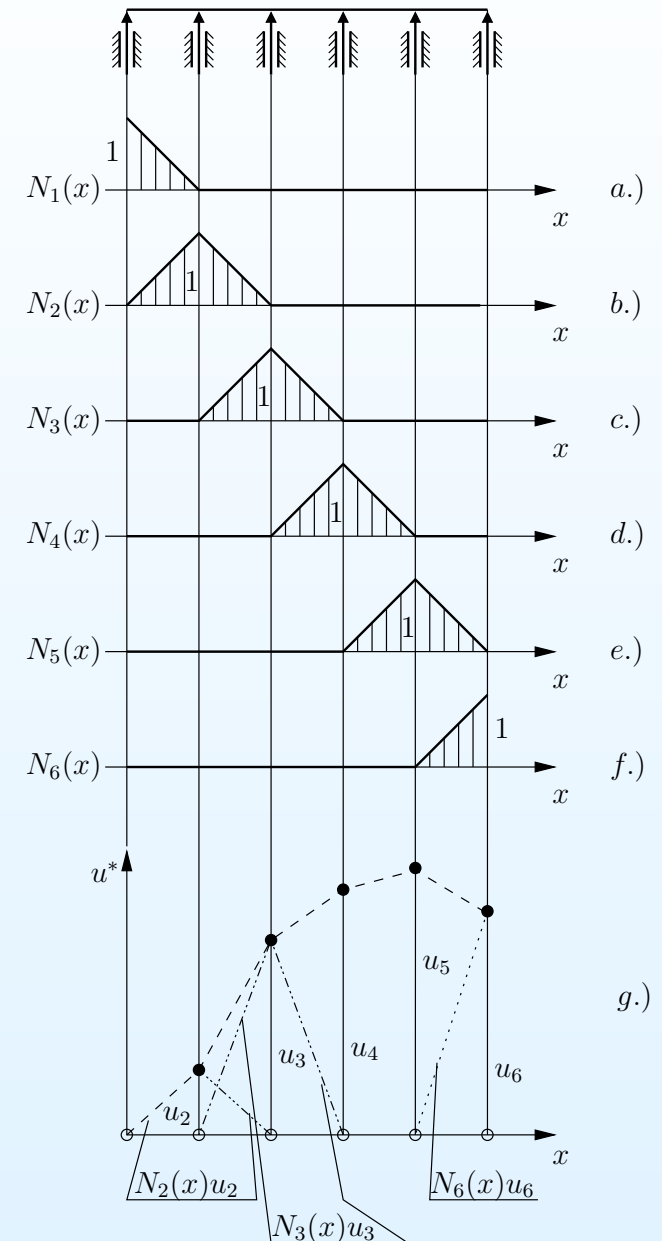
Lokális approximáció elve egyváltozós feladatnál



a.)

b.)

c.)





Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat

● Lokális approximáció

- Potenciális energia
- Csomóponti terhelés
- A megoldandó feladat

Lokális approximáció elve egyváltozós feladatnál

A közelített elmozdulásmező

$$u^*(x) = \sum_{i=2}^6 N_i(x) u_i = [N_2(x) \ N_3(x) \cdots N_6(x)] \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_6 \end{bmatrix} = \mathbf{N}(x) \mathbf{q}$$

Ehhez képezzük az i, j csomópontokat tartalmazó elemen belüli elmozdulásmezőt

$$u^e(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_j - x}{L^e} & \frac{x - x_i}{L^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix}$$

ami a $\xi = x - x_i$ változó bevezetésével

$$\begin{aligned} u^e(\xi) &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{L} & \frac{\xi}{L} \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} = \\ &= [N_i^e(\xi) \ N_j^e(\xi)] \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} = \mathbf{N}^e(\xi) \mathbf{q}^e = \mathbf{q}^{eT} \mathbf{N}^{eT}(\xi) \end{aligned}$$



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat

- Lokális approximáció
- **Potenciális energia**
- Csomóponti terhelés
- A megoldandó feladat

Diszkrétizált potenciális energia

A húzott rúdban kialakuló fajlagos nyúlás

$$\varepsilon^e = \frac{du^e}{dx} = \varepsilon^e(\xi) = \frac{du^e(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{L} [-1, 1] \mathbf{q}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e$$

illetve a normál feszültség a Hooke törvény alapján

$$\sigma^e = E \varepsilon^e = \sigma^e(\xi) = E \varepsilon^e(\xi) = E \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e$$

$$\begin{aligned} U^e &= \frac{1}{2} \int_L \sigma \varepsilon A d\xi = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \int_{L^e} \mathbf{B}^{eT} A^e E \mathbf{B}^e d\xi \mathbf{q}^e = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \frac{A^e E}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q}^e \equiv \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e, \end{aligned}$$

$$W_k^e = \int_{L^e} u p d\xi = \mathbf{q}^{eT} \int_{L^e} \mathbf{N}^{eT}(\xi) p d\xi \equiv \mathbf{q}^{eT} \mathbf{f}^e$$

Teljes potenciális energia

$$\Pi_p^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{eT} \mathbf{f}^e$$



Egydimenziós végelem, lokális koordinátafüggvények

Bevezetés

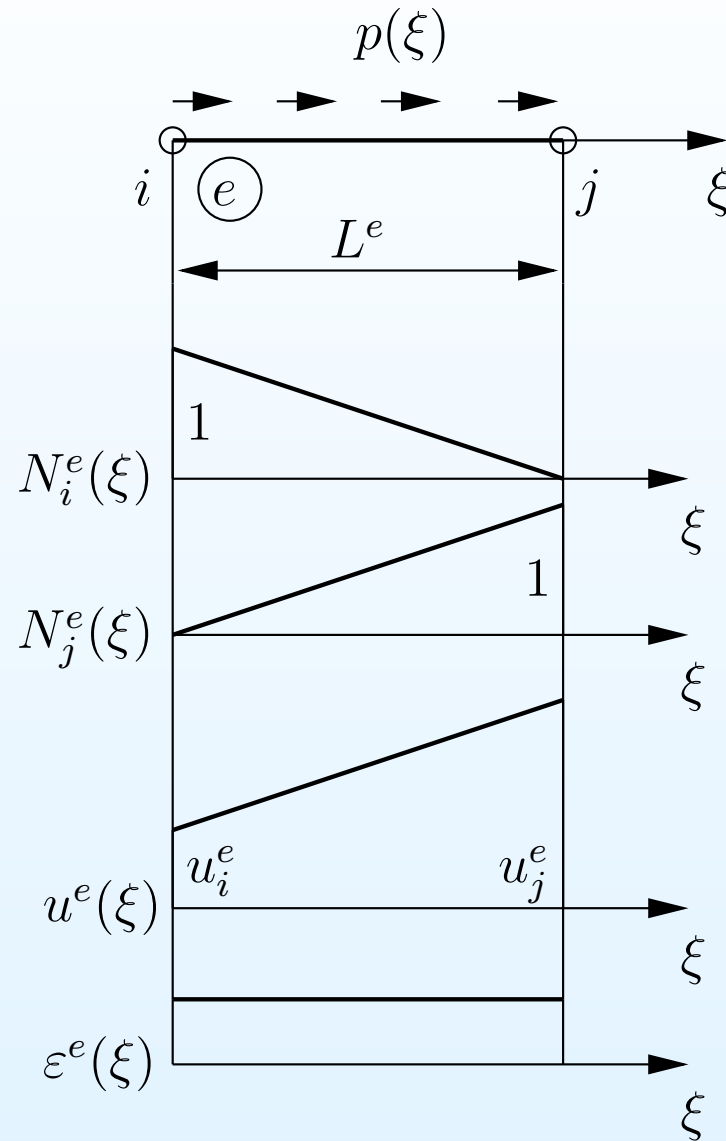
1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat

- Lokális approximáció
- **Potenciális energia**
- Csomóponti terhelés
- A megoldandó feladat





Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat

- Lokális approximáció
- **Potenciális energia**
- Csomóponti terhelés
- A megoldandó feladat

Diszkrétizált potenciális energia

A kapott merevségi mátrixot almátrixokra felbontva

$$\Pi_p^e = [\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j^T]^e \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_j \end{bmatrix}^e - 2 \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_j \end{bmatrix}^e \right)$$

Jelen esetben

$$\mathbf{q}_i^e = u_i^e, \quad (i \longleftrightarrow j), \quad \mathbf{K}_{ii}^e = \left(\frac{AE}{L} \right)^e \text{ stb.})$$

Bevezetve az összes csomóponti elmozdulások vektorát

$$\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_2^T \dots \mathbf{q}_6^T]$$

a rúd teljes potenciális energiája

$$\Pi_p = \frac{\mathbf{q}^T}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^1 & \mathbf{K}_{12}^1 & & & & \\ \mathbf{K}_{21}^1 & \mathbf{K}_{22}^1 + \mathbf{K}_{22}^2 & \mathbf{K}_{23}^2 & & & \\ & \mathbf{K}_{32}^2 & \mathbf{K}_{33}^2 + \mathbf{K}_{33}^3 & & & \\ & & \mathbf{K}_{43}^3 & \dots & & \\ & & & \mathbf{K}_{45}^4 & & \\ & & & \mathbf{K}_{55}^4 + \mathbf{K}_{55}^5 & \mathbf{K}_{56}^5 & \\ & & & \mathbf{K}_{65}^5 & \mathbf{K}_{66}^5 & \end{bmatrix} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^1 \\ \mathbf{f}_2^1 + \mathbf{f}_2^2 \\ \mathbf{f}_3^2 + \mathbf{f}_3^3 \\ \mathbf{f}_4^3 + \mathbf{f}_4^4 \\ \mathbf{f}_5^4 + \mathbf{f}_5^5 \\ \mathbf{f}_6^5 \end{bmatrix}$$



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat

- Lokális approximáció
- Potenciális energia
- **Csomóponti terhelés**
- A megoldandó feladat

Csomóponti terhelés

Állandó intenzitású hosszmenti p megoszló terhelésnél

$$\mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_j \end{bmatrix}^e = \int_{L^e} \mathbf{N}^{eT}(\xi) p d\xi = \int_{\xi=0}^{L^e} \begin{bmatrix} N_i(\xi) \\ N_j(\xi) \end{bmatrix}^e p d\xi = \frac{pL^e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vagyis a lineáris elmozdulásmező miatt a rúdelemen ébredő pL^e nagyságú erő a két csomópontra fele-fele arányban van szétosztva, azaz redukálva.



Bevezetés

1. Fogalmak

2. Hibaanalízis

3. Variációs elvek

4. Egyváltozós feladat

- Lokális approximáció
- Potenciális energia
- Csomóponti terhelés
- A megoldandó feladat

A megoldandó feladat

Mivel az 1-es pontban a rúd elmozdulása zérus, úgy $\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$. A $\delta \Pi_p = 0$ variációs egyenlet értelmében

$$\delta \Pi_p = \sum_{i=2}^5 \delta \mathbf{q}_i^T \frac{\partial \Pi_p}{\partial \mathbf{q}_i} = 0,$$

azaz a megoldandó algebrai egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & & & \\ \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} & & \\ & \mathbf{K}_{43} & \mathbf{K}_{44} & \mathbf{K}_{45} & \\ & & \mathbf{K}_{54} & \mathbf{K}_{55} & \mathbf{K}_{56} \\ & & & \mathbf{K}_{65} & \mathbf{K}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \\ \mathbf{q}_5 \\ \mathbf{q}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \\ \mathbf{f}_5 \\ \mathbf{f}_6 \end{bmatrix}$$

ahol $\mathbf{K}_{22} = \mathbf{K}_{22}^1 + \mathbf{K}_{22}^2$, $\mathbf{K}_{23} = \mathbf{K}_{23}^2$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_2^1 + \mathbf{f}_2^2$ stb.
Tömören

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f}$$

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!