

**KONTINUUMMECHANIKAI FELADATOK  
DUÁL FELÉPÍTÉSben**

Értelmező egyenletek származtatása  
Vegyes peremértékfeladatok megoldásának egyértékűsége  
Peremelem módszer síkfeladatokra

Írta

**Szeidl György**

aki az MTA doktora cím  
elnyerésére pályázik

Miskolc-Egyetemváros

2004

## TARTALOMJEGYZÉK

<b>BEVEZETÉS</b>	iii
<b>SZÓHASZNÁLAT, JELÖLÉSBELI MEGÁLLAPODÁSOK ÉS JELÖLÉSEK</b>	v
Jelölésbeli megállapodások	v
Latinbetűs jelölések alfabetikus sorrendben	v
Görögbetűs jelölések alfabetikus sorrendben	ix
<b>1. AZ EGYENSÚLYI EGYENLET ÁLTALÁNOS ÉS TELJES MEGOLDÁSÁNAK SZÁRMAZTATÁSA VIRTUÁLIS MUNKA ELVBŐL – KLASSZIKUS ESET</b>	1
1.1. Irodalmi előzmények	1
1.2. Célkitűzések	2
1.3. A feladat megfogalmazása	2
1.4. Mellékfeltételek és a virtuális munka elv átalakítása	5
1.5. Eredmények	10
<b>2. AZ EGYENSÚLYI EGYENLET ÁLTALÁNOS ÉS TELJES MEGOLDÁSÁT ADÓ ELLENTMONDÁSMENTES VARIÁCIÓS ELVEK ÉS A STATIKAI–KINEMATIKAI ANALÓGIA A PEREMFELTÉTELEKRE – KLASSZIKUS ESET</b>	12
2.1. Irodalmi előzmények	12
2.2. Célkitűzések	12
2.3. Szabad variációs feladat	12
2.4. Statikai–kinematikai analógia	17
2.5. Eredmények	24
<b>3. AZ EGYENSÚLYI EGYENLET ÁLTALÁNOS ÉS TELJES MEGOLDÁSÁNAK SZÁRMAZTATÁSA VIRTUÁLIS MUNKA ELVBŐL – MIKROPOLÁRIS ESET</b>	24
3.1. Irodalmi előzmények	25
3.2. Célkitűzések	25
3.3. A probléma megfogalmazása	25
3.4. Mellékfeltételek és a virtuális munka elv átalakítása	28
3.5. Eredmények	30
<b>4. AZ EGYENSÚLYI EGYENLET ÁLTALÁNOS ÉS TELJES MEGOLDÁSÁT ADÓ ELLENTMONDÁSMENTES VARIÁCIÓS ELVEK ÉS A STATIKAI–KINEMATIKAI ANALÓGIA A PEREMFELTÉTELEKRE – MIKROPOLÁRIS ESET</b>	31
4.1. Irodalmi előzmények	31
4.2. Célkitűzések	31
4.3. Szabad variációs feladat	31
4.4. Statikai–kinematikai analógia	34
4.5. Eredmények	36
<b>5. AZ EGYÉRTÉKŰSÉG MAKRÓ FELTÉTELEI VEGYES PEREMÉRTÉK-FELADATOKRA. SZÁRMAZTATÁS A KIEGÉSZÍTŐ ENERGIA MAXIMUM ELVBŐL – KLASSZIKUS ESET</b>	38
5.1. Irodalmi előzmények	38
5.2. Célkitűzések	39
5.3. A kiegészítő kompatibilitási feltételek származtatása geometriai megfontolásokból	39
5.4. Származtatás a teljes kiegészítő energia maximumának elvéből	43
5.5. Eredmények	50
<b>6. AZ EGYÉRTÉKŰSÉG MAKRÓ FELTÉTELEI VEGYES PEREMÉRTÉK-FELADATOKRA. SZÁRMAZTATÁS A KIEGÉSZÍTŐ ENERGIA MAXIMUM ELVBŐL – MIKROPOLÁRIS ESET</b>	51
6.1. Irodalmi előzmények	51
6.2. Célkitűzések	51
6.3. A kiegészítő kompatibilitási feltételek származtatása geometriai megfontolásokból	51
6.4. Származtatás a teljes kiegészítő energia maximumának elvéből	52
6.5. Eredmények	56

<b>7. AZ EGYÉRTÉKŰSÉG MAKRÓ FELTÉTELEI ÉS AZ ALAKVÁLTOZÁSI PEREMFELTÉTELEK SÍKBELI VEGYES PEREMÉRTÉKFELADATOKRA – MIKROPOLÁRIS ESET</b>	57
7.1. Irodalmi előzmények	57
7.2. Célkitűzések	57
7.3. A duál egyenletrendszer és a kiegészítő kompatibilitási feltételek	57
7.4. A kiegészítő kompatibilitási feltételek származtatása a kiegészítő energia maximumának elvéből	59
7.5. Alakváltozási peremfeltételek vegyes peremértékfeladatokra	61
7.6. Eredmények	64
<b>8. A SÍKRUGALMASSÁGTAN PEREMINTEGRÁLEGYENLETEI DUÁL RENDSZERBEN ELSŐRENĐŰ FESZÜLTSGFÜGGVÉNYEKSEL</b>	65
8.1. Irodalmi előzmények	65
8.2. Célkitűzések	65
8.3. Duál egyenletrendszer és az egyértékűség feltételei	65
8.4. Alapegyenlet és alapmegoldás	69
8.5. Somigliana identitás és formulák duál rendszerben – belső tartomány	72
8.6. Somigliana identitás és formulák duál rendszerben – külső tartomány	76
8.7. A vonalintegrálok diszkretizálása és a numerikus megoldás egyenletrendszere	79
8.8. Számpéldák	81
8.9. Eredmények	85
<b>9. PEREMELEM MÓDSZER SÍKFELADATOKRA PRIMÁL RENDSZERBEN – A KÜLSŐ TARTOMÁNYRA VONATKOZÓ EGYENLETEK PONTOSÍTÁSA</b>	87
9.1. Irodalmi előzmények	87
9.2. Célkitűzések	87
9.3. A síkrugalmasságtan egyenletei primál rendszerben	87
9.4. Alapképletek külső tartományra	88
9.5. A külső tartományra vonatkozó Somigliana formulák módosítása	89
9.6. Eredmények	93
<b>10. ÖSSZEFOGLALÁS</b>	94
10.1. Az értekezésben megoldott tudományos feladatok előzményei, célkitűzések	94
10.2. Az elvégzett vizsgálatok és a kutatás módszere	99
10.3. Eredmények	98
10.4. Az eredmények hasznosításának lehetőségei	101
10.5. Az értekezés témakörében készült legfontosabb publikációk felsorolása	102
<b>A. FÜGGELÉK</b>	103
A.1. Általános egyenletek	104
A.2. Átalakítások az 1. Fejezethez	106
A.3. Átalakítások a 2. Fejezethez	110
A.4. Átalakítások a 3. és 4. Fejezetekhez	111
A.5. Átalakítások az 5. Fejezethez	112
A.6. Átalakítások a 6. Fejezethez	114
A.7. Átalakítások a 7. Fejezethez	114
A.8. Átalakítások a 8. Fejezethez	119
<b>HIVATKOZÁSOK</b>	121

## BEVEZETÉS

A jelen értekezés a szerző kandidátusi értekezésének megvédése, azaz az 1985. év után végzett kutató munkája fontosabb eredményeit összegezi. A kutatások *a kontinuummechanika egyes duál feladatait ölelik fel az alakváltozások elméletének lineáris keretei között* – a fizikai nemlinearitás bizonyos esetekben megengedett – *részben klasszikus, részben mikropoláris testre*. Az eredmények egy része elméleti, másik része alkalmazási lehetőségeket is kínál.

A pályázó érdeklődésének kialakulásában nagy szerepe volt a Miskolci Egyetem Mechanikai Tanszéke korábbi vezetőjének KOZÁK professzornak, aki felismerte, hogy a kontinuummechanika duál feladatainak köre a mechanikai kutatások méltatlanul elhanyagolt területe, annak ellenére, hogy a 20-as és 30-as években számos kimagasló eredmény született MUSZKHELISVILI [39] és iskolája munkássága nyomán a duál rendszerben elvégzett vizsgálatok terén és annak ellenére is, hogy a matematikai fizika differenciálegyenletei primál és duál rendszerének világos elkülönítése tekintetében jelentős eredményeket ért el a 60-as és 70-es években TONTI [80], [81], valamint a 80-as években Oden és REDDY [42].

TONTI összegező és fogalmi tekintetben tisztázó megállapításai szerint a matematikai fizika legtöbb peremértékfeladata primál és duál alakban is megfogalmazható. A megoldandó differenciálegyenlet-rendszer egyenletei mindkét rendszerben azonos módon három csoportba sorolhatók: [primál]{duál} értelmező (kinematikai) egyenlet(ek), [primál]{duál} konstitutív (vagy anyagegyenlet(ek)) illetve [primál]{duál} mérlegegyenle(tek). Változók tekintetében a [primál]{duál} forrásváltozó(k) a mérlegegyenlet inhomogenitását okozó mennyiség(ek).

Az értelmező egyenlet(ek) a [primál]{duál} elsődleges közbülső változó(ka)t adja (adják) meg az alapváltozóval (alapváltozókkal) kifejezve, a konstitutív egyenlet(ek) a [primál] {duál} másodlagos közbülső változó(kat)t a [primál] {duál} elsődleges közbülső változóval (változókkal) fejezi(k) ki, a mérlegegyenlet(ek) a [primál]{duál} másodlagos közbülső változóra (változókra) tett megszorítás(ok). A [primál]{duál} rendszer elsődleges közbülső változója (változói) a {duál} [primál] rendszer másodlagos közbülső változója (változói). Az elsődleges közbülső változó(k) – ezt (ezeket) a [primál]{duál} értelmező egyenlet(ek) adja (adják) meg – identikusan teljesíti(k) a {duál}[primál] mérlegegyenlet(ek)et. A közbülső változók eliminálásával az alapváltozó(k)ra vonatkozó [primál]{duál} alapegyenlet(ek)et kapjuk. A klasszikus kontinuummechanika lineáris elméletének primál rendszerében az elmozdulásvektor–mező, a duál rendszerben a feszültségfüggvény tenzormező az alapváltozó.

Az egyenletek áttekintett csoportosítása az ún. TONTI sémába foglalható. Ezt kontinuummechanikai, ezen belül klasszikus rugalmasságtani feladatokra ODEN és REDDY könyve ismerteti [42], a séma duál rendszerrel kapcsolatos része azonban nem terjed ki mindenre. Nevezetesen a szükségesnél több egyenletet tartalmaz, a peremfeltételek pedig hiányosak. Ezen problémák kiküszöbölése az ún. SOUTHWELL paradoxon [51], [52] megoldásával a kontinuummechanika lineáris elméletének keretei között klasszikus esetre KOZÁK [4], mikropoláris esetre KOZÁK–SZEIDL [30] nevéhez fűződik. Az idézett [4] könyv tartalmazza a helyes TONTI sémát rugalmas testre.

A szóhasználat egyértelműsége kedvéért itt rögzítjük le, hogy amikor az egyensúlyi egyenlet kifejezést használjuk, a primál rendszer mérlegegyenletére, amikor pedig a kompatibilitási egyenlet kifejezést használjuk, akkor pedig a duál rendszer mérlegegyenletére gondolunk. Ez a terminológia a szokásos a szilárd testek mechanikájában.

A duál szó jelzőként abban az értelemben is szerepel majd a szövegben, hogy duál rendszer duális párja a primál rendszer illetve megfordítva, ahogy fentebb is szerepel, a primál rendszer duálisa a duál rendszer.

A jelen bevezetést részletes jelölésjegyzék követi.

Az érdemi fejezetek hármastagolásúak és ez valamelyest az alcímekeben is tükröződik. Az első rész mindig a probléma irodalmi előzményeit és probléma megfogalmazását adja, a második rész a megoldás gondolatmenetét ismerteti, a harmadik rész pedig az eredmények áttekintése. Ha az eredmények nem csak a szerző eredményei akkor erre külön utalás hívja fel a figyelmet.

Az első és második fejezet a duál rendszer értelmező egyenleteinek, vagy ami ugyanaz, a primál rendszer egyensúlyi egyenletei megoldásának a virtuális munka elvből történő származtatásával és a vonatkozó variációs elvek kérdésével foglalkozik klasszikus esetben, a harmadik és negyedik fejezet pedig ugyanezt a kérdéskört tekinti át mikropoláris testre. Az ötödik, hatodik, és hetedik fejezet vegyes peremfeltételek mellett veszi sorra az elmozdulásmezők egyértékűségének kérdéseit különböző, klasszikus és mikropoláris esetekre, térbeli, illetve egy esetben pedig síkbeli feladatra. Különös hangsúlyt kap az egyértékűség kérdése, ha többszörösen összefüggő tartomány a vizsgálatok tárgya.

A nyolcadik fejezet a síkrugalmasságtan peremértékfeladatainak integrálegyenleteivel foglalkozik duál rendszerben elsőrendű feszültségfüggvényeket tekintve alapváltozónak. Külön vizsgáljuk azt a kérdést, hogyan módosulnak a direkt peremelem módszer integrálegyenletei, ha külső tartomány a vizsgálat tárgya és konstans a feszültségállapot a végtelenben.

A kilencedik fejezet az egyetlen, amely primál rendszerbeni vizsgálatot tartalmaz. A vizsgálatok célja, a nyolcadik fejezet eredményei alapján, a síkrugalmasságtan külső tartományra vonatkozó SOMIGLIANA formuláinak módosítása annak érdekében, hogy a végtelen távoli pont konstans feszültségállapota bekerüljön a formalizmusba.

Az érdemi fejezeteket a kutatómunka előzményeit, a célkitűzéseket, az eredményeket és a hasznosítás lehetőségeit áttekintő tömör, de önállóan is olvasható összefoglalás követi, melyet az értekezés eredményeit bemutató cikkek listája zár le.

A gondolatmenet kifejtését zavaró egyes hosszabb átalakításokat külön függelék foglalja össze.

## SZÓHASZNÁLAT, JELÖLÉSBELI MEGÁLLAPODÁSOK ÉS JELÖLÉSEK

**Az értekezés szóhasználatáról.** Előljáróban a szóhasználat egyértelművé tétele érdekében röviden áttekintünk néhány – a bevezetésben részben már említett – fogalmat.

Az értekezés gondolatmenete – külön említés nélkül – a duál rendszerre vonatkozik. Ahol primál rendszerről van szó ott arra az értekezés külön felhívja a figyelmet.

A síkbeli és térbeli tartomány lehet egyszeresen, vagy többszörösen összefüggő.

Azt fogjuk mondani, hogy *kompatibilis az alakváltozási tenzor (az alakváltozási tenzor és a forgási alakváltozási tenzor)*, ha az alakváltozási tenzor(ok)ból integrálással, egy merevtestszerű mozgástól eltekintve egyértékű elmozdulásmező (elmozdulásmező és független forgásmező) képezhető, hogy abból (azokból), felhasználva a primál rendszer kinematikai egyenleteit – amelyek az alakváltozási tenzort (az alakváltozási tenzort és a forgási alakváltozási tenzort) adják meg az elmozdulásmezővel (az elmozdulásmezővel és a független forgásmezővel) kifejezve – visszacapjuk az alakváltozási tenzort (az alakváltozási tenzort és a forgási alakváltozási tenzort).

Az alakváltozási tenzormezők kompatibilitását a kompatibilitási feltételek biztosítják.

A kompatibilitási feltételek két nagy csoport alkotja:

- (a) Az első az egyszeresen és többszörösen összefüggő síkbeli és térbeli tartományokra egyaránt vonatkozó ún. *kompatibilitási differenciálegyenletek és kompatibilitási peremfeltételek* csoportja.
- (b) A második a csak többszörösen összefüggő tartományra vonatkozó ún. *makró kompatibilitási feltételek* csoportja. Ez utóbbi tovább bontható két alcsoportra. Síkbeli példával élve
  1. *nagybani kompatibilitási feltételeknek* kell fennállnia minden olyan zárt peremgörbén, amelyen terhelés az előírt, míg
  2. *kiegészítő kompatibilitási feltételeknek* kell teljesülnie, ha egy zárt peremgörbét alkotó ívek mentén, vagylagosan terhelés, illetve elmozdulás (elmozdulás és szögelfordulás) adott.<sup>1</sup>

A *virtuális munka elv*, bármely alakját tekintjük is (klasszikus esetben [29], mikropoláris esetben [60] ad áttekintést a virtuális munka elv duál alakjairól), az mindig anyagegyenlettől független elv.

Ezzel szemben a *rugalmasságtan variációs elvei* esetén, mind a primál mind pedig a duál rendszerben – vagy a mellékfeltételeken keresztül vagypedig közvetlenül a vonatkozó funkcionálban – megjelenik az anyagegyenlet.

*Szabad variációs feladatról* beszélünk, ha nincs mellékfelétel a vonatkozó funkcionál értelmezési tartományát alkotó mezőkre nézve. Ekkor az értelmezési tartományt alkotó valamennyi mező szabadon variálható.

A *klasszikus rugalmasságtan SOMIGLIANA képletei* [50] a potenciálmélet úgynevezett GREEN képleteinek rugalmasságtani általánosításai. Ha ismerjük a teljes peremen az elmozdulás- és feszültségmezőt, továbbá az úgynevezett elsőrendű és másodrendű alapmegoldásokat, akkor az első SOMIGLIANA képlet felhasználásával, integrálásokat végrehajtva számítható a test belsejében az elmozdulásmező. Mivel a peremfeltételek nem adják meg a teljes peremen az elmozdulás- és feszültségmezőt, további egyenlet szükséges ezek számítására. A második SOMIGLIANA képlet ugyanolyan szerkezetű mint az első SOMIGLIANA képlet, de a peremen adja meg az elmozdulásmezőt. Következésképp olyan integrálegyenletnek tekinthető – ez az úgynevezett *direkt módszer integrálegyenlete* – amelyben a feszültségvektor az ismeretlen abban a perempontban, ahol az elmozdulásmező adott, illetve megfordítva az elmozdulásvektor az ismeretlen abban a perempontban, ahol a feszültségvektor adott. Ennek az egyenletnek a megoldása nyitja meg az utat az első SOMIGLIANA képlet felhasználása előtt.

Az egyensúlyi feltételek, (egyensúlyi mezőegyenlet(ek), és a feszültségi peremfeltétel(ek)) feszültségfüggvényekkel történő teljesítésének és a kompatibilitási feltételek teljesítésének egyenletei – matematikai szerkezetüket tekintve – szoros rokonságban állnak egymással.

<sup>1</sup>Ez utóbbi feltételek származtatása az értekezés egyik részfeladata.

**Jelölésbeli megállapodások.** Vektorok és tenzorok írásmódját illetően vegyes, invariáns és indexes jelölésmódot alkalmazunk.

Indexes jelölésmódban adott vektort és tenzort a megfelelő indexekkel ellátott matematikai kurzív kis- és nagybetű egyaránt jelölheti.

Latin index értéke 1,2 és 3, görög index értéke 1 és 2 lehet. Ismételt index szerint összegezni kell. Pontosvessző után álló index kovariáns deriválást jelöl. A felületen vett kovariáns deriváltat rövid függőleges vonal után álló index, a felületi kovariáns deriváltat két rövid párhuzamos vonal után álló görög index jelöli.

Invariáns jelölésmódban álló félkövér betű a jelölés indexek nélkül (kivételt képeznek az indexekkel is ellátott bázisvektorok).

Térbeli feladatok esetén a vizsgált tartományt  $V$ , határfelületét  $S$  jelöli, a tartomány több zárt felülettel határolt és egyszeresen illetve többszörösen összefüggő is lehet. Adott esetben a vonatkozó ábra segít az eligazodásban. A peremfeltételek jellegének megfelelően az  $S$  az  $S_u$  és  $S_t$  jelű részekre bontott,  $S_u$ -n az elmozdulás (elmozdulási peremfeltétel)  $S_t$ -n a feszültség (feszültségi peremfeltétel) az előírt. Az  $S_u$  és  $S_t$  jelű részek közös határgörbét  $g$  jelöli.

*Térbeli feladatokban* három koordinátarendszert (továbbiakban KR) alkalmazunk, nevezetesen

- az  $(x_1, x_2, x_3)$  [vagy  $(x, y, z)$ ] kartéziuszi KR-t (indexek alsó pozícióban),
- az  $(x^1, x^2, x^3)$  tetszőleges görbevonallú KR-t (vegyes indexpozíciók),
- a  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  felületi KR-t ( $\xi^1, \xi^2$  felületi paraméterek,  $\xi^3$  a felületre merőleges – vegyes indexpozíciók)

alkalmazunk.

Az egyes változókat (skalárokat, vektorokat és tenzorokat) KR-től függetlenül ugyanaz a betű jelöli, a KR szerinti megkülönböztetést – ha szükséges – a kiírt argumentum (ez koordináták összességét jelölő  $y, x$  vagy  $\xi$  lehet) segíti. A tartományi és felületi integrálokat rendre az  $(x^1, x^2, x^3)$  illetve az  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  KR-ben tekintjük, következésképp ez esetben az argumentum kírásától eltekintünk.

*Síkbeli feladatok* esetén az  $A = A_i$  belső, vagypedig az  $A = A_e$  külső tartomány a vizsgálat tárgya, a peremgörbét, illetve kontúrt  $\mathcal{L}$  jelöli; a tartomány egy vagy több zárt kontúrral határolt, azaz egyszeresen illetve többszörösen összefüggő is lehet. Adott esetben a vonatkozó ábra illetve szöveg segít az eligazodásban. A peremfeltételek jellegének megfelelően  $\mathcal{L}$  általában az  $\mathcal{L}_u$  és  $\mathcal{L}_t$  jelű részekre bontott, az  $\mathcal{L}_u$ -n az elmozdulás, az  $\mathcal{L}_t$  -n a feszültség az előírt. Ettől eltérő esetben a vonatkozó jelölésbeli megállapodást a szöveg a kérdéskör tárgyalása során ismerteti. Ami a KR-eket illeti ismét az  $(x_1, x_2)$  [vagy  $(x, y)$ ] kartéziuszi (indexek alsó pozícióban), az  $(x^1, x^2)$  tetszőleges görbevonallú (vegyes indexpozíció) illetve a  $(\xi^1, \xi^2)$  kontúron értelmezett  $[\xi^2$  az ívkoordináta] ortogonális görbevonallú koordinátarendszert alkalmazzuk.

Peremfeltételekben az előírt mennyiséget a változót azonosító betű felett sapka jelöli.

A gondolatmenet kifejtése során nem teszünk különbséget az egyes változók jelölésében, ha a tényleges megoldásról (mezőegyenleteket és peremfeltételeket kielégítő megoldás), vagy a mezőegyenletek egy részét kielégítő mezőfüggvényekről, megoldásról [pl. kompatibilis, kinematikailag lehetséges alakváltozásmező; egyensúlyi, statikailag lehetséges feszültségmező], vagy valamely funkcionál értelmezési tartományában álló, elvben szabadon variálható mezőről van szó és a stationaritási feltételt teljesítő mezőfüggvények megegyeznek a tényleges megoldással. Ezt a konvenciót a jelölések egyszerűsége érdekében alkalmazzuk, bízva abban, hogy a szövegösszefüggés segít az eligazodásban.

**Latinbetűs jelölések alfabetikus sorrendben.** A sorrend kis illetve nagybetű.

$a^{mn}, a_{kl}$

$AB$

$\mathbf{a}^\lambda, \mathbf{a}_\kappa$

$\mathbf{a}^3 = \mathbf{a}_3 = \mathbf{n}$

$A_i, A_e$

a  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  felületi KR metrikus tenzorai (mértéktenzorai)

az  $ab$  indexek lehetséges értékeinek részhalmaza – v.ö.: klasszikus esetben 3. o., mikropoláris esetben 26. o.

a felületi KR-nek a felület érintősíkjában fekvő bázisvektorai

a harmadik bázisvektor (a külső normális egységvektor) a felületen síkbeli belső és külső tartomány

$A^{klpq}$ és $A_{mnp}^{-1}$	az első anyagállandó tenzor és annak inverze (mikropoláris eset)
$b^l, b^\kappa$	térfogaton (illetve síkon) megoszló (tartományi) terhelés sűrűség vektora
$b_\kappa^\lambda, b_{\alpha\beta}$	az $S$ felület görbületi tenzorának vegyes indexű és kovariáns indexű alakjai
<b>B</b>	a (8.79) és (8.80) képletekkel értelmezett mátrix
$B^l$	az (1.6) egyenlettel értelmezett vektormező
$B^{klpq}$ és $B_{mnp}^{-1}$	a második anyagállandó tenzor és annak inverze (mikropoláris eset)
$C_1^G$	klasszikus esetben a (2.31c), mikropoláris esetben pedig a (4.19d) képlettel adott integrál
$c_k, c_3$	térfogaton illetve síkbeli tartományon megoszló erőpár terhelés sűrűségvektora (mikropoláris eset)
$C^\rho, C_{33}$	a 7.4. és 7.5. szakaszokban szereplő állandó vektor és állandó
$\delta_{cb}^{(1i)}, \delta C^s$	tetszőleges állandó vektorok – v.ö.: (5.36a) és (6.26a)
$\delta_{cb}^{(21)}, \delta C^s$	tetszőleges állandó vektorok – v.ö.: (5.36b) és (6.26b)
$c_{\kappa\lambda}(\overset{o}{Q})$	a (8.52a) képlettel értelmezett tenzor
$C_b$	a (3.7) egyenlettel értelmezett vektormező
$C_1^G$	a (4.19d) integrállal értelmezett állandó
$C_b, C_1^{Su}, C_2^{Su}$	a (2.28c), (4.19c) illetve a (4.12) után álló képlettel értelmezett állandók
$C^{klpq}$ és $C_{mnp}^{-1}$	az anyagállandók tenzora és annak inverze (klasszikus eset)
$C_{(ti)}^2, C_{(ti)}^1$	integrációs állandók kartéziuszi KR-ben – v.ö.: (8.11)
$C_{(ti)}^{33}, C_{(ti)}^\rho \mathbf{g}_\rho$	integrációs állandók görbevonallú KR-ben – v.ö.: (7.13) és (7.16)
$D_{k\lambda}(\overset{o}{M}, \overset{o}{Q}),$	a (8.55)-ben álló mátrix [illetve a mátrix elemeit adó mennyiségek – v.ö.: (8.56a,b)]
$\hat{D}_{k\lambda}(\overset{o}{M}, \overset{o}{Q})$	
$D_l^m$	a (3.9b) egyenlettel értelmezett inkompatibilitási tenzor (mikropoláris eset)
$\mathfrak{D}_{lk}$	az alapegyenletrendszer baloldalán álló differenciáloperátor – v.ö.: (8.25)
$\mathcal{D}_{lk}$	a $\mathfrak{D}_{lk}$ operátorok adjungáltjai [nem azonos az inkompatibilitási tenzorral – v.ö.: (8.30)]
$e_{kl}$	alakváltozási tenzor [klasszikus eset (1.1) képlet]
$e_{kl}^T, e_{kl}^U$	az (5.29) és (5.31)-et követő képletekkel értelmezett határértékek
$\mathcal{E}^{ab}$	inkompatibilitási tenzor [klasszikus eset, lásd (1.10)]{mikropoláris eset, lásd (3.9b) és (3.10)}
$\mathcal{F}_S^T, \mathcal{F}_p^l$	feszültségfüggvény a $V$ -n – v.ö.: (4.1c) <sub>1</sub>
$\tilde{\mathcal{F}}_\eta^l$	feszültségfüggvény az $S_t$ -n – v.ö.: (4.1d) <sub>1</sub>
$F_S^T$	LAGRANGE féle multiplikátor a $V$ -n – v.ö.: (3.21a) <sub>1</sub>
$\check{F}_S^T$	LAGRANGE féle multiplikátor a $V$ -n – v.ö.: (4.22a) <sub>1</sub>
$F_\eta^*$	LAGRANGE féle multiplikátor az $S_u$ -n – v.ö.: (4.22b) <sub>1</sub>
$\tilde{F}_\eta^l$	LAGRANGE féle multiplikátor az $S$ -n – v.ö.: (3.21b) <sub>1</sub>
$\mathcal{F}_\eta$ megfelel $\mathcal{F}_3^\eta$ -nak	feszültségfüggvények síkfeladatra kartéziuszi KR-ben – v. ö. 8. Fejezet
$g$	az $S$ felület $S_t$ és $S_u$ résztartományainak közös peremgörbéje
$g^{(1,0)}, \dots, g^{(1,4)}$	a $g$ görbét alkotó zárt ívek – v.ö.: 5.1 ábra
$g^{mn}, g_{kl}$	az $(x^1, x^2, x^3)$ görbevonallú KR metrikus tenzorai (mértéktenzorai)
$\mathbf{g}^n, \mathbf{g}_k$	az $(x^1, x^2, x^3)$ görbevonallú KR bázisvektorai
<b>H</b>	a (8.79) és (8.80) képletekkel értelmezett mátrix
$H_{kl}$	LAGRANGE féle multiplikátor a $V$ -n – v.ö.: (1.27) <sub>1</sub>
$H_{XY}$	LAGRANGE féle multiplikátor a $V$ -n – v.ö.: (3.21a) <sub>2</sub>



$\check{H}_{kl}$	az 1. Fejezet 19. MEGJEGYZÉSÉBEN (10. o.) értelmezett feszültségfüggvény
$\check{H}_{\eta\vartheta}, \check{H}_{\kappa\lambda}, \check{H}_{\eta l}$ $\check{H}_{\eta\vartheta;3}$	LAGRANGE féle multiplikátorok az $S$ -n – v.ö.: (1.27) <sub>2</sub> , (3.21b) <sub>2</sub> LAGRANGE féle multiplikátor az $S$ -n – v.ö.: (1.27) <sub>3</sub> , illetve feszültségfüggvény normálirányú deriváltja az $S_t$ -n – v.ö.: (2.1d) <sub>2</sub> , (formailag mindkét esetben normálirányú kovariáns derivált)
$\check{H}_{\eta 3}, \check{H}_{33}$	LAGRANGE féle multiplikátorok $S$ -n (feltevés szerint azonosan zérusok) – v.ö.: (1.27) <sub>4,5</sub>
$\check{H}_{RS}, \check{H}_{XY}$	LAGRANGE féle multiplikátorok $V$ -n – v.ö.: (2.33a) klasszikus eset, (4.22b) <sub>2</sub> mikropoláris eset
$\check{H}_{kl}^*, \check{H}_{\eta\vartheta;3}^*$ és $\check{H}_{\eta b}^*$ $\mathcal{H}_{y d}, \mathcal{H}_{XY}$	LAGRANGE féle multiplikátorok az $S_u$ -n – v.ö.: (2.33b) és (4.22b) feszültségfüggvény tenzorok a $V$ -n – v.ö.: (2.1c) klasszikus eset, (4.1c) <sub>2</sub> mikropoláris eset
$\check{\mathcal{H}}_{\kappa\lambda}, \check{\mathcal{H}}_{\kappa\lambda;3}, \check{\mathcal{H}}_{\eta l}$	feszültségfüggvény tenzorok és normálirányú derivált az $S_t$ -n – v.ö.: (2.1d), (4.1d) <sub>2</sub>
$I_V^B$	az (1.21) képlettel értelmezett integrál
$I_{V1}^B, I_{V2}^B$	az $I_V^B$ integrál különböző alakjai – v. ö.: (1.22)
$I_{VMB}$	az (1.25) illetve a (3.20) képlettel értelmezett integrálösszeg
$I_{VM\Psi}$	az (1.26) képlettel értelmezett integrálösszeg
$I_1^S$	az (1.29) illetve a (3.23) képlettel értelmezett felületi integrál
$I_1^V$	az (1.28) illetve a (3.22) képlettel értelmezett térfogati integrál
$I_1^{VS}$	$I_1^V$ és $I_1^S$ összege – v.ö.: (1.30)
$I_{1U}^S, I_{1E}^S, I_{1E}^V$	$I_1^{VS}$ részei – v.ö.: (1.32)
$K$	a teljes kiegészítő energia funkcionál– v.ö.: (5.16), (6.9), (7.17) és (8.12)
$K_k^L$	a $K^L$ indexek lehetséges értékeinek részhalmaza – v.ö.: 26. o.
$\delta K^V, \delta K^{S_u},$ $\delta K^g, \delta K^{\mathcal{L}}$	a teljes kiegészítő energia funkcionál variációi $V$ -n, $S_u$ -n, $g$ és $\mathcal{L}$ mentén v.ö.: (6.22), (6.23a,...,e)
$\delta K_A, \delta K_L, \delta K_u$	a teljes kiegészítő energia variációjának részei – v.ö.: (7.24), (7.25 és (7.26a,b)
$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}^*$	görbék az $S$ felületen – v.ö.: 5.1 ábra, 39. o.
$\mathcal{L}_{1j} = P_{1j}, P_{1,j+1}$	az $\mathcal{L}_1$ görbe részei (ívei) – v.ö.: 5.2 ábra, 39. o.
$\mathcal{L}_o$	síkbeli tartomány peremgörbéje (kontúrja)
$\mathcal{L}_{ti}$	a kontúrgörbe azon ívei, melyeken feszültség (és erőpárfeszültség) az előírt
$\mathcal{L}_{ui}$	a kontúrgörbe azon ívei, melyeken elmozdulás (és forgás) az előírt
$\mathcal{L}_u$ és $\mathcal{L}_t$	a kontúr részei
$M$	a hatás pontja
$\overset{o}{M}$	a hatás pontja a kontúrra lokalizált
$n_k, n_\lambda$	a $V$ térfogati tartomány, illetve az $A_i, A_e$ síkbeli tartományok külső normális egységvektora
$P_{11}, \dots, P_{14}$ és $P_{21}$	az $\mathcal{L}_1$ és $\mathcal{L}_2$ , valamint a $g$ és $\mathcal{L}^*$ görbék metszéspontjai – v.ö.: 5.2 ábra, 39. o.; illetve 5.4 ábra, 42. o.
$P_{21}, P_{22}, \dots, P_{41}$ és $P_{42}$	pontok az $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_4$ , görbéken – v.ö.: A.2 ábra, 116. o.
$P_{ti}$	az $\mathcal{L}_{ti}$ ív kezdőpontja
$r^b$	az $S_t$ -n értelmezett LAGRANGE féle multiplikátor
$\tilde{r}^b$	az $S_t$ -n és $V$ -n értelmezett vektormező
$\overset{*}{r}_l$	a $g$ görbén értelmezett LAGRANGE féle multiplikátor
$r_\kappa$	az $M$ pont $Q$ pontra vonatkoztatott helyvektora a kartézusi KR-ben – peremelem módszer esetén
$[\delta r^l]$	az $S_t$ -n értelmezett $r^l$ vektormező szakadása $\mathcal{L}$ mentén – v.ö.: (6.15)

$R$	az $M$ és $Q$ pontok közötti távolság
$R_S$	az $ab$ indexek lehetséges értékeinek részhalmaza – v. ö.: 4. o.
$\tilde{\mathbf{R}}(s)$	a $P(s)$ pont $P$ pontra vonatkoztatott helyvektora – v.ö.: 5.3 ábra, 40. o.
$\mathbf{R}(s)$ és $\mathbf{R}(P)$	a $P(s)$ és $P$ pontok helyvektorai – v.ö.: 5.3 ábra, 40. o.
$\mathfrak{s}_k(Q)$	erőfeszültségek oszlopvektora – v.ö.: (8.55), (8.70)
$S$	a $V$ térbeli tartomány határfelülete
$S_u$ és $S_t$	az $S$ határfelület részei
$\overset{(k)}{S}_u$ és $\overset{(i)}{S}_t$	az $S_u$ és $S_t$ felület részei – v.ö.: 5.1 ábra
$S_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)$ ,	
$\hat{S}_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)$	a (8.55)-ben álló mátrix (illetve a mátrix elemeit adó mennyiségek)
$t^k$	feszültségvektor
$\hat{t}^k$	az $S_t$ -n, illetve az $\mathcal{L}_t$ -n előírt feszültségvektor
$t^{kl}$	az erőfeszültség tenzora (klasszikus esetben szimmetrikus)
$t_{\kappa\lambda}$	erőfeszültségek síkfeladatokra kartéziuszi KR-ben
$\overset{\circ}{t}_{\kappa\lambda}$	partikuláris megoldás erőfeszültségekre – v.ö.: (8.1)
$\mathfrak{T}_{l\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)$	a (8.42a,b) képletekkel értelmezett alapmegoldás
$u$	fajlagos rugalmas energia
$u_k$	elmozdulásvektor
$\hat{u}_k$	az $S_u$ -n, illetve az $\mathcal{L}_u$ -n előírt elmozdulásvektor
$\mathbf{u}_k, \tilde{\mathbf{u}}_k$	alapváltozók vektorai – v.ö.: (8.26) előtti bekezdés
$\mathfrak{U}_{kl}(M, Q)$	alapmegoldás – v.ö.: (8.35)
$v_l(x)$	a $V$ -n és $S$ -en értelmezett vektormező [v.ö.: (1.9) és (3.8a,b)]
$V$	egyszeresen vagy többszörösen összefüggő térbeli tartomány
$w_b$	az $S_t$ -n értelmezett LAGRANGE féle multiplikátor
$[\delta w^b]$	az $S_t$ -n értelmezett $\delta w^b$ vektormező szakadása $\mathcal{L}$ mentén – v.ö.: (5.32) és (6.15)
$\tilde{w}_b$	az $S_t$ -n és $V$ -n értelmezett vektormező
$\overset{*}{w}_b$	a $g$ görbén értelmezett LAGRANGE féle multiplikátor
$(x)$	az $(x^1, x^2, x^3)$ térbeli görbevonaltól, vagy $(x^1, x^2)$ síkbeli görbevonaltól koordináták összessége
$(x^1, x^2, x^3)$ és	tetszőleges görbevonaltól {térbeli}[síkbeli] KR
$(x^1, x^2)$	
$(x_1, x_2, x_3)$ és	{térbeli}[síkbeli] egyenesvonalú kartéziuszi KR
$(x_1, x_2)$	
$Q$	a hatás forrásának pontja vagy forráspont
$\overset{\circ}{Q}$	
$\hat{Q}$	a forrás pontja a kontúrra lokalizált

**Görögbetűs jelölések alfabetikus sorrendben.** A sorrend kis illetve nagybetű.

$\alpha$	anyagjellemző (mikropoláris testre)
$\alpha_{ab}$	a $V$ -n értelmezett, elegendően sima egyébként tetszőleges tenzormező [klasszikus esetben szimmetrikus (1.9), mikropoláris esetben nem (3.8b)]
$\beta_k^l$	a $V$ -n értelmezett, elegendően sima egyébként tetszőleges tenzormező – v.ö.: (3.8a)]
$\delta e, \dots, \delta \mathcal{H}$	variálás az $e, \dots, \mathcal{H}$ változók szerint
$\delta \tilde{r}^l, \delta \tilde{w}_\eta$	a (2.21), (2.21) és (2.24) differenciálegyenletek megoldásai
$\gamma_{kl}$	alakváltozási tenzor (mikropoláris eset)
$\delta_l^k$	KRONECKER szimbólum
$\epsilon^{pqr}, \epsilon_{klm}$	permutációs tenzorok
$\kappa_a^b$	görbületi (forgási) alakváltozási tenzor (mikropoláris eset)

$\varphi^k$	merevtestszerű illetve független forgás (klasszikus és mikropoláris eset)
$\mu$	nyírási rugalmassági modulus (klasszikus és mikropoláris eset)
$\hat{\mu}_b$	előírt erőpárfeszültség
$\mu_{ab}$	erőpárfeszültség tenzor illetve nyomatéki feszültségi tenzor (mikropoláris eset)
$\mu_{\kappa 3}$	erőpárfeszültségek síkfeladatokra kartéziuszi KR-ben
$\nu$	POISSON szám
$(\xi)$	a $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ koordináták összessége
$(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ és $(\xi^1, \xi^2)$	felületi, illetve kontúrhoz igazodó görbevonalú KR
$\Pi$	a teljes potenciális energia funkcionál
$\Pi_S$	a mellékfeltételeket tartalmazó integrálok összege {klasszikus eset (2.34)} [mikropoláris eset (4.23)]
$\Pi_S^V, \Pi_S^{St}, \Pi_S^{Su}, \Pi_S^G$	a mellékfeltételeket tartalmazó integrálok {klasszikus eset (2.35a,b,c)} [mikropoláris eset (4.24a,b,c,d)]
$\Pi_1$	módosított teljes potenciális energia funkcionál {klasszikus eset (2.30)} [mikropoláris eset (4.18)]
$\Pi_1^V, \Pi_1^{St}, C_1^{Su}$	klasszikus esetben a $\Pi_1$ funkcionált alkotó integrálok – v.ö.: (2.27)
$\Pi_1^V, \Pi_1^{St}, C_1^{Su}, C_1^G$	mikropoláris esetben a $\Pi_1$ funkcionált alkotó integrálok – v.ö.: (4.18)
$\Pi_2$	szabad variációs feladat funkcionálja {klasszikus eset (2.13)} [mikropoláris eset (4.10)]
$\Pi_2^V, \Pi_2^{St}, \Pi_2^{Su}, \Pi_2^G$	a $\Pi_2$ funkcionálokat klasszikus esetben alkotó integrálok – v.ö.: (2.13)
$\Pi_2^{V1}, \Pi_2^{V2}, \Pi_2^{St}, \Pi_2^{Su}, \Pi_2^G, C_2^{Su}$	a $\Pi_2$ funkcionálokat mikropoláris esetben alkotó integrálok – v.ö.: (4.10)
$\rho^k$	a $V$ -n és $S$ -en értelmezett vektormező [v.ö.: (3.8a,b)]
$\tau^\eta$	a $g$ görbe, illetve síkbeli tartomány esetén a kontúr érintő egységvektora
$\Psi^l$	az (1.8) képletben álló vektormező

## 1. AZ EGYENSÚLYI EGYENLET ÁLTALÁNOS ÉS TELJES MEGOLDÁSÁNAK SZÁRMAZTATÁSA VIRTUÁLIS MUNKA ELVBŐL – KLASSZIKUS ESET

**1.1. Irodalmi előzmények.** Az ún. egyensúlyi egyenletek megoldását tetszőleges terhelésre – egy zárt felülettel határolt egyszeresen összefüggő test esetén – *általános megoldásnak* nevezzük.

*Teljes az egyensúlyi egyenletek megoldása*, ha több zárt felülettel határolt egyszeresen összefüggő tartomány tetszőleges, azaz az egyes zárt felületek nem szükségképpen önegyensúlyi terhelései esetén is teljesül az egyensúlyi egyenletet.

A *klasszikus feladatok* keretei között AIRY [2] találta meg a síkbeli egyensúlyi egyenlet megoldását feszültségfüggvényekkel. Az AIRY féle feszültségfüggvény általánosítása háromméretű feladatokra MAXWELL [35] és MORERA [37] nevéhez fűződik, akik két egymástól különböző megoldást állítottak fel. Ezek mindegyike három–három feszültségfüggvényt tartalmaz. BELTRAMI [5] észrevette, hogy az említett megoldások megkaphatók az általa javasolt megoldásból, feltéve hogy a megoldásában álló szimmetrikus tenzor alkalmasan választott három–három elemének helyére zérust írunk. A BELTRAMI féle megoldás teljességét többek között ORNSTEIN [43], GÜNTHER [15] valamint DORN & SCHIELD [13] igazolta, a bizonyítások azonban csak egyetlen zárt felülettel határolt tartományra érvényesek. Ezt a körülményt RIEDER [45] vette észre, amikor megfigyelte, hogy több zárt felülettel határolt tartományok esetén a Beltrami féle megoldás önegyensúlyi minden zárt felületen következésképp nem lehet teljes. A BELTRAMI féle megoldás alkalmas, intuitív úton választott kiegészítésével egymástól függetlenül SCHAEFER [47] és GURTIN [16] talált egymástól formálisan különböző, de teljes megoldásokat.

Az idézett cikkekben a feszültségfüggvények bevezetése intuitive történt. Ebben a tekintetben az előrelépés TONTI [80] és STIPPES [55] érdeme, akik a nem teljes BELTRAMI féle megoldást variációs elvből (TONTI), illetve a virtuális munka elvből (STIPPES) származtatták. Problémát jelentett azonban, hogy mellékfeltételként a hat SAINT VENANT féle kompatibilitási feltételt alkalmazták, holott ezek nem függetlenek egymástól [29]. Ebből adódik, hogy az így nyert megoldás, amely megegyezik formailag a BELTRAMI féle megoldással *hat feszültségfüggvényt foglal magába, holott BELTRAMI szerint három feszültségfüggvény elegendő tetszőleges feszültségi állapot megadásához, ha a tartományt egyetlen zárt felület határolja.*

Ez az ellentmondás az ún. SOUTHWELL féle paradoxon [51], [52] duális párja (ez kitűnik a paradoxon rövid áttekintését adó következő szakasz szövegéből). Érdemes azt is megemlíteni, hogy a matematikai átalakítások során mindkét szerző, azaz TONTI is és STIPPES is figyelmen kívül hagyta a test határfelületén megjelenő integrálokat és azt is feltételezték, hogy nincs térfogaton megoszló terhelés.

A *klasszikus esetben* SOUTHWELL [51], [52] volt az első, aki a kompatibilitási feltételeket a teljes kiegészítő energia maximum elvből<sup>2</sup>, mint variációs elvből származtatta. Ugyanakkor arra is rámutatott, hogyha három feszültségfüggvényt alkalmaz – a MAXWELL [35] és MORERA [37] féle megoldásokat használta fel – akkor csak három kompatibilitási differenciálegyenlet következik a hat SAINT VENANT féle kompatibilitási egyenlet közül a stacionaritási feltételből. Mivel egy zárt felülettel határolt tartományon tetszőleges feszültségi állapot megadható alkalmasan választott három feszültségfüggvénnyel – több zárt felülettel határolt tartomány és/vagy zérustól különböző térfogati terhelés esetén a feszültségfüggvénnyel nyerhető megoldást ki kell egészíteni az egyensúlyi egyenletek egy partikuláris megoldásával – SOUTHWELL ellentmondásra jutott, hiszen az alakváltozásmezők kompatibilitásának elégséges feltétele a hat SAINT VENANT féle kompatibilitási egyenlet fennállása. A paradoxont, amelyre jutott, utána nevezték el SOUTHWELL paradoxonnak.

ABOVSZKI, ANDREJEV és DERUGA könyve [1] kiemelten foglalkozik a klasszikus rugalmasságtan variációs elveivel, többek között azokkal a variációs elvekkel is, ahol az egyensúlyi egyenletek feszültségfüggvényekkel való megoldása jelenik meg, mint a probléma egyik EULER egyenlete. TONTI és STIPPES cikkeihez képest van előrelépés a peremen megjelenő integrálok tekintetében is, de az átalakítások részben hibásak és hiányoznak azok a tagok a megoldásból amelyek biztosítanák, hogy a megoldás több zárt felülettel határolt tartományon is érvényes legyen. Ennek az

<sup>2</sup>Gyakran nevezik a teljes kiegészítő energia minimum elvnek

az oka, hogy az egyensúlyi egyenletek egy partikuláris, nem zérus térfogati terhelésre érvényes megoldását a szerzők ismertnek tételezik fel, és így az egyensúlyi egyenlet általános megoldása és a partikuláris megoldás különbsége jelenik meg Euler egyenletként. A SOUTHWELL paradoxon duális párja ez esetben is megoldatlan marad.

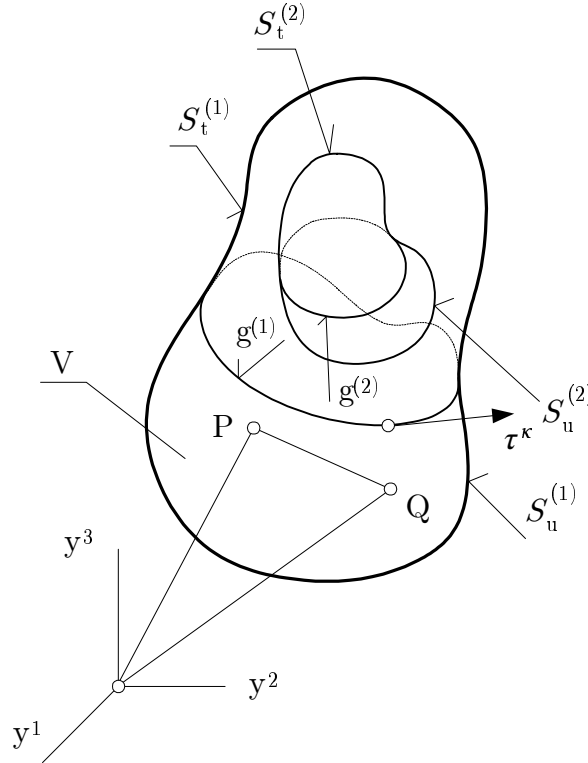
**1.2. Célkitűzések.** A fenti szakaszban megfogalmazott problémák alapján a szerző célul tűzte ki az alábbi, klasszikus esetre vonatkozó problémák megoldását:

- Az egyensúlyi egyenletek általános és teljes, *három feszültségfüggvényt* tartalmazó megoldásának származtatását a virtuális munka elv segítségével több zárt felülettel határolt egyszeresen összefüggő testre, megoldva ezzel a SOUTHWELL paradoxon duális párját.
- Az első célkitűzéssel összefüggésben annak megmutatását, hogy milyen fontos szerepet játszanak a megoldásban a mellékfeltételek (három független kompatibilitási feltétel a tartományon és alakváltozási peremfeltételek a tartomány peremén).
- Az integráltranszformációk során megjelenő felületi integrálok alkalmas átalakítását és a végső alakok, illetve a vonatkozó peremfeltételek mechanikai jelentésének tisztázását.

A megoldás gondolatmenete és főbb lépései a [72], [74] és [75] alapján kerülnek bemutatásra.

### 1.3. A feladat megfogalmazása.

**1.3.1.** Jelölje rendre  $x$ , illetve  $\xi$  az  $x^1, x^2, x^3$  térfogati, illetve a  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  felületi koordináták összességét. A jelen 1. Fejezetben az egyszeresen összefüggő, egy vagy több zárt felülettel határolt  $V$  tartomány képezi a vizsgálat tárgyát. Jelölje  $S = S_u \cup S_t$ ;  $S_u \cap S_t = \emptyset$  a  $V$  tartomány határfelületét és annak két részét. Az  $S_u$  és  $S_t$  felületrészeket a  $g$  görbe választja el egymástól.



1.1. ábra.

Az 1.1. ábrán vázolt két zárt felület határolta tartomány esetén

$$S_u = S_u^{(1)} \cup S_u^{(2)}, \quad S_t = S_t^{(1)} \cup S_t^{(2)} \quad \text{és} \quad g = g^{(1)} \cup g^{(2)}.$$

A klasszikus rugalmasságtan *primál rendszerének* mezőegyenleteit az

$$(1.1) \quad e_{kl}(x) = \frac{1}{2}(u_{l;k} + u_{k;l}) = u_{(k;l)} \quad x \in V$$

primál értelmező egyenlet (primál kinematikai egyenlet), az anizotróp esetre érvényes

$$(1.2) \quad t^{kl} = C^{klpq} e_{pq} \quad x \in V$$

primál konstitutív egyenlet (HOOKE törvény) –  $C^{klpq}$  a rugalmassági állandók negyedrendű tenzora –, és a

$$(1.3) \quad t^{kl}_{:,k}(x) + b^l = 0 \quad x \in V$$

primál mérlegegyenlet alkotják, ahol  $u_k$ ,  $e_{kl}$ ,  $t^{kl}$  és  $b^l$  rendre az elmozdulásvektor (alaprész), az alakváltozási és feszültségi tenzor (az elsődleges és másodlagos közbülső változó), illetve a térfogati terhelés (a forrásváltozó). A zárójelpárban álló  $(k;l)$  indexkettős a vonatkozó tenzor szimmetrikus részét jelöli.

Legyen  $\hat{u}_k$  és  $\hat{t}^l$  előírt elmozdulás illetve feszültség.

Az (1.1), (1.2) és (1.3) mezőegyenletekhez az

$$(1.4) \quad u_k = \hat{u}_k \quad \xi \in S_u$$

elmozdulási és az

$$(1.5) \quad n_k t^{kl} = \hat{t}^l \quad \xi \in S_t$$

feszültségi peremfeltételek társulnak. Az (1.5) képletben álló  $n_k$  a külső normális egységvektor.

Speciális esetben, ha az  $S_t$  üres, akkor  $S = S_u$  (DIRICHLET feladat), ha az  $S_u$  üres, akkor  $S = S_t$  (NEUMANN feladat).

**1.3.2.** Jól ismert potenciáleméleti eredmény [17], hogy a  $b^l$  térfogati terhelés mindig megadható a

$$(1.6) \quad b^l = -\Delta B^l(x) = -g^{pq} B^l_{:,pq} \quad x \in V$$

alakban [ $g^{pq}$  a metrikus tenzor az  $(x^1, x^2, x^3)$  görbevonalú KR-ben]. A  $B^l(x)$  vektormező számítása két lépésben történik:

1. Az első lépésben az  $(x_1, x_2, x_3)$  kartéziszi KR-ben határozzuk meg  $B^l$  értékét. Jelölje a  $P$  futópont koordinátáit  $x_r(P)$ . Legyen az  $x_r(Q)$  koordináták által meghatározott  $Q$  pont az a pont, ahol a  $B^l$ -t számítjuk. A  $B^l$  vektor  $Q$  pontbeli értékét a

$$(1.7) \quad B^l[x_r(Q)] = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{b^l[x_r(P)]}{|x_s(P) - x_s(Q)|} dV_P \quad Q \in V$$

integrál adja.

2. A második lépésben az  $(x^1, x^2, x^3)$  görbevonalú KR-be kell transzformálni a  $B^l[x_r(Q)]$  vektort.

Mivel az (1.6), (1.7) egyenletek alapján maga a  $B^l$  vektormező is képezhető egy másik, mondjuk a  $\Psi^l$  vektormezőből oly módon, hogy erre a vektormezőre működtetjük a Laplace operátort, adódik a következtetés, hogy a

$$(1.8) \quad b^l = -\Delta \Delta \Psi^l = -g^{pq} g^{mn} \Psi^l_{:,mnpq} \quad x \in V$$

előállítás ugyancsak lehetséges.

**1.3.3.** A duál egyenletrendszer áttekintése előtt szükség lesz néhány fogalom bevezetésére.

Az  $e_{kl}(x)$  alakváltozásmezőt [kompatibilisnek]{kinematikailag lehetségesnek} nevezzük, ha az (1.1) kinematikai egyenleteknek van egyértékű megoldásuk az  $u_i$  elmozdulásmezőre {és a megoldás eleget tesz az (1.4) elmozdulási peremfeltételnek}.

Tekintettel az (1.1) kinematikai egyenletekre azt mondjuk, hogy [kompatibilis]{kinematikailag lehetséges} a  $V$ -n értelmezett elegendően sima  $u_i(x)$  vektormező [ha további feltételeknek nem tesz eleget] {ha teljesíti az (1.4) elmozdulási peremfeltételt}.

A  $t^{kl}(x)$  feszültségmezőt [egyensúlyinak]{statikailag lehetségesnek} nevezzük, ha kielégíti az (1.3) egyensúlyi egyenletet {és az (1.5) feszültségi peremfeltételt}.

Az  $\alpha_{ab}$  a  $V$ -n értelmezett, elegendően sima, szimmetrikus, egyébként tekintetben pedig tetszőleges tenzormező.  $_{AB}$ -vel jelöljük az  $_{ab}$  indexek azon részhalmazát, amelyre nézve a

$$(1.9) \quad \frac{1}{2}(v_{A;B} + v_{B;A}) = \alpha_{AB}(x) \quad x \in V$$

differenciálegyenletnek mindig van megoldása a  $v_l$  vektormezőre. Nyilvánvaló, hogy az  $AB$  indexpárnak csak három különböző értéke lehet. Jelölje  $RS$  a kiegészítő halmazt, vagyis azon indexpárokat amelyek együtt az  $AB$  indexpárokkal kiadják az összes lehetséges értékét az  $ab$  indexpároknak. Nyilvánvaló, hogy az  $RS$  indexpároknak három különböző értéke lehet, ha a szimmetriára is tekintettel vagyunk.

Az  $\mathcal{E}^{ab}$  szimmetrikus inkompatibilitási tenzort az

$$(1.10) \quad \mathcal{E}^{ab}(x) = \epsilon^{akm} \epsilon^{blp} e_{kl;mp} \quad x \in V$$

egyenlet értelmezi ( $\epsilon^{akm}$  a permutációs tenzor felső indexes alakja). Az

$$(1.11) \quad \mathcal{E}^{ab}(x) = 0 \quad x \in V$$

egyenlet az ún. hat SAINT VENANT féle kompatibilitási feltétel, lásd pl.: [33].

**1.3.4.** Legyen  $\mathcal{H}_{yd}$  feszültségfüggvény tenzor. A *duál egyenletrendszer* mezőegyenleteit a

$$(1.12) \quad t^{pl}(x) = \epsilon^{pyk} \epsilon^{ldr} \mathcal{H}_{yd;kr} + g^{pq} B^l_{;q} + g^{lq} B^p_{;q} - g^{pl} B^k_{;k} \quad x \in V$$

duál értelmező egyenlet, a

$$(1.13) \quad e_{mn}(x) = \overset{-1}{C}_{mnp} t^{pl} \quad x \in V$$

duál konstitutív egyenlet (a HOOKE törvény megfordítása,  $\overset{-1}{C}_{mnp}$  a  $C^{klpq}$  inverze), valamint az

$$(1.14) \quad \mathcal{E}^{RS}(x) = \epsilon^{Rkm} \epsilon^{Slp} e_{kl;mp} = 0 \quad x \in V$$

duál mérlegegyenlet (három független kompatibilitási egyenlet) alkotják. A fenti egyenletrendszerben a szimmetrikus  $\mathcal{H}_{yd}$ ,  $t^{pl}$  és  $e_{kl}$  tenzorok alkotják az alapváltozót, illetve az elsődleges és másodlagos közbülső változót. A forrásváltozó azonosan zérus.

Az (1.12), (1.13) és (1.14) mezőegyenletekhez az

$$(1.15a) \quad e_{\lambda\kappa} - \hat{u}_{(\lambda;\kappa)} = 0, \quad \xi \in S_u$$

$$(1.15b) \quad (e_{3\kappa} - \hat{u}_{3|\kappa})_{||\lambda} + b_\lambda^\alpha (e_{\alpha\kappa} - \hat{u}_{\alpha|\kappa}) - (e_{\kappa\lambda;3} - e_{\lambda 3;\kappa}) = 0 \quad \xi \in S_u$$

alakváltozási ( $b_\lambda^\alpha$  az  $S$  felület görbületi tenzora), az

$$(1.16) \quad n_3 \mathcal{E}^{3b} = \epsilon^{3\eta\kappa} \epsilon^{bdp} e_{\eta d;\kappa p} = 0 \quad \xi \in S_t$$

kompatibilitási, valamint a feszültségekre vonatkozó

$$(1.17) \quad n_3 \epsilon^{3\eta\kappa} \epsilon^{ldr} \mathcal{H}_{\eta d;\kappa r} + a^{3q} B^l_{;q} + a^{lq} B^3_{;q} - a^{3l} B^k_{;k} = \hat{t}^l \quad \xi \in S_t$$

peremfeltételek csatlakoznak [ $a^{kl}$  a metrikus tenzor a  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  felületi KR-ben].

1. MEGJEGYZÉS: Az (1.17) peremfeltétel helyett mind síkbeli, mind pedig térbeli feladatok esetén közvetlenül a  $\mathcal{H}_{\eta d}$  feszültségfüggvényekre és a  $\mathcal{H}_{\eta d;3}$  normálirányú deriváltra is róható ki peremfeltétel [39], [26].

2. MEGJEGYZÉS: Az (1.12) duál kinematikai egyenlet az (1.3) primál egyensúlyi egyenlet teljes megoldása. A fenti teljes megoldást SCHAEFFER találta intuitív módon [47]. A feszültségfüggvény tenzor szerkezete nem lehet tetszőleges, fenn kell állnia a  $\mathcal{H}_{AB} = 0$  feltételnek [14]. Másként fogalmazva tetszőleges feszültségi állapot megadható a  $\mathcal{H}_{RS}$  feszültségfüggvényekkel, azaz három feszültségfüggvénnyel. Vegyük azt is észre, hogy az (1.12) duál kinematikai egyenletben az utolsó három tag a nem zérus térfogati terheléshez tartozó partikuláris megoldást adja. Több zárt felülettel határolt tartomány esetén zérus térfogati terhelés mellett is szerepelniük kell ezeknek a tagoknak a képletben, mivel a  $\mathcal{H}_{RS}$  feszültségfüggvényekből számított feszültségi állapot önegyensúlyi minden egyes zárt felületen. Ekkor az (1.6)-ban  $b^l = 0$  és a  $B^l$  harmonikus.

3. MEGJEGYZÉS: A GURTIN által talált

$$(1.18) \quad t^{pl} = \epsilon^{pyk} \epsilon^{ldr} \mathcal{H}_{yd;kr} + g^{pq} \Delta \Psi^l_{;q} + g^{lq} \Delta \Psi^p_{;q} - g^{pq} g^{ml} \Psi^k_{;kmq} \quad x \in V$$

megoldás ugyancsak teljes.

4. MEGJEGYZÉS: Az (1.14), (1.15a), (1.15b) és (1.16) egyenletek teljesülése estén kinematikailag lehetséges az  $e_{kl}(x)$  alakváltozásmező. Az alakváltozási peremfeltételek felállítására, jelentőségük felismerése és az állítás nem elemi igazolása KOZÁK nevéhez fűződik, lásd [27], [26] és [28], az igazolást illetően pedig [75].

5. MEGJEGYZÉS: Az (1.15a), (1.15b) alakváltozási peremfeltételek fennállása biztosítja az

$$(1.19) \quad e_{\kappa\lambda||\vartheta} + e_{\lambda\kappa||\vartheta} - (\hat{u}_{\lambda|\kappa})_{||\vartheta} - \hat{u}_{3|\lambda} b_{\vartheta\kappa} = 0. \quad \xi \in S_u$$

egyenlet teljesülését [75].

6. MEGJEGYZÉS: Tekintsük az  $u_l$  elmozdulásmezőt  $S$ -n, az  $e_{kl}$  alakváltozásmezőt pedig  $V$ -n és  $S$ -n. Ha fennáll az (1.15a), (1.15b) alakváltozási peremfeltétel az  $u_l \in S$  elmozdulásmező és az  $e_{kl}$  alakváltozásmező között, és ha az  $e_{kl}$  alakváltozásmező eleget tesz az (1.14) kompatibilitási differenciálegyenletnek, akkor nyilvánvaló a 4. MEGJEGYZÉS alapján, hogy létezik olyan egyértékű  $u_l$  elmozdulásmező a  $V$ -n, amely megegyezik  $S$ -n az ott tekintett  $u_l$  elmozdulásmezővel. Az 5. MEGJEGYZÉS alapján pedig azonnal következik, hogy fennáll az (1.19) azonosság is  $S$ -n.

7. MEGJEGYZÉS: Ha fennáll az (1.15a), (1.15b) alakváltozási peremfeltétel a teljes  $S$  felületen, vagy annak egy részén, akkor ugyanitt identikusan fennáll az (1.16) kompatibilitási peremfeltétel.

**1.3.5. A virtuális munka elv általános primál alakja a**

$$(1.20) \quad \int_V t^{kl} e_{kl} dV - \int_V b^l u_l dV - \int_S n_3 t^{3l} u_l dA = 0$$

módon írható fel. A fenti egyenlethez a következő direkt állítás tartozik: Ha  $e_{kl}(x)$ -et az (1.1) kinematikai egyenletről számítjuk, ahol  $u_k(x)$  kompatibilis elmozdulásmező és az (1.20) egyenlet tetszőleges, kompatibilis  $u_k(x)$  elmozdulásmezőre fennáll, akkor a  $t^{kl}(x)$  feszültségmező egyensúlyi.

Az (1.1) kinematikai egyenletek mint mellékfeltételek helyettesítése és parciális integrálás után, azaz kihasználva, hogy

$$\int_V t^{kl} u_{(l;k)} dV = \int_S n_3 t^{3l} u_l dA - \int_V t^{kl}_{\dots;k} u_l dV$$

azonnal következik az állítás a rendezés után adódó

$$\int_V (t^{kl}_{\dots;k} + b^l) u_l dV = 0$$

egyenletről, hiszen  $u_l$  tetszőleges  $V$ -n.

Az utóbbi állítás fényében az alábbi kérdések merülnek fel:

1. Következik-e a virtuális munka elv általános primál alakjából a primál egyensúlyi egyenletek SCHAEFER [47] által talált (1.12) alatti teljes megoldása – azaz az egyensúly fennállása – három feszültségfüggvénnyel. STIPPES az (1.11) alatti hat SAINT VENANT féle kompatibilitási egyenletet alkalmazta mellékfeltételként – ezek nem függetlenek egymástól – a térfogaton [55], ezért eredménye hat feszültségfüggvényt tartalmazott három helyett. Már korábban is utaltunk rá, hogy ez az ellentmondás a SOUTHWELL paradoxon duális párja.
2. Felmerül második kérdésként tehát a mellékfeltételek problémája mind a  $V$  térfogati tartományon, mind pedig annak  $S$  peremén. Ezt a kérdésseltevést az is indokolja, hogy az Irodalmi előzmények című szakaszban idézett munkák – pl. [55], [80] – nem szenteltek kellő figyelmet a felületi integráloknak és a felületi integrálok alkalmas átalakításával adódó eredményeknek.
3. Következik-e a virtuális munka elv általános primál alakjából a primál egyensúlyi egyenletek GURTIN [17] által talált (1.18) alatti teljes megoldása.

#### 1.4. Mellékfeltételek és a virtuális munka elv átalakítása.

**1.4.1.** Alábbiak a [72] és [74] előadások, valamint a [75] tanulmány alapján tekintik át a mellékfeltételek és a virtuális munka elv átalakításának kérdését. Az átalakítások célja az 1., 2. és 3. alatt felvetett problémák megoldása.

A részleteket illetően – különösen a felületi integrálok alkalmas átalakítása igényel sok munkát és figyelmet – az idézett [75] cikkekre, valamint a jelen értekezés függelékére utalunk. A későbbiek során, ahol szükséges, pontosan megnevezzük a vonatkozó képletszámot illetve az értekezés függelékének vonatkozó szakaszát.



Az (1.6) és (1.8) előállítások felhasználásával a virtuális munka elvben szereplő

$$(1.21) \quad I_V^B = - \int_V b^l u_l dV$$

integrál az

$$(1.22) \quad I_{V1}^B = \int_V \Delta B^l u_l dV \quad \text{illetve az} \quad I_{V2}^B = \int_V \Delta \Delta \Psi^l u_l dV$$

alakba írható át. A fenti két integrál további transzformációjának az a célja, hogy a térfogati integrál integrandusza az alakváltozási tenzort tartalmazza az elmozdulásvektor helyett.

A Függelék (A.2.6) és (A.2.8) képleteinek felhasználásával az  $I_{V1}^B$  integrál tekintetében

$$(1.23) \quad I_{V1}^B = - \int_V (g^{pq} B^l_{:,q} + g^{lq} B^p_{:,q} - g^{pl} B^k_{:,k}) e_{lp} dV + \int_S n_3 (a^{3q} B^l_{:,q} + a^{lq} B^3_{:,q} - a^{3l} B^k_{:,k}) u_l dA$$

az eredmény.

Hasonló módon adódik az (A.2.9) és az (A.2.11) képletek felhasználásával, hogy

$$(1.24) \quad I_{V2}^B = - \int_V (g^{pq} \Delta \Psi^l_{:,q} + g^{lq} \Delta \Psi^p_{:,q} - g^{pq} g^{ml} \Psi^k_{:,kmq}) e_{lp} dV \\ + \int_S n_3 (a^{3q} \Delta \Psi^l_{:,q} + a^{lq} \Delta \Psi^3_{:,q} - a^{3q} a^{ml} \Psi^k_{:,kmq}) u_l dA.$$

Az (1.23) képlet helyettesítésével azt kapjuk a virtuális munka elv (1.20) alatti alakjából, hogy

$$(1.25) \quad I_{VMB} = \int_V [t^{pl} - (g^{pq} B^l_{:,q} + g^{lq} B^p_{:,q} - g^{pl} B^k_{:,k})] e_{lp} dV \\ - \int_S n_3 [t^{3l} - (a^{3q} B^l_{:,q} + a^{lq} B^3_{:,q} - a^{3l} B^k_{:,k})] u_l dA = 0.$$

Ugyanilyen módon kapjuk az (1.24) képlet helyettesítésével a virtuális munka elv (1.20) alatti alakjából az elv  $\Psi^l$ -t tartalmazó formáját:

$$(1.26) \quad I_{VM\Psi} = \int_V [t^{pl} - (g^{pq} \Delta \Psi^l_{:,q} + g^{lq} \Delta \Psi^p_{:,q} - g^{pq} g^{ml} \Psi^k_{:,kmq})] e_{lp} dV \\ - \int_S n_3 [t^{3l} - (a^{3q} \Delta \Psi^l_{:,q} + a^{lq} \Delta \Psi^3_{:,q} - a^{3q} a^{ml} \Psi^k_{:,kmq})] u_l dA = 0.$$

Továbbiakban a mellékfeltételek kérdését vizsgáljuk.

**1.4.2.** Az (1.25) és (1.26) egyenletek a virtuális munka elv általános *primál* alakjai, ha a térfogati terhelés a  $B^l(x)$  vagy a  $\Psi^l(x)$  potenciálfüggvény segítségével adott. Vegyük észre, hogy az (1.25) és az (1.26) egyenletek mindegyikében az összetartozó kompatibilis  $e_{lp}$  alakváltozásmező és az  $u_l$  elmozdulásmező rendre a test  $V$  térfogatán illetve az  $S$  határfelületen jelenik meg.

Visszaidézve most a 6. MEGJEGYZÉSben mondottakat következik, hogy a keresett mellékfeltételeket a  $V$ -n tekintett (1.14) kompatibilitási differenciálegyenlet, valamint az  $S$ -n tekintett (1.15a), (1.15b) alakváltozási peremfeltételek alkotják, és szerepe lehet az (1.19) azonosságnak is az átalakításokban.

**1.4.3.** Mivel a mellékfeltételek nem helyettesíthetők közvetlenül a virtuális munka elv (1.25), illetve (1.26) alatti alakjába, a LAGRANGE féle multiplikátor technika alkalmazására van szükség.

A

$$(1.27) \quad \begin{aligned} H_{lk} &= H_{kl}, & x \in V \\ \tilde{H}_{\eta\theta} &= \tilde{H}_{\theta\eta}, & \xi \in S \\ \tilde{H}_{\eta\theta;3} &= \tilde{H}_{\theta\eta;3}, & \xi \in S \\ \tilde{H}_{\eta 3} &= \tilde{H}_{3\eta} \equiv 0 & \xi \in S \end{aligned}$$

és

$$\tilde{H}_{33} \equiv 0 \quad \xi \in S$$

határozatlan LAGRANGE multiplikátorokkal

$$(1.28) \quad I_1^V = \int_V \epsilon^{Rkm} \epsilon^{Slp} e_{kl;mp} H_{RS} dV \equiv 0$$

és

$$(1.29) \quad I_1^S = \int_S n_3 \epsilon^{\kappa\eta\beta} \epsilon^{\lambda\vartheta\gamma} \{ (e_{\lambda\kappa} - u_{(\lambda|\kappa)}) \tilde{H}_{\eta\vartheta;3} \\ + [(e_{3\kappa} - u_{3|\kappa})_{||\lambda} + b_\lambda^\alpha (e_{\alpha\kappa} - u_{\alpha|\kappa}) - (e_{\kappa\lambda;3} - e_{\lambda 3;\kappa}) - b_\beta^\beta (e_{\lambda\kappa} - u_{(\lambda|\kappa)})] \tilde{H}_{\eta\vartheta} \\ + [e_{\kappa\lambda||\vartheta} + e_{\lambda\kappa||\vartheta} - (u_{\lambda|\kappa})_{||\vartheta} - u_{3|\lambda} b_{\vartheta\kappa}] \tilde{H}_{\eta 3} - b_{\eta\vartheta} (e_{\lambda\kappa} - u_{(\lambda|\kappa)}) \tilde{H}_{33} \} dA \equiv 0.$$

a mellékfeltételek integrál alakja. Következésképp a fenti két integrál összege is zérus:

$$(1.30) \quad I_1^{VS} = I_1^V + I_1^S \equiv 0.$$

A mellékfeltételek fenti integrálisan alakja további magyarázatra szorul. A következő 8.-15. alatti MEGJEGYZÉSEKNEK ezért az a célja, hogy megvilágítsák a választás hátterét és segítséget nyújtsanak a végső átalakításokhoz.

8. MEGJEGYZÉS: Egyenlőre feltételezzük, hogy különböznek zérustól a  $\tilde{H}_{\eta 3} = \tilde{H}_{3\eta}$  és  $\tilde{H}_{33}$  LAGRANGE multiplikátorok. Megmutatjuk később – utalunk itt a 16. MEGJEGYZÉSRE –, hogy ezek értéke nem befolyásolja a peremfelület feszültségi állapotát és így valójában zérusnak választható az említett multiplikátorok értéke [75].

9. MEGJEGYZÉS: Vegyük észre, hogy formáját tekintve kovariáns derivált a  $\tilde{H}_{\eta\vartheta;3} = \tilde{H}_{\vartheta\eta;3}$  LAGRANGE féle multiplikátor. Kihasználva a Függelék (A.1.5), (A.1.7) és (A.1.8) alatti képleteit írhatjuk, hogy

$$\tilde{H}_{\eta\vartheta;3} = \tilde{H}_{\vartheta\eta;3} + b_\eta^\sigma \tilde{H}_{\sigma\vartheta} + b_\vartheta^\sigma \tilde{H}_{\eta\sigma}, \quad \xi \in S$$

ahol tetszőleges függvénynek tekintjük a  $\tilde{H}_{\vartheta\eta;3}$  mennyiséget. Másként fogalmazva úgy vesszük, hogy független a  $\tilde{H}_{\eta\vartheta;3}$  derivált a  $\tilde{H}_{\eta\vartheta}(\xi)$   $\xi \in S$  – től. (Ne feledkezzünk meg arról, hogy az  $S$  felületen vagyunk, ahol az  $S$  felület normálisa mentén vett derivált a  $\tilde{H}_{\eta\vartheta;3}$  függvény.)

10. MEGJEGYZÉS: Mivel az (1.14) kompatibilitási mezőegyenletek három független egyenletet adnak – ezeket az  $^{RS}$  indexpár azonosítja –, következik, hogy ugyancsak három a szükséges  $H_{kl}$  LAGRANGE multiplikátorok száma és ezeket ugyanazon de most az alsó indexben írt  $_{RS}$  indexpár azonosítja. Másként fogalmazva zérusnak vehetők a  $H_{AB}$  Lagrange multiplikátorok. (Valójában ezen az észrevételre alapul majd a SOUTHWELL paradoxon *duális párjának* feloldása!)

11. MEGJEGYZÉS: A  $\tilde{H}_{\eta\vartheta}$  multiplikátor bővíthető a

$$-b_\beta^\beta (e_{\lambda\kappa} - u_{(\lambda|\kappa)}) \quad \xi \in S$$

taggal. Ez a tag valójában zérus hiszen a teljes peremfelületen teljesül – összhangban a 6. MEGJEGYZÉSSEL és  $\hat{u}_{(\lambda|\kappa)}$ -t gondolva  $u_{(\lambda|\kappa)}$  helyére – az (1.15a) alakváltozási peremfeltétel. Vagyis a bővítés nem befolyásolja a végeredményt.

12. MEGJEGYZÉS: Az (1.19) identitást – itt is a 6. MEGJEGYZÉSSEL összhangban járunk el, azaz  $\hat{u}_k$ -t gondolunk  $u_k$  helyére – vesszük a  $\tilde{H}_{\eta 3}$  multiplikátor együtthatójának. Következésképp nem számít, hogy zérus, vagy nem zérus a  $\tilde{H}_{\eta 3}$ .

13. MEGJEGYZÉS: A  $\tilde{H}_{33}$  multiplikátornak is a 11. MEGJEGYZÉSben szereplő, de most kissé másképp súlyozott, alakváltozási peremfeltétel az együtthatója. Ez ismét azt jelenti, hogy érdektelen az a körülmény, hogy zérus-e, avagy nem a  $\tilde{H}_{33}$ .

14. MEGJEGYZÉS: Érdemes arra is felhívni a figyelmet, hogy az alakváltozásmező  $e_{\kappa\lambda;3}$  normálirányú deriváltja is szerepel a mellékfeltételekben.

15. MEGJEGYZÉS: A következő interpretáció tartozik a 12. és 13. MEGJEGYZÉSÉK fényében az 1. MEGJEGYZÉSHEZ: Érdektelen az  $I_1^{VS}$  integrál átalakítása során az a körülmény, hogy zérus vagy nem zérus értékűek a  $\tilde{H}_{\eta 3}$  és a  $\tilde{H}_{33}$  multiplikátorok. Azonban igazolni fogjuk a későbbiek során, hogy mindig zérusnak vehető ez a két multiplikátor.

**1.4.4.** Kibővítvé a virtuális munka elv (1.25) és (1.26) alatti alakjait az (1.28) és (1.29) mellékfeltételekkel a virtuális munka elv

$$(1.31a) \quad \int_V [t^{pl} - (g^{pq}B^l_{.;q} + g^{lq}B^p_{.;q} - g^{pl}B^k_{.;k})] e_{lp} dV \\ - \int_S n_3 [t^{3l} - (a^{3q}B^l_{.;q} + a^{lq}B^3_{.;q} - a^{3l}B^k_{.;k})] u_l dA - I_1^{VS} = 0,$$

és

$$(1.31b) \quad \int_V [t^{pl} - (g^{pq}\Delta\Psi^l_{.;q} + g^{lq}\Delta\Psi^p_{.;q} - g^{pq}g^{ml}\Psi^k_{.;kmq})] e_{pl} dV \\ - \int_S n_3 [t^{3l} - (a^{3q}\Delta\Psi^l_{.;q} + a^{lq}\Delta\Psi^3_{.;q} - a^{3q}a^{ml}\Psi^k_{.;kmq})] u_l dA - I_1^{VS} = 0$$

alakjait kapjuk. A kívánt végeredmény elérése érdekében alakítsuk át parciális integrálások végrehajtásával az  $I_1^{VS}$  integrált. Az ennek részeként megjelenő  $I_1^V$  transzformációja során alkalmas indexátnevezésekkel  $H_{kl}$ -t írunk  $H_{RS}$  helyére de nem feledkezünk meg arról sem, hogy a  $H_{AB}$  valójában zérus értékű.

Az  $e_{kl}$  alakváltozási tenzort és az  $u_l$  elmozdulásvektort tartalmazó tagok összegyűjtésével és az

$$n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} u_{3|\kappa} b_{\vartheta\lambda} \tilde{H}_{\eta 3} = 0 \quad \xi \in S$$

egyenlőség kihasználásával írhatjuk, hogy

$$(1.32) \quad I_1^{VS} = I_1^S + I_1^V = I_{1U}^S + I_{1E}^S + I_{1E}^V,$$

amelyben

$$(1.33) \quad I_{1U}^S = - \int_S n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} u_{(\lambda|\kappa)} \tilde{H}_{\eta\vartheta;3} dA \\ + \int_S n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} [-u_{\lambda|\kappa|\vartheta} \tilde{H}_{\eta 3} - u_{(\lambda|\kappa)} b_{\eta\vartheta} \tilde{H}_{33} + (b_\beta^\beta u_{(\lambda|\kappa)} - b_\lambda^\alpha u_{\alpha|\kappa}) \tilde{H}_{\eta\vartheta}] dA \\ + \int_S n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} [-u_{3|\kappa|\lambda} \tilde{H}_{\eta\vartheta} - u_{3\lambda} b_{\vartheta\kappa} \tilde{H}_{3\eta} - u_{3|\kappa} b_{\vartheta\lambda} \tilde{H}_{\eta 3}] dA,$$

$$(1.34a) \quad I_{1E}^S = \int_S n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} \{ e_{\lambda\kappa} \tilde{H}_{\eta\vartheta;3} + (e_{\kappa\lambda|\vartheta} + e_{\lambda\kappa|\vartheta}) \tilde{H}_{\eta 3} \\ + (e_{3\kappa|\lambda} + b_\lambda^\alpha e_{\alpha\kappa} - e_{\kappa\lambda;3} + e_{\lambda 3|\kappa} - b_\beta^\beta e_{\lambda\kappa}) \tilde{H}_{\eta\vartheta} + b_{\eta\vartheta} e_{\lambda\kappa} \tilde{H}_{33} \} dA$$

és

$$(1.34b) \quad I_{1E}^V = \int_V \epsilon^{krm} \epsilon^{lsp} e_{rs;mp} H_{lk} dV.$$

Az (1.33) integrál átalakítása a Green tétel alkalmas átrendezéssel társuló ismételt alkalmazását igényli. A részleteket illetően a Függelék **A.2.4.** szakaszára utalunk. A végeredményt véve írható az (A.2.21) képlet alapján, hogy

$$(1.35) \quad I_{1U}^S = - \int_S n_3 \epsilon^{3\eta\kappa} \epsilon^{ldp} \tilde{H}_{\eta d;p\kappa} u_l dA.$$

16. MEGJEGYZÉS: Legyen  $\tilde{w}_l(\xi)$  és  $\tilde{w}_{l;3}(\xi)$  két elegendően sima vektormező az  $S$  felületen. Felidézve a vektormező kovariáns deriváltjának értelmezését úgy tekintjük a  $\tilde{w}_{l;3}(\xi)$  vektormezőt, mintha az az  $x \notin S$  pontokban ismeretlennek vett  $\tilde{w}_l(x)$  vektormező normális mentén vett kovariáns deriváltja lenne. A

$$(1.36) \quad \tilde{H}_{kl}(\xi) - \tilde{w}_{(k;l)}(\xi) \quad \text{különbséget gondolva} \quad \tilde{H}_{kl}(\xi) \quad \xi \in S$$

helyére nem változtatjuk meg az (1.35) kifejezés értékét, mivel

$$\begin{aligned} \epsilon^{3\kappa\eta} \epsilon^{ldp} \tilde{w}_{(\eta;d);p\kappa} &= \frac{1}{2} (\epsilon^{3\kappa\eta} \epsilon^{ldp} \tilde{w}_{\eta;d})_{;p\kappa} + \frac{1}{2} (\epsilon^{3\kappa\eta} \epsilon^{ldp} \tilde{w}_{d;\eta\kappa})_{;p} \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon^{3\kappa\eta} \epsilon^{3\delta\pi} \tilde{w}_{\eta;\delta\pi})_{;\kappa} + \frac{1}{2} \epsilon^{3\kappa\eta} (\epsilon^{\lambda 3\pi} \tilde{w}_{\eta;3\pi} + \epsilon^{\lambda\pi 3} \tilde{w}_{\eta;\pi 3})_{;\kappa} \equiv 0. \quad \xi \in S \end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy a zárójelben álló kifejezés nem igényli a  $w_{k;l\kappa}$ -nál magasabbrendű kovariáns deriváltak meghatározását, ha figyelembe vesszük a kovariáns deriváltak sorrendjének felcserélhetőségét. Ugyanakkor a  $\tilde{w}_{k;l}(\xi)$  függvény mindig megválasztható oly módon, hogy fennálljon a

$$\tilde{H}_{k3} - \tilde{w}_{(3;k)} = 0 \quad \xi \in S$$

összefüggés. Ez a megállapítás egyben a  $\tilde{H}_{\eta 3} = \tilde{H}_{3\eta} = \tilde{H}_{33} = 0$  feltevés helyességének igazolása is.

**1.4.5.** Tekintettel a fenti 16. MEGJEGYZÉSben mondottakra valóban feltételezhetjük, hogy a  $\tilde{H}_{kl}$  szerkezetét tekintve eleget tesz az (1.27) alatti előfeltételeinknek. Ez a választás nem befolyásolja az  $I_{1E}^S$  integrál értékét sem, hiszen a (1.36) baloldalán álló különbség egyszerűen átnevezhető  $\tilde{H}_{kl}$ -nek.

Az (1.34a,b) integrálok átalakítása hasonló az (1.33) integrál átalakításához. Részleteket illetően a Függelék **A.2.5.** és **A.2.6.** szakaszaira utalunk. Ami az átalakítások eredményét illeti az (A.2.27), (A.2.29a) és (A.2.31) felhasználásával kapjuk, hogy

$$(1.37) \quad I_{1E}^S = \int_S n_3 \epsilon^{\kappa\rho 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} (-\tilde{H}_{\lambda\kappa} e_{\rho\vartheta;3} + \tilde{H}_{\lambda\kappa;3} e_{\rho\vartheta}) dA$$

és

$$(1.38) \quad I_{1E}^V = \int_V \epsilon^{pyk} \epsilon^{ldr} H_{yd;kr} e_{rs} dV + \int_S n_3 \epsilon^{\kappa\rho 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} (H_{\lambda\kappa} e_{\rho\vartheta;3} - H_{\lambda\kappa;3} e_{\rho\vartheta}) dA.$$

Az (1.35), (1.37), (1.38) és (1.32) képletek felhasználásával elvégezhető az (1.31a) egyenletben kijelölt kivonás:

$$(1.39) \quad \begin{aligned} &\int_V [t^{pl} - (\epsilon^{pyk} \epsilon^{ldr} H_{yd;kr} + g^{pq} B_{:,q}^l + g^{lq} B_{:,q}^p - g^{pl} B_{:,k}^k)] e_{lp} dV \\ &\quad - \int_S n_3 [t^{3l} - (\epsilon^{3\eta\kappa} \epsilon^{ldp} \tilde{H}_{\eta d;p\kappa} + a^{3q} B_{:,q}^l + a^{lq} B_{:,q}^3 - a^{3l} B_{:,k}^k)] u_l dA \\ &\quad + \int_S n_3 \epsilon^{\kappa\rho 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} [-(H_{\lambda\kappa} - \tilde{H}_{\lambda\kappa}) e_{\rho\vartheta;3} + (H_{\lambda\kappa;3} - \tilde{H}_{\lambda\kappa;3}) e_{\rho\vartheta}] dA = 0. \end{aligned}$$

Mivel (1.39)-ben mind

$$\begin{aligned} e_{kl}(x), & \quad x \in V \\ e_{\rho\vartheta}(\xi), e_{\rho\vartheta;3}(\xi) & \quad \xi \in S \end{aligned}$$

mind pedig

$$u_l(\xi) \quad \xi \in S$$

tetszőleges, a baloldal eltűnéséből a

$$(1.40) \quad t^{pl} = \epsilon^{pyk} \epsilon^{ldr} H_{yd;kr} + g^{pq} B_{:,q}^l + g^{lq} B_{:,q}^p - g^{pl} B_{:,k}^k \quad x \in V$$

mezőegyenlet és a

$$(1.41) \quad \tilde{H}_{\lambda\kappa} - H_{\lambda\kappa} = 0, \quad \tilde{H}_{\lambda\kappa;3} - H_{\lambda\kappa;3} = 0, \quad \xi \in S$$

valamint a

$$(1.42a) \quad \begin{aligned} t^{3\rho} &= \epsilon^{3\lambda\vartheta} \epsilon^{\rho dp} \tilde{H}_{\lambda d;p\vartheta} + a^{3q} B_{:,q}^\rho + a^{\rho q} B_{:,q}^3 - a^{3\rho} B_{:,k}^k, \\ &= \epsilon^{3\lambda\vartheta} (\epsilon^{\rho 3\kappa} \tilde{H}_{\lambda 3;\kappa} - \epsilon^{\rho 3\kappa} \tilde{H}_{\lambda\kappa;3})_{;\vartheta} + a^{3q} B_{:,q}^\rho + a^{\rho q} B_{:,q}^3 - a^{3\rho} B_{:,k}^k, \quad \xi \in S \end{aligned}$$

$$(1.42b) \quad t^{33} = \epsilon^{3\lambda\vartheta} \epsilon^{3\kappa\rho} \tilde{H}_{\lambda\kappa;\rho\vartheta} + a^{3q} B_{:,q}^3 + a^{3q} B_{:,q}^3 - a^{33} B_{:,k}^k \quad \xi \in S$$

peremfeltételek fennállása következik, ahol tekintettel a (1.27)<sub>3,4</sub>, (A.1.5), (A.1.7) és (A.1.8) összefüggésekre

$$(1.42c) \quad \tilde{H}_{\lambda 3; \kappa} = \tilde{H}_{\lambda 3 | \kappa} = \tilde{H}_{\lambda 3, \kappa} - \Gamma_{\lambda \kappa}^r \tilde{H}_{r 3} - \Gamma_{3 \kappa}^r \tilde{H}_{\lambda r} = b_{\kappa}^{\rho} \tilde{H}_{\lambda \rho}, \quad \xi \in S$$

$$(1.42d) \quad \tilde{H}_{\lambda \kappa; \rho} = \tilde{H}_{\lambda \kappa | \rho} = \tilde{H}_{\lambda \kappa \| \rho} - b_{\lambda \rho} \tilde{H}_{3 \kappa} - b_{\kappa \rho} \tilde{H}_{\lambda 3} = \tilde{H}_{\lambda \kappa \| \rho} \quad \xi \in S$$

17. MEGJEGYZÉS: Tekintettel a 9. MEGJEGYZÉSben álló képletre, valamint a (1.42c,b) egyenletekre könnyen megmutatható az (A.1.9), (A.1.10) és (A.1.11) összefüggések felhasználásával, hogy a  $\vartheta$  szerint vett kovariáns deriváltak – lásd az (1.42a) és (1.42b) képleteket – ugyancsak megadhatók a  $\tilde{H}_{\lambda \kappa}$  és  $\tilde{H}_{\lambda \kappa, 3}$  segítségével.

**1.4.6.** Ha most behelyettesítjük az (1.41)<sub>1,2</sub> összefüggéseket az (1.42a,b) összefüggésekbe, és egybevetjük az eredményt az (1.40) formulával, akkor azt találjuk, hogy ugyanúgy kell számítani a  $t^{pl}$  feszültségeket mind a  $V$ -n, mind pedig az  $S$ -en, azaz az (1.40) képlet segítségével. Ugyanakkor hangsúlyozni kell, hogy az (1.41)<sub>1,2</sub> és (1.42a,b) összefüggések szerint nem kívánja meg a feszültségek számítása az  $S$  felületen a  $H_{k3}(\xi)$  és  $H_{k3;3}(\xi)$  ismeretét. Könnyen ellenőrizhető az egyensúlyi egyenletekbe történő helyettesítéssel és az (1.6) összefüggés felhasználásával, hogy egyensúlyi a feszültségek  $H_{kl}$  Lagrange multiplikátorok és  $B^l$  segítségével történő (1.40) alatti előállítás.

18. MEGJEGYZÉS: Az (1.40) képlet által adott megoldás pontosan a SCHAEFER féle megoldás – v.ö.: (1.12) vagy [47]. Ez ok miatt a  $H_{yd}$  multiplikátorokat feszültségfüggvényeknek nevezzük. Viszszaidézve, hogy ebben a megoldásban a 6. MEGJEGYZÉS szerint  $H_{RS}$  nem azonosan zérus és  $H_{AB} \equiv 0$  továbbá, hogy  $H_{kl}$  szimmetrikus, adódik a következtetés, hogy három feszültségfüggvény elegendő, és ezek indexeit ugyanúgy kell megválasztani, mint a független kompatibilitási egyenletek indexeit – hiszen csak ezek szerepeltek a mellékfeltételekben. Az (1.40), (1.41), (1.42a) és (1.42b) egybevetéséből pedig az adódik, hogy a feszültségeket ugyanúgy kell számítani mind  $V$ -n, mind pedig  $S$ -en. Vagyis a  $\tilde{H}_{kl}$  multiplikátorok is feszültségfüggvények.

**1.4.7.** A virtuális munka elv (1.31a) alakjából az (1.39)-re vezető gondolatmenet megismétlésével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \int_V [t^{pl} - (\epsilon^{pyk} \epsilon^{ldr} H_{yd;kr} + g^{pq} \Delta \Psi^l_{;q} + g^{lq} \Delta \Psi^p_{;q} - g^{pq} g^{ml} \Psi^k_{;kmq})] e_{lp} dV \\ & - \int_S n_3 [t^{3l} - (\epsilon^{3\eta\kappa} \epsilon^{ldp} \tilde{H}_{\eta d;p\kappa} + a^{3q} \Delta \Psi^l_{;q} + a^{lq} \Delta \Psi^3_{;q} - a^{3q} a^{ml} \Psi^k_{;kmq})] u_l dA \\ & + \int_S n_3 \epsilon^{\kappa\rho 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} [-(H_{\lambda\kappa} - \tilde{H}_{\lambda\kappa}) e_{\rho\vartheta;3} + (H_{\lambda\kappa;3} - \tilde{H}_{\lambda\kappa;3}) e_{\rho\vartheta}] dA = 0, \end{aligned}$$

ahonnan következik, hogy az egyensúlyi feszültségmező mind a  $V$ -n mind pedig az  $S$ -n a

$$(1.43) \quad t^{pl} = \epsilon^{pyk} \epsilon^{ldr} H_{yd;kr} + g^{pq} \Delta \Psi^l_{;q} + g^{lq} \Delta \Psi^p_{;q} - g^{pq} g^{ml} \Psi^k_{;kmq} \quad x \in V$$

képletből számítható. Az (1.43) alatti megoldás a GURTIN által talált teljes megoldás [16].

19. MEGJEGYZÉS: A  $H_{AB} \equiv 0$  feltétel mindig teljesíthető a  $v_l(x)$   $x \in V$  vektormező alkalmas megválasztásával, lényegében véve a

$$\frac{1}{2}(v_{A;B} + v_{B;A}) = H_{AB} \quad x \in V$$

differenciálegyenletek megoldásával, mivel a

$$\check{H}_{kl} = H_{kl} - \frac{1}{2}(v_{k;l} + v_{l;k}) \quad x \in V$$

feszültségfüggvény tenzor teljesíti a  $\check{H}_{AB} \equiv 0$  feltételt. Figyeljük meg, hogy a  $v_{(k;l)}$  feszültségfüggvényekhez nem tartozik feszültség. Ez az eredmény FINZI [14] eredménye.

**1.5. Eredmények.** A szerző eredményeit – ehelyütt is, és a további fejezetek végén is – pontokba szedve ismerteti az értekezés:

1. A jelen fejezet legfontosabb eredménye annak igazolása, hogy szilárd testek esetén az egyensúlyi egyenletek általános és teljes megoldása – azaz a több zárt felülettel határolt testre érvényes SCHAEFER féle és GURTIN féle megoldás – levezethető a virtuális munka

elv általános primál alakjából, feltéve, hogy az alakváltozásmezők kinematikailag lehetséges voltával kapcsolatos feltételek, közöttük a  $V$  tartományra vonatkozó *független* feltételek, mint mellékfeltételek, ismeretesek. A gondolatmenet anyagegyenlettől függetlenül, geometriailag lineáris feladatokra érvényes.

2. Mivel a mellékfeltételek három független mezőegyenletet tartalmaznak következik, hogy tetszőleges feszültségi állapot megadható három feszültségfüggvény segítségével. Ezzel megoldást nyert a SOUTHWELL paradoxon duális párja. A gondolatmenet egyik eredménye FINZI intuitív módon elért eredményének, miszerint a  $H_{kl}$  feszültségfüggvény tenzor szabály szerint kiválasztott három eleme – ezek indexeit  $AB$  jelöli – zérusnak választható, független igazolása. Ugyancsak a gondolatmenet eredménye KOZÁK egyik eredményének, miszerint a nem zérus elemek indexei pedig ugyanazok kell, hogy legyenek mint a független kompatibilitási egyenletek  $RS$  indexei, független igazolása.
3. Az  $S$  felületen vett integrálok hosszadalmas és nehéz átalakításainak megadásával formálisan is igazolást nyert az a természetes követelmény, hogy a feszültségeket ugyanúgy kell számítani mind a  $V$ -n mind pedig az  $S$ -n.
4. A gondolatmenet módszertani jelentőségű és más esetekben, így mikropoláris esetben is [62] alkalmazható – ebben a tekintetben a **3.1.–3.5.** szakaszokra is utalunk –, feltéve hogy a kompatibilitás szükséges és elégséges feltételeit ismerjük.

Az eredményekkel kapcsolatos publikációkat illetően [72], [74] és [75] érdemel említést. A felsorolt eredmények 100%-ban a szerző eredményei.

**2. AZ EGYENSÚLYI EGYENLET ÁLTALÁNOS ÉS TELJES MEGOLDÁSÁT ADÓ  
ELLENTMONDÁSMENTES VARIÁCIÓS ELVEK ÉS A STATIKAI–KINEMATIKAI  
ANALÓGIA A PEREMFELTÉTELEKRE – KLASSZIKUS ESET**

**2.1. Irodalmi előzmények.** ABOVSZKIJ, ANDREJEV és DERUGA könyve [1], amelyet már az előző fejezetben is idéztünk, olyan variációs elveket is bemutat, ahol az egyensúlyi egyenletek megoldása feszültségfüggvényekkel az EULER egyenlet. TONTI [80] és STIPPES [55] cikkeivel szemben van előrelépés a test  $S$  határfelületén végzett átalakítások tekintetében, de mindazok a tagok hiányoznak, amelyek szükségesek ahhoz, hogy a megoldás teljes legyen több zárt felülettel határolt tartományon. Ennek az az oka, hogy az egyensúlyi egyenletek partikuláris megoldását előre ismertnek tételezik fel, és így az EULER egyenlet az egyensúlyi egyenletek általános megoldásának és a partikuláris megoldásnak különbségét, azaz önegyensúlyi feszültségmezőt ad eredményül. További probléma a mellékfeltételek száma (hat kompatibilitási egyenlet a  $V$ -n) és a szükséges feszültségfüggvények száma közötti ellentmondás (három feszültségfüggvény elegendő lenne, de az idézett EULER egyenletek hatot tartalmaznak).

Közismert, hogy az (1.14) kompatibilitási egyenletek és az egyensúlyi egyenletek BELTRAMI féle megoldásának – ezt az (1.12) egyenlet jobboldalának első tagja adja – ugyanaz a matematikai szerkezete: az (előbbi)[utóbbi] megkapható az (utóbbiból)[előbbiből], ha abban a  $(\mathcal{H})$   $[\varepsilon]$  helyett  $(\varepsilon-t)$  $[\mathcal{H}-t]$  írunk. Ezt a hasonlóságot statikai–kinematikai analógiának szokás nevezni. Nyilvánvaló, hogy az alakváltozási peremfeltételek teljesülése egyben biztosítja a kompatibilitást az  $S_u$ -n. Felidézve, hogy a kompatibilitás és az egyensúly duál fogalmak felmerül a kérdés: hogyan kell megválasztani a feszültségfüggvényeket az  $S_t$ -én [ $S_u$  duális párján] ha azt akarjuk, hogy ne származzon belőlük feszültség. Más szavakkal: van-e mód a statikai–kinematikai analógia peremfeltételekre vonatkozó kiterjesztésére?

**2.2. Célkitűzések.** Az előző szakaszban megfogalmazott problémák alapján a szerző célul tűzte ki az alábbi feladatok megoldását:

- A fentebb részletezett gondolatok (teljesség, a szükséges feszültségfüggvények száma, integrálátalakítások a peremen) jegyében a vonatkozó variációs elvek módosítása és kiegészítése.
- Ha lehetséges, a statikai–kinematikai analógia kiterjesztése a peremfeltételekre.

A megoldás gondolatmenete és főbb lépései a [72], [74] és [76] alapján kerülnek bemutatásra.

**2.3. Szabad variációs feladat.**

**2.3.1.** Felmerül a kérdés a virtuális munka elv általános primál alakjából következő (1.39) egyenlettel kapcsolatban, hogy vajon lehetséges-e olyan szabad variációs elvet létrehozni, ahol

- a vonatkozó funkcionál  $e_{kl}$  alakváltozásmezők szerint vett variációjának eltűnése biztosítja az (1.40) mezőegyenlet teljesülését a test  $V$  térfogati tartományán és az (1.41) peremfeltétel teljesülését az  $S_t$  jelű peremrészén,
- továbbá, hogy az  $u_k$  elmozdulásmező szerinti variációk eltűnése az (1.42a), (1.42b) peremfeltételek, végső soron tehát a feszültségi peremfeltételek fennállását biztosítja  $S_t$ -n.

A keresett funkcionál a teljes potenciális energia funkcionálból vezethető le a térfogati terhelés munkáját adó tag átalakításával – a főbb lépéseket tekintve úgy kell eljárni, mint a virtuális munka elv esetén az előző 1. Fejezetben, az átalakításoknak pedig az a célja, hogy a tartományi integrálban csak az alakváltozásmező szerepeljen – ezt követően pedig a LAGRANGE féle multiplikátortechnika segítségével figyelembe kell venni a mellékfeltételeket. A keresett funkcionál végleges alakját a multiplikátorok meghatározását követően azok értékének a funkcionálba történő visszahelyettesítésével kapjuk meg.

A funkcionál értelmezési tartományát

az

$$(2.1a) \quad e_{kl}(x) \quad x \in V$$

alakváltozásmező, az

$$(2.1b) \quad u_k(\xi) \quad \xi \in S_t$$

elmozdulásmező,  
valamint  
a

$$(2.1c) \quad \mathcal{H}_{kl}(x) \quad x \in V$$

és a

$$(2.1d) \quad \tilde{\mathcal{H}}_{\kappa\lambda}(\xi), \tilde{\mathcal{H}}_{\kappa\lambda;3}(\xi) \quad \xi \in S_t$$

feszültségfüggvények alkotják majd.

Az utóbbi esetben, ahogy ezt eddig is feltételeztük, a feszültségfüggvények eleget tesznek a

$$(2.2) \quad \mathcal{H}_{AB}(X) \equiv 0 \quad x \in V \quad \text{és} \quad \tilde{\mathcal{H}}_{k3}(\xi) \equiv 0 \quad \xi \in S_t.$$

feltételeknek.

1. MEGJEGYZÉS: Ezek a feltételek az 1. Fejezet eredményein alapulnak. Emlékeztetni kívánjuk az olvasót, hogy a három  $\mathcal{E}^{RS} = 0$  független kompatibilitási differenciálegyenlet megléte miatt csak a három  $H_{RS}$  LAGRANGE féle multiplikátorra, azaz három  $\mathcal{H}_{RS}$  feszültségfüggvényre van szükség az egyensúly  $V$ -n történő fenntartásához.

**2.3.2.** A lineáris rugalmasságtan egyenleteit a funkcionál értelmezési tartományát alkotó, azaz a fenti változókkal a

$$(2.3) \quad C^{plrs} e_{rs} = \epsilon^{pyk} \epsilon^{ldr} \mathcal{H}_{yd;kr} + g^{pq} B_{:,q}^l + g^{lq} B_{:,q}^p - g^{pl} B_{:,k}^k, \quad x \in V$$

$$(2.4) \quad \epsilon^{Rkm} \epsilon^{Slp} e_{kl;mp} = 0 \quad x \in V$$

mezőegyenletek és a

$$(2.5) \quad \tilde{\mathcal{H}}_{\kappa\lambda} - \mathcal{H}_{\kappa\lambda} = 0, \quad \tilde{\mathcal{H}}_{\kappa\lambda;3} - \mathcal{H}_{\kappa\lambda;3} = 0, \quad \xi \in S_t$$

$$(2.6a) \quad e_{\lambda\kappa} - u_{(\lambda;\kappa)} = 0, \quad \xi \in S_t$$

$$(2.6b) \quad (e_{3\kappa} - u_{3|\kappa})_{\|\lambda} + b_{\lambda}^{\alpha} (e_{\alpha\kappa} - u_{\alpha|\kappa}) - (e_{\kappa\lambda;3} - e_{\lambda 3;\kappa}) = 0, \quad \xi \in S_t$$

$$(2.7a) \quad e_{\lambda\kappa} - \hat{u}_{(\lambda;\kappa)} = 0, \quad \xi \in S_u$$

$$(2.7b) \quad (e_{3\kappa} - \hat{u}_{3|\kappa})_{\|\lambda} + b_{\lambda}^{\alpha} (e_{\alpha\kappa} - \hat{u}_{\alpha|\kappa}) - (e_{\kappa\lambda;3} - e_{\lambda 3;\kappa}) = 0, \quad \xi \in S_u$$

$$(2.8a) \quad \hat{t}^{\rho} = \epsilon^{3\lambda\vartheta} \epsilon^{\rho dp} \tilde{\mathcal{H}}_{\lambda d;p\vartheta} + a^{3q} B_{:,q}^{\rho} + a^{\rho q} B_{:,q}^3 - a^{3\rho} B_{:,k}^k, \quad \xi \in S_t$$

$$(2.8b) \quad \hat{t}^3 = \epsilon^{3\lambda\vartheta} \epsilon^{3\kappa\rho} \tilde{\mathcal{H}}_{\lambda\kappa;\rho\vartheta} + a^{3q} B_{:,q}^3 + a^{3q} B_{:,q}^3 - a^{33} B_{:,k}^k, \quad \xi \in S_t$$

peremfeltételek alkotják. A fenti egyenletekhez az

$$(2.9) \quad \hat{u}_l - u_l = 0 \quad \xi \in g$$

folytonossági feltétel társul.

Emlékeztetjük az olvasót, visszaidézve az 5. oldal 5. Megjegyzését, hogy a (2.6a,b) peremfeltételek fennállása  $S_t$ -n az

$$(2.10) \quad e_{\kappa\lambda\|\vartheta} + e_{\lambda\kappa\|\vartheta} - (u_{\lambda|\kappa})_{\|\vartheta} - u_{3|\lambda} b_{\vartheta\kappa} = 0 \quad \xi \in S_t$$

egyenlet automatikus teljesülését, a (2.7a,b) peremfeltételek fennállása pedig az

$$(2.11) \quad e_{\kappa\lambda\|\vartheta} + e_{\lambda\kappa\|\vartheta} - (\hat{u}_{\lambda|\kappa})_{\|\vartheta} - \hat{u}_{3|\lambda} b_{\vartheta\kappa} = 0 \quad \xi \in S_u$$

egyenlet automatikus teljesülését biztosítja.

Az alábbiak arra mutatnak rá, hogy a (2.3) és a (2.4) mezőegyenletek, a (2.5)-(2.8b) peremfeltételek, valamint a (2.9) folytonossági feltétel teljesülése biztosítja a rugalmasságtan valamennyi egyenletének fennállását.

Valóban a (2.4), (2.6a,b), (2.7a,b) és (2.9) egyenletek teljesülése biztosítja az alakváltozásmezők kinematikailag lehetséges voltát. A [75] 3.10. szakaszának első bekezdésében foglalt állítás alapján – tekintettel a (2.9) folytonossági feltételre is – adódik a következtetés, hogy a (2.6a)



és (2.6b) feltételek integrálása a tényleges  $u_k(\xi)$  elmozdulásmezőt eredményezi  $S_t$ -n. Ha emellett a (2.3) egyenlet is teljesül, akkor fennáll az egyensúly  $V$ -n, míg a (2.7a) és (2.7b) együttes teljesülése biztosítja a feszültségi peremfeltétel fennállását.

2. MEGJEGYZÉS: Ehelyütt és a továbbiakban, egyszerűsége miatt, csak a SCHAEFER féle megoldásra szorítkozunk. A lentebb bemutatott gondolatmenet azonban alkalmazható a GURTIN féle megoldásra.

**2.3.3.** Visszaidézve a **2.3.1.** szakasz második bekezdését a szabad variációs feladat funkcionálja az alábbi, csupán gondolatmenetében részletezett, lépésekkel kapható meg:

1. Az (1.23) képletet helyettesítjük a teljes potenciális energia funkcionál (2.29) alatti képletébe a térfogati terhelés munkájának helyére ( $u_l = \hat{u}_l$  az  $S_u$ -n):

$$(2.12) \quad \Pi(e_{kl}, u_l) = \int_V \left[ \frac{1}{2} e_{pl} C^{plrs} e_{rs} - (g^{pq} B^l_{:q} + g^{lq} B^p_{:q} - g^{pl} B^k_{:k}) e_{pl} \right] dV - \\ - \int_{S_t} [\hat{t}^l - n_3(a^{3q} B^l_{:q} + a^{lq} B^3_{:q} - a^{3l} B^k_{:k})] u_l dA + \int_{S_u} [n_3(a^{3q} B^l_{:q} + a^{lq} B^3_{:q} - a^{3l} B^k_{:k})] \hat{u}_l dA.$$

2. Mellékfeltételnek tekintjük a (2.4), (2.6a), (2.6b), (2.7a), (2.7b), (2.9), valamint a (2.10) és (2.11) egyenleteket.
3. Hozzáadjuk a potenciális energia funkcionálhoz a mellékfeltételek alkalmas LANGRANGE multiplikátorokkal szorzott és a vonatkozó tartományokon integrált alakjait.
4. Meghatározzuk a funkcionál stacionaritási feltételéből a multiplikátorokat.
5. Visszahelyettesítjük a multiplikátorokat a funkcionálba.

A fenti, hosszadalmas és nagy figyelmet igénylő átalakítások után (különösen a 3. lépés kíván ügyességet)

$$(2.13) \quad \Pi_2 = \Pi_2(e_{kl}, u_l, \mathcal{H}_{RS}, \tilde{\mathcal{H}}_{\kappa\lambda}, \tilde{\mathcal{H}}_{\kappa\lambda;3}) = \Pi_2^V + \Pi_2^{S_t} + \Pi_2^{S_u} + \Pi_2^G$$

a keresett funkcionál, ahol

(2.14a)

$$\Pi_2^V = \int_V \left[ \frac{1}{2} e_{pl} C^{plrs} e_{rs} - (g^{pq} B^l_{:q} + g^{lq} B^p_{:q} - g^{pl} B^k_{:k}) e_{pl} \right] dV + \int_V \epsilon^{krm} \epsilon^{lsp} e_{rs;mp} \mathcal{H}_{lk} dV,$$

$$(2.14b) \quad \Pi_2^{S_t} = - \int_{S_t} [\hat{t}^l - n_3(a^{3q} B^l_{:q} + a^{lq} B^3_{:q} - a^{3l} B^k_{:k})] u_l dA \\ - \int_{S_t} n_3 \epsilon^{\kappa\eta\beta} \epsilon^{\lambda\vartheta\beta} \{ (e_{\lambda\kappa} - u_{(\lambda|\kappa)}) \tilde{\mathcal{H}}_{\eta\vartheta;3} \\ + [(e_{3\kappa} - u_{3|\kappa})_{||\lambda} + b_\lambda^\alpha (e_{\alpha\kappa} - u_{\alpha|\kappa}) - (e_{\kappa\lambda;3} - e_{\lambda 3;\kappa}) - b_\beta^\beta (e_{\lambda\kappa} - u_{(\lambda|\kappa)})] \tilde{\mathcal{H}}_{\eta\vartheta} \\ + [e_{\kappa\lambda||\vartheta} + e_{\lambda\kappa||\vartheta} - (u_{\lambda|\kappa})_{||\vartheta} - u_{3|\lambda} b_{\vartheta\kappa}] \tilde{\mathcal{H}}_{\eta\beta} - b_{\eta\vartheta} (e_{\lambda\kappa} - u_{(\lambda|\kappa)}) \tilde{\mathcal{H}}_{33} \} dA,$$

$$(2.14c) \quad \Pi_2^{S_u} = \int_{S_u} n_3(a^{3q} B^l_{:q} + a^{lq} B^3_{:q} - a^{3l} B^k_{:k}) \hat{u}_l dA \\ - \int_{S_u} n_3 \epsilon^{\kappa\eta\beta} \epsilon^{\lambda\vartheta\beta} \{ (e_{\lambda\kappa} - \hat{u}_{(\lambda|\kappa)}) \tilde{\mathcal{H}}_{\eta\vartheta;3} \\ + [(e_{3\kappa} - \hat{u}_{3|\kappa})_{||\lambda} + b_\lambda^\alpha (e_{\alpha\kappa} - \hat{u}_{\alpha|\kappa}) - (e_{\kappa\lambda;3} - e_{\lambda 3;\kappa}) - b_\beta^\beta (e_{\lambda\kappa} - u_{(\lambda|\kappa)})] \tilde{\mathcal{H}}_{\eta\vartheta} \\ + [e_{\kappa\lambda||\vartheta} + e_{\lambda\kappa||\vartheta} - (\hat{u}_{\lambda|\kappa})_{||\vartheta} - \hat{u}_{3|\lambda} b_{\vartheta\kappa}] \tilde{\mathcal{H}}_{\eta\beta} - b_{\eta\vartheta} (e_{\lambda\kappa} - \hat{u}_{(\lambda|\kappa)}) \tilde{\mathcal{H}}_{33} \} dA,$$

és

(2.14d)

$$\Pi_2^G = - \oint_g n_3 \epsilon^{\kappa\eta\beta} \tau^\vartheta [(u_{\vartheta|\kappa} - \hat{u}_{\vartheta|\kappa}) \tilde{\mathcal{H}}_{\eta\beta} - (u_{3|\kappa} - \hat{u}_{3|\kappa}) \tilde{H}_{\eta\vartheta}] ds + \oint_g \tau^\eta \epsilon^{ldp} \tilde{\mathcal{H}}_{\eta d;p} (u_l - \hat{u}_l) ds.$$

Vegyük észre, hogy a fenti funkcionál az összes feszültséggfüggvényt tartalmazza, ideértve azokat is, amelyeket zérusnak tekintünk. Amikor azt a kérdést vizsgáljuk, hogy milyen egyenletek következnek a  $\delta\Pi_2 = 0$  variációs elvből (a stacionaritási feltételből), akkor ki fogjuk használni,

amint azt már korábban is tettük, hogy speciális szerkezetű a  $\mathcal{H}_{kl}(x)$  és  $\tilde{\mathcal{H}}_{kl}(\xi)$  (lásd az 1. Fejezet 8. és 10. Megjegyzéseit – 7. o. – valamint a jelen fejezet **2.3.1.** szakaszának (2.2) képletét).

**2.3.4.** A (2.13) alatti funkcionál

$$(2.15) \quad \delta\Pi_2 = \delta_e\Pi_2 + \delta_u\Pi_2 + \delta_{\mathcal{H}}\Pi_2 + \delta_{\tilde{\mathcal{H}}}\Pi_2 = 0$$

variációjának eltűnése, mint variációs elv, nemcsak a (2.3) és (2.4) mezőegyenletek, hanem a (2.5), (2.6a,b), (2.7a,b), (2.8a,b) peremfeltételek és a (2.9) folytonossági feltétel fennállását is biztosítja.

Alábbiakban röviden ismertetjük az igazolás gondolatmenetét. Az egyes változók szerint vett variációk függetlensége miatt a (2.15) variációs elv a

$$(2.16a) \quad \delta_e\Pi_2 = \delta_e\Pi_2^V + \delta_e\Pi_2^{S_t} + \delta_e\Pi_2^{S_u} = 0,$$

$$(2.16b) \quad \delta_u\Pi_2 = \delta_u\Pi_2^{S_t} + \delta_u\Pi_2^G = 0,$$

$$(2.16c) \quad \delta_{\mathcal{H}}\Pi_2 = \delta_{\mathcal{H}}\Pi_2^V + \delta_{\mathcal{H}}\Pi_2^{S_u} = 0$$

és

$$(2.16d) \quad \delta_{\tilde{\mathcal{H}}}\Pi_2 = \delta_{\tilde{\mathcal{H}}}\Pi_2^{S_t} + \delta_{\tilde{\mathcal{H}}}\Pi_2^G = 0$$

egyenletekkel ekvivalens.

**2.3.5.** A (2.16a) egyenlet az alábbi lépésekkel hozható alkalmas alakra:

- Az (1.38) egyenletben álló  $e_{rs}$ ,  $e_{\rho\theta;3}$  és  $e_{\rho\theta}$  mennyiségeket  $\delta e_{rs}$ ,  $\delta e_{\rho\theta;3}$  és  $\delta e_{\rho\theta}$  variációikkal helyettesítjük és a  $H$  helyére  $\mathcal{H}$ -t írunk. A kapott eredményt oly módon helyettesítjük a  $\delta_e\Pi_2^V$  kifejezés helyére, hogy az  $S$  felületen vett integrált az  $S_u$  és  $S_t$ -n vett integrálok összegének tekintjük,
- Az (1.34a) egyenletben álló  $S$ ,  $\tilde{H}_{\kappa\lambda}$  és  $\tilde{H}_{\kappa\lambda;3}$  helyére rendre  $S_t$ ,  $\delta\tilde{\mathcal{H}}_{\kappa\lambda}$  és  $\delta\tilde{\mathcal{H}}_{\kappa\lambda;3}$ -t írunk. Ezt követően ezekkel a betűcserékkel vesszük figyelembe, hogy az (1.34a) egyenletnek az (1.37) egyenlet a végső alakja. A kapott eredmény ellentettjét a  $\delta_e\Pi_2^{S_t}$  kifejezés helyére helyettesítjük.

Végezetül

- az (1.34a) egyenletben álló  $S$ ,  $\tilde{H}_{\kappa\lambda}$  és  $\tilde{H}_{\kappa\lambda;3}$  helyére rendre  $S_u$ ,  $\delta\mathcal{H}_{\kappa\lambda}$  és  $\delta\mathcal{H}_{\kappa\lambda;3}$ -t írunk. Ezt követően ezekkel a betűcserékkel vesszük figyelembe hogy az (1.34a) egyenletnek az (1.37) egyenlet a végső alakja. A kapott eredmény ellentettjét a  $\delta_e\Pi_2^{S_u}$  kifejezés helyére helyettesítjük.

Az ezt követő átrendezéssel a

$$(2.17) \quad \delta_e\Pi_2 = \int_V [C^{plrs}e_{rs} - (\epsilon^{pyk}\epsilon^{ldr}\mathcal{H}_{yd;kr} + g^{pq}B^l_{;q} + g^{lq}B^p_{;q} - g^{pl}B^k_{;k})] \delta e_{lp} dV \\ + \int_{S_t} n_3 \epsilon^{\kappa\rho 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} [-(\mathcal{H}_{\lambda\kappa} - \tilde{\mathcal{H}}_{\lambda\kappa})\delta e_{\rho\theta;3} + (\mathcal{H}_{\lambda\kappa;3} - \tilde{\mathcal{H}}_{\lambda\kappa;3})\delta e_{\rho\theta}] dA = 0$$

egyenletet kapjuk. A  $\delta e_{lp}$ ,  $\delta e_{\rho\theta;3}$  és  $\delta e_{\rho\theta}$  variációk tetszőlegessége miatt ebből az egyenletből a (2.3) mezőegyenlet és a (2.5) peremfeltételek fennállása következik.

**2.3.6.** Vegyük észre, hogy  $\delta_u\Pi_2^{S_t}$  az  $I_{1U}^S$  ellentettje, ha az utóbbiban  $S_u$ ,  $\delta u_\lambda$  és  $\delta u_3$  kerül az  $S$ ,  $u_\lambda$  és  $u_3$  helyére. Ha emellett kihasználjuk az (A.2.21) összefüggést – az ebben álló  $S_o$ ,  $g_o$  és  $u_3$  betűkombinációkat rendre  $S_u$ ,  $g$  és  $\delta u_3$ -al helyettesítve –, akkor a (2.14d) képletet is figyelembevéve az

$$(2.18) \quad \delta_u\Pi_2 = - \int_{S_t} [\hat{t}^l - n_3(\epsilon^{3\eta\kappa}\epsilon^{ldp}\tilde{H}_{\eta d;p\kappa} + a^{3q}B^l_{;q} + a^{lq}B^3_{;q} - a^{3l}B^k_{;k})] \delta u_l dA = 0$$

eredményt kapjuk a (2.16b) stacionaritási feltételből. Mivel a (2.18) egyenletben nincs előfeltétel előírva a  $\delta u_l$ -re az tetszőleges lehet. Következésképp a (2.18) egyenlet, vagy ami ugyanaz a (2.16b) stacionaritási feltétel fennállása, a (2.8a) és (2.8b) peremfeltételek teljesülését biztosítja.

**2.3.7.** Ami a (2.16c) egyenletet illeti érdemes visszaidézni, hogy az (1.19) egyenlet nem független az (1.15a) és (1.15b) alakváltozási peremfeltételektől. Ennek a körülménynek a figyelembevételével könnyen belátható, hogy a (2.16c) stacionaritási feltétel teljesülése egyenértékű a (2.4)

egyenlet  $-\mathcal{H}_{AB} \equiv 0$  a  $V$ -n, következésképp feltételezzük, hogy  $\delta\mathcal{H}_{AB} \equiv 0$  – és a (2.7a), valamint (2.7b) peremfeltételek teljesülésével, még akkor is, ha mind  $\delta\mathcal{H}_{\eta 3}$  mind pedig  $\delta\mathcal{H}_{33}$  különböző zérustól, egyébként tetszőleges az  $S_u$ -n.

**2.3.8.** A  $\delta_{\tilde{\mathcal{H}}}\Pi_2^{St}$  és  $\delta_{\tilde{\mathcal{H}}}\Pi_2^G$  variációk függetlenségét kihasználva a (2.16d) stacionaritási feltétel a

$$(2.19) \quad \delta_{\tilde{\mathcal{H}}}\Pi_2^{St} = 0 \quad \text{és} \quad \delta_{\tilde{\mathcal{H}}}\Pi_2^G = 0$$

stacionaritási feltételekkel helyettesíthető. Mivel  $\tilde{\mathcal{H}}_{\kappa 3} = 0$  és  $\tilde{\mathcal{H}}_{33} = 0$ , mindazok a tagok törölhetőek a (2.19)<sub>1</sub>-ben, – lásd a (2.14b) egyenletet – amelyek  $\tilde{\mathcal{H}}_{\kappa 3}$  és  $\tilde{\mathcal{H}}_{33}$ -t tartalmazzák. Ily módon, tekintettel a  $\delta\tilde{\mathcal{H}}_{\eta\vartheta}$  és  $\delta\tilde{\mathcal{H}}_{\eta\vartheta;3}$  variációk tetszőlegességére, a (2.6a) és (2.6b) peremfeltételek teljesülése ugyancsak következik a (2.19a)-ból.

**2.3.9.** Mielőtt megvizsgálánánk azt a kérdést, hogy milyen egyenletek következnek a (2.19b) stacionaritási feltételből két vektormező, ezeket  $\delta\tilde{r}^l(\xi)$  és  $\delta\tilde{w}_l(\xi)$  jelöli, értelmezzük az  $S_u$  és  $S_t$  peremfelületeket egymástól elválasztó  $g$  görbén az átalakítások egyszerűsítése érdekében. Legyen

$$(2.20) \quad \frac{d\delta\tilde{r}^l}{ds} = -\tau^\eta \epsilon^{ldp} \delta\tilde{H}_{\eta d;p}. \quad \xi \in g$$

Ennek az egyenletnek mindig van megoldása az ismeretlen vektormezőre:

$$\delta\tilde{r}^l \mathbf{a}_l = - \int_{s_o}^s \tau^\eta \epsilon^{ldp} \delta\tilde{H}_{\eta d;p} \mathbf{a}_l ds.$$

Az is nyilvánvaló, hogy

$$(2.21) \quad \frac{d\delta\tilde{r}^1}{ds} = -\tau^\eta \epsilon^{123} (\delta\tilde{H}_{\eta 3;2} + \delta\tilde{H}_{\eta 2;3}), \quad \frac{d\delta\tilde{r}^2}{ds} = \tau^\eta \epsilon^{123} (\delta\tilde{H}_{\eta 3;1} + \delta\tilde{H}_{\eta 1;3}), \quad \xi \in g$$

$$(2.22) \quad \frac{d\delta\tilde{r}^3}{ds} = -\tau^\eta \epsilon^{3\delta\pi} \delta\tilde{H}_{\eta\delta;\pi}, \quad \xi \in g$$

ahol az (1.42c,b) összefüggésekre tekintettel

$$(2.23a) \quad \delta\tilde{H}_{\lambda 3;\kappa} = \delta\tilde{H}_{\lambda 3|\kappa} = \delta\tilde{H}_{\lambda 3,\kappa} - \Gamma_{\lambda\kappa}^r \delta\tilde{H}_{r3} - \Gamma_{3\kappa}^r \delta\tilde{H}_{\lambda r} \quad \xi \in S$$

$$(2.23b) \quad \delta\tilde{H}_{\lambda\kappa;\rho} = \delta\tilde{H}_{\lambda\kappa|\rho} = \delta\tilde{H}_{\lambda\kappa,\rho} - b_{\lambda\rho} \delta\tilde{H}_{3\kappa} - b_{\kappa\rho} \delta\tilde{H}_{\lambda 3}. \quad \xi \in S$$

Legyen továbbá

$$(2.24) \quad \frac{d\delta\tilde{w}_\eta}{ds} = \tau^\vartheta (\epsilon_{\vartheta\eta 3} \delta\tilde{r}^3 + \delta\tilde{H}_{\eta\vartheta}). \quad \xi \in g$$

Nyilvánvaló, hogy az utóbbi egyenletnek mindig van megoldása a  $\delta\tilde{w}_\eta$  vektormezőre.

3. MEGJEGYZÉS: Tekintettel a (2.21), (2.24) és (2.23a,b) összefüggésekre írhatjuk, hogy

$$\delta\tilde{r}^1 = \delta\tilde{r}^1(\delta\tilde{H}_{\eta 2;3}, \dots), \quad \delta\tilde{r}^2 = \delta\tilde{r}^2(\delta\tilde{H}_{\eta 1;3}, \dots) \quad \xi \in g$$

és

$$\delta\tilde{w}_1 = \delta\tilde{w}_1(\delta\tilde{H}_{1\vartheta}, \dots), \quad \delta\tilde{w}_2 = \delta\tilde{w}_2(\delta\tilde{H}_{2\vartheta}, \dots), \quad \xi \in g$$

ahol függetlenek egymástól és tetszőlegesek a  $\delta\tilde{H}_{\eta 2;3}$ ,  $\delta\tilde{H}_{\eta 1;3}$ ,  $\delta\tilde{H}_{1\vartheta}$  és  $\delta\tilde{H}_{2\vartheta}$  variációk. Következésképp feltételezhető – anélkül, hogy ez sértené az általánosságot –, hogy a  $\delta\tilde{r}^\lambda$  és  $\delta\tilde{w}_\eta$  variációk is függetlenek egymástól és tetszőlegesek a  $g$  görbén. Ki fog derülni a későbbiek során, hogy nem játszik szerepet a  $\delta\tilde{r}^3$  variáció a  $\delta_{\tilde{\mathcal{H}}}\Pi_2^G = 0$  stacionaritási feltétel végső alakjában.

**2.3.10.** A fentiek alapján mostmár a (2.19)<sub>2</sub> stacionaritási feltételre fordítjuk a figyelmet. Felhasználva az (2.14d)-at helyettesítsük a (2.20) és (2.24) összefüggéseket a

$$\tau^\eta \epsilon^{ldp} \delta\tilde{H}_{\eta d;p}, \quad \text{és} \quad \tau^\vartheta \delta\tilde{H}_{\eta\vartheta}$$

mennyiségek helyére. A részletek ismertetése nélkül – ebben a tekintetben a Függelék **A.3.1.** szakaszára utalunk – kapjuk, hogy

$$(2.25) \quad \delta_{\tilde{\mathcal{H}}}\Pi_2^G = - \oint_g [\epsilon^{\kappa\eta 3} \frac{d}{ds} (u_{3|\kappa} - \hat{u}_{3|\kappa})] \delta\tilde{w}_\eta ds + \oint_g [\frac{d}{ds} (u_\kappa - \hat{u}_\kappa)] \delta\tilde{r}^\kappa ds = 0,$$

ahol a  $\delta\tilde{r}^\kappa$  és  $\delta\tilde{w}_\eta$  vektormezők (variációk) tetszőlegesen lehetnek a  $g$ -n, következésképp a (2.25) stacionaritási feltételből a

$$(2.26) \quad \frac{d}{ds}(u_{3|\kappa} - \hat{u}_{3|\kappa}) = 0 \quad \text{és} \quad \frac{d}{ds}(u_\kappa - \hat{u}_\kappa) = 0 \quad \xi \in g$$

egyenletek következnek. Az utóbbi két egyenlet fennállása mindig biztosítja a (2.9) folytonossági feltétel teljesülését, ha a vonatkozó integrációs állandókat alkalmasan választjuk meg.

4. MEGJEGYZÉS: Az utóbbi két egyenlet azt jelenti, hogy a  $\Pi_2$  funkcionál stacionaritásán alapuló direkt numerikus módszerek esetleges alkalmazása esetén nincs szükség a fenti folytonossági feltételek, vagy ami lényegében ugyanaz, a (2.9) folytonossági feltétel előzetes betartására.

## 2.4. Statikai–kinematikai analógia.

**2.4.1.** Ha előírásokat teszünk a szabad variációs feladat funkcionáljában az értelmezési tartományt alkotó változók egy részére, akkor a  $\Pi_2$  funkcionál egyszerűbb alakot vesz fel. Ha az alakváltozásmező kinematikailag lehetséges, akkor mind a (2.4) független kompatibilitási differenciálegyenletek, mind pedig a (2.6a,b), (2.7a,b) alakváltozási peremfeltételek fennállnak és az elmozdulásmező, illetve deriváltjai folytonosak a  $g$  görbe mentén. Ha emellett ismeretesek a (2.8a,b) feszültségi peremfeltételeket kielégítő  $\tilde{\mathcal{H}}_{\kappa\lambda}$ , valamint  $\tilde{\mathcal{H}}_{\kappa\lambda;3}$  feszültségfüggvények, akkor a  $\Pi_2$  funkcionál – lásd a (2.13), (2.14a,b,c) és (2.14d) egyenleteket – a  $\Pi_1$  funkcionálra egyszerűsödik:

$$(2.27) \quad \Pi_1(e_{kl}, u_l) = \Pi_1^V(e_{kl}) + \Pi_1^{St}(u_l) + C_1^{S_u},$$

$$(2.28a) \quad \Pi_1^V(e_{kl}) = \int_V \left[ \frac{1}{2} e_{pl} C^{plrs} e_{rs} - (g^{pq} B^l_{;q} + g^{lq} B^p_{;q} - g^{pl} B^k_{;k}) e_{pl} \right] dV,$$

$$(2.28b) \quad \Pi_1^{St}(u_l) = - \int_{St} n_3 \epsilon^{3\eta\kappa} \epsilon^{ldp} \tilde{\mathcal{H}}_{\eta d; p\kappa} u_l dA$$

és

$$(2.28c) \quad C_1^{S_u} = \int_{S_u} n_3 (a^{3q} B^l_{;q} + a^{lq} B^3_{;q} - a^{3l} B^k_{;k}) \hat{u}_l dA.$$

5. MEGJEGYZÉS: Ugyanez a funkcionál adódik a

$$(2.29) \quad \Pi(e_{kl}, u_l) = \frac{1}{2} \int_V e_{pl} C^{plrs} e_{rs} dV - \int_V b^l u_l dV - \int_{St} \hat{t}^l u_l dA$$

teljes potenciális energia funkcionálból, ha az (1.22)<sub>1</sub>, (1.23) és a (2.8a,b) képleteket helyettesítjük a második térfogati integrál, illetve  $\hat{t}^l$  esetén, nem feledkezve meg arról a körülményről sem, hogy  $u_l(\xi) = \hat{u}_l(\xi)$  az  $S_u$ -n.

**2.4.2.** A  $\Pi_1^{St}$  alkalmas átalakítása érdekében végzett és a Függelék **A.3.2.** szakaszában, illetve a [76] tanulmányban részletezett parciális integrálásokkal olyan alakra hozható a  $\Pi_1$  funkcionál, hogy az csak  $e_{kl}$ -től függ:

$$(2.30) \quad \Pi_1(e_{kl}) = \Pi_1^V(e_{kl}) + \Pi_1^{St1}(e_{kl}) + \Pi_1^G(e_{kl}) + C_1^G + C_1^{S_u},$$

ahol

$$(2.31a) \quad \Pi_1^{St1}(e_{kl}) = \int_{St} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{ldp} (-\tilde{\mathcal{H}}_{\eta d; p} e_{l\kappa} + \tilde{\mathcal{H}}_{\eta d} e_{\kappa l; p}) dA,$$

$$(2.31b) \quad \Pi_1^G(e_{kl}) = \oint_g \tau^\vartheta \epsilon^{\kappa\eta 3} (\tilde{\mathcal{H}}_{\eta\vartheta} e_{3\kappa} - \tilde{\mathcal{H}}_{\eta 3} e_{\vartheta\kappa}) ds$$

és

$$(2.31c) \quad C_1^G = - \oint_g \tau^\eta \epsilon^{ldp} \hat{u}_l \tilde{\mathcal{H}}_{\eta d; p} ds - \oint_g \tau^\vartheta \epsilon^{\kappa\eta 3} (\tilde{\mathcal{H}}_{\eta\vartheta} \hat{u}_{3;\kappa} - \tilde{\mathcal{H}}_{\eta 3} \hat{u}_{\vartheta;\kappa}) ds.$$

Ami a  $\Pi_1^V$ -t és  $C_1^{S_u}$ -t illeti a (2.28a) és a (2.28c) képletre utalunk – lásd fentebb.

**2.4.3.** A (2.30) funkcionálhoz rendelt mellékfeltételeknek az  $e_{kl}$  alakváltozásmező kinematikailag lehetséges voltát kell biztosítaniuk.

Az eddigiekkel szemben úgy kell a mellékfeltételeket megválasztani, hogy csak az  $e_{kl}$  alakváltozásmezőt tartalmazzák. Ez azt jelenti, hogy az alakváltozásmezők kompatibilitásához az (1.14) mezőegyenlet, az (1.15a,b) alakváltozási peremfeltételek, valamint a

$$(2.32) \quad n_3 \mathcal{E}^{3b} = \epsilon^{3\eta\kappa} \epsilon^{bdp} e_{\eta d; p\kappa} = 0 \quad \xi \in S_t$$

kompatibilitási peremfeltételek teljesülése szükséges. Legyenek

$$(2.33a) \quad \check{H}_{RS}(x) = \check{H}_{SR}(x), \quad x \in V$$

$$(2.33b) \quad \overset{*}{H}_{kl}(\xi) = \overset{*}{H}_{lk}(\xi), \quad \overset{*}{H}_{\eta\vartheta;3} = \overset{*}{H}_{\vartheta\eta;3} \quad \xi \in S_u$$

és

$$(2.33c) \quad w_b(\xi) \quad \xi \in S_t$$

határozatlan LAGRANGE multiplikátorok. Fentiekkel összhangban a  $\Pi_1$  funkcionál stacionaritásából adódó EULER egyenletek keresése során ki kell egészíteni a funkcionált a mellékfeltételek és a LAGRANGE multiplikátorok alkalmas szorzatait integranduszként tartalmazó alábbi integrálok összegével:

$$(2.34) \quad \Pi_S = \Pi_S^V + \Pi_S^{S_t} + \Pi_S^{S_u} = 0,$$

ahol az (1.28) és (1.29) képletek szerint (további magyarázat lentebb)

$$(2.35a) \quad \Pi_S^V = -I_1^V(\check{H}_{RS}),$$

$$(2.35b) \quad \Pi_S^{S_u} = -I_1^S(S_u, \hat{u}_l, \overset{*}{H}_{kl}, \overset{*}{H}_{\eta\vartheta;3})$$

és

$$(2.35c) \quad \Pi_S^{S_t} = - \int_{S_t} \epsilon^{3\eta\kappa} \epsilon^{ldp} e_{\eta d; p\kappa} w_l dA.$$

Vegyük észre, hogy a (2.35a) és (2.35b) képletekben argumentumként azoknak a mennyiségeknek, paramétereknek az értékét tüntettük fel, amelyek megváltoztak – a (2.35a) képletet például úgy kaptuk, hogy  $\check{H}_{RS}$ -t írtunk  $H_{RS}$  helyett az (1.28) képletben. Hasonló módon következik (2.35b) az (1.29) képletekből –  $S$  helyére  $S_u$  került etc.

Ezt a fajta írásmódot a tömörség kedvéért később is alkalmazzuk majd.

Azt is érdemes megemlíteni, hogy az (1.28) és (1.29) integrálokat ugyanolyan feltételezések mellett tekintjük, mint korábban az  $I_1^V$  és  $I_1^S$  integrálokat, ideértve a multiplikátorok szerkezetét, valamint az (1.19) alatti nem független feltételt – ez utóbbi az (1.29) integrálban jelenik meg.

6. MEGJEGYZÉS: Az  $e_{kl}$  alakváltozásmezők kinematikailag lehetséges voltához további feltételeknek, pontosabban az  $S_t$  és  $S_u$  felületrészek közös  $g$  határgörbéje mentén folytonossági feltételeknek kell teljesülniök. A korábban már részletezett és az utóbbi feltételek – ezeket az alábbiakban tisztázzuk majd – együttes fennállása szükséges és elégséges feltétele az  $e_{kl}$  alakváltozásmezők kinematikailag lehetséges voltának.

**2.4.4.** Azonnal következik az (1.1) kinematikai egyenletből, hogy fennáll a

$$(2.36a) \quad \tau^\vartheta e_{\eta\vartheta} = \tau^\vartheta \hat{u}_{(\eta;\vartheta)} \quad \xi \in g$$

összefüggés. Nem nehéz ellenőrizni az (A.2.4) segítségével, hogy

$$(2.36b) \quad \frac{d\varphi^3}{ds} = \tau^\eta \varphi^3_{;\eta} = \tau^\eta \epsilon^{3\lambda\vartheta} \frac{1}{2} \hat{u}_{\vartheta;\lambda\eta} = \tau^\eta \epsilon^{3\lambda\vartheta} e_{\vartheta\eta;\lambda}. \quad \xi \in g$$

Ez az egyenlet azt fejezi ki hogy a  $g$  görbe mindkét oldalán ugyanaz kell legyen a  $\varphi^3$  merevtestszerű forgás. Ami a merevtestszerű forgás másik két összetevőjét illeti az (A.2.4) és (A.2.5) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\varphi^r_{\cdot;p} = \epsilon^{rql} \left( \frac{1}{2} u_{l;qp} + \frac{1}{2} u_{q;lp} - \frac{1}{2} u_{q;l p} \right) = \epsilon^{rql} (e_{lq;p} - e_{q;l p}). \quad x \in V$$

Írjuk  $\vartheta$ -át és  $\eta$ -át az  $r$  és  $p$  helyett majd bontsuk ki a vonatkozó összegeket. Egyszerű átalakításokkal adódik, hogy

$$(2.36c) \quad \frac{d\varphi^\vartheta}{ds} = \tau^\eta \varphi_{;\eta}^\vartheta = \tau^\eta \epsilon^{\vartheta 3\lambda} (e_{\lambda 3;\eta} - \hat{u}_{3;\lambda\eta}) = \tau^\eta \epsilon^{\vartheta 3\lambda} (e_{\lambda\eta;3} - e_{3\eta;\lambda}). \quad \xi \in g$$

Hallgatólagos feltevése a fenti gondolatmenetnek, hogy folytonosak az elmozdulásmező és az elmozdulásmező felületen vett kovariáns deriváltjai amikor áthaladunk a  $g$  görbén. Mivel sem az  $\hat{u}_k$  sem pedig az  $\hat{u}_{k;\lambda\vartheta}$  sem variálható szabadon fennáll, hogy

$$\delta \hat{u}_k = 0 \quad \text{és} \quad \delta \hat{u}_{k;\lambda\vartheta} = 0, \quad \xi \in Su$$

ahonnan az (2.36a,b,c) képletekkel való egybevetés után azonnal következik, hogy a  $\delta e_{kl}$  variációk a

$$(2.37a) \quad \tau^\vartheta \delta e_{\eta\vartheta} = 0, \quad \tau^\eta \epsilon^{3\lambda\vartheta} \delta e_{\vartheta\eta;\lambda} = 0 \quad \xi \in g$$

és a

$$(2.37b) \quad \tau^\eta \epsilon^{\vartheta 3\lambda} \delta e_{\lambda 3;\eta} = \tau^\eta \epsilon^{\vartheta 3\lambda} (\delta e_{\lambda\eta;3} - \delta e_{3\eta;\lambda}) \quad \xi \in g$$

feltételeknek kell hogy eleget tegyenek a  $g$  görbén. Mivel

$$(2.37c) \quad e_{\lambda 3} = \frac{1}{2}(u_{\lambda;3} + u_{3;\lambda}) = \frac{1}{2}(u_{\lambda;3} + \hat{u}_{3;\lambda}) \quad \xi \in g$$

nem nehéz belátni, hogy csak  $e_{\kappa 3}$  variálható szabadon a  $g$ -n.

**2.4.5.** A továbbiakban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy milyen egyenletek következnek a

$$(2.38) \quad \delta_e \Pi_1 + \delta_e \Pi_S = I_{\Pi}^V + I_{\Pi}^{Su} + I_{\Pi}^{St} + I_{\Pi}^G = 0$$

variációs elvből, ahol a jobboldalon álló  $I_{\Pi}^V$ ,  $I_{\Pi}^{St}$ ,  $I_{\Pi}^{Su}$  és  $I_{\Pi}^G$  betűkombinációk a  $V$ ,  $S_t$ ,  $S_u$  és  $g$ -n vett integrálokat jelölnék azon transzformációk eredményeként, melyeket a  $\delta_e \Pi_1 + \delta_e \Pi_S$  összeg alkalmas alakra hozása végett kell elvégezni. Jelenleg nem ismerjük ezeket az integrálokat. Az azonban nyilvánvaló, hogy a felsorolt  $I_{\Pi}^V$ ,  $I_{\Pi}^{St}$ ,  $I_{\Pi}^{Su}$  és  $I_{\Pi}^G$  integrálok mindegyike külön-külön is zérus kell legyen, mivel az integrálási tartományok maguk is különböznek.

Visszaidézve a (2.28a), (2.35a) és az (1.28) összefüggéseket, majd megismételve az (A.2.28)-ból az (A.2.29a,b) és (A.2.31) képletekre vezető gondolatmenetet az

$$(2.39) \quad \delta_e \Pi_1^V + \delta_e \Pi_S^V = \delta_e \Pi_1^V + I_1^V (\delta e_{kl}, \check{H}_{RS}) = I_{\Pi}^V + I_4^{Su} + I_4^{St}$$

összeget kapjuk. Itt

$$(2.40) \quad I_{\Pi}^V = \int_V [C^{plrs} e_{rs} - (\epsilon^{pyk} \epsilon^{ldr} \check{H}_{yd;kr} + g^{pq} B^l_{;q} + g^{lq} B^p_{;q} - g^{pl} B^k_{;k})] \delta e_{lp} dV = 0$$

és

$$(2.41) \quad I_4^{Su} + I_4^{St} = - \int_{S_u + S_t} n_3 \epsilon^{\kappa\rho 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} (\check{H}_{\lambda\kappa} \delta e_{\rho\vartheta;3} - \check{H}_{\lambda\kappa;3} \delta e_{\rho\vartheta}) dA.$$

**2.4.6.** Az  $I_{\Pi}^{Su}$  integrál nyilvánvalóan két részből áll:

$$(2.42) \quad I_{\Pi}^{Su} = I_4^{Su} + \delta_e \Pi_S^{Su}.$$

Ami a  $\delta \Pi_S^{Su}$  variációt illeti tekintsük a (2.35b), (1.29), (1.34a) és (1.37) egyenleteket. Ezekből következik, hogy

$$\delta \Pi_S^{Su} = -I_1^S(S_u, \delta e_{kl}, \overset{*}{H}_{kl})|_{\hat{u}=0} = -I_{1E}^S(S_u, \delta e_{kl}, \overset{*}{H}_{kl}),$$

mivel az  $e_{kl}$  alakváltozásmezőt variáljuk. Alkalmas betűcserékkel az (1.37) összefüggés írható a  $\delta_e \Pi_S^{Su}$  variáció helyett (2.42)-ben. Visszaidézve a (2.41) összefüggést is azt kapjuk, hogy

$$(2.43) \quad \begin{aligned} I_{\Pi}^{Su} &= I_4^{Su} + \delta_e \Pi_S^{Su} = \\ &= \int_{S_u} n_3 \epsilon^{\kappa\rho 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} [(\overset{*}{H}_{\lambda\kappa} - \check{H}_{\lambda\kappa}) \delta e_{\rho\vartheta;3} - (\overset{*}{H}_{\lambda\kappa;3} - \check{H}_{\lambda\kappa;3}) \delta e_{\rho\vartheta}] dA = 0. \end{aligned}$$

**2.4.7.** A továbbiak az utolsó két, vagyis az  $I_{\Pi}^{Su}$  és az  $I_{\Pi}^G$  integrálokra fordítják a figyelmet. Ezek összege két csoportra bontható attól függően, hogy a  $\tilde{H}_{kl}$ ,  $\check{H}_{kl}$  vagy a  $w_l$  szerepel bennük:

$$(2.44) \quad I_{\Pi}^{St} + I_{\Pi}^G = (I_{\Pi H}^{St} + I_{\Pi H}^G) + (I_{\Pi w}^{St} + I_{\Pi w}^G).$$

Elsőként azokat az integrálokat vesszük sorra amelyek a  $\tilde{H}_{kl}$  és  $\check{H}_{kl}$ -t tartalmazzák. Nyilvánvaló a (2.30), (2.31a), (2.31b), (2.34), (2.35a), (2.38) és (2.39) képletek alapján, hogy

$$(2.45) \quad I_{\Pi H}^{St} + I_{\Pi H}^G = \delta_e \Pi_1^{St1} + I_4^{St} + \delta_e \Pi_1^G(\tilde{H}_{kl}).$$

Az (2.31a) és (A.2.29b) egyenletek egybevetéséből

$$(2.46a) \quad \delta_e \Pi_1^{St1} = I_{2E}^S(S_t, \delta e_{kl}, \tilde{H}_{kl}).$$

A továbbiak az  $I_4^{St}$  integrál meghatározására fordítják a figyelmet. A kívánt eredmény három lépéssel érhető el:

1. Vegyük észre, hogy az (A.2.30)-ban álló felületi integrál megegyezik az  $I_4^{St}$ -vel feltéve, hogy a következő betűcseréket hajtjuk végre:

$$S_o \longrightarrow S_t, \quad H \longrightarrow \check{H}, \quad e \longrightarrow \delta e.$$

2. Az (2.31b) és (A.2.30) képletek egybevetése alapján azt is megfigyelhetjük, hogy egybeesik az (A.2.30)-ban álló vonalintegrál a  $\delta_e \Pi_1^G$ -vel ha további betűcseréket hajtunk végre:

$$g_o \longrightarrow g, \quad H \longrightarrow \check{H}, \quad e \longrightarrow \delta e.$$

3. Megoldjuk az így adódó egyenletet az  $I_4^{St}$  integrálra nézve.

Végezetül kapjuk, hogy

$$(2.46b) \quad I_4^{St} = -I_{2E}^S(S_t, \delta e_{kl}, \check{H}_{kl}) - \Pi_1^G(\delta e_{kl}, \check{H}_{kl}).$$

Az (2.46a) és (2.46b) képletek (2.45)-be történő helyettesítésével az

$$(2.47) \quad I_{\Pi H}^{St} + I_{\Pi H}^G = I_{2E}^S(S_t, \delta e_{kl}, \tilde{H}_{kl} - \check{H}_{kl}) + \Pi_1^G(\delta e_{kl}, \tilde{H}_{kl} - \check{H}_{kl})$$

eredményt adódik, mivel az integrálok lineárisak a  $H_{kl}$ -ben. Legyen

$$(2.48) \quad \bar{H}_{kl} = \tilde{H}_{kl} - \check{H}_{kl}.$$

Az (A.2.29c), (2.31b) és (2.48) felhasználásával a (2.47)-ből az

$$(2.49) \quad I_{\Pi H}^{St} + I_{\Pi H}^G = \int_{S_t} n_3 \epsilon^{\kappa\rho 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} [\bar{H}_{\lambda\kappa} \delta e_{\rho\vartheta;3} - \bar{H}_{\lambda\kappa} \delta e_{\rho 3;\vartheta} - \bar{H}_{3\kappa} \delta e_{\rho\vartheta;\lambda} - \bar{H}_{\lambda\kappa;3} \delta e_{\rho\vartheta} + \bar{H}_{\lambda\kappa|\vartheta} \delta e_{\rho 3} + \bar{H}_{3\kappa|\lambda} \delta e_{\rho\vartheta}] dA \\ - \oint_{g_o} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} (\tau^\vartheta \bar{H}_{\eta\vartheta} \delta e_{3\kappa} - \tau^\lambda \delta e_{\lambda\kappa} \bar{H}_{\eta 3}) ds$$

egyenlet következik. Ha a (2.49)-ben

$$\tilde{H}_{kl}\text{-t írunk a } \delta e_{kl} \text{ helyére}$$

és

$$e_{kl}\text{-t a } \bar{H}_{kl} \text{ helyére,}$$

akkor az (A.2.25)-et kapjuk. Azonnal következik ebből a megfigyelésből, hogy az (A.2.25)-re vezető átalakítások kiindulópontja, vagyis az (1.34a) egyenlet a végső alakja a (2.49) egyenletnek, ha abban az  $e_{kl}$  és  $H_{kl}$  helyére rendre  $\bar{H}_{kl}$  és  $\delta e_{kl}$ -t írunk. Ily módon kapjuk, hogy

$$(2.50a) \quad I_{\Pi H}^{St} + I_{\Pi H}^G = \int_S n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} \{ \bar{H}_{\lambda\kappa} \delta e_{\eta\vartheta;3} + (\bar{H}_{\kappa\lambda|\vartheta} + \bar{H}_{\lambda\kappa|\vartheta}) \delta e_{\eta 3} + (\bar{H}_{3\kappa|\lambda} + b_\lambda^\alpha \bar{H}_{\alpha\kappa} - \bar{H}_{\kappa\lambda;3} + \bar{H}_{\lambda 3|\kappa} - b_\beta^\beta \bar{H}_{\lambda\kappa}) \delta e_{\eta\vartheta} + b_{\eta\vartheta} \bar{H}_{\lambda\kappa} \delta e_{33} \} dA,$$

ami azt is jelenti, hogy

$$(2.50b) \quad I_{\Pi H}^G = 0.$$

**2.4.8.** A  $w_l$  multiplikátort tartalmazó integrál(ok) az utolsó(k), amivel foglalkozni kell. Nyilvánvaló a (2.34), (2.35a,b,c) képletekből és a (2.44) felbontásból, hogy

$$(2.51) \quad I_{\Pi w}^{S_t} + I_{\Pi w}^G = \delta_e \Pi_S^{S_t} = \Pi_S^{S_t}(\delta e_{kl}).$$

A továbbiakban az a célunk, hogy felhasználjuk az (A.2.21) és az (1.33) egyenleteket, annak érdekében, hogy elkerüljük a hosszú formális átalakításokat. A (2.44) képlet és az (A.2.21)-ben álló felületi integrál egybevetése szerint, ha rendre

$$S_t, g, \delta e_{kl} \text{ és } w_l\text{-t írunk } S_o, g_o, \tilde{H}_{kl} \text{ és } u_l \text{ helyére}$$

az (A.2.21) és az (1.33) képletekben, akkor a  $\Pi_S^{S_t}(\delta e_{kl})$ -t ismeretlenként tartalmazó egyenletet kapunk, mivel mindkét kifejezésnek ugyanaz, azaz  $I_{1U}^S$  az értéke. Következésképp, elkülönítve a felületi és vonalintegrálokat írhatjuk, hogy

$$(2.52) \quad I_{\Pi w}^{S_t} = - \int_{S_t} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} w_{(\lambda|\kappa)} \delta e_{\eta\vartheta;3} dA \\ + \int_{S_t} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} [-w_{\lambda|\kappa|\vartheta} \delta e_{\eta 3} - w_{(\lambda|\kappa)} b_{\eta\vartheta} \delta e_{33} + (b_\beta^\beta w_{(\lambda|\kappa)} - b_\lambda^\alpha w_{\alpha|\kappa}) \delta e_{\eta\vartheta}] dA \\ + \int_{S_t} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} [-w_{3|\kappa|\lambda} \delta e_{\eta\vartheta} - w_{3|\lambda} b_{\vartheta\kappa} \delta e_{3\eta} - w_{3|\kappa} b_{\vartheta\lambda} \delta e_{\eta 3}] dA$$

és

$$(2.53) \quad I_{\Pi w}^G = \oint_g \tau^\eta \epsilon^{ldp} \delta e_{\eta d;p} w_l ds - \oint_g n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \tau^\vartheta (w_{\vartheta|\kappa} \delta e_{\eta 3} - w_{3|\kappa} \delta e_{\eta\vartheta}) ds.$$

Tekintettel a (2.44), (2.50a,b) és (2.52) képletekre

$$(2.54) \quad I_{\Pi}^{S_t} = \int_{S_t} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} \{(\bar{H}_{\lambda\kappa} - w_{(\lambda|\kappa)}) \delta e_{\eta\vartheta;3} \\ + [(\bar{H}_{3\kappa} - w_{3|\kappa})_{\|\lambda} + b_\lambda^\alpha (\bar{H}_{\alpha\kappa} - w_{\alpha|\kappa}) - (\bar{H}_{\kappa\lambda;3} - \bar{H}_{\lambda 3;\kappa}) - b_\beta^\beta (\bar{H}_{\lambda\kappa} - w_{(\lambda|\kappa)})] \delta e_{\eta\vartheta} \\ + [\bar{H}_{\kappa\lambda|\vartheta} + \bar{H}_{\lambda\kappa|\vartheta} - (w_{\lambda|\kappa})_{\|\vartheta} - w_{3|\lambda} b_{\vartheta\kappa}] \delta e_{\eta 3} - b_{\eta\vartheta} (\bar{H}_{\lambda\kappa} - w_{(\lambda|\kappa)}) \delta e_{33}\} dA = 0.$$

Az (2.44), (2.50a,b) és (2.53) egyenletek felhasználásával következik, hogy

$$I_{\Pi}^G = I_{\Pi w}^G.$$

Felbontva az első vonalintegrálban az  $\epsilon$ -t tartalmazó összeget azt kapjuk a (2.53)-ból, hogy

$$I_{\Pi}^G = I_{\Pi w}^G = - \oint_g \tau^\eta \epsilon^{3\lambda\vartheta} \delta e_{\vartheta\eta;\lambda} w_3 ds - \oint_g \tau^\eta \epsilon^{\vartheta 3\lambda} (\delta e_{\lambda\eta;3} - \delta e_{3\eta;\lambda}) w_\vartheta ds \\ + \oint_g \tau^\eta \epsilon^{\vartheta 3\lambda} w_{\eta|\vartheta} \delta e_{\lambda 3} ds + \oint_g \tau^\vartheta \epsilon^{3\kappa\eta} w_{3|\kappa} \delta e_{\eta\vartheta} ds = 0.$$

Helyettesítsük most a (2.37a) és (2.37b) összefüggéseket, majd hajtsunk végre parciális integrálásokat  $s$  szerint. Ily módon kapjuk, hogy

$$(2.55) \quad I_{\Pi}^G = \oint_g \tau^\vartheta \epsilon^{\eta 3\lambda} 2w_{(\eta|\vartheta)} \delta e_{\lambda 3} ds = 0.$$

Az

$$\delta_e \Pi_1 + \delta_e \Pi_S = I_{\Pi}^V + I_{\Pi}^{S_u} + I_{\Pi}^{S_t} + I_{\Pi}^G = 0$$



stacionaritási feltételből, felhasználva a (2.40), (2.43), (2.54) és (2.55) összefüggéseket az

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_1(e_{kl}) &= \int_V [C^{plrs} e_{rs} - (\epsilon^{pyk} \epsilon^{ldr} \check{H}_{yd;kr} + g^{pq} B^l_{.;q} + g^{lq} B^p_{.;q} - g^{pl} B^k_{.;k})] \delta e_{lp} dV \\
&+ \int_{S_u} n_3 \epsilon^{\kappa\rho 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} [(\overset{*}{H}_{\lambda\kappa} - \check{H}_{\lambda\kappa}) \delta e_{\rho\vartheta;3} - (\overset{*}{H}_{\lambda\kappa;3} - \check{H}_{\lambda\kappa;3}) \delta e_{\rho\vartheta}] dA \\
&+ \int_{S_t} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} \{(\bar{H}_{\lambda\kappa} - w_{(\lambda|\kappa)}) \delta e_{\eta\vartheta;3} \\
&+ [(\bar{H}_{3\kappa} - w_{3|\kappa})_{\|\lambda} + b_\lambda^\alpha (\bar{H}_{\alpha\kappa} - w_{\alpha|\kappa}) - (\bar{H}_{\kappa\lambda;3} - \bar{H}_{\lambda 3;\kappa}) - b_\beta^\beta (\bar{H}_{\lambda\kappa} - w_{(\lambda|\kappa)})] \delta e_{\eta\vartheta} \\
&+ [\bar{H}_{\kappa\lambda\|\vartheta} + \bar{H}_{\lambda\kappa\|\vartheta} - (w_{\lambda|\kappa})_{\|\vartheta} - w_{3|\lambda} b_{\vartheta\kappa}] \delta e_{\eta 3} - b_{\eta\vartheta} (\bar{H}_{\lambda\kappa} - w_{(\lambda|\kappa)}) \delta e_{33}\} dA \\
&+ \oint_g \tau^\vartheta \epsilon^{\eta 3\lambda} 2w_{(\eta|\vartheta)} \delta e_{\lambda 3} ds = 0
\end{aligned}$$

eredmény következik. Mivel a fenti stacionaritási feltételben

$$\begin{aligned}
\delta e_{lp}; & & x &\in V \\
\delta e_{\rho\vartheta;3}, \delta e_{\rho\vartheta}; & & \xi &\in S_u \\
\delta e_{\eta\vartheta;3}, \delta e_{\eta\vartheta}, \delta e_{\eta 3}, \delta e_{33}; & & \xi &\in S_t
\end{aligned}$$

és

$$\delta e_{3\lambda} \quad \xi \in g$$

egyaránt tetszőleges, az egyes integrálok eltűnéséből

— a variációs feladat

$$(2.56) \quad C^{plrs} e_{rs} = \epsilon^{pyk} \epsilon^{ldr} \check{H}_{yd;kr} + g^{pq} B^l_{.;q} + g^{lq} B^p_{.;q} - g^{pl} B^k_{.;k} \quad x \in V$$

EULER egyenlete,

valamint

— a variációs feladat

$$(2.57) \quad \overset{*}{H}_{\lambda\kappa} = \check{H}_{\lambda\kappa}, \quad \overset{*}{H}_{\lambda\kappa;3} = \check{H}_{\lambda\kappa;3}, \quad \xi \in S_u$$

$$(2.58a) \quad \tilde{\mathcal{H}}_{\lambda\kappa} - \check{H}_{\lambda\kappa} = \bar{H}_{\lambda\kappa} = w_{(\lambda|\kappa)}, \quad \xi \in S_t$$

$$(2.58b) \quad (\bar{H}_{3\kappa} - w_{3|\kappa})_{\|\lambda} + b_\lambda^\alpha (\bar{H}_{\alpha\kappa} - w_{\alpha|\kappa}) - (\bar{H}_{\kappa\lambda;3} - \bar{H}_{\lambda 3;\kappa}) = 0, \quad \xi \in S_t$$

$$(2.59) \quad \bar{H}_{\kappa\lambda\|\vartheta} + \bar{H}_{\lambda\kappa\|\vartheta} - w_{\lambda|\kappa\|\vartheta} - w_{3|\lambda} b_{\vartheta\kappa} = 0 \quad \xi \in S_t$$

peremfeltételei

és végül

— a  $g$  görbére vonatkozó

$$(2.60) \quad \tau^\vartheta w_{(\eta|\vartheta)} = 0 \quad \xi \in g$$

folytonossági feltétel

következik.

Az alábbi megjegyzések célja a teljes potenciális energia stacionaritási feltételéből kapott (2.56), (2.57), (2.58a,b), (2.59) és (2.60) egyenletek értelmezése.

7. MEGJEGYZÉS: A (2.56) egyenlet formailag az egyensúlyi egyenletek általános és teljes SCHAEFER által talált megoldása [47]. Következésképp a  $\check{H}_{yd}$  multiplikátorok feszültségfüggvények. Másként fogalmazva levezethető az egyensúlyi egyenletek általános és teljes, három feszültségfüggvényt tartalmazó megoldása a teljes potenciális energia minimum elvből, feltéve, hogy a mellékfeltételeket alkalmasan választjuk meg. A fenti gondolatmenet alkalmas ismétlésével a GURTIN féle megoldás is megkapható.

8. MEGJEGYZÉS: A (2.57) egyenlet szerint megegyeznek a  $V$ -n értelmezett multiplikátorok (feszültségfüggvények) az  $S_u$ -n értelmezett multiplikátorokkal – tehát az utóbbiak is feszültségfüggvények. Következésképp a feszültségfüggvényes megoldás az  $S_u$ -n is érvényes.

9. MEGJEGYZÉS: Az  $S_t$ -n kapott (2.58a,b) és (2.59) peremfeltételek az  $S_u$ -ra vonatkozó (1.15a,b) alakváltozási peremfeltételek, valamint az (1.19) kiegészítő feltétel *duális párjai*, mivel [az előbbi] (az utóbbi) feltételek azonnal megkaphatók [az utóbbi] (az előbbi) feltételekből, ha rendre [ $e$ -t és  $u$ -t írunk  $H$  és  $w$  helyett] ( $H$ -t és  $w$ -t írunk  $e$  és  $u$  helyett). Mivel az (1.19) kiegészítő feltétel nem független (1.15a,b)-től, a (2.59) feltétel sem független (2.58a,b)-től. Következésképp (2.58a) és (2.58b) a lényeges peremfeltétel.

10. MEGJEGYZÉS: A [75] tanulmány 8. MEGJEGYZÉSE szerint a feszültségfüggvények  $V$ -n és  $S_t$ -n egy vektormező garadiensének szimmetrikus részében különbözhetnek egymástól:

$$(2.61) \quad \tilde{\mathcal{H}}_{kl}(\xi) - H_{kl}(\xi) = \tilde{w}_{(k;l)}(\xi). \quad \xi \in S$$

Ennek a körülménynek fényében felmerül a kérdés, vajon a (2.58a,b) peremfeltételek ellentmondanak a fenti (2.61) egyenletnek, vagy sem. Kimutatható, hogy nincs ellentmondás a (2.58a,b) és (2.61) között. Azonnal látszik a (2.61)-al egyenértékű

$$(2.62) \quad \tilde{\mathcal{H}}_{kl}(\xi) - \check{H}_{kl}(\xi) = \bar{H}_{kl}(\xi) = \tilde{w}_{(k;l)}(\xi) \quad \xi \in S_t$$

képletből, hogy az magában foglalja formailag a (2.58a)-t. Ugyanakkor, a (2.62) képlettel szemben nem jelenik meg a  $w_k$  normálirányú deriváltja a (2.58b)-ben. Az állítás második részének igazolása bizonyos előkészületeket igényel.

Legyen  $r^l$  a  $w_{k;l}$  tenzor vektorinvariánsa. Amint az jól ismert

$$(2.63) \quad r^l = \frac{1}{2} \epsilon^{lpq} w_{q;p} \quad \text{és} \quad w_{[l;p]} = -\epsilon_{lps} r^s. \quad \xi \in S_t$$

Tekintettel az (A.1.3)<sub>2</sub> és a (2.62) képletekre írhatjuk, hogy

$$w_{[l;p];\lambda} = \frac{1}{2} (w_{l;p\lambda} - w_{p;l\lambda}) = \frac{1}{2} (w_{l;p\lambda} + w_{\lambda;lp} - w_{\lambda;lp} - w_{p;l\lambda}), \quad \xi \in S_t$$

vagy

$$w_{[l;p];\lambda} = \bar{H}_{l\lambda;p} - \bar{H}_{\lambda p;l}. \quad \xi \in S_t$$

Cseréljük fel a bal és jobboldalt, majd adjuk hozzá az így kapott egyenlethez a (2.62) összefüggést. A (2.63)<sub>2</sub> képletre is tekintettel

$$(2.64) \quad w_{l;p\lambda} = w_{(l;p);\lambda} - \epsilon_{lps} r^s_{;\lambda} = \bar{H}_{l\lambda;p} - \bar{H}_{\lambda p;l} + \bar{H}_{lp;\lambda} \quad \xi \in S_t$$

az eredmény. Most igazolni fogjuk, hogy az utóbbi egyenlet, ez valójában (2.62) egy következménye, magában foglalja a (2.58b) egyenletet.

Az (2.58b,b) egyenletekben álló indexekre tekintettel, csak azokra az egyenletekre szorítkozunk, amelyek úgy kaphatók meg, hogy 3 és  $\kappa$  kerül az  $l$  és  $p$  helyére:

$$(2.65) \quad w_{3;\kappa\lambda} = w_{(3;\kappa);\lambda} - \epsilon_{3\kappa\sigma} r^{\sigma}_{;\lambda} = \bar{H}_{3\lambda;\kappa} - \bar{H}_{\lambda\kappa;3} + \bar{H}_{3\kappa;\lambda}. \quad \xi \in S_t$$

Könnyen ellenőrizhető az (A.1.10) képlet felhasználásával, hogy

$$\bar{H}_{3\kappa;\lambda} = \bar{H}_{3\kappa||\lambda} + b_{\lambda}^{\alpha} \bar{H}_{\alpha\kappa} - b_{\kappa\lambda} \bar{H}_{33}. \quad \xi \in S_t$$

Az utóbbi egyenlet (2.65) jobboldalába történő helyettesítésével a

$$(2.66) \quad \bar{H}_{3\kappa||\lambda} + b_{\lambda}^{\alpha} \bar{H}_{\alpha\kappa} - (\bar{H}_{\kappa\lambda;3} - \bar{H}_{\lambda 3;\kappa}) - b_{\kappa\lambda} \bar{H}_{33} = w_{3;\kappa\lambda} = w_{(3;\kappa);\lambda} - \epsilon_{3\kappa\sigma} r^{\sigma}_{;\lambda} \quad \xi \in S_t$$

összefüggés következik. Használjuk fel az (A.1.10) képletet a (2.66) egyenlet jobboldalának további átalakítására:

$$w_{3;\kappa\lambda} = w_{3;\kappa||\lambda} + b_{\lambda}^{\alpha} w_{\alpha|\kappa} - b_{\kappa\lambda} w_{3;3}. \quad \xi \in S_t$$

Helyettesítsük vissza a fenti képletet a (2.66) egyenletbe:

$$(2.67) \quad (\bar{H}_{3\kappa} - w_{3|\kappa})_{||\lambda} + b_{\lambda}^{\alpha} (\bar{H}_{\alpha\kappa} - w_{\alpha|\kappa}) - (\bar{H}_{\kappa\lambda;3} - \bar{H}_{\lambda 3;\kappa}) - b_{\kappa\lambda} (\bar{H}_{33} - w_{3;3}) = 0. \quad \xi \in S_t$$

Ha  $\bar{H}_{33} - w_{3;3} = 0$ , akkor megegyezik a (2.67) egyenlet a (2.58b) egyenlettel. Másként fogalmazva a teljes potenciális energia minimum elv a (2.62) egyenlet azon részének fennállását biztosítja, amelyik nem tartalmazza a  $w_k$  vektormező normálirányú deriváltját  $S_t$ -n.

11. MEGJEGYZÉS: A (2.57) és (2.58a,b) feltételeket visszaidézve azonnal látszik, hogy a  $g$  görbén adódó (2.60) feltétel

$$\tau^\vartheta \tilde{\mathcal{H}}_{\lambda\vartheta} = \tau^\vartheta H_{\lambda\vartheta}^* \quad \xi \in g$$

alakú folytonossági feltétel.

**2.5. Eredmények.** Az egyes eredményeket sorszámozzuk.

1. A szabad variációs feladat (2.13), (2.14a,b,c) és (2.14d) függvényekkel értelmezett funkcionálja az ABOVSZKIJ, ANDREJEV és DERUGA könyv [1] 224-ik oldalának alján található funkcionál kiegészítése és általánosítása. Lényegesek a következő eltérések:
  - A szerző által javasolt és fentebb idézett funkcionál nem tartalmaz semmiféle ellentmondást a kompatibilitási egyenletek és a feszültségfüggvények száma tekintetében, mindkettő *három* nem pedig *hat* mint az említett [1] könyvben.
  - A szabad variációs feladat itt bemutatott megfogalmazása megengedi a vegyes peremfeltételek figyelembevételét, hiszen a peremfelület – az  $S$  felület – az  $S_u$  és  $S_t$  jelű részekre bontott, és ezeken különböző típusú peremfeltétel írható elő. Ezt az teszi lehetővé, hogy a  $\Pi_2$  funkcionál értelmezési tartománya az  $S_t$ -n értelmezett feszültségfüggvényeket is tartalmaz.
  - Érdemes azt is megemlíteni, hogy nem előfeltétel az elmozdulásmező folytonossága a  $g$  görbén.
2. Kimutatta szerző formális számításokkal, hogy a módosított teljes potenciális energia funkcionál stacionaritási feltételéből is kiadódik mint EULER egyenlet – v.ö.: (2.56) – az egyensúlyi egyenletek általános és teljes, SCHAEFER által talált megoldása [47]. A megoldás csak három feszültségfüggvényt tartalmaz, ha a mellékfeltételeket alkalmasan választjuk meg. (A vonatkozó gondolatmenet alkalmas ismétlésével a GURTIN féle megoldás is megkapható.)
3. Megtalálta szerző a statikai-kinematikai analógia hiányzó, a test határfelületére vonatkozó egyenleteit. A kapott eredmények szerint az  $S_t$ -n adódó (2.58a,b) és (2.59) peremfeltételek az  $S_u$ -ra vonatkozó (1.15a,b) alakváltozási peremfeltételek, valamint az (1.19) kiegészítő feltétel *duális párijai*, mivel [az előbbi] (az utóbbi) feltételek azonnal megkaphatók [az utóbbi] (az előbbi) feltételekből, ha rendre [ $e$ -t és  $u$ -t írunk  $H$  és  $w$  helyett] ( $H$ -t és  $w$ -t írunk  $e$  és  $u$  helyett). Mivel az (1.19) kiegészítő feltétel nem független (1.15a,b)-től, a (2.59) feltétel sem független (2.58a,b)-től. Következésképp, (2.58a) és (2.58b) a lényeges peremfeltétel.

A vonatkozó publikációkat illetően [72], [74] és [76] érdemel említést. A felsorolt eredmények 100%-ban a szerző eredményei.

### 3. AZ EGYENSÚLYI EGYENLETEK ÁLTALÁNOS ÉS TELJES MEGOLDÁSÁNAK SZÁRMAZTATÁSA VIRTUÁLIS MUNKA ELVBŐL – MIKROPOLÁRIS ESET

**3.1. Irodalmi előzmények.** Az egyensúlyi egyenletek feszültségfüggvényekkel történő megoldása egyike a mikropoláris rugalmasságtan megoldott feladatainak. Az első, egyszerű szerkezetű feszültségfüggvényes megoldás GÜNTHER [15] nevéhez fűződik, aki nem vette azonban észre, hogy az általa talált megoldás önegyensúlyi minden zárt felületen, következésképp – a klasszikus esetre vonatkozó BELTRAMI féle megoldáshoz hasonlóan – nem lehet teljes, ha a vizsgált tartományt több zárt felület határolja. A GÜNTHER féle megoldás kiegészítésével, egymástól függetlenül, SCHAEFER [48] és CARLSON [7] talált formailag különböző, valójában azonban egymással egyenértékű megoldásokat. Mivel az idézett szerzők intuitív módon találták meg a megoldást valószínűnek látszott, hogy a klasszikus esetben alkalmazott gondolatmenet – lásd a 1.1. szakasz második bekezdését – itt is eredményre vezet. Megjegyezzük, hogy a klasszikus esetben szükséges matematikai átalakítások nehézségei miatt szerző először a mikropoláris esetre fordította figyelmét – SZEIDL [62], 1991 – és csak ezt követően került sor a klasszikus eset vizsgálatára – SZEIDL–KOZÁK [75], [76] 1996 –.

Nyitott kérdés maradt, a megoldás határozottságának kérdése és ezzel összefüggésben a SOUTHWELL paradoxon mikropoláris analogonjának megoldása. Lineáris esetben KOZÁK–SZEIDL [30] megmutatta, hogy a *kilenc–kilenc feszültségfüggvény helyett hat–hat feszültségfüggvény* elegendő tetszőleges feszültségi állapot leírásához. A fizikai nemlinearitás esetére vonatkozó gondolatmenetet illetően az [56] dolgozatra utalunk.

Mivel a kompatibilitási feltételek száma kilenc–kilenc mikropoláris testre – ezeket NOWACKI [41] adta meg, de nem függetlenek – a SOUTHWELL paradoxon duális párja úgy fogalmazható meg, hogy STIPPES gondolatmenetét [55] követve levezethetők ugyan az egyensúlyi egyenletek megoldásai feszültségfüggvényekkel a virtuális munka elvből, de ez a megoldás kilenc–kilenc feszültségfüggvényt tartalmaz hat–hat helyett. A klasszikus esethez hasonlóan arra is ügyelni kell, hogy a megoldás több zárt felülettel határolt testre is érvényes legyen.

**3.2. Célkitűzések.** A fentiekben áttekintett gondolatok alapján szerző célul tűzte ki az alábbi, mikropoláris esetre vonatkozó kérdések megoldását:

- Az egyensúlyi egyenletek általános és teljes, több zárt felülettel határolt egyszeresen összefüggő testre is érvényes, *hat–hat feszültségfüggvényt* tartalmazó megoldásának származtatása a virtuális munka elvből.
- A térfogati terhelés figyelembevétele és a vonatkozó integrálátalakítások tekintetében pedig a teljesség, valamint a mechanikai jelentés tisztázása (különösen a felületi integrálok vonatkozásában).

A megoldás gondolatmenete és főbb lépései a [62] tanulmány alapján kerülnek bemutatásra.

### 3.3. A probléma matematikai megfogalmazása.

**3.3.1.** A jelen 3. Fejezetben, ugyanúgy mint az 1. Fejezetben, az egyszeresen összefüggő, egy vagy több zárt felülettel határolt  $V$  tartomány képezi a vizsgálat tárgyát. Jelölje  $S = S_u \cup S_t$ ;  $S_u \cap S_t = 0$  a  $V$  tartomány határfelületét és annak két részét. Az  $S_u$  és  $S_t$  felületrészeket a  $g$  görbe választja el egymástól.

A mikropoláris rugalmasságtan *primál rendszerének mezőegyenleteit* a

$$(3.1) \quad \gamma_{kl}(x) = u_{l;k} + \varepsilon_{lks} \varphi^s, \quad \kappa_a^b = \varphi_{;a}^b \quad x \in V$$

primál értelmező egyenletek (primál kinematikai egyenletek), a centroszimmetrikus testre érvényes

$$(3.2) \quad t^{kl}(x) = A^{klpq} \gamma_{pq}, \quad \mu^{ab}(x) = B^{abpq} \kappa_{pq} \quad x \in V$$

primál konstitutív egyenletek (HOOKE törvény) –  $A^{klpq}$  és  $B^{abpq}$  a rugalmassági állandók negyedrendű tenzorai – és a

$$(3.3) \quad t_{\dots;k}^{kl} + b^l = 0, \quad \mu_{b;a}^a + \varepsilon_{bkl} t^{kl} + c_b = 0 \quad x \in V$$

primál mérlegegyenletek alkotják, ahol az  $u_k$  elmozdulásmező és a  $\varphi^b$  független forgásmező az alapváltozók (röviden elmozdulások), a  $\gamma_{kl}$  alakváltozási tenzor és a  $\kappa_a^b$  görbületi (forgási) alakváltozási tenzor az elsődleges közbülső változók (együtt alakváltozási tenzorok vagy alakváltozásmezők) és a  $t^{kl}$  erőfeszültség tenzor, valamint a  $\mu^{ab}$  erőpárfeszültség tenzor a másodlagos közbülső változók (együtt feszültségi tenzorok vagy feszültségmezők), míg a térfogaton megoszló  $b^l$  erőrendszer és  $c_b$  erőpárrendszer a forrásváltozók.

Legyen  $\hat{u}_k$  és  $\hat{\varphi}^b$  előírt elmozdulás és forgás. Legyen továbbá  $\hat{t}^l$  és  $\hat{\mu}_b$  előírt erőfeszültség és erőpárfeszültség.

A (3.1), (3.2) és (3.3) mezőegyenletekhez az

$$(3.4) \quad u_k = \hat{u}_k, \quad \varphi^b = \hat{\varphi}^b \quad \xi \in S_u$$

elmozdulási és

$$(3.5) \quad n_k t^{kl} = \hat{t}^l, \quad n_a \mu_b^a = \hat{\mu}_b \quad \xi \in S_t$$

feszültségi peremfeltételek társulnak.

Speciális esetben, ha az  $S_t$  üres, akkor  $S = S_u$  (DIRICHLET feladat), ha az  $S_u$  üres, akkor  $S = S_t$  (NEUMANN feladat).

**3.3.2.** Továbbiakban feltételezzük, hogy a térfogati erőterhelés intenzitását az (1.6) képletből számítjuk. A vonatkozó potenciáleméleti eredmény alapján [17] a térfogati erőpárterheléssel kapcsolatosan is feltételezzük, hogy

$$(3.6) \quad c_b = -\Delta C_b = -g^{pq} C_{b;pq},$$

ahol a  $C_b(x)$  értékét a

$$(3.7) \quad C_b[x_r(Q)] = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{c_b[x_r(P)]}{|x_s(P) - x_s(Q)|} dV_P \quad Q \in V$$

integrál adja az  $(x_1, x_2, x_3)$  kartéziszi KR-ben. Az eredményt transzformálni kell az  $(x^1, x^2, x^3)$  görbevonalú KR-be.

**3.3.3.** A duál egyenletrendszer áttekintése előtt szükség lesz néhány fogalom bevezetésére.

A  $\gamma_{kl}(x)$  és  $\kappa_a^b(x)$  alakváltozásmezőket [kompatibilisnek]{kinematikailag lehetségesnek} nevezük, ha a (3.1) kinematikai egyenleteknek van egyértékű megoldásuk az  $u_l$  elmozdulásmezőre és  $\varphi^b$  forgásmezőre (és a megoldás eleget tesz a (3.4) elmozdulási peremfeltételnek).

Ezzel összhangban a  $V$ -n elegendő sokszor differenciálható  $u_l(x)$ ,  $\varphi^b(x)$  elmozdulás- és forgásmező [kompatibilis] {kinematikailag lehetséges, ha emellett teljesíti a (3.4) elmozdulási peremfeltételeket}.

A  $t^{kl}(x)$  és  $\mu_b^a(x)$  feszültségmezőket [egyensúlyinak]{statikailag lehetségesnek} nevezük, ha kielégítik a (3.3) egyensúlyi egyenleteket {és a (3.5) feszültségi peremfeltételeket}.

$\overset{L}{K}$ -el és  $AB$ -vel jelöljük a  $\overset{l}{k}$  és  $ab$  indexpárok azon részhalmazát, amelyre nézve az

$$(3.8a) \quad \rho_{;K}^L = \beta_{\overset{L}{K}}(x), \quad x \in V$$

$$(3.8b) \quad v_{B;A} + \varepsilon_{BAp} \rho^p = \alpha_{AB}(x) \quad x \in V$$

differenciálegyenletnek mindig van megoldásuk a  $\rho^l(x)$  és  $v_b(x)$  vektormezőkre. Nyilvánvaló, hogy a  $\overset{L}{K}$  és  $AB$  indexpároknak csak három-három különböző értéke lehet. Jelölje  $\overset{T}{S}$  és  $XY$  a kiegészítő halmazokat, vagyis azon indexpárokat amelyek együtt a  $\overset{L}{K}$  és  $AB$  indexpárokkal kiadják az összes lehetséges értékét a  $\overset{l}{k}$  és  $ab$  indexpároknak. Nyilvánvaló, hogy az  $\overset{T}{S}$  és  $XY$  indexpároknak hat-hat különböző értéke lehet.

Az  $\mathcal{E}^{ab}$  és  $\mathcal{D}_{;l}^m$  inkompatibilitási tenzorokat az

$$(3.9a) \quad \mathcal{E}^{ab}(x) = \epsilon^{apk} \kappa_{\overset{b}{k};p}, \quad x \in V$$

$$(3.9b) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_{;l}^m(x) &= \varepsilon^{mpk} (\gamma_{kl;p} + \varepsilon_{klb} \kappa_p^b) \\ &= \varepsilon^{mpk} \gamma_{kl;p} + \delta_l^m \kappa_p^p - \kappa_l^m \quad x \in V \end{aligned}$$

egyenletek értelmezik. A kilenc-kilenc

$$(3.10) \quad \mathcal{E}^{ab}(x) = 0 \quad \text{és} \quad \mathcal{D}_{;l}^m(x) = 0 \quad x \in V$$

egyenlet a klasszikus elméletből ismert SAINT VENANT féle kompatibilitási feltételek mikropoláris esetre vonatkozó analogonja [41].

**3.3.4.** A *duál egyenletrendszer* mezőegyenleteit a

$$(3.11a) \quad t^{kl} = \epsilon^{kyp} \mathcal{F}_{p,:y}^l + g^{ks} B_{:,s}^l, \quad x \in V$$

$$(3.11b) \quad \mu_{,b}^a = \epsilon^{apy} (\mathcal{H}_{yb;p} + \epsilon_{bpl} \mathcal{F}_y^l) + g^{al} (\epsilon_{lbs} B^s + C_{b;l}) \quad x \in V$$

duál értelmező egyenletek (duál kinematikai egyenlet), a

$$(3.12) \quad \gamma_{pq}(x) = \overset{-1}{A}_{pqkl} t^{kl}, \quad \kappa_{pq}(x) = \overset{-1}{B}_{pqab} \mu^{ab} \quad x \in V$$

duál konstitutív egyenletek (a HOOKE törvény megfordítása), valamint az

$$(3.13a) \quad \mathcal{E}^{XY}(x) = \epsilon^{Xpa} \kappa_{a,:p}^Y = 0, \quad x \in V$$

$$(3.13b) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_T^S(x) &= \varepsilon^{Spk} (\gamma_{kT;p} + \varepsilon_{kTb} \kappa_p^b) \\ &= \varepsilon^{Spk} \gamma_{kT;p} + \delta_T^S \kappa_p^p - \kappa_T^S = 0 \quad x \in V \end{aligned}$$

duál mérlegegyenletek (hat-hat független kompatibilitási egyenlet) alkotják. A fenti egyenletrendszerben az  $\mathcal{F}_p^l$  és  $\mathcal{H}_{yb}$  feszültségfüggvény tenzorok alkotják az alapváltozókat,  $t^{kl}$  és  $\mu_{,b}^a$  az elsődleges közbülső változók, míg  $\gamma_{pq}$  és  $\kappa_a^b$  a másodlagos közbülső változók. A forrásváltozók azonosan zérusok.

A (3.11a,b), (3.12) és (3.13a,b) mezőegyenletekhez a

$$(3.14) \quad \gamma_{\chi l}(x) = \hat{u}_{l;\chi} + \varepsilon_{l\chi s} \hat{\varphi}^s, \quad \kappa_\eta^b = \hat{\varphi}_{:, \eta}^b \quad \xi \in S_u$$

alakváltozási, a

$$(3.15) \quad n_3 \mathcal{E}^{3b} = 0, \quad n_3 \mathcal{D}_l^3 = 0 \quad \xi \in S_t$$

kompatibilitási, valamint a

$$(3.16a) \quad n_3 \varepsilon^{3\eta\pi} \mathcal{F}_{\pi, : \eta}^l + n_3 a^{3s} B_{:,s}^l = \hat{t}^l \quad \xi \in S_t$$

$$(3.16b) \quad n_3 \varepsilon^{3\pi\eta} (\mathcal{H}_{\eta b; \pi} + \varepsilon_{b\pi l} \mathcal{F}_\eta^l) + n_3 a^{3l} (\varepsilon_{lbs} B^s + C_{b;l}) = \hat{\mu}_b \quad \xi \in S_t$$

feszültségi peremfeltételek tartoznak.

1. MEGJEGYZÉS: A (3.16a,b) peremfeltételek helyett mind síkbeli, mind pedig térbeli feladatok esetén közvetlenül magukra a  $\mathcal{H}_{\eta b}$  és  $\mathcal{F}_\pi^l$  feszültségfüggvényekre, azaz nem a deriváltjaikon keresztül, is róható ki peremfeltétel [30].

2. MEGJEGYZÉS: A (3.11a,b) duál értelmező egyenletek a (3.3) primál egyensúlyi egyenletek teljes megoldásai. A fenti teljes megoldást SCHAEFER [48] találta intuitív módon. A feszültségfüggvény tenzor szerkezete azonban nem lehet tetszőleges, mivel fenn kell állnia az  $\mathcal{F}_K^L = 0$  és  $\mathcal{H}_{AB} = 0$  feltételeknek. Másként fogalmazva tetszőleges feszültségi állapot megadható az  $\mathcal{F}_S^T$  és  $\mathcal{H}_{XY}$  feszültségfüggvényekkel, azaz *hat-hat* feszültségfüggvénnyel, KOZÁK–SZEIDL [30]. Vegyük azt is észre, hogy a (3.11a,b) duál értelmező egyenletben az utolsó-, illetve az utolsó két tag a nem zérus térfogati terheléshez tartozó partikuláris megoldást adja. Több zárt felülettel határolt tartomány esetén zérus térfogati terhelés esetén is szerepelniük kell ezeknek a tagoknak a képletben, mivel az  $\mathcal{F}_S^T$  és  $\mathcal{H}_{XY}$  feszültségfüggvényekből számított feszültségi állapot önegyensúlyi minden egyes zárt felületen. Ekkor (1.6) és (3.6)–ban  $b^l = 0$ ,  $c_b = 0$ , következésképp mind  $B^l$ , mind pedig  $C_b$  harmonikus.

3. MEGJEGYZÉS: A (3.13a,b) mezőegyenletek, valamint a (3.14a,b) és (3.15) peremfeltételek fennállása esetén kinematikailag lehetségesek a  $\gamma_{kl}(x)$ ,  $\kappa_a^b(x)$  alakváltozásmezők. Az alakváltozási peremfeltételeket mikropoláris esetre a [30] dolgozat közölte. Igazolható, hogy az alakváltozási peremfeltételek fennállása esetén identikusan teljesülnek a (3.15) kompatibilitási peremfeltételek az  $S_u$ -n. Az  $u_k$  elmozdulás- és  $\varphi^b$  forgásmező integrálásokkal adódik – v.ö.: [30, 62].

4. MEGJEGYZÉS: Tekintsük az  $u_l$ ,  $\varphi^b$  elmozdulás- és forgásmezőt a teljes  $S$ -n, a  $\gamma_{\chi l}$ ,  $\kappa_\eta^b$  alakváltozásmezőket pedig a  $V$ -n. Ha fennállnak a (3.14a,b) alakváltozási peremfeltételek az  $u_l$ ,  $\varphi^b \in S$  elmozdulásmező, forgásmező és a  $\gamma_{\chi l}$ ,  $\kappa_\eta^b \in V$  alakváltozásmezők között, és ha a  $\gamma_{\chi l}$ ,  $\kappa_\eta^b$  alakváltozásmezők eleget tesznek a (3.13a,b) kompatibilitási differenciálegyenleteknek,

akkor nyilvánvaló az előző 3. MEGJEGYZÉS alapján, hogy létezik egyértékű  $u_l$  elmozdulásmező és  $\varphi^b$  forgásmező a  $V$ -n és  $S$ -n.

5. MEGJEGYZÉS: Ha fennállnak a (3.14a) és (3.14b) alakváltozási peremfeltételek a teljes  $S$  felületen, vagy annak egy részén, akkor ugyanitt identikusan fennáll a (3.15) kompatibilitási peremfeltétel.

**3.3.5.** A virtuális munka elv általános primál alakja a

$$(3.17) \quad \int_V \left( t^{kl} \gamma_{kl} + \mu_b^a \kappa_a^b \right) dV = \int_V \left( b^l u_l + c_b \varphi^b \right) dV + \int_S \left( n_3 t^{3l} u_l + n_3 \mu_b^3 \varphi^b \right) dA$$

módon írható fel. A fenti egyenlethez a következő direkt állítás tartozik: Ha a  $\gamma_{kl}(x)$  és  $\kappa_a^b(x)$  alakváltozásmezőket a (3.1) kinematikai egyenletekből számítjuk, ahol az  $u_k(x)$  és  $\varphi^b(x)$  kompatibilis elmozdulás – és forgásmező és a (3.17) egyenlet tetszőleges kompatibilis  $u_k(x)$  és  $\varphi^b(x)$  elmozdulás– és forgásmezőre fennáll, akkor a  $t^{kl}(x)$  és  $\mu_b^a(x)$  feszültségmezők egyensúlyiak.

A (3.1) kinematikai egyenletek mint mellékfeltételek helyettesítése és parciális integrálás után, azaz kihasználva, hogy

$$\begin{aligned} \int_V [t^{kl}(u_{l;k} + \epsilon_{lks} \varphi^s) + \mu_{b;a}^a \varphi_{;a}^b] dV &= \int_S (n_3 t^{3l} u_l + n_3 \mu_b^3 \varphi^b) dA + \\ &+ \int_V [t_{\dots;k}^{kl} u_l + (\mu_{b;a}^a + \epsilon_{bkl} t^{kl}) \varphi^b] dV \end{aligned}$$

azonnal következik az állítás a rendezés után adódó

$$\int_V (t_{\dots;k}^{kl} + b^l) u_l dV + \int_V (\mu_{b;a}^a + \epsilon_{bkl} t^{kl} + c_b) \varphi^b dV = 0$$

egyenletből, hiszen  $u_l$  és  $\varphi^b$  tetszőleges  $V$ -n. Várható, hogy a (3.17) virtuális munka elvhez kapcsolódó fenti állítás akkor is érvényes marad, ha a (3.1) mellékfeltételeket matematikailag más alakú, de velük egyenértékű mellékfeltételekkel helyettesítjük. A fentiek fényében, hasonlóan a klasszikus esethez, a következő kérdések merülnek fel.

1. Következik-e a virtuális munka elv általános primál alakjából a primál egyensúlyi egyenletek SCHAEFER [48] által talált (3.11a,b) alatti teljes megoldása – azaz az egyensúly fennállása – hat-hat feszültségfüggvénnyel. Ha a NOWACKI által [41] bevezetett kilenc-kilenc (3.9a,b) kompatibilitási egyenletet alkalmazzuk mellékfeltételként – ezek nem függetlenek egymástól – akkor a válasz nyilvánvalóan nem. Már korábban is utaltunk rá, hogy ez az ellentmondás a SOUTHWELL paradoxon duális párjának analogonja mikropoláris esetre.
2. Felmerül második kérdésként tehát a mellékfeltételek problémája, mind a  $V$  térfogati tartományon, mind pedig annak  $S$  peremén.

### 3.4. Mellékfeltételek és a virtuális munka elv átalakítása.

#### 3.4.1. Az

$$(3.18) \quad I_V^{BC} = \int_V \left( b^l u_l + c_b \varphi^b \right) dV$$

térfogati integrál, az (1.6) és a (3.6) előállítások helyettesítése majd a GAUSS tétel alkalmazása után – viszonylag egyszerű átalakításokkal – az

$$(3.19) \quad I_V^{BC} = \int_V \left( g^{pq} B_{;pq}^s u_s + g^{pq} C_{b;pq} \varphi^b \right) dV = \int_S n_3 a^{3l} \left( B_{;l}^s u_s + C_{b;l} \varphi^b + B^s \epsilon_{slb} \varphi^b \right) dA \\ - \int_V \left[ g^{kl} B_{;l}^s (u_{s;k} + \epsilon_{skp} \varphi^p) + g^{kl} (\epsilon_{lps} B^s + C_{p;l}) \varphi_{;k}^p \right] dV$$

alakra hozható. A fenti eredmény virtuális munka elv (3.17) alatti alakjába történő helyettesítésével és az (3.1) kinematikai egyenletek kihasználásával kapjuk, hogy

$$(3.20) \quad I_{VMB} = \int_V \left\{ (t^{kl} - g^{ks} B_{;s}^l) \gamma_{kl} + \left[ \mu_b^a - g^{al} (\epsilon_{lbs} B^s + C_{b;l}) \right] \kappa_a^b \right\} dV \\ - \int_S \left\{ n_3 (t^{3l} - B_{;3}^l) u_l + n_3 \left[ \mu_b^3 - (\epsilon_{3b\sigma} B^\sigma + C_{b;3}) \right] \varphi^b \right\} dA = 0$$

Vegyük észre, hogy az utóbbi egyenletben az összetartozó kompatibilis  $\gamma_{kl}$  és  $\kappa_a^b$  alakváltozásmezők, továbbá  $u_l$  és  $\varphi^b$  elmozdulásmezők rendre a test  $V$  térfogatán, illetve  $S$  határfelületén jelennek meg.

Visszaidézve az 4. MEGJEGYZÉSben mondottakat következik, hogy a keresett mellékfeltételeket a  $V$ -n tekintett (3.13a,b) kompatibilitási differenciálegyenletek, valamint az  $S$ -en tekintett (3.14a,b) alakváltozási peremfeltételek alkotják.

Mivel a mellékfeltételek nem helyettesíthetők közvetlenül a virtuális munka elv (3.20) alatti alakjába, a LAGRANGE féle multiplikátor technika alkalmazására van szükség. Legyenek

$$(3.21a) \quad F_S^T, \quad H_{XY} \quad x \in V$$

$$(3.21b) \quad \tilde{F}_\eta^l, \quad \tilde{H}_{\eta l} \quad \xi \in S$$

a határozatlan LAGRANGE féle multiplikátorok, és tegyük fel, hogy teljesülnek a (3.13a,b) és (3.14a,b) mellékfeltételek a  $V$ -n illetve az  $S$ -en. Ekkor

$$(3.22) \quad I_1^V = \int_V \left[ \epsilon^{Spq} (\gamma_{qT;p} + \epsilon_{qTb} \kappa_p^b) F_S^T + \epsilon^{Xpk} \kappa_k^Y H_{XY} \right] dV \equiv 0$$

és

$$(3.23) \quad I_1^S = \int_S \left[ (\gamma_{\chi l} - u_{l;\chi} - \epsilon_{l\chi b} \varphi^b) \epsilon^{3\chi\eta} \tilde{F}_\eta^l + (\kappa_\pi^b - \varphi^b_{;\pi}) \epsilon^{3\pi\eta} \tilde{H}_{\eta b} \right] dA \equiv 0$$

a mellékfeltételek integrál alakja.

6. MEGJEGYZÉS: Vegyük észre, hogy  $H_{AB}$  és  $F_K^L$  nem játszik szerepet – (3.22) csak  $H_{XY}$  és  $F_S^T$ -t tartalmazza –, következésképp zérusnak választható. (Ezen az észrevételen alapul a SOUTHWELL paradoxon duális párjának feloldása mikropoláris testre!)

7. MEGJEGYZÉS: A továbbiakban  $H_{yb}$ -t és  $F_p^l$ -t írunk  $H_{XY}$  és  $F_S^T$  helyére, nem feledkezve meg arról, hogy  $H_{AB}$  és  $F_K^L$  zérus értékű.

**3.4.2.** Kibővítve a virtuális munka elv (3.20), alatti alakját a (3.22) és (3.23) mellékfeltételekkel a virtuális munka elv

$$(3.24) \quad I_{VMB} + I_1^V + I_1^S = 0$$

alakját kapjuk. A virtuális munka elv utóbbi alakjából, kihasználva az  $I_1^V$  és  $I_1^S$  Függelékben részletezett átalakítását – lásd az (A.4.1) és (A.4.3) összefüggéseket – az adódik, hogy

$$(3.25) \quad \int_V (t^{kl} - \epsilon^{kyp} F_{p;y}^l - g^{ks} B^l_{;s}) \gamma_{kl} dV + \int_V \left[ \mu^a_{;b} - \epsilon^{apy} (H_{yb;p} + \epsilon_{bpl} F_y^l) - g^{al} (\epsilon_{lbs} B^s + C_{b;l}) \right] \kappa_a^b dV \\ + \int_S n_3 \left[ (\tilde{F}_\eta^l - F_\eta^l) \epsilon^{3\chi\eta} \gamma_{\chi l} + (\tilde{H}_{\eta b} - H_{\eta b}) \epsilon^{3\pi\eta} \kappa_\pi^b \right] dA + \int_S n_3 (t^{3l} - \epsilon^{3\chi\eta} \tilde{F}_{\eta;\chi}^l - a^{3s} B^l_{;s}) u_l dA \\ + \int_S n_3 \left[ \mu^3_{;b} - \epsilon^{3\pi\eta} (\tilde{H}_{\eta b;\pi} + \epsilon_{b\pi l} \tilde{F}_\eta^l) - a^{3l} (\epsilon_{lbs} B^s + C_{b;l}) \right] \varphi^b dA = 0.$$

Mivel a (3.25)-ben

$$\begin{aligned} \gamma_{kl}(x), & \quad \kappa_a^b(x) & \quad x \in V \\ \gamma_{\kappa l}(\xi), & \quad \kappa_\pi^b(\xi) & \quad \xi \in S \end{aligned}$$

és

$$u_l(\xi), \quad \varphi^b(\xi) \quad \xi \in S$$

tetszőleges, a baloldal eltűnéséből a

$$(3.26a) \quad t^{kl} = \epsilon^{kyp} F_{p;y}^l + g^{ks} B^l_{;s} \quad x \in V$$

$$(3.26b) \quad \mu^a_{;b} = \epsilon^{apy} (H_{yb;p} + \epsilon_{bpl} F_y^l) + g^{al} (\epsilon_{lbs} B^s + C_{b;l}) \quad x \in V$$

mezőegyenletek, a

$$(3.27) \quad \tilde{F}_\eta^l - F_\eta^l = 0, \quad \tilde{H}_{\eta b} - H_{\eta b} = 0 \quad \xi \in S$$



folytonossági feltétel és a

$$(3.28a) \quad n_3 t^{3l} = n_3 (\epsilon^{3\eta\pi} \tilde{F}_{\pi;\eta}^l + a^{3s} B_{;s}^l) \quad \xi \in S$$

$$(3.28b) \quad n_3 \mu^3_{;b} = n_3 \left[ \epsilon^{3\pi\eta} (\tilde{H}_{\eta b;\pi} + \epsilon_{b\pi l} \tilde{F}_\eta^l) + a^{3l} (\epsilon_{l b s} B^s + C_{b;l}) \right] \quad \xi \in S$$

peremfeltételek következnek.

8. MEGJEGYZÉS: A (3.26a,b) képletek által adott megoldás formailag a SCHAEFER féle megoldás – v.ö.: (3.11a,b). Ez okból a  $H_{yd}$  és  $F_p^l$  multiplikátorokat feszültségfüggvényeknek nevezzük. Visszaidézve, hogy ebben a megoldásban a 6. MEGJEGYZÉS szerint csak  $H_{XY}$  és  $F_S^T$  játszik szerepet, míg  $H_{AB}$  és  $F_K^L$  azonosan zérus, adódik a következtetés, hogy hat-hat feszültségfüggvény elegendő, és ezek indexeit ugyanúgy kell megválasztani, mint a független kompatibilitási egyenletek indexeit – hiszen csak ezek szerepeltek a mellékfeltételekben. A (3.26a,b), (3.27), (3.28a) és (3.28b) egybevetéséből pedig az adódik, hogy a feszültségeket ugyanúgy kell számítani mind  $V$ -n, mind pedig  $S$ -en. Vagyis a  $\tilde{H}_{kl}$  és  $\tilde{F}_\pi^l$  multiplikátorok is feszültségfüggvények.

9. MEGJEGYZÉS: A  $H_{AB} \equiv 0$  és  $F_K^L \equiv 0$  feltételek mindig teljesíthetők a  $\rho^l$  és  $w_b$  vektormezők alkalmas megválasztásával, lényegében véve a

$$\begin{aligned} F_K^L - \rho^L_{;K} &= 0 & x \in V \\ H_{AB} - (v_{B;A} + \epsilon_{BA m} \rho^m) &= 0 & x \in V \end{aligned}$$

differenciálegyenletek megoldásával, mivel a

$$\check{F}_y^l = \rho^l_{;y}, \quad \check{H}_{yb} = v_{b;y} + \epsilon_{bys} \rho^s \quad x \in V$$

alakú feszültségfüggvényekhez nem tartozik feszültség – KOZÁK–SZEIDL [30].

**3.5. Eredmények.** Az egyes eredményeket sorszámozzuk.

1. A jelen fejezet legfontosabb eredménye annak igazolása, hogy mikropoláris anyagú szilárd testek esetén az egyensúlyi egyenletek általános és teljes megoldása – azaz a több zárt felülettel határolt testre érvényes SCHAEFER féle megoldás – levezethető a virtuális munka elv általános primál alakjából, feltéve, hogy az alakváltozásmezők kompatibilitásával illetve kinematikailag lehetséges voltával kapcsolatos feltételek, közöttük a  $V$  tartományra vonatkozó *független* feltételek, ismeretesek. A gondolatmenet anyagegyenlettől függetlenül, geometriailag lineáris feladatokra érvényes.
2. Mivel a mellékfeltételek *hat-hat* független mezőegyenletet tartalmaznak következnek, hogy tetszőleges feszültségi állapot megadható *hat-hat feszültségfüggvény* segítségével. Ezzel megoldást nyert a SOUTHWELL paradoxon duális párja mikropoláris esetre. A gondolatmenet egyik eredménye KOZÁK–SZEIDL intuitív módon elért eredményének, miszerint a  $H_{kl}$  és  $F_y^b$  feszültségfüggvény tenzorok szabály szerint kiválasztott három-három eleme – ezek indexeit  $AB$  és  $\frac{L}{K}$  jelöli – zérusnak választható, független igazolása. Ugyancsak a gondolatmenet eredménye KOZÁK–SZEIDL egyik eredményének, miszerint a nem zérus elemek indexei pedig ugyanazok kell, hogy legyenek mint a független kompatibilitási egyenletek  $XY$  és  $\frac{T}{S}$  indexei, független igazolása.
3. Az  $S$  felületen vett integrálok átalakításainak megadásával formálisan is igazolást nyert az a természetes követelmény, hogy a feszültségeket ugyanúgy kell számítani, mind a  $V$ -n, mind pedig az  $S$ -n.
4. A gondolatmenet módszertani jelentőségű és más esetekben, így klasszikus esetben is [75], alkalmazható – ebben a tekintetben az **1.1.–1.5.** szakaszokra is utalunk –, feltéve hogy a kompatibilitás szükséges és elégséges feltételeit ismerjük.

A vonatkozó publikációkat illetően a [62] tanulmányra utalunk. A felsorolt eredmények 100%-ban a szerző eredményei.

**4. AZ EGYENSÚLYI EGYENLET ÁLTALÁNOS ÉS TELJES MEGOLDÁSÁT ADÓ  
ELLENTMONDÁSMENTES VARIÁCIÓS ELVEK ÉS A STATIKAI–KINEMATIKAI  
ANALÓGIA A PEREMFELTÉTELEKRE – MIKROPOLÁRIS ESET**

**4.1. Előzmények.** A mikropoláris rugalmasságtan variációs elveivel több szerző is foglalkozott. A primál rendszer legfontosabb variációs elvei NOWACKI [41] könyvében lelhetők fel. A virtuális munka elv duál alakjait és a duál rendszer legfontosabb variációs elveit KOZÁK–SZEIDL [31] és SZEIDL [59], [58] adta meg. Azok a variációs elvek azonban, ahol az egyensúlyi egyenletek általános és teljes, *hat-hat feszültségfüggvényt* tartalmazó megoldása jelenik meg mint EULER egyenlet, még hiányoznak.

A (3.13a,b) kompatibilitási egyenletek és az egyensúlyi egyenletek (3.11a,b) alatti SCHAEFER féle megoldásának homogén része azonos szerkezetű, az (előbbi)[utóbbi] megkapható az (utóbból)[előbbiből], ha abban  $(\kappa, \gamma)$   $[\mathcal{H}, \mathcal{F}]$  helyett  $(\mathcal{H}, \mathcal{F}-t)[\kappa, \gamma-t]$  írunk. Felmerül a kérdés, ugyanúgy mint a klasszikus esetben, hogy van-e mód ennek a statikai–kinematikai analógiának a peremfelületre történő kiterjesztésére.

**4.2. Célkitűzések.** Az előző szakaszban megfogalmazott gondolatok alapján szerző célul tűzi ki az alábbi feladatok megoldását:

- A fentebb részletezett gondolatok (teljesség, a szükséges feszültségfüggvények száma) jegyében a hiányzó variációs elvek felépítése, és ezzel a klasszikus rugalmasságtan vonatkozó eredményeinek kiterjesztése mikropoláris testre.
- A statikai–kinematikai analógia kiterjesztése a peremfeltételekre.

A megoldás gondolatmenete és főbb lépései a [62] tanulmány alapján kerülnek bemutatásra.

**4.3. Szabad variációs feladat.**

**4.3.1.** Felmerül a kérdés a virtuális munka elv általános primál alakjából következő (3.25) egyenlettel kapcsolatban, hogy lehetséges-e olyan szabad variációs feladatot konstruálni, amelyben

- a vonatkozó funkcionál  $\gamma_{kl}, \kappa_a^b$  alakváltozásmezők szerinti variációinak eltűnése biztosítja a (3.26a,b) mezőegyenletek teljesülését a test  $V$  térfogati tartományán és a (3.27) peremfeltételek teljesülését az  $S_t$  jelű peremrészén,
- továbbá, hogy az  $u_k, \varphi^b$  elmozdulásmezők szerinti variációk eltűnése pedig a (3.28a,b) peremfeltételek, végső soron tehát a feszültségi peremfeltételek fennállását eredményezi az  $S_t$ -n.

A keresett funkcionál a teljes potenciális energia funkcionálból vezethető le a térfogati terhelések munkáját adó tag átalakításával – a főbb lépéseket tekintve úgy kell eljárni, mint a virtuális munka elv esetén az előző 3. Fejezetben, az átalakításoknak pedig az a célja, hogy a tartományi integrálban csak az alakváltozásmezők szerepeljenek – ezt követően pedig a LAGRANGE féle multiplikátortechnika segítségével figyelembe kell venni a mellékfeltételeket. A keresett funkcionál végleges alakját a multiplikátorok meghatározását követően azok értékének a funkcionálba történő visszahelyettesítésével kapjuk meg.

A funkcionál értelmezési tartományát

– a

$$(4.1a) \quad \gamma_{kl} \quad \kappa_a^b \quad x \in V$$

alakváltozásmezők, az

$$(4.1b) \quad u_l, \quad \varphi^b \quad \xi \in S_t$$

elmozdulásmezők,

valamint

– az

$$(4.1c) \quad \mathcal{F}_S^T, \quad \mathcal{H}_{XY} \quad x \in V$$

és az

$$(4.1d) \quad \tilde{\mathcal{F}}_\eta^l, \quad \tilde{\mathcal{H}}_{\eta l} \quad \xi \in S_t$$

feszültségfüggvények alkotják.

Feltételezzük, hogy a (4.1c) alatti feszültségfüggvények eleget tesznek az

$$(4.2) \quad \mathcal{F}_K^L \equiv 0 \quad \text{és} \quad \mathcal{H}_{AB} \equiv 0 \quad x \in V$$

feltételeknek.

**4.3.2.** A lineáris mikropoláris rugalmasságtan egyenleteit a funkcionál értelmezési tartományát alkotó, azaz a fenti változókkal a

$$(4.3a) \quad A^{klpq} \gamma_{pq} = \epsilon^{kpq} \mathcal{H}_q^l + g^{km} B^l_{;m}, \quad x \in V$$

$$(4.3b) \quad B^a_{.b..}{}^{pq} \kappa_{pq} = \epsilon^{aml} (\mathcal{F}_{lb;m} + \epsilon_{bmq} \mathcal{H}_l^q) + g^{al} (\epsilon_{lbm} B^m + C_{b;l}) \quad x \in V$$

és

$$(4.4a) \quad \epsilon^{Xpk} \kappa_k^Y_{;p} = 0, \quad x \in V$$

$$(4.4b) \quad \epsilon^{Spq} (\gamma_{qT;p} + \epsilon_{qTb} \kappa_p^b) = 0 \quad x \in V$$

mezőegyenletek, továbbá a

$$(4.5) \quad \tilde{\mathcal{F}}_\eta^l - \mathcal{F}_\eta^l = 0, \quad \tilde{\mathcal{H}}_{\eta b} - \mathcal{H}_{\eta b} = 0, \quad \xi \in S_t$$

$$(4.6) \quad \kappa_\eta^b - \varphi^b_{;\eta} = 0, \quad \gamma_{\chi l} - u_{l;\chi} - \epsilon_{l\chi b} \varphi^b = 0, \quad \xi \in S_t$$

$$(4.7) \quad \kappa_\eta^b - \hat{\varphi}^b_{;\eta} = 0, \quad \gamma_{\chi l} - \hat{u}_{l;\chi} - \epsilon_{l\chi b} \hat{\varphi}^b = 0, \quad \xi \in S_u$$

$$(4.8a) \quad \hat{t}^l = \epsilon^{3\chi\eta} \tilde{\mathcal{F}}_{\eta;\chi}^l + B^l_{;3}, \quad \xi \in S_t$$

$$(4.8b) \quad \hat{\mu}_b = \epsilon^{3\pi\eta} (\tilde{\mathcal{H}}_{\eta b;\pi} + \epsilon_{b\pi l} \tilde{\mathcal{F}}_\eta^l) + a^{3l} (\epsilon_{lb\sigma} B^\sigma + C_{b;l}) \quad \xi \in S_t$$

peremfeltételek alkotják. A fenti egyenletekhez az

$$(4.9) \quad u_l = \hat{u}_l, \quad \varphi^b = \hat{\varphi}^b, \quad \xi \in g$$

folytonossági feltételek társulnak.

Az alábbiak arra mutatnak rá, hogy a (4.3a,b) és a (4.4a,b) mezőegyenletek, a (4.5)-(4.8b) peremfeltételek, valamint a (4.9) folytonossági feltételek teljesülése biztosítja a rugalmasságtan valamennyi egyenletének fennállását.

Valóban (4.4a,b), (4.6), (4.7) és (4.9) teljesülése biztosítja az alakváltozásmezők kinematikailag lehetséges voltát. A [62] 2.20 szakasza alapján – tekintettel a (4.9) folytonossági feltételre is, adódik a következtetés, hogy a (4.7) alatti feltételek integrálása a tényleges  $u_k(\xi)$ ,  $\varphi^b(\xi)$  elmozdulásmezőket eredményezi  $S_t$ -n. Ha emellett a (4.3a,b) egyenletek is teljesülnek, akkor fennáll az egyensúly  $V$ -n, míg (4.8a) és (4.8b) együttes teljesülése biztosítja a feszültségi peremfeltétel fennállását.

**4.3.3.** Visszaidézve a **4.3.1.** szakasz második bekezdését a szabad variációs feladat funkcionálja az alábbi, csupán gondolatmenetében részletezett, lépésekkel kapható meg:

1. A (3.19) képletet helyettesítjük a teljes potenciális energia funkcionál (4.20) alatti képletébe a térfogati terhelés munkájának helyére ( $u_l = \hat{u}_l$ ,  $\varphi^b = \hat{\varphi}_l^b$  az  $S_u$ -n).
2. Mellékfeltételnek tekintjük a (4.3a,b), (4.4a,b), (4.5), (4.6), (4.7), (4.8a,b), valamint a (4.9) egyenleteket.
3. Hozzáadjuk a potenciális energia funkcionálhoz a mellékfeltételek alkalmas LANGRANGE multiplikátorokkal szorzott és a vonatkozó tartományokon integrált alakjait.
4. Meghatározzuk a funkcionál stacionaritási feltételéből a multiplikátorokat.
5. Visszahelyettesítjük a multiplikátorokat a funkcionálba.

A fenti, hosszadalmas és figyelmet igénylő átalakítások után

$$(4.10) \quad \Pi_2 = \Pi_2(\gamma_{kl}, \kappa_a^b, u_l, \varphi^b, \mathcal{F}_y^l, \mathcal{H}_{yb}, \tilde{\mathcal{F}}_\eta^l, \tilde{\mathcal{H}}_{\eta b}) = \Pi_2^{V1} + \Pi_2^{V2} + \Pi_2^{St} + \Pi_2^{Su} + \Pi_2^G + C_2^{Su}$$

a keresett funkcionál, ahol

$$(4.11a) \quad \Pi_2^V = \frac{1}{2} \int_V \left( \gamma_{kl} A^{klpq} \gamma_{pq} + \kappa_{ab} B^{abpq} \kappa_{pq} \right) dV - \\ - \int_V \left[ g^{km} B_{:,m}^l \gamma_{kl} + g^{al} (\epsilon_{lbm} B^m + C_{b;l}) \kappa_{a.}^b \right] dV - \\ - \int_V \left[ \epsilon^{Spq} (\gamma_{qT;p} + \epsilon_{qTb} \kappa_p^b) \mathcal{F}_S^T + \epsilon^{Xpk} \kappa_{k.}^Y \mathcal{H}_{XY} \right] dV,$$

$$(4.11b) \quad \Pi_2^{St} = - \int_{St} \left\{ (\hat{t}^l - n_3 a^{3m} B_{:,m}^l) u_l + \left[ \hat{\mu}_b - n_3 a^{3l} (\epsilon_{lb\sigma} B^\sigma + C_{b;l}) \right] \varphi^b \right\} dA \\ + \int_{St} \left[ (\gamma_{\chi l} - u_{l;\chi} - \epsilon_{l\chi b} \varphi^b) \epsilon^{3\chi\eta} \tilde{\mathcal{F}}_\eta^l + (\kappa_{\pi.}^b - \varphi^b_{;:\pi}) \epsilon^{3\pi\eta} \tilde{\mathcal{H}}_{\eta b} \right] dA,$$

$$(4.11c) \quad \Pi_2^{Su} = \int_{Su} \left[ (\gamma_{\chi l} - \hat{u}_{l;\chi} - \epsilon_{l\chi b} \hat{\varphi}^b) \epsilon^{3\chi\eta} \mathcal{F}_\eta^l + (\kappa_{\pi.}^b - \hat{\varphi}^b_{;:\pi}) \epsilon^{3\pi\eta} \mathcal{H}_{\eta b} \right] dA$$

és

$$(4.12) \quad \Pi_2^G = \oint_g \left[ \tau^\eta (u_l - \hat{u}_l) \tilde{\mathcal{F}}_\eta^l + \tau^\eta (\varphi^b - \hat{\varphi}^b) \tilde{\mathcal{H}}_{\eta b} \right] ds$$

míg

$$C_2^{Su} = \int_{Su} \left[ n_3 a^{3m} B_{:,m}^l \hat{u}_l + n_3 a^{3l} (\epsilon_{lbm} B^m + C_{b;l}) \hat{\varphi}^b \right] dA = \text{const.}$$

Vegyük észre, hogy a fenti funkcionál az összes feszültségfüggvényt tartalmazza ideértve azokat is, amelyeket zérusnak tekintünk.

**4.3.4.** A (4.10) alatti funkcionál

$$(4.13) \quad \delta \Pi_2 = \delta_{\gamma,\kappa} \Pi_2 + \delta_{u,\varphi} \Pi_2 + \delta_{\mathcal{H},\mathcal{F}} \Pi_2 = 0$$

variációjának eltűnése mint variációs elv nemcsak a (4.3a,b) és (4.4a,b) mezőegyenletek, hanem a (4.5), (4.6), (4.7) és (4.8a,b) peremfeltételek, valamint a (4.9) folytonossági feltételek fennállását is biztosítja.

Az alábbiakban röviden ismertetjük az igazolás gondolatmenetét. Az egyes változók szerint vett variációk függetlensége miatt a (4.13) variációs elv a

$$(4.14a) \quad \delta_{\gamma,\kappa} \Pi_2 = \delta_{\gamma,\kappa} \Pi_2^V + \delta_{\gamma,\kappa} \Pi_2^{St} + \delta_{\gamma,\kappa} \Pi_2^{Su} = 0,$$

$$(4.14b) \quad \delta_{u,\varphi} \Pi_2 = \delta_{u,\varphi} \Pi_2^{St} + \delta_{u,\varphi} \Pi_2^G = 0$$

és

$$(4.14c) \quad \delta_{H,F} \Pi_2 = \delta_{\mathcal{H},\mathcal{F}} \Pi_2^V + \delta_{\mathcal{H},\mathcal{F}} \Pi_2^{St} + \delta_{\mathcal{H},\mathcal{F}} \Pi_2^{Su} + \delta_{\mathcal{H},\mathcal{F}} \Pi_2^G = 0$$

egyenletekkel ekvivalens. A (4.14a) egyenletből elemi átalakításokkal kapjuk, hogy

$$(4.15) \quad \delta_{\gamma,\kappa} \Pi_2 = \int_V \left[ B_b^{a,pq} \kappa_{pq} - \epsilon^{apy} (\mathcal{H}_{yb;p} + \epsilon_{bpl} \mathcal{F}_y^l) - g^{al} (\epsilon_{lbs} B^s + C_{b;l}) \right] \delta \kappa_{a.}^b dV + \\ + \int_V \left( A^{klpq} \gamma_{pq} - \epsilon^{kyp} \mathcal{F}_{p.}^l - g^{ks} B_{:,s}^l \right) \delta \gamma_{kl} dV + \\ + \int_S n_3 \left[ (\tilde{\mathcal{F}}_\eta^l - \mathcal{F}_\eta^l) \epsilon^{3\chi\eta} \gamma_{\chi l} + (\tilde{\mathcal{H}}_{\eta b} - \mathcal{H}_{\eta b}) \epsilon^{3\pi\eta} \kappa_{\pi.}^b \right] dA = 0.$$

A variációk tetszőlegessége miatt innen a (4.3a,b) mezőegyenletek és (4.5) peremfeltételek fennállása következik.

A (4.14b) feltétel átalakítása során egyedül a vonalintegrállal kapcsolatos lépések igényelnek némi figyelmet – az (A.4.2a,b) képleteket kell felhasználni. A

$$(4.16) \quad \delta_{u,\varphi}\Pi_2 = \int_S n_3 \left[ \mu^3_b - \epsilon^{3\pi\eta}(\tilde{\mathcal{H}}_{\eta b;\pi} + \epsilon_{b\pi l}\tilde{\mathcal{F}}_\eta^l) - a^{3l}(\epsilon_{lbs}B^s + C_{b;l}) \right] \delta\varphi^b dA \\ + \int_S n_3(t^{3l} - \epsilon^{3\chi\eta}\tilde{F}_{\eta;\chi}^l - a^{3s}B_{;s}^l)\delta u_l dA = 0$$

eredményből azonnal következik a (4.8a,b) peremfeltételek fennállása.

A (4.14c) egyenlet teljesüléséből azonnal, minden különösebb formális átalakítás nélkül, következnek az alakváltozásmezők kinematikailag lehetséges voltához szükséges (és elégséges) (4.4a,b), (4.6), (4.7) és (4.9) feltételek.

#### 4.4. Statikai–kinematikai analógia.

**4.4.1.** Ha előírásokat teszünk a szabad variációs feladat funkcionáljában az értelmezési tartományt alkotó változók egy részére, akkor a  $\Pi_2$  funkcionál egyszerűbb alakot vesz fel. Ha a  $\gamma_{kl}$  és  $\kappa_\pi^b$  alakváltozásmezők kinematikailag lehetségesek, akkor mind a (4.4a,b) független kompatibilitási differenciálegyenletek, mind pedig a (4.6), (4.7) alakváltozási peremfeltételek fennállnak, és az  $u_l$  elmozdulásmező illetve  $\varphi^b$  forgásmező eleget tesz a (4.9) folytonossági feltételnek. Ha emellett ismeretesek a (4.8a,b) feszültségi peremfeltételeket kielégítő  $\tilde{\mathcal{H}}_{\eta b}$ , valamint  $\tilde{\mathcal{F}}_\eta^l$  feszültség függvények, akkor a  $\Pi_2^{St}$  integrál az (A.1.21) Stokes tétel értelemszerű alkalmazásával –  $S_o$ ,  $g_o$ -nak  $S_t$ ,  $g$  felel meg – parciális integrálásokkal az alábbiak szerint átalakítható

$$(4.17) \quad \Pi_2^{St} = \int_{S_t} \left[ n_3\epsilon^{3\chi\eta}\tilde{\mathcal{F}}_{\eta;\chi}^l u_l + n_3\epsilon^{3\pi\eta}(\tilde{\mathcal{H}}_{\eta b;\pi} + \epsilon_{b\pi l}\tilde{\mathcal{F}}_\eta^l)\varphi^b \right] dA = \\ = - \oint_g \tau^\eta \tilde{\mathcal{F}}_\eta^l \hat{u}_l ds - \oint_g \tau^\eta \tilde{\mathcal{H}}_{\eta b} \hat{\varphi}^b ds + \int_{S_t} n_3\epsilon^{3\chi\eta}(u_{l;\lambda} + \epsilon_{l\chi b}\varphi^b)\tilde{\mathcal{F}}_\eta^b dA + \int_{S_t} n_3\epsilon^{3\chi\eta}\varphi^b_{;\pi}\tilde{\mathcal{H}}_{\eta b} dA .$$

A fentebb mondottak figyelembevételével a  $\Pi_2$  funkcionál a  $\Pi_1$  funkcionálra egyszerűsödik:

$$(4.18) \quad \Pi_1 = \Pi(\gamma_{kl}, \kappa_a^b) = \Pi_1^V + \Pi_1^{St} + C_1^{Su} + C_1^G ,$$

ahol

$$(4.19a) \quad \Pi_1^V = \frac{1}{2} \int_V \left( \gamma_{kl} A^{klpq} \gamma_{pq} + \kappa_{ab} B^{abpq} \kappa_{pq} \right) dV - \int_V \left[ g^{km} B_{;m}^l \gamma_{kl} + g^{al} (\epsilon_{l b m} B^m + C_{b;l}) \kappa_a^b \right] dV ,$$

$$(4.19b) \quad \Pi_1^{St} = \int_{S_t} (n_3\epsilon^{3\chi\eta}\gamma_{\chi l}\tilde{\mathcal{F}}_\eta^l + n_3\epsilon^{3\chi\eta}\kappa_\chi^b\tilde{\mathcal{H}}_{\eta b}) dA ,$$

$$(4.19c) \quad C_1^{Su} = C_2^{Su} = \text{const}$$

és

$$(4.19d) \quad C_1^G = - \oint_g \tau^\eta \tilde{\mathcal{F}}_\eta^l \hat{u}_l ds - \oint_g \tau^\eta \tilde{\mathcal{H}}_{\eta b} \hat{\varphi}^b ds .$$

4. MEGJEGYZÉS: Ugyanez a funkcionál adódik a

$$(4.20) \quad \Pi(\gamma_{kl}, \kappa_a^b, u_l, \varphi^b) = \frac{1}{2} \int_V \left( \gamma_{kl} A^{klpq} \gamma_{pq} + \kappa_{ab} B^{abpq} \kappa_{pq} \right) dV - \int_V (b^l u_l + c_b \varphi^b) dV \\ - \int_{S_t} (\hat{t}^l u_l + \hat{\mu}_b \varphi^b) dA$$

teljes potenciális energia funkcionálból, ha a (3.18), azaz a (3.19) és a (4.8a,b) képleteket helyettesítjük a második térfogati integrál, illetve  $\hat{t}^l$  és  $\hat{\mu}_b$  esetén, majd úgy alakítjuk át a funkcionált, hogy csak  $\gamma_{kl}, \kappa_a^b$ -től függjön.

**4.4.2.** Nyilvánvaló, hogy a (4.18) funkcionálhoz tartozó mellékfeltételeknek a  $\gamma_{kl}, \kappa_a^b$  alakváltozásmezők kinematikailag lehetséges voltát kell biztosítaniuk. Ez azt jelenti, hogy a (4.4a,b)

kompatibilitási differenciálegyenletek, a (4.7) alakváltozási peremfeltételek és a  $g$  görbén kirótt (4.9) folytonossági feltételek mellett a

$$(4.21a) \quad n_3 \mathcal{E}^{3b}(x) = \epsilon^{3\pi\eta} \kappa_{\eta;\pi}^b = 0, \quad \xi \in S_t$$

$$(4.21b) \quad n_3 \mathcal{D}_{.l}^3(x) = \epsilon^{3\pi\chi} (\gamma_{\chi l;\pi} + \epsilon_{\chi lb} \kappa_{\pi}^b) = 0 \quad \xi \in S_t$$

kompatibilitási peremfeltételek fennállása is szükséges. Legyenek

$$(4.22a) \quad \check{F}_S^T, \quad \check{H}_{XY}, \quad x \in V$$

$$(4.22b) \quad \check{F}_{\eta}^{*T}, \quad \check{H}_{\eta b}, \quad x \in S_u$$

$$(4.22c) \quad \check{w}_b, \quad \check{r}^l, \quad \xi \in g$$

és

$$(4.22d) \quad w_b, \quad r^l, \quad \xi \in S_t$$

határozatlan LAGRANGE féle multiplikátorok.

Fentiekkel összhangban a  $\Pi_1(\gamma_{kl}, \kappa_a^b)$  funkcionál stacionaritásából adódó EULER egyenletek keresése során ki kell egészíteni a funkcionált az alábbi integrálok összegével

$$(4.23) \quad \Pi_S = \Pi_S^V + \Pi_S^{St} + \Pi_S^{Su} + \Pi_S^G,$$

ahol a (3.22) és (4.11c) képletek szerint

$$(4.24a) \quad \Pi_S^V = I_1^V(\check{F}_S^T, \check{H}_{XY}),$$

$$(4.24b) \quad \Pi_S^{St} = \int_{S_t} \left[ n_3 \epsilon^{3\pi\eta} \kappa_{\eta;\pi}^b w_b + n_3 \epsilon^{3\pi\chi} (\gamma_{\chi l;\pi} + \epsilon_{\chi lb} \kappa_{\pi}^b) r^l \right] dA,$$

$$(4.24c) \quad \Pi_S^{Su} = \Pi_2^{Su}(\check{F}_{\eta}^{*T}, \check{H}_{\eta b})$$

és

$$(4.24d) \quad \Pi_S^G = \oint_g \tau^{\eta} (\kappa_{\eta}^b - \hat{\varphi}_{;\eta}^b) \check{w}_b ds + \oint_g \tau^{\chi} \left[ \gamma_{\chi l} - (\hat{u}_{l;\chi} + \epsilon_{l\chi b} \hat{\varphi}^b) \right] \check{r}^l ds.$$

#### 4.4.3. A

$$(4.25) \quad \delta_{\kappa,\gamma} \Pi_1 = \delta_{\kappa,\gamma} \Pi_1^V + \delta_{\kappa,\gamma} \Pi_1^{St} + \delta_{\kappa,\gamma} \Pi_1^V + \delta_{\kappa,\gamma} \Pi_1^{St} + \delta_{\kappa,\gamma} \Pi_1^{Su} + \delta_{\kappa,\gamma} \Pi_1^G = 0$$

stacionaritási feltételből, viszonylag egyszerű formális átalakításokkal, az (A.4.1) és (A.4.4a,b) integrálok kihasználásával, a

$$\begin{aligned} \delta \Pi_1 &= \int_V \left[ B_{.b..}^{apq} \kappa_{pq} - \epsilon^{ami} (\check{H}_{ib;m} + \epsilon_{bmq} \check{F}_i^q) - g^{al} (\epsilon_{lbm} B^m + C_{b;l}) \right] \delta \kappa_a^b dV \\ &+ \int_V \left[ A^{klpq} \gamma_{pq} - (\epsilon^{kyp} \check{F}_{p;y}^l + g^{ks} B_{.s}^l) \right] \delta \gamma_{kl} dV \\ &+ \int_{S_t} n_3 \epsilon^{3\chi\eta} \left[ \check{\mathcal{H}}_{\eta b} - \check{H}_{\eta b} - (w_{b;\eta} + \epsilon_{b\eta m} r^m) \right] \delta \kappa_{\chi}^b dA \\ &+ \int_{S_t} n_3 \epsilon^{3\chi\eta} (\check{\mathcal{F}}_{\eta}^l - \check{F}_{\eta}^l - r_{;\eta}^l) \delta \gamma_{\chi l} dA \\ &+ \int_{S_u} \left[ n_3 \epsilon^{3\chi\eta} (\check{H}_{\eta b} - \check{H}_{\eta b}) \delta \kappa_{\chi}^b + n_3 \epsilon^{3\chi\eta} (\check{F}_{\eta}^{*l} - \check{F}_{\eta}^l) \delta \gamma_{\chi l} \right] dA \\ &+ \oint_g \left[ \tau^{\eta} (\check{w}_b - w_b) \delta \kappa_{\eta}^b + \tau^{\chi} (\check{r}^l - r^l) \delta \gamma_{\chi l} \right] ds \end{aligned}$$

eredmény következik. Mivel a fenti stacionaritási feltételben

$$\begin{aligned} \delta \gamma_{kl}, \delta \kappa_a^b, & \quad x \in V \\ \delta \gamma_{\chi l}, \delta \kappa_{\chi}^b, & \quad \xi \in S_t \\ \delta \gamma_{\chi l}, \delta \kappa_{\chi}^b & \quad \xi \in S_u \end{aligned}$$

és

$$\delta\gamma_{\chi l}, \delta\kappa_{\chi}{}^b \quad \xi \in g$$

egyenként tetszőleges lehet az egyes integrálok eltűnéséből

— a variációs feladat

$$(4.26a) \quad B_{.b..}^{\alpha pq} \kappa_{pq} = \epsilon^{ami} (\check{H}_{ib;m} + \epsilon_{bmq} \check{F}_i{}^q) - g^{al} (\epsilon_{lbn} B^n + C_{b;l}), \quad x \in V$$

$$(4.26b) \quad A^{klpq} \gamma_{pq} = (\epsilon^{kyp} \check{F}_{p;y}{}^l + g^{ks} B_{.s}{}^l) \quad x \in V$$

EULER egyenletei;

— a variációs feladat

$$(4.27) \quad \overset{*}{H}_{\lambda\kappa} = \check{H}_{\lambda\kappa}, \quad \overset{*}{F}_{\eta}{}^l = \check{F}_{\eta}{}^l, \quad \xi \in S_u$$

$$(4.28a) \quad \bar{F}_{\eta}{}^l = \check{\mathcal{F}}_{\eta}{}^l - \check{F}_{\eta}{}^l = r^l{}_{;\eta}, \quad \xi \in S_t$$

$$(4.28b) \quad \bar{H}_{\eta b} = \check{\mathcal{H}}_{\eta b} - \check{H}_{\eta b} = w_{b;\eta} + \epsilon_{b\eta m} r^m \quad \xi \in S_t$$

peremfeltételei, valamint

— a  $g$  görbére vonatkozó

$$(4.29) \quad \overset{*}{w}_b = w_b, \quad \overset{*}{r}{}^l = r^l \quad \xi \in g$$

folytonossági feltételek

következnek.

Az alábbi megjegyzések célja a teljes potenciális energia stacionaritási feltételéből kapott (4.26a,b), (4.27), (4.28a,b), és (4.29) egyenletek értelmezése.

5. MEGJEGYZÉS: A (4.26a,b) mezőegyenletek az egyensúlyi egyenletek általános és teljes, SCHAEFER által talált [48] megoldásai. Következésképp a  $\check{H}_{yd}$  és  $\check{F}_y{}^b$  multiplikátorok feszültségfüggvények. Másként fogalmazva levezethető az egyensúlyi egyenletek általános és teljes, hat-hat feszültségfüggvényt tartalmazó megoldása a teljes potenciális energia minimum elvből, feltéve, hogy a mellékfeltételeket alkalmasan választjuk meg.

6. MEGJEGYZÉS: A (4.27) egyenlet szerint megegyeznek a  $V$ -n értelmezett multiplikátorok (feszültségfüggvények) az  $S_u$ -n értelmezett multiplikátorokkal – tehát az utóbbiak is feszültségfüggvények. Következésképp a feszültségfüggvényes megoldás az  $S_u$ -n is érvényes.

7. MEGJEGYZÉS: Az  $S_t$ -n kapott (4.28a,b) peremfeltételek az  $S_u$ -ra vonatkozó (3.14a,b) alakváltozási peremfeltételek *duális párjai* mivel [az előbbi] (az utóbbi) feltételek azonnal megkapathatók [az utóbbi] (az előbbi) feltételekből, ha rendre  $[\gamma, \kappa$ -t és  $u, \varphi$ -t írunk a  $H, F$  különbségek és  $w, r$  helyett] ( $H, F$  különbségeket és  $w, r$ -t írunk  $\gamma, \kappa$  és  $u, \varphi$  helyett).

9. MEGJEGYZÉS: A [30] tanulmány szerint a feszültségfüggvények  $V$ -n és  $S_t$ -n a

$$(4.30a) \quad \check{\mathcal{F}}_y{}^l - F_y{}^l = \tilde{r}^l{}_{;y}$$

$$(4.30b) \quad \check{\mathcal{H}}_{\eta b} - H_{\eta b} = \tilde{w}_{b;\eta} + \epsilon_{b\eta m} \tilde{r}^m$$

módon különbözhetnek egymástól. Vegyük észre, hogy az utóbbi képletek teljes mértékben összhangban vannak (4.28a,b) peremfeltételekkel. Arra is érdemes felhívni a figyelmet, hogy a (4.28a,b) peremfeltételekben a  $w, r$  vektormezőök felület menti kovariáns deriváltja jelenik csak meg, és ennek számításához elegendő, ha a két vektormezőt csak a felületen ismerjük.

10. MEGJEGYZÉS: A (4.29) végső soron a feszültségfüggvényekre kirótt folytonossági feltétel.

**4.5. Eredmények.** Az egyes eredményeket sorszámozzuk.

1. A szabad variációs feladat (4.10), (4.11a,b,c) és (4.12) függvényekkel értelmezett funkcionálja a klasszikus esetre vonatkozó (2.13) funkcionál általánosítása mikropoláris testre. A klasszikus esethez hasonlóan a következőket érdemes hangsúlyozni:

- A szerző által javasolt és fentebb idézett funkcionál nem tartalmaz semmiféle ellentmondást a kompatibilitási egyenletek és a feszültségfüggvények száma tekintetében. Mindkettő *hat-hat*, nem pedig *kilenc-kilenc*, mint a NOWACKI által megadott kompatibilitási egyenletek száma.

- A szabad variációs feladat itt bemutatott megfogalmazása megengedi a vegyes peremfeltételek figyelembevételét, hiszen a peremfelület – az  $S$  felület – az  $S_u$  és  $S_t$  jelű részekre bontott, és ezeken különböző típusú peremfeltétel írható elő. Ezt az teszi lehetővé, hogy a  $\Pi_2$  funkcionál értelmezési tartománya az  $S_t$ -n értelmezett feszültségfüggvényeket is tartalmaz.
  - Érdemes itt is megemlíteni, hogy nem előfeltétel az elmozdulásmező folytonossága a  $g$  görbén.
2. Kimutatta a szerző formális számításokkal, hogy a módosított teljes potenciális energia funkcionál stacionaritási feltételéből is kiadódnak mint EULER egyenletek – v.ö.: (4.26a,b) – az egyensúlyi egyenletek általános és teljes, SCHAEFER által talált [47] megoldásai. A megoldások csak *hat-hat* feszültségfüggvényt tartalmaznak, ha a mellékfeltételeket alkalmasan választjuk meg.
  3. Megtalálta a szerző a statikai-kinematikai analógia hiányzó, a test határfelületére vonatkozó egyenleteit. A kapott eredmények szerint az  $S_t$ -n adódó (4.28a,b) peremfeltételek az  $S_u$ -ra vonatkozó (3.14a,b) alakváltozási peremfeltételek *duális párjai* mivel [az előbbi] (az utóbbi) feltételek azonnal megkaphatók [az utóbbi] (az előbbi) feltételekből, ha rendre  $[\gamma, \kappa$ -t és  $u, \varphi$ -t írunk a  $H, F$  különbségek és  $w, r$  helyett] ( $H, F$  különbségeket és  $w, r$ -t írunk  $\gamma, \kappa$  és  $u, \varphi$  helyett).

A vonatkozó publikációkat illetően a [62] tanulmányra utalunk. A felsorolt eredmények 100%-ban a szerző eredményei.



## 5. AZ EGYÉRTÉKŰSÉG MAKRÓ FELTÉTELEI VEGYES PEREMÉRTÉKFELADATOKRA. SZÁRMAZTATÁS A KIEGÉSZÍTŐ ENERGIA MAXIMUM ELVBŐL – KLASSZIKUS ESET

**5.1. Irodalmi előzmények.** Ami a klasszikus esetet illeti SOUTHWELL [51], [52] volt az első, aki a kompatibilitási feltételeket a teljes kiegészítő energia minimum elvből, mint variációs elvből származtatta. Ugyanakkor arra is rámutatott, hogyha három feszültségfüggvényt alkalmaz – a MAXWELL [35] és MORERA [37] féle megoldásokat használta fel – akkor csak három kompatibilitási differenciálegyenlet következik a hat SAINT VENANT féle kompatibilitási egyenletek közül a stacionaritási feltételből. Mivel egy zárt felülettel határolt tartományon tetszőleges feszültségi állapot megadható alkalmasan választott három feszültségfüggvénnyel – több zárt felülettel határolt tartomány esetén zérus térfogati terhelés mellett is, illetve zérustól különböző térfogati terhelés mellett mindig, amint azt már láttuk a 1. Fejezetben, ki kell egészíteni a feszültségfüggvényes megoldást az egyensúlyi egyenletek egy partikuláris megoldásával – SOUTHWELL ellentmondásra jutott, hiszen az alakváltozásmezők kompatibilitásának elégséges feltétele a hat SAINT VENANT féle kompatibilitási egyenlet fennállása. A paradoxont, amelyre jutott, utána nevezték el SOUTHWELL paradoxonnak. SOUTHWELL idézett cikkei után a következő kérdések maradtak megoldatlanok: Elegendő-e a kompatibilitás fennállásához három kompatibilitási egyenlet fennállása. Ha igen, melyik három. Ha igen, vannak-e további feltételek a kompatibilitás fennállásához.

A paradoxon részletes leírása, ez a feszültségfüggvények megválasztásának összes lehetséges esetét felöleli, RIEDER tanítványának STICKFORTHnak a nevéhez fűződik [54], aki WASHIZU egy részeredményének [82] általánosításával kimutatta, hogy a kompatibilis alakváltozásmezők eleget tesznek bizonyos peremfeltételeknek. Ezeknek a feltételeknek később KOZÁK a kompatibilitási peremfeltétel nevet adta, és kimutatta, háromféleképpen is, tiszta matematikai úton [27], a kiegészítő energia maximum elv felhasználásával [26] és a virtuális munka elv duál alakjának felhasználásával [28], hogy az alakváltozásmezők kompatibilitásának szükséges és elégséges feltétele három alkalmasan választott kompatibilitási differenciálegyenlet és a kompatibilitási peremfeltételek fennállása. Az utóbbi két tanulmány egyedüli abban a tekintetben, hogy a vizsgálatok vegyes peremértékfeladatra vonatkoznak.

Az eddig idézett tanulmányok mindegyike egyszeresen összefüggő tartományt tételez fel.

Többszörösen összefüggő tartomány, síkfeladatok és feszültségi peremfeltételek feltételezése mellett PRAGER [44] kimutatta, hogy a MITCHELL féle feltételek [36], [18], vagy ami ugyanaz a kompatibilitás makró feltételei, természetes peremfeltételek, amelyek a kiegészítő energia minimum elvből következnek. PRAGER eredményét egymástól függetlenül HU HAICHANG [19] és SZEIDL–VAN GEMERT [78] általánosította vegyes peremértékfeladatokra (az elsőbbség HU HAICHANG–é). Ami a háromméretű feladatokat illeti feszültségi peremfeltételeket és többszörösen összefüggő tartományt tételezve fel MORIGUTI [38] és STICKFORTH [53] dolgozatait kell említeni, megjegyezve, hogy STICKFORTH nem ismerte MORIGUTI idézett cikkét. Az utóbbi két dolgozat sem adott megoldást a SOUTHWELL paradoxonra és a vegyes peremértékfeladatok esetét szintén figyelmen kívül hagyták.

A szóhasználat egyértelműsége kedvéért, megismételve a teljesség kedvéért a római v. o.-on mondottakat, az alábbiakban állapotunk meg. A *kompatibilitás makró feltételein* a többszörösen összefüggő tartományon szükséges azon feltételek összességét értjük, amelyeknek a kompatibilitási differenciálegyenleten és a kompatibilitási peremfeltételeken – ezeknek mind egyszeresen mind pedig többszörösen összefüggő tartományon fenn kell állnia – túlmenően teljesülniök kell.

A kompatibilitás makró feltételeit két csoportba soroljuk attól függően, hogy milyenek a peremfeltételek annak az egyszeresen összefüggő zárt felületi görbének a pontjaiban, amely mentén ezeket a feltételeket tekintjük. Ha a görbe minden pontjában feszültség előírt, akkor a vonatkozó makró feltétel *nagybani kompatibilitási feltétel*. Ha a görbének van legalább egy olyan íve, amelynek mentén elmozdulások az adottak, akkor a vonatkozó feltételt (feltételeket ha több ilyen ív létezik) *kiegészítő kompatibilitási feltételeknek* nevezzük.

Kitűnik a fenti irodalmi áttekintésből, hogy sem MORIGUTI [38], sem pedig STICKFORTH [53] nem adta meg a kompatibilitás kiegészítő feltételeit.

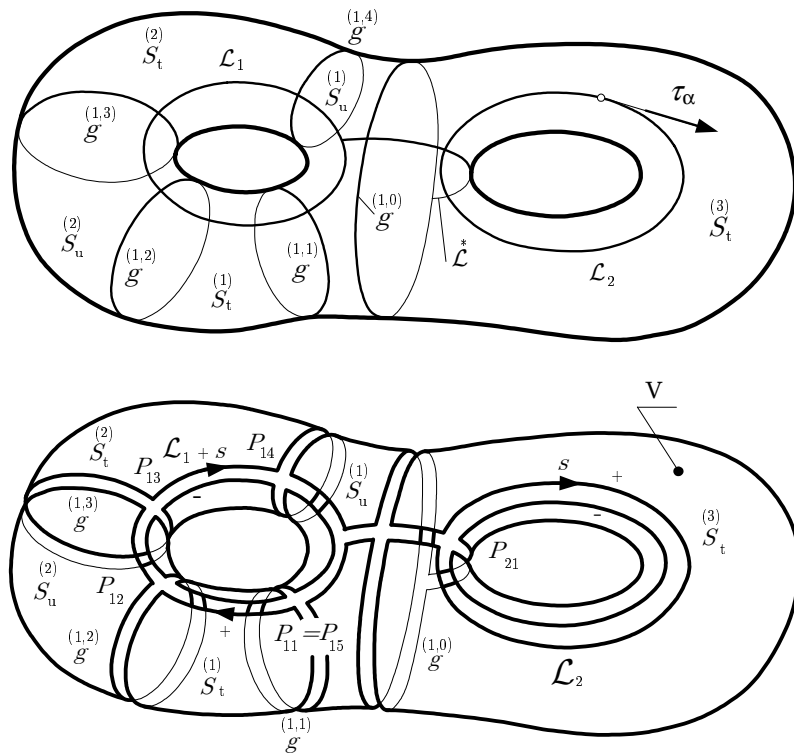
**5.2. Célkitűzések.** Az fenti szakaszban megfogalmazott problémák alapján szerző célul tűzte ki az alábbi, klasszikus esetre vonatkozó problémák megoldását:

- A kompatibilitás kiegészítő feltételeinek levezetése háromméretű problémák és vegyes peremértékfeladatok esetén geometriai megfontolásokból.
- Igazolni formális számításokkal, hogy a kompatibilitás vegyes peremértékfeladatok és háromméretű test esetre vonatkozó kiegészítő feltételei a teljes kiegészítő energia maximumából következő természetes peremfeltételek.

Az igazolás gondolatmenetét [70] és [65] alapján ismertetjük.

**5.3. A kiegészítő kompatibilitási feltételek származtatása geometriai megfontolásokból.**

**5.3.1.** A vizsgálatokat az 5.1. ábrán vázolt, egy zárt felülettel határolt, háromszorosan összefüggő testre végezzük el. Világosan látszik az ábráról, hogy az  $S_u$ ,  $S_t$  felületrészek valamint a  $g$  görbe



5.1. és 5.2. ábrák.

több részből is állhat, azaz

$$S_u = S_u^{(1)} \cup S_u^{(2)}; \quad S_t = S_t^{(1)} \cup S_t^{(2)} \cup S_t^{(3)} \quad \text{és} \quad g^{(1,0)} \cup g^{(1,1)} \cup g^{(1,2)} \cup g^{(1,3)} \cup g^{(1,4)}.$$

Határesetben az

$$S_u^{(1)}, S_u^{(2)} \quad \text{és} \quad S_u \quad \text{vagy} \quad S_t^{(1)}, S_t^{(2)}, S_t^{(3)} \quad \text{és} \quad S_t$$

részfelületek bármelyike üres halmaz is lehet.

Az egymást nem metsző zárt  $\mathcal{L}_1$  és  $\mathcal{L}_2$  görbék rendre a tartományban lévő első és második lyukat ölelik körül – v.ö. 5.1. ábra.

Lényeges a további vizsgálatok szemszögéből, hogy az  $S_u$  és  $S_u$  háromszorosan, illetve kétszeresen összefüggő zárt felületek, ezt jól szemlélteti az 5.2. ábra. Az 5.2. ábra az  $S$  felület egyszerűen összefüggő részekre történő felhasításának egy olyan lehetőségét szemlélteti, amely felhasználja a  $g$ ,  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  és  $\mathcal{L}^*$  görbéket. Az  $\mathcal{L}_1$  és  $\mathcal{L}_2$  görbék az alábbi pontokban metszik a  $g$  és  $\mathcal{L}^*$  görbéket:

$$P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14} \quad \text{és} \quad P_{21}.$$

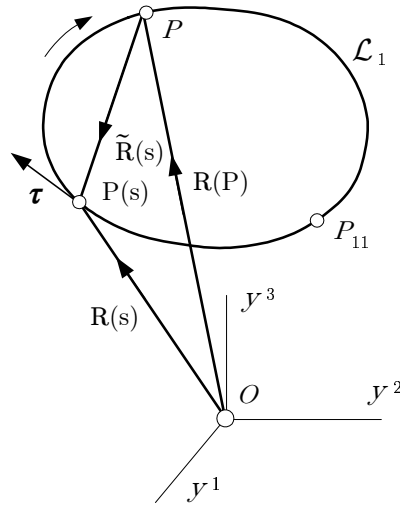
Az  $\mathcal{L}_1$  görbe részeit a

$$\mathcal{L}_{1j} = P_{1j} P_{1,j+1} \quad j = 1, \dots, 4$$

módon definiáljuk. A parciális integrálások során STOKES tétele kerül felhasználásra, szem előtt tartva azt a körülményt, hogy a tétel csak egyszeresen összefüggő felületre érvényes.

Érdeemes megemlíteni, hogy a vizsgált  $V$  tartománnyal és az  $S$  felület részekre bontásával kapcsolatos feltevéseink nem lényegiek, mivel a test háromszorosan összefüggő és a határfelület felbontása is eléggé általános.

**5.3.2.** Többszörösen összefüggő tartományon az (1.14) kompatibilitási differenciálegyenletek  $V$ -n és az (1.16) kompatibilitási peremfeltételek teljes  $S$ -n történő fennállása nem elegendő ahhoz, hogy



5.3. ábra.

az  $e_{kl}$  alakváltozási tenzor kompatibilis legyen, hanem a nagybani kompatibilitási feltétel néven ismert kiegészítő feltételeknek ugyancsak teljesülniök kell. Alábbiakban a kompatibilitás makró feltételeit, közöttük a *vegyes peremértékfeladatok esetén szükséges kiegészítő feltételeket*, geometriai megfontolásokból származtatjuk. Tekintsük az  $\mathcal{L}_1$  görbét – v.ö. 5.2. és 5.3. ábra. Legyen  $P$  az  $\mathcal{L}_1$  görbe tetszőleges, de rögzített pontja. A  $P(s)$  pont  $P$ -re vonatkoztatott helyvektorát  $\tilde{\mathbf{R}}(s) = \tilde{R}^v \mathbf{a}_v(s)$  jelöli. Figyeljük meg, hogy a bázis az  $s$  ívkoordinátájú pontban van. Nyilvánvaló, hogy

$$(5.1) \quad \tau^\alpha \mathbf{a}_\alpha = \frac{d\tilde{\mathbf{R}}}{ds} = \frac{d(\mathbf{R}(s) - \mathbf{R}(P))}{ds} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^\alpha} \frac{d\xi^\alpha}{ds} = \frac{d\xi^\alpha}{ds} \mathbf{a}_\alpha. \quad s \in \mathcal{L}_1$$

A

$$(5.2) \quad \varphi^l = \frac{1}{2} \epsilon^{lpd} u_{d;p} \quad x \in V$$

mervtetszerű forgással írhatjuk, hogy

$$(5.3a) \quad \varphi^3 = \frac{1}{2} \epsilon^{3\lambda\vartheta} u_{\vartheta|\lambda} \quad \xi \in S$$

és tekintettel az (1.1) kinematikai egyenletre

$$(5.3b) \quad \varphi^\lambda = \epsilon^{\lambda 3\vartheta} \left[ \frac{1}{2} (u_{\vartheta;3} + u_{3|\vartheta}) - u_{3|\vartheta} \right] = \epsilon^{\lambda 3\vartheta} (e_{\vartheta 3} - u_{3|\vartheta}). \quad \xi \in S$$

1. MEGJEGYZÉS: Tegyük fel, az egyszerűség kedvéért, hogy ismeretes az  $u_k$  elmozdulásmező az  $S$ -en. Az (5.3a) egyenlet azt fejezi ki, hogy  $u_k(\xi)$  egyértelműen meghatározza a  $\varphi^3$  merevtetszerű forgást. Ezzel szemben az (5.3b) magába foglalja az  $u_{\lambda;3}$  normálirányú deriváltat, következésképp a  $\varphi^\lambda$ -t csak részben határozza meg  $u_k(\xi)$ .

**5.3.3.** Az (1.1) kinematikai egyenlet felhasználásával (5.2)–ből a

$$(5.4) \quad \varphi^l_{.;y} = \frac{1}{2} \epsilon^{lpd} (u_{d;py} + u_{y;dp}) = \epsilon^{lpd} e_{yd;p} \quad x \in V$$

következik, ahonnan – tekintettel (5.1)–re – kapjuk, hogy

$$(5.5) \quad \frac{d\varphi^l}{ds} = \tau^\eta \varphi^l{}_{;\eta} = \tau^\eta \epsilon^{lpd} e_{\eta d;p}$$

és így

$$(5.6) \quad (\varphi^\lambda \mathbf{a}_\lambda + \varphi^3 \mathbf{a}_3)|_P = (\varphi^\lambda \mathbf{a}_\lambda + \varphi^3 \mathbf{a}_3)|_{P_{11}} + \int_{P_{11}}^P \tau^\eta \epsilon^{lpd} e_{\eta d;p} \mathbf{a}_l ds.$$

Az (1.1) és (5.2) egyenletek egybevetéséből

$$u_{k;l} = e_{kl} - \epsilon_{klr} \varphi^r, \quad x \in V$$

ahonnan az 5.3. ábra jelöléseivel és az (5.1) képlet felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} u_{k;\eta} \tau^\eta &= \tau^\eta e_{\eta k} - \epsilon_{kvl} \varphi^l \mathbf{a}^v \cdot \frac{d(\mathbf{R}(s) - \mathbf{R}(P))}{ds} = \\ &= \tau^\eta e_{\eta k} - \frac{d}{ds} \left[ \epsilon_{kvl} \varphi^l (R^v(s) - R^v(P)) \right] + \epsilon_{kvl} \frac{d\varphi^l}{ds} (R^v(s) - R^v(P)) \end{aligned}$$

azaz, tekintettel az (5.5) képletre is, hogy

$$(5.7) \quad \frac{du_k \mathbf{a}^k}{ds} = -\frac{d}{ds} \left\{ (R^v(s) - R^v(P)) \epsilon_{kvl} \varphi^l \mathbf{a}^k(s) \right\} + \left[ \tau^\eta e_{\eta k} + \tau^\eta \epsilon_{kvl} \epsilon^{lpd} e_{\eta d;p} (R^v(s) - R^v(P)) \right] \mathbf{a}^k(s), \quad s \in \mathcal{L}_1.$$

A fenti képletben a bázis az  $s$  pontban van. A  $P_{11}$  és  $P$  pontok közötti integrálás után innen következik, hogy

$$(5.8) \quad \begin{aligned} u_k \mathbf{a}^k|_P &= u_k \mathbf{a}^k|_{P_{11}} + \epsilon_{kvl} \varphi^l (R^v(s) - R^v(P)) \mathbf{a}^k|_{P_{11}} \\ &+ \int_{P_{11}}^P \tau^\eta \left[ e_{\eta k} + \epsilon_{kvl} \epsilon^{lpd} (R^v(s) - R^v(P)) e_{\eta d;p} \right] \mathbf{a}^k ds \end{aligned}$$

Az utóbbi képletben lokalizálás esetén – jobboldal első két tag – a bázis a lokalizálás helyén van. Futópont esetén – integrandusz – az  $s$  pontban van a bázis. Ezt a megállapodást a továbbiakban is mindig érvényesnek tekintjük. Az (5.6) és (5.8) képletek CESARO formulái. A rövid levezetést a gondolatmenet részeredményeinek későbbi felhasználása kedvéért közöltük.

Visszatérve a háromszorosan összefüggő  $V$  tartománnyal kapcsolatos problémához – lásd 5.1. ábra – az  $e_{kl}$  alakváltozásmezők kompatibilitásához az (1.14) kompatibilitási differenciálegyenletek  $V$ -n és az (1.16) kompatibilitási peremfeltételek teljes  $S$ -n történő fennállása mellett az is szükséges, hogy a  $\varphi^l$  merevtestszerű forgás és az  $u_k$  elmozdulásmező egyértékű legyen minden olyan egyszerű zárt görbe mentén, amely a két lyukat körülöleli. Kimutatható, hogy az utóbbi feltételt biztosító makró egyértékűségi feltételek teljesülése a lyukakat körülölelő egy-egy zárt görbe mentén – választhatjuk például az  $\mathcal{L}_1$  és  $\mathcal{L}_2$  görbékét – elegendő ahhoz, hogy a  $\varphi^l$  merevtestszerű forgás és az  $u_k$  elmozdulásmező egyértékű legyen minden más a lyukakat körülölelő egyszerű zárt görbe mentén, feltéve, hogy fennállnak az (1.14) kompatibilitási differenciálegyenletek  $V$ -n és az (1.16) kompatibilitási peremfeltételek a teljes  $S$ -n.

Mondottak alapján az  $\mathcal{L}_1$  és  $\mathcal{L}_2$  görbékre korlátozzuk a figyelmet a további vizsgálatok során. Vegyük észre, hogy az  $\mathcal{L}_2$  görbe teljes egészében az  $S_t$ -n belül fekszik. Következésképp a  $\varphi^l$  merevtestszerű forgás egyértékűségéhez az (5.6)-ból adódó, az  $\mathcal{L}_2$  görbére vonatkozó

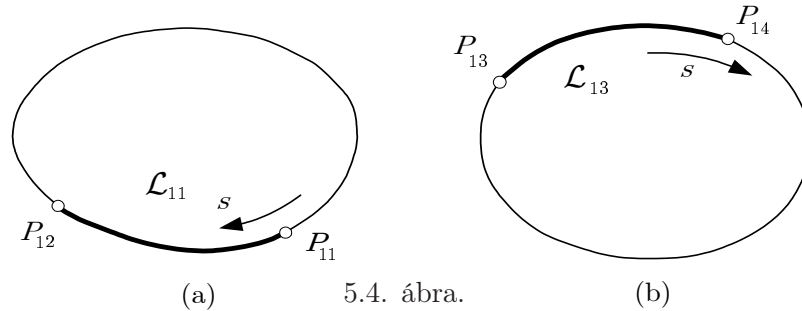
$$(5.9) \quad \oint_{\mathcal{L}_2} \tau^\eta \epsilon^{lpd} e_{\eta d;p} \mathbf{a}_l ds = \oint_{\mathcal{L}_2} \tau^\eta \epsilon^{\rho\theta 3} e_{\eta\theta|\rho} \mathbf{a}_3 ds + \oint_{\mathcal{L}_2} \tau^\eta \epsilon^{\lambda\theta 3} (e_{\eta 3|\theta} - e_{\eta\theta;3}) \mathbf{a}_\lambda ds = 0$$

nagybani egyértékűségi feltétel fennállása is szükséges. Hasonló gondolatmenettel kapjuk meg (5.8)–ból az  $u_k$  elmozdulásmezővel kapcsolatos, az  $\mathcal{L}_2$  görbére vonatkozó

$$(5.10) \quad \oint_{\mathcal{L}_2} \tau^\eta \left[ e_{\eta k} + \epsilon_{kvl} \epsilon^{lpd} (R^v(s) - R^v(P_{21})) e_{\eta d;p} \right] \mathbf{a}^k ds = 0$$

nagybani egyértékűségi feltételt.

Az  $\mathcal{L}_1$  görbe  $[\mathcal{L}_{11}$  és  $\mathcal{L}_{13}] \{\mathcal{L}_{12}$  és  $\mathcal{L}_{14}\}$  részei teljes egészében  $[S_{t-n}] \{S_{u-n}\}$  belül fekszenek. Ennek a körülménynek a fényében a hiányzó kiegészítő kompatibilitási feltételek kérdése a következőképp fogalmazható át: Mi a hatása a nagybani kompatibilitási feltételekre annak a körülménynek, hogy az első lyukat körülölelő,  $S$ -en fekvő egyszerű zárt görbék kétszer is áthaladnak az  $S_u$  felületrészen? Egy geometriai megoldást az alábbiak részleteznek. Tegyük fel, hogy az  $\mathcal{L}_1$  görbe két ívre bontott. A felbontást az 5.4(a) ábra szemlélteti. A vastag vonallal rajzolt  $\mathcal{L}_{11}$  íven feszültség az előírt. Az ív vékonyan rajzolt részén, azaz a  $P_{12}, P_{11}$  végpontok között elmoz-



(a) 5.4. ábra. (b)

dulások adóttak. Ahhoz, hogy egyértékű legyen a  $\varphi^l$  merevtestszerű forgás a két részre bontott  $\mathcal{L}_1$  íven – a felbontást illetően ismét hivatkozunk az 5.4(a) ábrára – fenn kell állnia a

$$(5.11a) \quad \varphi^l \mathbf{a}_l \Big|_{P_{11}}^{P_{12}} + \varphi^l \mathbf{a}_l \Big|_{P_{12}}^{P_{11}} = 0$$

folytonossági feltételnek. Vegyük észre, hogy a fenti egyenlet nem mond semmit a  $\varphi^l$  merevtestszerű forgás  $P_{12}, P_{11}$  íven belüli viselkedéséről. Következésképp további egyértékűségi feltételnek kell fennállnia az  $\mathcal{L}_1$  íven, feltéve hogy az ív az 5.4.(b) ábrán vázolt módon van két részre osztva:

$$(5.11b) \quad \varphi^l \mathbf{a}_l \Big|_{P_{13}}^{P_{14}} + \varphi^l \mathbf{a}_l \Big|_{P_{14}}^{P_{13}} = 0.$$

A fenti egyenletek baloldalán álló első tag az (5.6) képletből számítható az integrálási határok alkalmas megválasztásával. Ami a második tagot illeti az (5.3a,b) összefüggést kell alkalmazni, figyelembe véve, hogy ismeretesek az elmozdulások az  $\mathcal{L}_1$  íven, ha

$$(5.12) \quad s \in (s(P_{1j}) - \epsilon, s(P_{1j})) \quad \text{vagy} \quad s \in [s(P_{1,j+1}), s(P_{1,j+1}) + \epsilon) \quad j = 1, 3;$$

ahol az  $\epsilon$  kicsi, pozitív, egyébként tetszőleges mennyiség. Ily módon kapjuk, hogy

$$(5.13) \quad \left[ \frac{1}{2} \epsilon^{3\lambda\vartheta} \hat{u}_{\vartheta|\lambda} \mathbf{a}_3 + \epsilon^{\lambda 3\vartheta} (e_{\vartheta 3} - \hat{u}_{3|\vartheta}) \mathbf{a}_\lambda \right] \Big|_{P_{1,i+1}}^{P_{1i}} + \int_{\mathcal{L}_{1i}} \tau^\eta \epsilon^{\rho\vartheta 3} e_{\eta\vartheta|\rho} \mathbf{a}_3 ds \\ + \int_{\mathcal{L}_{1i}} \tau^\eta \epsilon^{\lambda\vartheta 3} (e_{\eta 3|\vartheta} - e_{\eta\vartheta;3}) \mathbf{a}_\lambda ds = 0 \quad i = 1, 3.$$

Vegyük észre, hogy az (5.13) feltételek fennállása esetén folytonos a merevtestszerű forgás a teljes  $\mathcal{L}_1$  íven.

Könnyű ellenőrizni az (5.13)-ra vezető gondolatmenet ismétlésével, hogy az  $u_k$  elmozdulásmező tekintetében az

$$(5.14) \quad u_k \mathbf{a}^k \Big|_{P_{11}}^{P_{12}} + u_k \mathbf{a}^k \Big|_{P_{12}}^{P_{11}} = 0 \quad \text{és} \quad u_k \mathbf{a}^k \Big|_{P_{13}}^{P_{14}} + u_k \mathbf{a}^k \Big|_{P_{14}}^{P_{13}} = 0$$

folytonossági feltételeknek kell fennállni. Az utóbbi feltétel három lépésben hozható alkalmasabb alakra:

1. Vegyük ismét figyelembe, hogy az  $u_k$  elmozdulásmező az előírt, ha az  $s$  ívkoordináta teljesíti az (5.12) feltételt; ez a körülmény a baloldalon álló második tagokat befolyásolja.
2. A következő lépésben az (5.8) CESARO formulát kell alkalmazni a baloldalon álló első tagok (különbségek) számítására.
3. Végezetül az (5.3a,b) képletek helyettesítése szükséges a  $\varphi^3$  és  $\varphi^\lambda$  merevtestszerű forgások  $P_{11}$  és  $P_{13}$  pontbeli értékeinek számítására.

A felsorolt lépések végrehajtása után az

$$(5.15) \quad \hat{u}_k \mathbf{a}^k \Big|_{P_{1,i+1}}^{P_{1i}} + \epsilon^{\lambda 3 \vartheta} (e_{3\vartheta} - \hat{u}_{3|\vartheta}) \epsilon_{\lambda kl} \left( R^k(P_{1,i+1}) - R^k(P_{1i}) \right) \mathbf{a}^l \Big|_{P_{1i}} \\ + \frac{1}{2} \epsilon^{3\lambda\vartheta} \hat{u}_{\vartheta;\lambda} \epsilon_{3\psi\rho} \left( R^\psi(P_{1,i+1}) - R^\psi(P_{1i}) \right) \mathbf{a}^\rho \Big|_{P_{1i}} \\ + \int_{L_{1i}} \tau^\eta \left\{ e_{\eta k} + \epsilon^{lpd} \epsilon_{kvl} [R^v(s) - R^v(P_{1,i+1})] e_{\eta d;p} \right\} \mathbf{a}^k ds = 0 \quad i = 1, 3$$

eredmény, azaz a még hiányzó kiegészítő kompatibilitási feltétel következik.

2. MEGJEGYZÉS: Az (5.13) és (5.15) kiegészítő kompatibilitási feltételek formailag az (5.9) és (5.10) nagybani kompatibilitási feltételekre egyszerűsödnek, ha az óramutató járásával ellentétes irányban mozogva a  $P_{1,i+1}$  pont eléri a  $P_{1i}$  pontot, vagy ami ugyanez, ha az  $\mathcal{L}_{1i}$  ív egybeesik az  $\mathcal{L}_1$  zárt görbével.

#### 5.4. Származtatás a teljes kiegészítő energia maximumának elvéből.

**5.4.1.** Az  $e_{kl}$  alakváltozásmező [kompatibilitásának] {kinematikailag lehetséges voltának} egyszerűen összefüggő tartományon szükséges és elégséges feltételei a teljes kiegészítő energia maximumának, mint variációs elvnek EULER egyenletei és természetes peremfeltételei – a részletes igazolást illetően KOZÁK [26] tanulmányára utalunk. Mondottakból azonnal következik, hogy az alábbi gondolatmenet két dologtól eltekintve az idézett tanulmányhoz igazodik:

1. Variálhatók a (2.8a,b) peremfeltételeknek, mint mellékfeltételeknek eleget tevő feszültségfüggvények, feltéve hogy a feszültségek variációja a peremen az adott variációk mellett mindig zérus értékű marad. Ebben a tekintetben olyan megoldást választunk a 2. Fejezet eredményeinek alapján, amely nem igényli a variációkat adó vektormezők  $S_t$  felület normálisa mentén vett deriváltjainak ismeretét.
2. Mivel a térfogati tartomány a jelen esetben többszörösen összefüggő, különös figyelemre van szükség a zérus feszültséget okozó feszültségfüggvények lehetséges szakadásainak kezelésében, amikor a STOKES tételt az  $S$  alkalmas felhasításokkal kapott egyszerűen összefüggő részein alkalmazzuk annak érdekében, hogy megkapjuk a kiegészítő kompatibilitási feltételeket.

**5.4.2.** Szigorú maximuma van a

$$(5.16) \quad K = -\frac{1}{2} \int_V t^{kl} e_{kl} dA + \int_{S_u} n_3 t^{3l} \hat{u}_l dA$$

teljes kiegészítő energiának, ha a statikailag lehetséges  $t_{kl}$  feszültségmező és  $e_{kl}$  alakváltozásmező egybeesik a tényleges megoldással.

Az (5.16) funkcionál extremumának a funkcionál első variációjának eltűnése szükséges feltétele:

$$(5.17) \quad \delta K = - \int_V e_{kl} \delta t^{kl} dV + \int_{S_u} n_3 \delta t^{kl} \hat{u}_\lambda dA = 0.$$

Vegyük észre, hogy az első variáció felírásakor kihasználtuk a jól ismert

$$\delta(t^{kl} e_{kl}) = 2e_{kl} \delta t^{kl}$$

relációt.

Az **5.4.3.**-al induló és az **5.4.8.**-al záruló szakaszok a  $-\delta K = 0$  extremumfeltétel alkalmas alakra hozását részletezik. Az egymást követő lépések természetének tisztázása érdekében röviden áttekintjük az átalakítások gondolatmenetét.

- (a) Az **5.4.3.** szakasz, lásd alább, olyan alakban adja meg a feszültségek variációit, hogy az biztosítsa a szükséges mellékfeltételek fennállását mind a  $V$ -n, mind pedig az  $S_t$ -n.
- (b) Az **5.4.4.** szakasz az integrálátalakításokkal foglalkozik. Nem szabad megfeledkezni arról a STOKES tétel alkalmazása során, hogy az  $S$  felület egyszerűen összefüggő részekre van felhasítva és a vonatkozó integrálokat ezeken a részeken külön-külön vesszük sorra. Következésképp vonalintegrálok is adódnak az átalakításokból. A vonalintegrálok egy része törli egymást, ha teljesülnek a következő feltételek:

1. Folytonosak az integrálokban szereplő változók a peremgörbe tekintett íve mentén.
2. Kétszer megyünk végig a peremgörbék mentén – egyszer az egyik oldalon, majd a másik oldalon. (Amikor például az  $S_u$ -n alkalmazzuk a STOKES tételt kétszer megyünk végig a peremgörbe  $P_{12}, P_{13}$  ívén.)

Érdemes azt is megemlíteni már ehelyütt, hogy  $\delta w_l$  kivételével – ez az  $S_t$ -n értelmezett  $w_l$  vektormező variációja, amint az lentebb majd kiderül – az összes többi változó folytonos az egész  $S$  felületen. Ami pedig  $\delta w_l$ -t illeti az folytonos az egyszerűen összefüggő

$$\begin{matrix} (1) & (2) & & (3) \\ S_t, & S_t & \text{és} & S_t \end{matrix}$$

felületrészeken de szakadása van az

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{11} \cup \mathcal{L}_{13} \cup \mathcal{L}_2$$

íven. Az első integrált amely tartalmazza  $\delta w_l$ -t az (5.30) összefüggésből kapjuk majd az (5.21a,b) mellékfeltételek helyettesítése után. Az ezt követő lépésekben különös figyelmet kell fordítani az  $\mathcal{L}_{11}, \mathcal{L}_{13}$  és  $\mathcal{L}_2$  íveken vett vonalintegrálokra.

- (c) Az **5.4.5.** szakasz tartalmazza a stacionaritási feltétel előállítását a térfogati és vonalintegrálok tekintetében.
- (d) Az **5.4.6 – 5.4.8.** szakaszok a  $g$  és  $\mathcal{L}$  görbéken vett integrálok alkalmas alakra történő transzformálását részletezik.

**5.4.3.** Mivel a  $t^{kl}$  feszültségek statikailag lehetségesek kell, hogy legyenek – a definíciót illetően a 3. oldalra utalunk – ki kell elégíteniük az (1.3) és (1.5) mellékfeltételeket. Következésképp nem vehetők fel szabadon a  $\delta t^{kl}$  variációk, hanem teljesíteniük kell a

$$(5.18) \quad \delta t^{kl}_{\dots;k} = 0 \quad x \in V \quad \text{és} \quad n_3 \delta t^{3l} = 0 \quad \xi \in S_t$$

a feltételeket. Ezek annak figyelembevételével következnek az (1.3) egyensúlyi egyenletből és az (1.5) feszültségi peremfeltételből, hogy zérus a  $b_l$  térfogati terhelés és a  $\hat{t}_l$  felületi terhelés variációja. Az utóbbi körülményre tekintettel azt is feltételezzük a továbbiakban – v.ö.: (1.6) –, hogy zérus a  $\delta B^l$  variáció is.

Azonnal következik az (1.12) és (1.17) képletekből hogy identikusan teljesülnek az (5.18)<sub>1,2</sub> mellékfeltételek amennyiben feszültségfüggvények variációival fejezzük ki a feszültségek variációt:

$$(5.19) \quad \delta t^{kl} = \epsilon^{krm} \epsilon^{lsp} \delta \mathcal{H}_{rs;mp}, \quad x \in V$$

ahol  $\delta \mathcal{H}_{rs}$  tetszőleges lehet a  $V$ -n, de az  $S_t$ -n fenn kell állnia az

$$(5.20) \quad n_3 \epsilon^{3\eta\kappa} \epsilon^{ldp} \delta \mathcal{H}_{\eta d;p\kappa} = 0 \quad \xi \in S_t$$

mellékfeltételeknek.

Legyen  $\delta w_l$  az  $S_t$ -n értelmezett  $w_l$  vektormező variációja. Ha kielégítik a feszültségfüggvények  $\delta \mathcal{H}_{\eta d}$  variációi a

$$(5.21a) \quad \delta \mathcal{H}_{\lambda\kappa} = \delta w_{(\lambda|\kappa)} \quad \xi \in S_t$$

és

$$(5.21b) \quad (\delta \mathcal{H}_{\kappa\lambda} - \delta w_{3|\kappa})_{||\lambda} + b_\lambda^\alpha (\delta \mathcal{H}_{\alpha\kappa} - \delta w_{\alpha|\kappa}) - (\delta H_{\kappa\lambda;3} - \delta H_{\lambda 3;\kappa}) = 0 \quad \xi \in S_t$$

feltételeket, akkor az (5.20) mellékfeltételek is fennállnak. Egyszerű az utóbbi állítás igazolása, ha figyelembe vesszük, hogy az (5.20) és (5.21a,b) mellékfeltételek megegyeznek az (1.16) kompatibilitási peremfeltétellel – az  $\mathcal{E}^{ab}$  inkompatibilitási tenzort az (1.10) egyenlet értelmezi –, valamint az (1.15a,b) alakváltozási peremfeltételekkel, ha rendre  $e_{\eta d}$ -t és  $w_l$ -et írunk  $\delta \mathcal{H}_{\eta d}$  és  $\delta w_l$  helyére a (5.20) és (5.21a,b) egyenletekben. Ha még azt is visszaidézzük, hogy az alakváltozási peremfeltételek fennállása eleve biztosítja az (1.15a,b) kompatibilitási peremfeltételek teljesülését, akkor máris levonható a következtetés, hogy igaz a fenti állítás.

**3. MEGJEGYZÉS:** Más megfogalmazásban azt mondhatjuk, hogy fentiek a **2.4.** szakasz eredményeit tükrözik. Ezzel a (2.58a,b) és (2.59) képletekre, valamint arra a körülményre utalunk, hogy az [egyensúly] és {statikailag lehetséges}, valamint a [kompatibilitás] és {kinematikailag lehetséges} páronként duális fogalmak.

4. MEGJEGYZÉS: A fenti állítás viszonylag hosszú és több megfontolást tartalmazó igazolását a KOZÁK–SZEIDL [75] közölte 1996-ban. Maga az eredmény azonban jóval korábban 1980-ban született – KOZÁK [29].

5. MEGJEGYZÉS: A fentebb is említett és a fenti állítás háttérét adó statikai–kinematikai analógiát a KOZÁK–SZEIDL tanulmány [76] publikálta. Az analógia az

$$(5.21c) \quad \delta\mathcal{H}_{\kappa\lambda|\vartheta} + \delta\mathcal{H}_{\lambda\kappa|\vartheta} - \delta w_{\lambda|\kappa|\vartheta} - \delta w_{3|\lambda} b_{\vartheta\kappa} = 0 \quad \xi \in S_t$$

egyenletet is tartalmazza. Ez az egyenlet az (1.19) egyenlet duális párja.

6. MEGJEGYZÉS: Kozák [29] feltételezi, hogy

$$(5.22) \quad \delta\mathcal{H}_{kl} = \delta w_{(k;l)} \quad \xi \in S_t$$

Ez az egyenlet, szemben az (5.21a,b) feltételekkel és az (5.21c) azonossággal, magában foglalja a  $\delta w_{\kappa;3}$  normálirányú deriváltat. A statikai–kinematikai analógia kapcsán kimutattuk – 23. oldal 10. MEGJEGYZÉS –, hogy egy (5.22) alakú feltétel magában foglalja (5.21a,b)-t [következésképp (5.21c)-t is], de ennek megfordítása már nem igaz. Ez azt jelenti, hogy az (5.22) kevésbé szigorú mint az (5.21a,b) feltételek.

7. MEGJEGYZÉS: Az (5.21a,b) és (5.21c) feltételek  $\delta w_l(\xi)$  kifejezéseiben adottak és így nem mondanak semmit  $\delta w_{l;3}$ -ról az  $S_t$ -n. A feszültségfüggvények  $\delta\mathcal{H}_{kl}$  variációit folytonosnak tekintjük az  $S_u$  és  $S_t$ -t elválasztó  $g$  görbén. Az (5.22) összefüggésre tekintettel a folytonossági feltételből a

$$(5.23) \quad \delta\mathcal{H}_{\lambda 3} = \frac{1}{2}(\delta w_{\lambda;3} + \delta w_{3;\lambda}) \quad \xi \in g$$

egyenlet következik. Feltételezzük utóbbi egyenlet alapján, hogy tetszőlegesek a  $g$  görbe mentén a  $\delta\mathcal{H}_{\lambda 3}$ , vagy ami ugyanaz a  $\delta w_{\lambda;3}$  variációk.

8. MEGJEGYZÉS: Az (5.21a,b) és (5.21c) képletek valamint a 7. MEGJEGYZÉS szerint a  $\delta w_l$  variációk (azaz három skalárfüggvény) tetszőlegesek az  $S_t$ -n, a  $\delta w_l$  és  $\delta w_{\lambda;3}$  variációk (azaz öt skalárfüggvény) tetszőlegesek a  $g$  görbén.

9. MEGJEGYZÉS: Nem sérti az általánosságot, ha feltételezzük, hogy

$$(5.24) \quad \delta\mathcal{H}_{33} = \delta w_{3;3} . \quad \xi \in g$$

10. MEGJEGYZÉS: A feszültségfüggvény tenzor szerkezetével kapcsolatos kikötéseket [tetszőleges feszültségi állapot megadható három feszültségfüggvény segítségével stb. – v.ö.: a 4. oldal 2. MEGJEGYZÉS és (1.27) képletek (az utóbbiakat feszültségfüggvényekre vonatkoztatva)] a variációkra is érvényesnek vesszük, azaz

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H}_{RS} &\neq 0, & x \in V \\ \delta\mathcal{H}_{AB} &= 0, & x \in V \\ \delta\mathcal{H}_{\eta 3} = \delta\mathcal{H}_{3\eta} &= 0, & \xi \in S_u \\ \delta\mathcal{H}_{33} &= 0 & \xi \in S_u \end{aligned}$$

( $\delta\mathcal{H}_{RS}$  tetszőleges lehet). A fentiek ellenére és az általánosság kedvéért a formális átalakításokban és az eredményben a zérusnak tekintett variációkat is kiírjuk. A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy a variálás módozatait az  $S_t$ -n fentebb, az **5.4.3.** szakasz elején és a 3.–8. MEGJEGYZÉSEKben már tisztáztuk.

**5.4.4.** Az (5.19) és (5.20) variációk (5.17) extremum feltételbe történő helyettesítésével

$$(5.25) \quad -\delta K = I_1^V + I_1^{S_u} = \int_V \epsilon^{krm} \epsilon^{lsp} \delta\mathcal{H}_{rs;mp} e_{kl} dV - \int_{S_u} \epsilon^{3\eta\kappa} \epsilon^{ldp} \delta\mathcal{H}_{\eta d;p\kappa} \hat{u}_l dA = 0 .$$

Mivel az (5.25) egyenletben álló felületi integrál megegyezik az (A.5.1) egyenlet jobboldalával, ha az utóbbi egyenletben rendre  $\hat{u}_l$ -t,  $\delta\mathcal{H}_{kl}$ -t,  $S_u$ -t és  $g$ -t írunk,  $u_l$ ,  $\mathcal{H}_{kl}$ ,  $S_o$  és  $g_o$  helyett kapjuk,



hogy

$$(5.26) \quad I_1^{S_u} = I_2^{S_u} + I_1^G = - \int_{S_u} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} \{ \hat{u}_{\lambda;\kappa} \delta \mathcal{H}_{\eta\vartheta;3} + [(\hat{u}_{3|\kappa})_{||\lambda} + b_\lambda^\alpha \hat{u}_{\alpha;\kappa} + b_\beta^\beta \hat{u}_{(\lambda;\kappa)}] \delta \mathcal{H}_{\eta\vartheta} \\ + [(\hat{u}_{\lambda|\kappa})_{||\vartheta} + \hat{u}_{3|\lambda} b_{\vartheta\kappa}] \delta \mathcal{H}_{\eta 3} + b_{\eta\vartheta} \hat{u}_{(\lambda;\kappa)} \delta \mathcal{H}_{33} \} dA \\ + \int_g n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \tau^\vartheta (\hat{u}_{\vartheta|\kappa} \delta \mathcal{H}_{\eta 3} - \hat{u}_{3|\kappa} \delta \mathcal{H}_{\eta\vartheta}) ds - \int_g \tau^\eta \epsilon^{ldp} \delta \mathcal{H}_{\eta d;p} \hat{u}_l ds$$

hiszen az  $S_u$  felület a  $g$  görbe baloldalán fekszik, ha azon az 5.2. ábrán bejelölt pozitív haladási irányban megyünk végig.

A GAUSS tétel kétszeri, egymást követő alkalmazása és néma indexpárok alkalmas átnevezése után  $I_1^V$ -re nézve az

$$(5.27) \quad I_1^V = I_2^V + I_1^S = \int_V \epsilon^{rkm} \epsilon^{slp} e_{kl;mp} \delta \mathcal{H}_{rs} dV + \int_S n_3 \epsilon^{\kappa\rho 3} \epsilon^{lsp} (e_{l\kappa} \delta \mathcal{H}_{\rho s;p} - e_{l\kappa;p} \delta \mathcal{H}_{\rho s}) dA$$

képletet kapjuk. Ami az itt álló felületi integrált illeti, érdemes részekre bontani az  $\epsilon^{lsp}$ -t tartalmazó összeget. Kisebb átalakítások után adódik, hogy

$$(5.28) \quad I_1^S = I_1^{S_t} + I_3^{S_u} = \int_{S_u \cup S_t} n_3 \epsilon^{\kappa\rho 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} [e_{\lambda\kappa} \delta \mathcal{H}_{\rho\vartheta;3} - e_{\lambda\kappa} \delta \mathcal{H}_{\rho 3;\vartheta} - e_{3\kappa} \delta \mathcal{H}_{\rho\vartheta;\lambda} \\ - e_{\lambda\kappa;3} \delta \mathcal{H}_{\rho\vartheta} + e_{\lambda\kappa|\vartheta} \delta \mathcal{H}_{\rho 3} + e_{3\kappa|\lambda} \delta \mathcal{H}_{\rho\vartheta}] dA.$$

Az  $I_3^{S_u}$  integrál az (A.5.2) egyenlet segítségével hozható alkalmasabb alakra. Első lépésként átnevezzük az (A.5.2)-ben lévő  $\rho, \vartheta$  néma indexeket  $\kappa, \lambda$ -ra, illetve megfordítva a  $\kappa, \lambda$  néma indexeket  $\rho, \vartheta$ -ra. Ezt követően úgy kapjuk meg a kívánt eredményt, ha megismételjük az (5.26) egyenletre vezető gondolatmenetet, azaz rendre  $\hat{u}_l$ -t,  $\delta \mathcal{H}_{kl}$ -t,  $S_u$ -t és  $g$ -t írunk  $u_l, \mathcal{H}_{kl}, S_o$  és  $g_o$  helyett nem feledkezve meg arról, hogy baloldalon van az  $S_u$  felület, ha pozitív irányban haladunk végig a  $g$  görbe mentén; az utóbbi megállapítás a vonalintegrálok előjelét befolyásolja. Alkalmas indexátnevezések és a  $\tau^\vartheta$  érintőirányú egységvektor kiemelése után kapjuk, hogy

$$(5.29) \quad I_3^{S_u} = I_4^{S_u} + I_2^G = \int_{S_u} \left\{ n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} e_{\lambda\kappa} \delta \mathcal{H}_{\rho\vartheta;3} + (e_{\kappa\lambda||\vartheta} + e_{\lambda\kappa||\vartheta}) \delta \mathcal{H}_{\eta 3} \right. \\ \left. + (e_{3\kappa||\lambda} + b_\lambda^\alpha e_{\alpha\kappa} - e_{\kappa\lambda;3} + e_{\lambda 3|\kappa} - b_\beta^\beta e_{\lambda\kappa}) \delta \mathcal{H}_{\eta\vartheta} + b_{\eta\vartheta} e_{\lambda\kappa} \delta \mathcal{H}_{33} \right\} dA \\ - \int_g n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \tau^\vartheta (\delta \mathcal{H}_{\vartheta\kappa} e_{\eta 3}^U - \delta \mathcal{H}_{3\kappa} e_{\eta\vartheta}^U) ds,$$

ahol nem felső index az  $U$ , hanem a

$$\lim_{\xi \in S_u \rightarrow g} e_{kl}$$

határértéket jelöli. Ezt a jelölésbeli megállapodást később is alkalmazzuk.

A következő lépésben az a cél, hogy olyan alakra hozzuk az  $I_1^{S_t}$  felületi integrált, amely lehetővé teszi a (5.21a,b,c) mellékfeltételek helyettesítését. Ez a cél az (A.5.3) integrálatalakítás felhasználásával érhető el. Az eljárás ugyanaz mint fentebb láttuk az alábbi három körülményt kivéve: (a) Nincs szükség néma indexek átnevezésére a felületi integrálban. (b)  $S_t$ -t kell helyettesíteni az  $S_o$  helyére és ebből adódóan (c) változatlan marad a vonalintegrálok előjele.

Végül az

$$(5.30) \quad I_1^{S_t} = - \int_{S_t} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} \left\{ \delta \mathcal{H}_{\lambda\kappa} e_{\eta\vartheta;3} + (\delta \mathcal{H}_{\kappa\lambda||\vartheta} + \delta \mathcal{H}_{\lambda\kappa||\vartheta}) e_{\eta 3} \right. \\ \left. + (\delta \mathcal{H}_{3\kappa||\lambda} + b_\lambda^\alpha \delta \mathcal{H}_{\alpha\kappa} - \delta \mathcal{H}_{\kappa\lambda;3} + \delta \mathcal{H}_{\lambda 3;\kappa} - b_\beta^\beta \delta \mathcal{H}_{\lambda\kappa}) e_{\eta\vartheta} + b_{\eta\vartheta} \delta \mathcal{H}_{\lambda\kappa} e_{33} \right\} dA \\ + \int_g n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} (\tau^\vartheta \delta \mathcal{H}_{3\kappa} e_{\eta\vartheta}^T - \tau^\lambda \delta \mathcal{H}_{\lambda\kappa} e_{\eta 3}^T) ds$$

képlet adódik, ahonnan az (5.21a,b,c) mellékfeltételek helyettesítésével és a vonalintegrálok kapcsán végzett alkalmas indexátnevezésekkel az

$$(5.31) \quad I_1^{S_t} = I_2^{S_t} + I_3^G = - \int_{S_t} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} \left\{ \delta w_{(\lambda|\kappa)} e_{\eta\vartheta;3} + [(\delta w_{3|\kappa})_{\parallel\lambda} + b_\lambda^\alpha \delta w_{\alpha|\kappa} + b_\beta^\beta \delta w_{(\lambda|\kappa)}] e_{\eta\vartheta} \right. \\ \left. + [(\delta w_{\lambda|\kappa})_{\parallel\vartheta} + \delta w_{3|\lambda} b_{\vartheta\kappa}] e_{\eta 3} + b_{\eta\vartheta} \delta w_{(\lambda|\kappa)} e_{33} \right\} dA \\ - \int_g n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \tau^{\vartheta} (\delta \mathcal{H}_{3\kappa} e_{\eta 3}^T - \delta \mathcal{H}_{\lambda\kappa} e_{\eta\vartheta}^T) ds$$

eredmény következik. A fenti képletben nem felső index a  $T$ , hanem a

$$\lim_{\xi \in S_t \rightarrow g} e_{kl}$$

határértéket jelöli. Ezt a jelölésbeli megállapodást később is alkalmazzuk.

A következő lépésben a végső alakra hozzuk az  $I_2^{S_t}$ -t a felületi integrálok tekintetében.

Érdemes megemlíteni, hogy megegyezik az  $I_2^{S_t}$  felületi integrál az (A.5.1) egyenlet jobboldalával, ha ebben az egyenletben  $\delta w_l$ -t,  $e_{kl}$ -t és  $S_t$ -t írunk  $u_l$ ,  $H_{kl}$  és  $S_o$  helyett. Emellett külön figyelmet kell majd fordítani az  $S_t$  peremgörbéjén vett vonalintegrálokra.

Visszaidézve, hogy az  $\mathcal{L}$  görbe az  $\mathcal{L}_{11}$  ( $P_{11}, P_{12}$  ív),  $\mathcal{L}_{13}$  ( $P_{13}, P_{14}$  ív) és  $\mathcal{L}_2$  ívek egyesítése, emlékezzünk arra is, hogy kétszer haladunk végig az  $\mathcal{L}$  görbe mentén a STOKES tétel alkalmazása során. Jelölje  $[\delta w_l]$  a  $\delta w_l$  vektormező szakadását az  $\mathcal{L}$  görbe mentén:

$$(5.32) \quad [\delta w_l] = \delta w_l^+ - \delta w_l^- \quad \xi \in \mathcal{L}$$

Itt a [pozitív] {negatív} előjel  $\delta w_l$   $\mathcal{L}$  [pozitív] {negatív} oldalán vett értékét jelöli – a részleteket illetően az 5.2. ábrára utalunk. Fentiek alapján kapjuk, hogy

$$(5.33) \quad I_2^{S_t} = I_3^{S_t} + I_1^{G\delta w} + I_1^{\mathcal{L}[w]} = \int_{S_t} \epsilon^{3\eta\kappa} \epsilon^{ldp} e_{\eta d; p\kappa} \delta w_l dA \\ + \int_g n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \tau^{\vartheta} (\delta w_{\vartheta|\kappa} e_{\eta 3}^T - \delta w_{3|\kappa} e_{\eta\vartheta}^T) ds - \int_g \tau^\eta \epsilon^{ldp} e_{\eta d; p}^T \delta w_l ds \\ + \int_{\mathcal{L}} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \tau^{\vartheta} ([\delta w_{\vartheta|\kappa}] e_{\eta 3}^T - [\delta w_{3|\kappa}] e_{\eta\vartheta}^T) ds - \int_{\mathcal{L}} \tau^\eta \epsilon^{ldp} e_{\eta d; p}^T [\delta w_l] ds .$$

**5.4.5.** Egybevetve az (5.25), (5.27), (5.28), (5.29), (5.30), (5.31) és (5.33) egyenletek jobboldalait írhatjuk, hogy

$$(5.34) \quad -\delta K = I_2^V + I_2^{S_u} + I_4^{S_u} + I_3^{S_t} + I_1^G + I_2^G + I_3^G + I_1^{G\delta w} + I_1^{\mathcal{L}[w]} = 0 ,$$

ahonnan a jobboldalok helyettesítése után

$$(5.35a) \quad -\delta K = \int_V \epsilon^{Rkm} \epsilon^{Slp} e_{kl; mp} \delta \mathcal{H}_{RS} dV \\ + \int_{S_u} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} \left\{ (e_{\lambda\kappa} - \hat{u}_{(\lambda|\kappa)}) \delta \mathcal{H}_{\eta\vartheta;3} \right. \\ \left. + [(e_{3\kappa} - \hat{u}_{3;\kappa})_{\parallel\lambda} + b_\lambda^\alpha (e_{\alpha\kappa} - \hat{u}_{\alpha|\kappa}) - (e_{\kappa\lambda;3} - e_{\lambda 3;\kappa}) - b_\beta^\beta (e_{\lambda\kappa} - \hat{u}_{(\lambda|\kappa)})] \delta \mathcal{H}_{\eta\vartheta} \right. \\ \left. + [e_{\kappa\lambda\parallel\vartheta} + e_{\lambda\kappa\parallel\vartheta} - (\hat{u}_{\lambda|\kappa})_{\parallel\vartheta} - \hat{u}_{3|\lambda} b_{\vartheta\kappa}] \delta \mathcal{H}_{\eta 3} - b_{\eta\vartheta} (e_{\lambda\kappa} - \hat{u}_{(\lambda|\kappa)}) \delta \mathcal{H}_{33} \right\} dA \\ + \int_{S_t} \epsilon^{3\eta\kappa} \epsilon^{ldp} e_{\eta d; p\kappa} \delta w_l dA + I_L^G + I_1^{\mathcal{L}[w]} = 0 ,$$

ahol

$$(5.35b) \quad I_L^G = I_1^G + I_2^G + I_3^G + I^{G\delta w} .$$

Az (5.35a) egyenletben tetszőlegesen a

$$\delta \mathcal{H}_{RS}, \delta \mathcal{H}_{\eta\vartheta;3}, \delta \mathcal{H}_{\eta\vartheta}, \delta \mathcal{H}_{\eta 3}, \delta \mathcal{H}_{33}, \text{ és } \delta w_l$$

variációk. Következésképp az (5.35a,b) egyenlet tartományi és felületi integráljainak eltűnéséből

– az (1.14) kompatibilitási differenciálegyenletek,

- az (1.16) kompatibilitási peremfeltételek és
- az (1.15a,b) alakváltozási peremfeltételek illetve az (1.19) kiegészítő feltétel

fennállása következik.

Az utóbbi esetben érdemes ismételtelen felhívni a figyelmet arra, hogy egyrészt az (1.19) kiegészítő feltétel nem független az (1.15a,b) alakváltozási peremfeltételektől, másrészt pedig arra, hogy  $\delta\mathcal{H}_{33}$  együtthatója megegyezik az (1.19) kiegészítő feltétellel, harmadrészt arra hogy  $\delta H_{\lambda 3}$  nem jelenik meg a felületi integrálban. Többek között ez az egyik ok, amiért a vonatkozó  $H_{33}$  és  $H_{\lambda 3}$  feszültségfüggvények zérusnak választhatók. Érdemes arra is felhívni a figyelmet, hogy a  $-\delta K = 0$  extremum feltételből adódó EULER egyenletek és természetes peremfeltételek megegyeznek azokkal a feltételekkel, amelyeket az  $e_{kl}$  alakváltozásmezőnek teljesíteni kell ahhoz, hogy egyszeresen összefüggő tartományon kinematikailag lehetséges legyen.

11. MEGJEGYZÉS: Az (5.35a) részét alkotó – lásd még (5.34) –

$$I_2^V + I_2^{S^u} + I_4^{S^u} + I_3^{S^i} + I_1^G + I_2^G + I_3^G + I_1^{G\delta w} = 0$$

extremum feltételt egyszeresen összefüggő térfogati tartomány esetére KOZÁK vezette le először [26], aki ezzel a tanulmányával adott teljes megoldást a SOUTHWELL féle paradoxonra. Ismételtelen hangsúlyozzuk azonban, hogy a fenti gondolatmenet az  $S_t$  felületrészre vonatkozó mellékfeltételek tekintetében *eltér* az idézett tanulmány gondolatmenetétől. Az eltérés lényege a pontosabb (5.21a,b) és (5.21c) mellékfeltételek alkalmazása, felismerve azt, hogy ezek közvetlenül behelyettesíthetők a teljes kiegészítő energia első variációjába az átalakítás egy lépésében.

12. MEGJEGYZÉS: Mivel KOZÁK fentebb idézett tanulmánya egyszeresen összefüggő tartományt tételez fel, az  $I_1^{\mathcal{L}[w]}$  vonalintegrál hiányzik az általa felállított extremum feltételből. A további gondolatmenet fő célja az extremumfeltétel vonalintegráljainak alkalmas alakra történő transzformációja.

**5.4.6.** Az (5.35b) egyenletben álló vonalintegrálok átalakítása némi előkészületeket igényel. Legyen (lásd a 13. MEGJEGYZÉST)

$$(5.36a) \quad [\delta w_b] = \delta_{c_b}^{(1i)} + \epsilon_{svb} \delta C^s [R^v - R^v(P_{1,i+1})], \quad i = 1, 3, \quad \xi \in \mathcal{L}_{1i}$$

$$(5.36b) \quad [\delta w_b] = \delta_{c_b}^{(21)} + \epsilon_{svb} \delta C^s [R^v - R^v(P_{21})] \quad \xi \in \mathcal{L}_2$$

a  $\delta w_b$  vektormező szakadása, ahol  $\delta_{c_b}^{(1i)}$ ,  $\delta C^s$ ,  $\delta_{c_b}^{(21)}$  és  $\epsilon_{svb} \delta C^s$  tetszőleges állandók.

13. MEGJEGYZÉS: Az

$$[\delta w_b] = \delta c_b + \epsilon_{svb} \delta C^s [R^v - R^v(P)] \quad \xi \in S$$

vektormező –  $\delta c_b$  és  $\delta C^s$  tetszőleges állandó vektorok, a  $P$  tetszőleges, de rögzített pont – nem okoz feszültségfüggvényt (ahogy a merevtetszerű mozgás sem okoz alakváltozást), mivel ferdeszimmetrikus tenzor a  $[\delta w_b]$  vektormező gradiense:

$$(5.37) \quad [\delta w_{\vartheta;\kappa}] = \epsilon_{s\kappa\vartheta} \delta C^s, \quad [\delta w_{3;\kappa}] = \epsilon_{\lambda\kappa 3} \delta C^\lambda \quad \xi \in S$$

**5.4.7.** Az  $I_L^G$  vonalintegrál átalakítását a Függelék **A.5.3.** szakasza részletezi. Tegyük fel, hogy folytonos az alakváltozási tenzor az  $S$ -en. Ekkor nyilvánvaló, hogy

$$(5.38) \quad e_{kl}^U = e_{kl}^T, \quad \xi \in g.$$

Felhasználva az

$$\delta w_{(3|\lambda)} - \delta w_{[3|\lambda]} = \delta w_{(\lambda|3)} + \delta w_{[\lambda|3]} = \delta w_{\lambda|3} \quad \xi \in g$$

egyenletet és elhagyva továbbiakban a megkülönböztető  $U$  és  $T$  jelöléseket az (A.5.13) és (A.5.14) egyenletekből kapjuk, hogy

$$(5.39) \quad I_L^G = \int_g \left\{ \tau^\eta \epsilon^{\vartheta\lambda 3} (e_{\vartheta\eta;3} - e_{3\eta|\vartheta}) - \frac{d}{ds} [\epsilon^{\vartheta\lambda 3} (e_{\vartheta 3} - \hat{u}_{3;\vartheta})] \right\} \delta w_\lambda ds \\ + \int_g \left[ \tau^\eta \epsilon^{3\rho\vartheta} e_{\vartheta\eta|\rho} - \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{2} \epsilon^{3\lambda\vartheta} \hat{u}_{\vartheta;\lambda} \right) \right] \delta w_3 ds + \int_g \tau^\eta \epsilon^{\vartheta 3\lambda} (e_{\eta\vartheta} - \hat{u}_{(\vartheta;\eta)}) \delta w_{\lambda|3} ds + \Sigma^1 + \Sigma^2 + \Sigma^3.$$

A vonalintegrálok tetszőleges  $\delta w_\lambda$ ,  $\delta w_3$  és  $\delta w_{\lambda|3}$  melletti eltűnése a

$$(5.40a) \quad \tau^\eta \epsilon^{\vartheta\lambda 3} (e_{\vartheta\eta;3} - e_{3\eta|\vartheta}) = \frac{d}{ds} [\epsilon^{\vartheta\lambda 3} (e_{\vartheta 3} - \hat{u}_{3;\vartheta})], \quad \xi \in g$$

$$(5.40b) \quad \tau^\eta \epsilon^{3\rho\vartheta} e_{\vartheta\eta|\rho} = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{2} \epsilon^{3\lambda\vartheta} \hat{u}_{\vartheta;\lambda} \right), \quad \xi \in g$$

$$(5.40c) \quad \tau^\eta (e_{\eta\vartheta} - \hat{u}_{(\vartheta;\eta)}) = 0 \quad \xi \in g$$

folytonossági feltételeket eredményezi. Ha nem hagytuk volna el a megkülönböztető  $U$  és  $T$  jelöléseket, akkor – tekintettel az (5.3a,b) és (5.5) képletekre – az (5.40a,b) folytonossági feltételek az

$$(5.41) \quad \left( \frac{d\varphi^\lambda}{ds} \right)^T = \left( \frac{d\varphi^\lambda}{ds} \right)^U \quad \text{és} \quad \left( \frac{d\varphi^3}{ds} \right)^T = \left( \frac{d\varphi^3}{ds} \right)^U \quad \xi \in g$$

alakban adódnának.

14. MEGJEGYZÉS: Az (5.40a,b,c) feltételek teljesülése elegendő a  $\varphi^3$ ,  $\hat{u}_\vartheta$  és  $\hat{u}_{3|\lambda}$  meghatározásához  $e_{\vartheta\eta;3}$ ,  $e_{3\eta|\vartheta}$ ,  $e_{\vartheta\eta|\rho}$  és  $e_{\eta\vartheta}$  segítségével. Az (5.40b) egyenlet integrálása  $\varphi^3$ -at adja. A  $\varphi^3$  és az (5.40c) egyenlet felhasználásával következik, hogy

$$\tau^\eta (e_{\eta\vartheta} - \hat{u}_{\vartheta;\eta} + \hat{u}_{[\vartheta|\eta]}) = 0, \quad \xi \in g$$

vagy ami ugyanaz, hogy

$$\frac{d\hat{u}_\vartheta}{ds} = \tau^\eta (e_{\eta\vartheta} - \epsilon_{\vartheta\eta 3} \varphi^3), \quad \xi \in g$$

ahonnan  $s$  szerinti integrálással adódik az  $\hat{u}_\vartheta$  elmozdulásmező.

Ami az (5.40a) egyenletet illeti az  $\hat{u}_{3|\vartheta}$ -ra oldható meg  $s$  szerinti integrálással. Ha már ismert  $\hat{u}_{3|\vartheta}$ , akkor

$$\frac{d\hat{u}_3}{ds} = \tau^\vartheta \hat{u}_{3|\vartheta}, \quad \xi \in g$$

ahonnan integrálással adódik  $\hat{u}_3$  értéke.

A fenti képletek szerint visszakapjuk az az  $S_u$ -n előírt elmozdulást és az abból számítható felületre merőleges forgást a terhelt oldalon vett alakváltozásokból.

**5.4.8.** A fennmaradó vonalintegrálok tükrözik a tartomány háromszorosan összefüggő voltát. Az  $I_1^{\mathcal{L}[w]}$ ,  $\Sigma^1$ ,  $\Sigma^2$  és  $\Sigma^3$  integrálok (5.33), (A.5.9), (A.5.11) és (A.5.12) egyenletekből történő helyettesítésével és az (5.35a), (5.39) egyenletek egybevetésével az

$$\begin{aligned} & I_1^{\mathcal{L}[w]} + \Sigma^1 + \Sigma^2 + \Sigma^3 = \\ & = \sum_{i=1,3} \left\{ \int_{\mathcal{L}_{1i}} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \tau^\vartheta ([\delta w_{\vartheta|\kappa}] e_{\eta 3}^T - [\delta w_{3|\kappa}] e_{\eta\vartheta}^T) ds - \int_{\mathcal{L}_{1i}} \tau^\eta \epsilon^{ldp} e_{\eta d;p}^T [\delta w_l] ds \right. \\ & \quad + \epsilon^{\vartheta 3\lambda} ([\delta w_{(\lambda|3)}] - [\delta w_{\lambda|3}]) \hat{u}_\vartheta \Big|_{P_{1i}} - \epsilon^{\vartheta 3\lambda} ([\delta w_{(\lambda|3)}] - [\delta w_{\lambda|3}]) \hat{u}_\vartheta \Big|_{P_{1,i+1}} - \\ & \quad + \epsilon^{\lambda 3\vartheta} (e_{\vartheta 3} - \hat{u}_{3;\vartheta}) [\delta w_\vartheta] \Big|_{P_{1i}} - \epsilon^{\lambda 3\vartheta} (e_{\vartheta 3} - \hat{u}_{3;\vartheta}) [\delta w_\vartheta] \Big|_{P_{1,i+1}} \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \epsilon^{3\lambda\vartheta} \hat{u}_{\vartheta;\lambda} [\delta w_3] \Big|_{P_{1i}} - \frac{1}{2} \epsilon^{3\lambda\vartheta} \hat{u}_{\vartheta;\lambda} [\delta w_3] \Big|_{P_{1,i+1}} \right\} \\ & + \oint_{\mathcal{L}_2} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \tau^\vartheta ([\delta w_{\vartheta;\kappa}] e_{\eta 3}^T - [\delta w_{3;\kappa}] e_{\eta\vartheta}^T) ds - \oint_{\mathcal{L}_2} \tau^\eta \epsilon^{ldp} e_{\eta d;p}^T [\delta w_l] ds \end{aligned}$$

eredmény következik. Ahhoz, hogy megkapjuk a kiegészítő kompatibilitási feltételeket mostmár csak a (5.36a) és (5.36b) egyenletek helyettesítése és az

$$\delta c_k^{(21)} \mathbf{a}^k, \delta C_l^{(21)} \mathbf{a}_l \quad \text{és} \quad \delta c_k^{(1i)} \mathbf{a}^k, \delta C_l^{(1i)} \mathbf{a}_l$$

állandók együtthatóinak összegyűjtése szükséges. Az ezt követő átrendezés után az

$$\begin{aligned}
& I_1^{\mathcal{L}[w]} + \Sigma^1 + \Sigma^2 + \Sigma^3 = \\
& = \left[ \oint_{\mathcal{L}_2} \tau^\eta \epsilon^{\rho\vartheta 3} e_{\eta\vartheta|\rho} \mathbf{a}_3 ds + \oint_{L_2} \tau^\eta \epsilon^{\lambda\vartheta 3} (e_{\eta 3|\vartheta} - e_{\eta\vartheta;3}) \mathbf{a}_\lambda ds \right] \cdot \mathbf{a}^k \delta_{C_k}^{(21)} \\
& \quad + \oint_{\mathcal{L}_2} \tau^\eta [e_{\eta k} + \epsilon_{kvl} \epsilon^{lpd} (R^v(s) - R^v(P_{21})) e_{\eta d;p}] \mathbf{a}^k ds \cdot \mathbf{a}_l \delta_{C^l}^{(21)} \\
& \quad + \sum_{i=1,3} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \epsilon^{3\lambda\vartheta} \hat{u}_{\vartheta|\lambda} \mathbf{a}_3 + \epsilon^{\lambda 3\vartheta} (e_{\vartheta 3} - \hat{u}_{3|\vartheta}) \mathbf{a}_\lambda \right] \right\}_{P_{1,i+1}}^{P_{1i}} \\
& \quad + \int_{\mathcal{L}_{1i}} \tau^\eta \epsilon^{\rho\vartheta 3} e_{\eta\vartheta|\rho} \mathbf{a}_3 ds + \int_{L_{1i}} \tau^\eta \epsilon^{\lambda\vartheta 3} (e_{\eta 3|\vartheta} - e_{\eta\vartheta;3}) \mathbf{a}_\lambda ds \left\} \cdot \mathbf{a}^k \delta_{C_k}^{(1i)} \\
& + \sum_{i=1,3} \left[ \hat{u}_k \mathbf{a}^k \right]_{P_{1,i+1}}^{P_{1i}} + \epsilon^{\lambda 3\vartheta} (e_{3\vartheta} - \hat{u}_{3|\vartheta}) \epsilon_{\lambda kl} (R^k(P_{1,i+1}) - R^k(P_{1i})) \mathbf{a}^l \Big|_{P_{1i}} \\
& \quad + \frac{1}{2} \epsilon^{3\lambda\vartheta} \hat{u}_{\vartheta|\lambda} \epsilon_{3\psi\rho} (R^\psi(P_{1,i+1}) - R^\psi(P_{1i})) \mathbf{a}^\rho \Big|_{P_{1i}} \\
& \quad + \int_{\mathcal{L}_{1i}} \tau^\eta \{e_{\eta k} + \epsilon^{lpd} \epsilon_{kvl} [R^v(s) - R^v(P_{1,i+1})] e_{\eta d;p}\} \mathbf{a}^k ds \Big] \cdot \mathbf{a}_l \delta_{C^l}^{(1i)} = 0
\end{aligned}$$

egyenletet kapjuk. A fenti kifejezés eltűnése

$$\delta_{C_k}^{(21)} \mathbf{a}^k, \delta_{C^l}^{(21)} \mathbf{a}_l \quad \text{és} \quad \delta_{C_k}^{(1i)} \mathbf{a}^k, \delta_{C^l}^{(1i)} \mathbf{a}_l \quad i = 1, 3$$

tetszőlegessége miatt

- az (5.9) és (5.10) nagybani kompatibilitási feltételek, valamint
- az (5.13) és (5.15) kiegészítő kompatibilitási feltételek

fennállását biztosítja.

**5.5. Eredmények.** Az egyes eredményeket sorszámozzuk.

1. A jelen fejezet legfontosabb eredménye annak kimutatása, hogy a teljes kiegészítő energia maximum elv az 5.1. ábrán vázolt háromszorosan összefüggő térbeli tartomány és a tekintett vegyes peremértékfeladatok esetén biztosítja az ún. *kiegészítő kompatibilitási feltételek* fennállását. Az a körülmény, hogy a vizsgálatokat csak háromszorosan összefüggő tartományra végeztük nem játszik a gondolatmenet lépéseiben olyan mértékű szerepet, hogy ne lehetne azt megismételni négy, vagy többszörösen összefüggő térbeli tartományra vonatkozó hasonló jellegű vegyes peremértékfeladatok esetén.
2. A kiegészítő kompatibilitási feltételek geometriai megfontolásokból is lezármaztathatók. Mivel ezekben a megfontolásokban az anyagegyenlet nem jelenik meg, a kiegészítő kompatibilitási feltételek anyagegyenlettől függetlenül geometriailag lineáris feladatokra érvényesek.
3. Kimutatta pályázó, hogy az  $S_t$  felületrészre vonatkozó mellékfeltételként (5.22) helyett a pontosabb (5.21a,b) és (5.21c) feltételek választása a célszerű, mivel ezek is közvetlenül behelyettesíthetők a teljes kiegészítő energia funkcionál első variációjába az átalakítás egy lépésében.

A vonatkozó publikációkat illetően [70] és [65] érdemel említést. A felsorolt eredmények 100%-ban a szerző eredményei.

## 6. AZ EGYÉRTÉKŰSÉG MAKRÓ FELTÉTELEI VEGYES PEREMÉRTÉKFELADATOKRA. SZÁRMAZTATÁS A KIEGÉSZÍTŐ ENERGIA MAXIMUM ELVBŐL – MIKROPOLÁRIS ESET

**6.1. Irodalmi előzmények.** Mikropoláris testre KOZÁK-SZEIDL [30] majd SZEIDL [57] vizsgálta a tetszőleges feszültségi állapot előállításához szükséges feszültségfüggvények számának, azaz a feszültségfüggvények meghatározottságának kérdését, valamint a független, szükséges és elégséges kompatibilitási feltételek kérdését a klasszikus esettel azonos feltételezések mellett, vagyis egyszerűen összefüggő térbeli testre. A [71] előadás és az [61] tanulmány többszörösen összefüggő tartomány és feszültségi peremfeltételek mellett a virtuális munka elv duál alakja, valamint a teljes kiegészítő energia maximumának elve segítségével vizsgálta a kompatibilitási feltételek kérdését és kimutatták, hogy az idézett elvek mindegyike biztosítja a *nagybani kompatibilitási feltételek* – a szóhasználat kérdésében visszautalunk az **5.1.** szakasz utolsó három bekezdésére – teljesülését.

A *kiegészítő kompatibilitási feltételek* kérdésével a vonatkozó szakirodalom, a pályázó ismeretei szerint, nem foglalkozott.

**6.2. Célkitűzések.** Fentiek alapján pályázó célul tűzte ki az **5.2.** szakaszban megfogalmazott kérdések megoldását mikropoláris testre és háromméretű feladatokra:

- A kompatibilitás kiegészítő feltételeinek származtatása háromméretű mikropoláris testekre geometriai megfontolásokból.
- Igazolni formális számításokkal, hogy a kompatibilitás vegyes peremértékfeladatok és háromméretű test esetére vonatkozó kiegészítő feltételei következnek a teljes kiegészítő energia maximum elvéből.

Az igazolás gondolatmenetét [63, 64] alapján ismertetjük.

**6.3. A kiegészítő kompatibilitási feltételek levezetése geometriai megfontolásokból.** A vizsgálatokat, hasonlóan a klasszikus esethez, az 5.1. ábrán vázolt, egy zárt felülettel határolt, háromszorosan összefüggő testre végezzük el. Az 5.3. ábra alapján a (3.1) kinematikai egyenletekből közvetlenül kapjuk a későbbiek során fontos szerepet játszó

$$(6.1) \quad \varphi^b \mathbf{a}_b \Big|_P = \varphi^b \mathbf{a}_b \Big|_{P_{11}} + \int_{P_{11}}^P \tau^\eta \kappa_\eta^b \mathbf{a}_b ds$$

és

$$(6.2) \quad \begin{aligned} u_l \mathbf{a}^l \Big|_P &= u_l \mathbf{a}^l \Big|_{P_{11}} + \int_{P_{11}}^P \tau^\chi (\gamma_{\chi l} + \epsilon_{l\chi b} \varphi^b) \mathbf{a}^l ds = \\ &= u_l \mathbf{a}^l \Big|_{P_{11}} + \epsilon_{lvk} \varphi^k (R^v(s) - R^v(P)) \mathbf{a}^l \Big|_{P_{11}} + \int_{P_{11}}^P \frac{d\xi^\chi}{ds} [\gamma_{\chi l} + \epsilon_{blv} (R^v(s) - R^v(P)) \kappa_{\chi}^b] \mathbf{a}^l ds \end{aligned}$$

képleteket, melyek a CEZARO formula analogonjai mikropoláris testre.

Az 5.1. ábrán vázolt háromszorosan összefüggő  $V$  tartomány esetén a  $\gamma_{kl}$  és  $\kappa_a^b$  alakváltozásmezők kompatibilitásához a (3.13a,b) kompatibilitási differenciálegyenletek  $V$ -n, és a (3.15) kompatibilitási peremfeltételek teljes  $S$ -n történő fennállása mellett még az is szükséges, hogy a  $\varphi^l$  forgás- és az  $u_k$  elmozdulásmező is egyértékű legyen minden olyan egyszerű zárt görbe mentén, amely körülöleli a két lyukat.

Az utóbbi feltételek teljesüléséhez elegendő, ha biztosítjuk a  $\varphi^l$  forgás- és az  $u_k$  elmozdulásmező egyértékűségét a felületen fekvő és a lyukakat körülölelő  $\mathcal{L}_1$  és  $\mathcal{L}_2$  egyszerű zárt görbék mentén feltéve, hogy fennállnak a (3.13a,b) kompatibilitási differenciálegyenletek  $V$ -n, és a (3.15) kompatibilitási peremfeltételek a teljes  $S$ -n. Következésképp elegendő az  $\mathcal{L}_1$  és  $\mathcal{L}_2$  felületi görbékre fordítani a figyelmet a további vizsgálatokban.

Mivel az  $\mathcal{L}_2$  teljes egészében az  $S_t$  belsejében fekszik, azonnal következnek a  $\varphi^l$  forgás- és az  $u_l$  elmozdulásmező mező egyértékűségét biztosító nagybani kompatibilitási feltételek a (6.1),

valamint a (6.2) CEZARO formulákból:

$$(6.3) \quad \oint_{\mathcal{L}_2} \tau^\eta \kappa_\eta^b \mathbf{a}_b ds = 0,$$

$$(6.4) \quad \oint_{\mathcal{L}_2} \frac{d\xi^X}{ds} \left[ \gamma_{\chi l} + \epsilon_{blv} (R^v(s) - R^v(P_{21})) \kappa_{\chi^b} \right] \mathbf{a}^l ds = 0.$$

Ami az  $\mathcal{L}_1$  görbét és annak  $[\mathcal{L}_{11}$  és  $\mathcal{L}_{13}] \{ \mathcal{L}_{12}$  és  $\mathcal{L}_{14} \}$  jelű íveit illeti (ezek teljes egészükben  $[S_t$ -ben]  $\{ S_u$ -ban} fekszenek – v.ö.: 5.1. és 5.2. ábrák) az (5.11a,b) és az (5.14)-re vezető klasszikus esetre vonatkozó gondolatmenet szószerint ismétlésével kapjuk, hogy fenn kell állnia a

$$(6.5) \quad \varphi^l \mathbf{a}^l \Big|_{P_{11}}^{P_{12}} + \varphi^l \mathbf{a}^l \Big|_{P_{12}}^{P_{11}} = 0, \quad \varphi^l \mathbf{a}^l \Big|_{P_{13}}^{P_{14}} + \varphi^l \mathbf{a}^l \Big|_{P_{14}}^{P_{13}} = 0,$$

illetve a

$$(6.6) \quad u_k \mathbf{a}^k \Big|_{P_{11}}^{P_{12}} + u_k \mathbf{a}^k \Big|_{P_{12}}^{P_{11}} = 0, \quad u_k \mathbf{a}^k \Big|_{P_{13}}^{P_{14}} + u_k \mathbf{a}^k \Big|_{P_{14}}^{P_{13}} = 0$$

folytatossági feltételeknek. A (6.5)<sub>1,2</sub> és (6.6)<sub>1,2</sub> baloldalain álló első tagok rendre adódnak (6.1) és (6.2)-ből, ha az integrálási határokat alkalmasan választjuk meg. Ami a második tagokat illeti, azt kell figyelembe venni, hogy mind a forgásmező, mind pedig az elmozdulásmező ismert a peremfeltételekből, ha

$$s \in (s(P_{1j}) - \epsilon, s(P_{1j})) \quad \text{vagy} \quad s \in [s(P_{1,j+1}), s(P_{1,j+1}) + \epsilon] \quad j = 1, 3;$$

ahol  $\epsilon$  tetszőlegesen kicsiny pozitív szám. Ily módon kapjuk, hogy fenn kell állnia a

$$(6.7) \quad -\hat{\varphi}^b \mathbf{a}_b \Big|_{P_{1,i+1}} + \hat{\varphi}^b \mathbf{a}_b \Big|_{P_{1i}} + \int_{\mathcal{L}_{1i}} \tau^\eta \kappa_\eta^b \mathbf{a}_b ds = 0 \quad i = 1, 3$$

és a

$$(6.8) \quad -\hat{u}_l \mathbf{a}^l \Big|_{P_{1,i+1}} + \hat{u}_l \mathbf{a}^l \Big|_{P_{1i}} + \epsilon_{lvk} \varphi^k (R^v(P_{1,i+1}) - R^v(P_{1i})) \mathbf{a}^l \Big|_{P_{1i}} \\ + \int_{\mathcal{L}_{1i}} \frac{d\xi^X}{ds} \left[ \gamma_{\chi l} + \epsilon_{blv} (R^v(s) - R^v(P_{1i})) \kappa_{\chi^b} \right] \mathbf{a}^l ds = 0 \quad i = 1, 3$$

kiegészítő kompatibilitási feltételeknek.

1. MEGJEGYZÉS: Az 5.1. ábrán vázolt háromszorosan összefüggő tartomány esetén az egyszeresen összefüggő tartomány esetére érvényes (3.11a,b), (3.12) és (3.13a,b) duál egyenletrendszert, amelyhez a (3.14), (3.15) és (3.16a,b) peremfeltételek társulnak, ki kell egészíteni a (6.3), (6.4) nagybani kompatibilitási feltételekkel, valamint a (6.7) és (6.8) kiegészítő kompatibilitási feltételekkel.

2. MEGJEGYZÉS: A (6.7) és (6.8) kiegészítő kompatibilitási feltételek – hasonlóan a klasszikus esethez – a (6.3), (6.4) nagybani kompatibilitási feltételekre egyszerűsödnek, ha az óramutató járásával ellentétes irányban mozogva a  $P_{1,i+1}$  pont eléri a  $P_{1i}$  pontot, vagy ami ugyanez, ha az  $\mathcal{L}_{1i}$  ív egybeesik az  $\mathcal{L}_1$  görbével.

**6.4. Származtatás a teljes kiegészítő energia maximum elvéből.** Egyszeresen összefüggő tartományra a  $\gamma_{kl}$ ,  $\kappa_b^a$  alakváltozásmezők [kompatibilitásához] {kinematikailag lehetséges voltához} szükséges valamennyi feltétel leszármaztatható a teljes kiegészítő energia maximum elvéből [30]. Jelen szakasz a fenti feltételekhez többszörösen összefüggő tartományon társuló makró egyértékűségi feltételek – nagybani kompatibilitási feltételek és kiegészítő kompatibilitási feltételek – leszármaztatását mutatja be a teljes kiegészítő energia maximumának elvéből. A [30] és [57] gondolatmenetét követjük külön figyelmet szentelve azoknak a vonalintegráloknak, amelyek a STOKES tétel  $S$  egyes részein történő alkalmazása során adódnak.

Mikropoláris testre a

$$(6.9) \quad K = -\frac{1}{2} \int_V (t^{kl} \gamma_{kl} + \mu_b^a \kappa_a^b) dV + \int_{S_u} (n_3 t^{3l} \hat{u}_l + n_3 \mu_b^3 \hat{\varphi}^b) dA$$

teljes kiegészítő energia funkcionál a statikailag lehetséges  $t^{kl}$ ,  $\mu_{,b}^a$  feszültségtenzorok és  $\gamma_{kl}$ ,  $\kappa_a^b$  alakváltozás tenzorok függvénye. A HOOKE törvény segítségével belátható

$$\delta(t^{kl}\gamma_{kl} + \mu_{,b}^a\kappa_a^b) = 2(\delta t^{kl}\gamma_{kl} + \delta\mu_{,b}^a\kappa_a^b) = 2(t^{kl}\delta\gamma_{kl} + \mu_{,b}^a\delta\kappa_a^b)$$

összefüggés felhasználásával kapjuk, hogy a teljes kiegészítő energia függvényre vonatkozó extrémum feltétel a

$$(6.10) \quad -\delta K = \int_V (\gamma_{kl}\delta t^{kl} + \kappa_a^b\delta\mu_{,b}^a) dV - \int_{S_u} (n_3\delta t^{3l}\hat{u}_l + n_3\delta\mu_{,b}^3\hat{\varphi}^b) dA = 0$$

alakban írható fel.

3. MEGJEGYZÉS: Mivel a feszültségek statikailag lehetségesek – a vonatkozó definíciót illetően visszautalunk a 26. oldalra – a  $\delta t^{kl}$ ,  $\delta\mu_{,b}^a$  variációk nem vehetők fel tetszőlegesen, hanem ki kell, hogy elégítsék a

$$(6.11a) \quad \delta t_{:,k}^{kl} = 0, \quad \delta\mu_{,b;a}^a(x) + \epsilon_{bkl}\delta t^{kl} = 0, \quad x \in V$$

$$(6.11b) \quad n_3\delta t^{3l} = 0, \quad n_3\delta\mu_{,b}^3 = 0 \quad \xi \in S_t$$

mellékfeltételeket, amelyek a (3.3) egyensúlyi egyenletekből és a (3.5) feszültségi peremfeltételekből adódnak, ha a  $V$  térfogaton megoszló  $b^l$ ,  $c_b$  valamint az  $S_t$  peremrészen előírt  $\hat{t}^l$ ,  $\hat{\mu}_b$  variációit zérusnak vesszük. A (3.11a,b) és (3.16a,b) képletekből azonnal következik, hogy kielégítik a feszültségek  $\delta t^{kl}$ ,  $\mu_{,b}^a$  variációi a (6.11a) mellékfeltételeket, ha azokat a feszültségfüggvények  $\delta\mathcal{H}_{xy}$ ,  $\delta\mathcal{F}_s^l$  variációival képezzük:

$$(6.12) \quad \delta t^{kl} = \epsilon^{kpy}\delta\mathcal{F}_{y;p}^l, \quad \delta\mu_{,b}^a = \epsilon^{apy}(\delta\mathcal{H}_{yb;p} + \epsilon_{bpl}\delta\mathcal{F}_y^l). \quad x \in V$$

Itt  $\delta\mathcal{F}_y^l$  és  $\delta\mathcal{H}_{yb}$  tetszőleges a  $V$ -n és  $S_u$ -n de az  $S_t$ -n fenn kell állnia a (6.11b) és (6.12) egybevetése alapján írható

$$(6.13) \quad n_3\delta t^{3l} = n_3\epsilon^{3\eta\pi}\delta\mathcal{F}_{\eta;\pi}^l = 0, \quad n_3\delta\mu_{,b}^3 = n_3\epsilon^{3\pi\eta}(\delta\mathcal{H}_{yb;p} + \epsilon_{b\pi l}\delta\mathcal{F}_\eta^l) = 0 \quad \xi \in S_t$$

mellékfeltételeknek.

4. MEGJEGYZÉS: A 4.4. szakasz eredményei szerint – itt a (4.28a,b) képletekre, valamint arra a körülményre utalunk (lásd a 36 oldal 7. MEGJEGYZÉSÉT), hogy [egyensúly] {statikai lehetségeség}, [kompatibilitás] {kinematikai lehetségeség} páronként duális fogalmak – ha  $\delta\mathcal{F}_\eta^l$  és  $\delta\mathcal{H}_{\eta b}$  teljesíti a

$$(6.14) \quad \delta\mathcal{F}_\eta^l = \delta r_{:, \eta}^l, \quad \delta\mathcal{H}_{\eta b} = \delta w_{b;\eta} + \epsilon_{b\eta m}\delta r^m \quad \xi \in S_t$$

feltételeket – a  $\delta w_l$  és  $\delta r^b$  variációk tetszőlegesek – akkor a (6.13) identikusan teljesül.

5. MEGJEGYZÉS: A feszültségfüggvények szerkezetével kapcsolatos kikötéseket [tetszőleges feszültségi állapot megadható hat-hat feszültségfüggvény segítségével stb. – v.ö.: a 27-ik oldal 2. MEGJEGYZÉSE – a feszültségfüggvények variációira is érvényesnek vesszük, azaz

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H}_{XY} &\neq 0, & \delta\mathcal{F}_S^T &\neq 0, & x &\in V \\ \delta\mathcal{H}_{AB} &\equiv 0, & \delta\mathcal{F}_K^L &\equiv 0, & x &\in V \\ \delta\mathcal{H}_{3b} &\equiv 0, & \delta\mathcal{F}_3^l &\equiv 0, & \xi &\in S_u \end{aligned}$$

(a  $\delta\mathcal{H}_{XY}$  és  $\delta\mathcal{F}_S^T$  tetszőleges lehet.) A fentiek ellenére és az általánosság kedvéért a formális átalakításokban a zérusnak tekintett variációkat is kiírjuk.

6. MEGJEGYZÉS: Legyen  $\mathcal{L}$  az  $\mathcal{L}_{11}$ ,  $\mathcal{L}_{13}$  és  $\mathcal{L}_2$  görbék uniója – v.ö.: 5.2. ábra. A STOKES tétel alkalmazása során kétszer megyünk végig az  $\mathcal{L}$  görbe mentén. Legyen továbbá

$$(6.15) \quad [\delta r^l] = \delta r^{l+} - \delta r^{l-}, \quad [\delta w_b] = \delta w_b^+ - \delta w_b^- \quad \xi \in \mathcal{L}$$

a  $\delta r^l$  és a  $\delta w_b$  vektormezők (variációk) szakadása, ahol a [pozitív] {negatív} előjel az  $\mathcal{L}$  görbe [pozitív] {negatív} oldalát azonosítja – lásd az 5.2. ábrát a részleteket illetően.

A  $-\delta K = 0$  extrémum feltétel [a (6.10) egyenlet] a következő lépések végrehajtásával hozható alkalmas alakra:



1. A (6.12) variációk helyettesítésével kapjuk, hogy

$$(6.16) \quad -\delta K = I_1^{MV} + I_1^{MS_u} = \int_V [\epsilon^{kmy} \delta F_{y.;m}^l + \epsilon^{apy} (\delta H_{yb;p} + \epsilon_{bps} \delta F_y^s) \kappa_a^b] dV \\ - \int_{S_u} [n_3 \epsilon^{3\eta\pi} \delta F_{\pi.;\eta}^l \hat{u}_l + n_3 \epsilon^{3\pi\eta} (\delta H_{\eta b;\pi} + \epsilon_{b\pi s} \delta F_\eta^s) \hat{\varphi}^b] dA = 0.$$

2. Az  $I_1^{MV}$  integrál a GAUSS tétel alkalmazását követő átrendezésekkel alkalmasabb alakra hozható. Ha emellett azt is figyelembe vesszük, hogy  $\delta H_{AB} \equiv \delta F_K^L \equiv 0$   $x \in V$ , míg  $\delta H_{XY}$  és  $\delta F_S^T$   $x \in V$  tetszőleges; majd pedig helyettesítjük az  $\mathcal{Y}^{XY}$  és  $\mathcal{D}_T^S$  inkompatibilitási tenzorokat, akkor

$$(6.17) \quad I_1^{MV} = \delta K^V + I_2^{MS_u} + I_1^{MS_t} = \int_V (\mathcal{Y}^{XY} \delta H_{XY} + \mathcal{D}_T^S \delta F_S^T) dV \\ - \int_{S_u} \left( n_3 \epsilon^{3\chi\eta} \delta F_\eta^l \gamma_{\chi l} + n_3 \epsilon^{3\pi\eta} \delta H_{\eta b} \kappa_\pi^b \right) dA - \int_{S_t} \left( n_3 \epsilon^{3\chi\eta} \delta F_\eta^l \gamma_{\chi l} + n_3 \epsilon^{3\pi\eta} \delta H_{\eta b} \kappa_\pi^b \right) dA.$$

3. Az  $I_1^{MS_u}$  integrál a Függelék (A.6.1) képletének felhasználásával alakítható tovább, feltéve hogy a képletben rendre  $\hat{u}_l$ -t,  $\hat{\varphi}^b$ -t,  $\delta F_\eta^l$ -t,  $\delta H_{\eta b}$ -t,  $S_u$ -t és  $g$ -t írunk  $u_l$ ,  $\varphi^b$ ,  $F_\eta^l$ ,  $H_{\eta b}$ ,  $S_o$  és  $g_o$  helyett. Vegyük azt is figyelembe, hogy megfordul a vonalintegrál előjele  $g$ -n. Ily módon adódik, hogy

$$(6.18) \quad I_1^{MS_u} = I_3^{MS_u} + I_1^{MG} = \int_{S_u} \left[ n_3 \epsilon^{3\chi\eta} (\hat{u}_{l;\chi} + \epsilon_{l\chi b} \hat{\varphi}^b) \delta F_\eta^l + n_3 \epsilon^{3\pi\eta} \hat{\varphi}^b \delta H_{\eta b} \right] dA \\ + \int_g \left( \tau^\eta \hat{u}_l \delta F_\eta^l + \tau^\eta \hat{\varphi}^b \delta H_{\eta b} \right) ds.$$

4. A (6.14) egyenletek helyettesítése az  $I_1^{MS_t}$  felületi integrálba az

$$(6.19) \quad I_1^{MS_t} = - \int_{S_t} \left[ n_3 \epsilon^{3\chi\eta} \gamma_{\chi l} \delta r^l_{;\eta} + n_3 \epsilon^{3\pi\eta} \kappa_\pi^b (\delta w_{b;\eta} + \epsilon_{b\eta s} \delta r^s) \right] dA$$

alakot eredményezi. Vegyük észre, hogy eltekintve az előjeltől megegyezik a fenti integrál a Függelék (A.6.2) képletének baloldalán álló integrállal ha az utóbbiban rendre  $\delta r^l$ -t,  $\delta w_b$ -t és  $S_u$ -t írunk  $r^l$ ,  $w_b$  és  $S_o$  helyett. Következésképp felhasználhatjuk az (A.6.2) egyenlet jobboldalát a további átalakításokban. Ezek során nem szabad megfeledkezni arról, hogy

- (a) a  $g$  és  $\mathcal{L}$  uniója felel meg  $g_o$ -nak;
- (b) amint arra már rámutattunk a 6. MEGJEGYZÉSben a STOKES tétel alkalmazása során kétszer megyünk végig az  $\mathcal{L}$  görbe mentén;
- (c) szakadása van a  $\delta r^l$  és  $\delta w_b$  vektormezőknek – lásd a 6.15 képleteket – az  $\mathcal{L}$  görbén;
- (d) az eredményül kapott felületi integrál integranduszában álló tagok átrendezése révén lehetőség nyílik a (3.15)<sub>1,2</sub> kompatibilitási peremfeltételek helyettesítésére.

A fentiek alapján kapjuk, hogy

$$(6.20) \quad I_1^{MS_t} = I_2^{MS_t} + I_2^{MG} + I_1^{ML} = - \int_{S_t} \left( n_3 \mathcal{D}_l^3 \delta r^l + n_3 \mathcal{Y}^{3l} \delta w_l \right) dA \\ + \int_g \left( \tau^\eta \gamma_{\eta l} \delta r^l + \tau^\eta \kappa_{\eta.}^b \delta w_b \right) ds + \int_{\mathcal{L}} \left( \tau^\eta \gamma_{\eta l} [\delta r^l] + \tau^\eta \kappa_{\eta.}^b [\delta w_b] \right) ds.$$

5. Ami a  $I_1^{MG} + I_2^{MG}$  vonalintegrálokot illeti, helyettesítsük azokba a (6.14) egyenleteket – a feszültségfüggvények és variációik folytonosak az  $S$ -n – és hajtsunk végre parciális integrálásokat, nem feledkezve meg arról, hogy a  $\delta w_b$  és  $\delta r^l$  vektormezőknek (variációknak) szakadása van a  $P_{1i}$  és  $P_{1,i+1}$  ( $i = 1, 3$ ) pontokban. Alkalmas átrendezés után következik,

hogy

$$(6.21) \quad I_1^{MG} + I_2^{MG} = I_3^{MG} + \Sigma_1^M = \int_g \left[ \tau^\eta (\gamma_{\chi l} - \hat{u}_{l;\chi} - \epsilon_{l\chi b} \hat{\varphi}^b) \delta r^l + \tau^\eta (\kappa_{\pi.}^b - \hat{\varphi}_{;\pi}^b) \delta w_b \right] ds \\ + \sum_{i=1,3} \left\{ \hat{\varphi}^b [\delta w_b] \Big|_{P_{1i}} - \hat{\varphi}^b [\delta w_b] \Big|_{P_{1,i+1}} + \hat{u}_l [\delta r^l] \Big|_{P_{1i}} - \hat{u}_l [\delta r^l] \Big|_{P_{1,i+1}} \right\}.$$

Összegyűjtve az 1.–5. alatt levezetett képleteket a

$$(6.22) \quad -\delta K = \delta K^V + \delta K^{S_u} + \delta K^{S_t} + \delta K^g + \delta K^{\mathcal{L}} = 0$$

eredményt kapjuk, ahol

$$(6.23a) \quad \delta K^V = \int_V (\mathcal{Y}^{XY} \delta H_{XY} + \mathcal{D}_T^S \delta F_S^T) dV,$$

$$(6.23b)$$

$$\delta K^{S_u} = I_2^{MS_u} + I_3^{MS_u} = - \int_{S_u} \left[ n_3 \epsilon^{3\chi\eta} (\gamma_{\chi l} - \hat{u}_{l;\chi} - \epsilon_{l\chi b} \hat{\varphi}^b) \delta \mathcal{F}_\eta^l + n_3 \epsilon^{3\pi\eta} (\kappa_{\pi.}^b - \hat{\varphi}_{;\pi}^b) \delta \mathcal{H}_{\eta b} \right] dA,$$

$$(6.23c)$$

$$\delta K^{S_t} = I_2^{MS_t} = - \int_{S_t} \left( n_3 \mathcal{D}_{.l}^3 \delta r^l + n_3 \mathcal{Y}^{3b} \delta w_b \right) dA,$$

$$(6.23d)$$

$$\delta K^g = I_3^{MG} = \int_g \left[ \tau^\eta (\gamma_{\chi l} - \hat{u}_{l;\chi} - \epsilon_{l\chi b} \hat{\varphi}^b) \delta r^l + \tau^\eta (\kappa_{\pi.}^b - \hat{\varphi}_{;\pi}^b) \delta w_b \right] ds$$

és

$$(6.23e) \quad \delta K^{\mathcal{L}} = I_1^{ML} + \Sigma_1^M = \int_{\mathcal{L}} \left( \tau^\eta \gamma_{\eta l} [\delta r^l] + \tau^\eta \kappa_{\eta.}^b [\delta w_b] \right) ds \\ + \sum_{i=1,3} \left\{ \hat{\varphi}^b [\delta w_b] \Big|_{P_{1i}} - \hat{\varphi}^b [\delta w_b] \Big|_{P_{1,i+1}} + \hat{u}_l [\delta r^l] \Big|_{P_{1i}} - \hat{u}_l [\delta r^l] \Big|_{P_{1,i+1}} \right\}.$$

A  $\delta \mathcal{H}_{XY}$ ,  $\delta \mathcal{F}_S^T$ ,  $\delta \mathcal{F}_\eta^l$ ,  $\delta \mathcal{H}_{\eta b}$ ,  $\delta r^l$  és  $\delta w_b$  variációk tetszőleges volta miatt a

$$(6.24) \quad \delta K^V + \delta K^{S_u} + \delta K^{S_t} + \delta K^g = 0$$

extremum feltételből a (3.13a,b) független kompatibilitási egyenletek, a (3.14) alakváltozási peremfeltételek, a (3.15) kompatibilitási peremfeltétel, valamint a  $g$  görbére vonatkozó

$$(6.25a) \quad \tau^\chi (\gamma_{\chi l} - \hat{u}_{l;\chi} - \epsilon_{l\chi b} \hat{\varphi}^b) = 0,$$

$$(6.25b) \quad \tau^\pi (\kappa_{\pi.}^b - \hat{\varphi}_{;\pi}^b) = 0$$

folytonossági feltételek következnek.

7. MEGJEGYZÉS: Az egyszerűen összefüggő tartományra vonatkozó (6.24) extremum feltételt KOZÁK–SZEIDL vezette le először [30].

A  $\delta K^{\mathcal{L}} = 0$  feltételben megjelenő vonalintegrálok átalakítása további előkészületeket igényel. Tegyük fel, hogy (lásd a 8. MEGJEGYZÉSt)

$$(6.26a) \quad [\delta w_b] = \delta_{c_b}^{(1i)} + \epsilon_{svb} \delta C^{s} [R^v - R^v(P_{1,i+1})], \quad [\delta r^s] = \delta C^{s}^{(1i)}, \\ i = 1, 3 \quad \xi \in \mathcal{L}_{1i}$$

$$(6.26b) \quad [\delta w_b] = \delta_{c_b}^{(21)} + \epsilon_{svb} \delta C^{s} [R^v - R^v(P_{21})], \quad [\delta r^s] = \delta C^{s}^{(21)}, \\ \xi \in \mathcal{L}_2$$

ahol  $\delta_{c_b}^{(1i)}$ ,  $\delta C^{s}$ ,  $\delta_{c_b}^{(21)}$  és  $\delta C^{s}$  tetszőleges állandó vektorok.

8. MEGJEGYZÉS: A szakadások fenti megválasztásának az áll a háttérben, hogy a

$$(6.27) \quad [\delta w_b] = \delta_{c_b} + \epsilon_{svb} \delta C^s [R^v - R^v(P)], \quad [\delta r^s] = \delta C^s \quad \xi \in S$$

alakban megadott vektormezőkhöz – itt  $\delta c_b$  és  $\delta C^s$  tetszőleges állandó vektorok,  $P$  tetszőleges, de rögzített pont – nem tartoznak feszültségfüggvények (ahogy a merevtestszerű mozgás sem okoz alakváltozást), hiszen

$$[\delta w_b]_{;\chi} + \epsilon_{b\kappa s}[\delta r^s] \equiv 0, \quad [\delta r^s]_{;\beta} \equiv 0. \quad \xi \in S$$

A  $\delta K^{\mathcal{L}}$ -t adó (6.23e) képletbe helyettesítve a (6.26a,b) szakadásokat és kiemelve, alkalmas átrendezés után, a

$$\delta_{c_l}^{(21)} \mathbf{a}^l, \delta C^k \mathbf{a}_k \quad \text{és} \quad \delta_{c_b}^{(1i)} \mathbf{a}^l, \delta C^k \mathbf{a}_k$$

vektorokat kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \delta K^{\mathcal{L}} = & \oint_{\mathcal{L}_2} \tau^\eta \kappa_\eta^b \mathbf{a}_b ds \cdot \mathbf{a}^l \delta_{c_l}^{(21)} \\ & + \oint_{\mathcal{L}_2} \frac{d\xi^\chi}{ds} \left[ \gamma_{\chi l} + \epsilon_{blv} (R^v(s) - R^v(P_{21})) \kappa_{\chi.}^b \right] \mathbf{a}^l ds \cdot \mathbf{a}_k \delta C^k \\ & + \sum_{i=1,3} \left( -\hat{\varphi}^b \mathbf{a}_b \Big|_{P_{1,i+1}} + \hat{\varphi}^b \mathbf{a}_b \Big|_{P_{1i}} + \int_{\mathcal{L}_{1i}} \tau^\eta \kappa_\eta^b \mathbf{a}_b ds \right) \cdot \mathbf{a}^l \delta_{c_l}^{(1i)} \\ & + \sum_{i=1,3} \left[ -\hat{u}_l \mathbf{a}^l \Big|_{P_{1,i+1}} + \hat{u}_l \mathbf{a}^l \Big|_{P_{1i}} + \epsilon_{lvk} \hat{\varphi}^k (R^v(P_{1,i+1}) - R^v(P_{1i})) \mathbf{a}^l \Big|_{P_{1i}} \right. \\ & \left. + \int_{\mathcal{L}_{1i}} \frac{d\xi^\chi}{ds} \left[ \gamma_{\chi l} + \epsilon_{blv} (R^v(s) - R^v(P_{1i})) \kappa_{\chi.}^b \right] \mathbf{a}^l ds \right] \cdot \mathbf{a}_k \delta C^k = 0. \end{aligned}$$

Mivel az utóbbi extremum feltételben

$$\delta_{c_l}^{(21)} \mathbf{a}^l, \delta C^k \mathbf{a}_k \quad \text{és} \quad \delta_{c_b}^{(1i)} \mathbf{a}^l, \delta C^k \mathbf{a}_k$$

egyaránt tetszőleges, a  $\delta K^{\mathcal{L}}$  variáció eltűnéséből a (6.3) és (6.4) nagybani kompatibilitási feltételek, valamint a (6.7) és (6.8) kiegészítő kompatibilitási feltételek fennállása következik.

**6.5. Eredmények.** Az egyes eredményeket sorszámozzuk.

1. A jelen fejezet legfontosabb eredménye annak kimutatása, hogy a teljes kiegészítő energia maximum elv mikropoláris testre az 5.1. ábrán vázolt háromszorosan összefüggő térbeli tartomány és a tekintett vegyes peremértékfeladatok esetén biztosítja az ún. *kiegészítő kompatibilitási feltételek* fennállását. Az a körülmény, hogy a vizsgálatokat csak háromszorosan összefüggő tartományra végeztük, nem játszik a gondolatmenet lépéseiben olyan mértékű szerepet, hogy ne lehetne azt megismételni négy, vagy többszörösen összefüggő térbeli tartományra vonatkozó, hasonló jellegű vegyes peremértékfeladatok esetén.
2. A kiegészítő kompatibilitási feltételek geometriai megfontolásokból is leszármaztathatók. Mivel ezekben a megfontolásokban az anyagegyenlet nem jelenik meg, a kiegészítő kompatibilitási feltételek anyagegyenlettől függetlenül geometriailag lineáris feladatokra érvényesek.

A vonatkozó publikációkat illetően [63] és [64] érdemel említést. A felsorolt eredmények 100%-ban a szerző eredményei.

**7. AZ EGYÉRTÉKŰSÉG MAKRÓ FELTÉTELEI ÉS AZ ALAKVÁLTOZÁSI  
PEREMFELTÉTELEK SÍKBELI VEGYES PEREMÉRTÉKFELADATOKRA –  
MIKROPOLÁRIS ESET.**

**7.1. Előzmények.** SZEIDL–KOZÁK [31], majd SZEIDL [59] foglalkozott először a mikropoláris rugalmasságtan ún. első síkfeladatának duál rendszerével, illetve az egyenértékű variációs elvekkel. Kimutatták, hogy az alakváltozásmezők kinematikailag lehetséges voltának szükséges és elégséges feltételei, közöttük a többszörösen összefüggő tartományon érvényes makró kompatibilitási feltételek (jelen esetben a *nagybani kompatibilitási feltételek*) mind következnek a teljes kiegészítő energia maximumának elvéből, ha a peremfeltételek ugyanolyan természetűek minden egyes zárt kontúron, azaz vagy az elmozdulások, vagy pedig a feszültségek vannak előírva.

Ha az egyes kontúrok páros számú ívre vannak felosztva, és az ívek mentén vagy az elmozdulás, vagy pedig a feszültség az előírt, akkor tisztázatlan a *kiegészítő kompatibilitási feltételek*<sup>3</sup> kérdése, bár az előző fejezet eredményei alapján valószínűsíthető, hogy ezek a feltételek is következnek a kiegészítő energia maximum elvből.

A klasszikus síkfeladatok esetére ezt a kérdést, egymástól függetlenül, HU–HAICHANG [19] és SZEIDL–VAN GEMERT [78] vizsgálta – az elsőbbség HU–HAICHANG-é –, akik megmutatták, hogy valamennyi kiegészítő feltétel következik a teljes kiegészítő energia maximum elvből.

További probléma, hogy nem ismeretesek az alakváltozási peremfeltételek, ha a kontúr egy egy ívén érintőirányú elmozdulás, normálirányú feszültség, vagy érintőirányú feszültség, normálirányú elmozdulás, illetve forgás vagy nyomatéki feszültség az előírt az összes lehetséges eset alapul vételével.

**7.2. Célkitűzések.** Fentiekre tekintettel célul tűzzük ki az alábbi feladatok megoldását:

- A kompatibilitás kiegészítő feltételeinek levezetése, ha egy kontúr páros számú ívre osztott és az íveken felváltva vagy a feszültség, vagy az elmozdulás az előírt.
- A nem ismeretes alakváltozási peremfeltételek előállítás.

A publikációkat illetően a [73] tanulmányra utalunk.

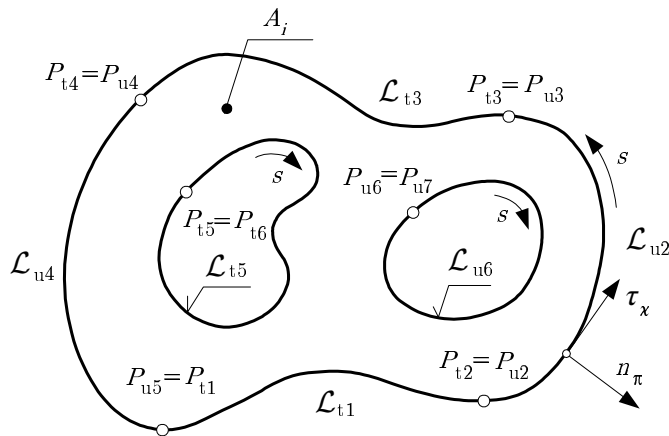
**7.3. A duál egyenletrendszer és a kiegészítő kompatibilitási feltételek.** A vizsgálat tárgyát képező háromszorosan összefüggő  $A = A_i$  tartományt, valamint a tartomány

$$\mathcal{L}_o = \mathcal{L}_{t1} \cup \mathcal{L}_{u2} \cup \mathcal{L}_{t3} \cup \mathcal{L}_{u4}$$

külső és

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{t5} \quad \text{valamint} \quad \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{u6}$$

belső kontúrjait a 7.1. ábra szemlélteti. A mikropoláris rugalmasságtan első síkfeladata esetén – feltevés szerint az  $x^1, x^2$  sík az alakváltozás síkja továbbá  $u_\pi$  és  $\varphi^3$  a nem azonosan zérus elmozdulás és



7.1 ábra

<sup>3</sup>Emlékeztetjük az olvasót, hogy ezek a feltételek alkotják a kompatibilitás makró feltételeinek egyik csoportját – lásd a Szóhasználat, jelölésbeli megállapodások és jelölések című szakaszt a római v oldalon.

forgás koordináta. Az alakváltozási – és feszültségi tenzorok nem azonosan zérus összetevőit  $\gamma_{\pi\rho}$ ,  $\kappa_\rho^3$  továbbá  $t^{\pi\rho}$ ,  $t^{33}$ ,  $\mu_{\rho 3}$  és  $\mu_{3\rho}$  jelöli. A térfogati erő– és erőpárrendszer sűrűségét pedig  $b^q$  és  $c_3$ .

Homogén, centroszimmetrikus test esetén a mikropoláris rugalmasságtan első síkfeladatának primál egyenleteit

– a

$$(7.1) \quad \gamma_{\pi\rho} = u_{\rho;\pi} + \varepsilon_{\rho\pi 3}\varphi^3, \quad \kappa_\rho^3 = \varphi^3_{;\rho}$$

kinematikai egyenletek,

– a

$$(7.2a) \quad t^{\pi\rho} = C^{\pi\rho\nu\psi}\gamma_{\nu\psi}, \quad t^{33} = C^{33\pi\rho}\gamma_{\pi\rho},$$

$$(7.2b) \quad \mu^{\nu 3} = D^{\nu 3\rho 3}\kappa_{\rho 3}, \quad \mu^{3\nu} = D^{3\nu\rho 3}\kappa_{\rho 3}$$

HOOKE törvény ( $C^{\pi\rho\nu\psi}$ ,  $C^{33\pi\rho}$ ,  $D^{\nu 3\rho 3}$  és  $D^{3\nu\rho 3}$  a rugalmassági állandók tenzorai) és

– a

$$(7.3) \quad t^{\nu\rho}_{;\nu} + b^\rho = 0, \quad \mu^{\nu}_{3;\nu} + \varepsilon_{3\nu\rho}t^{\nu\rho} + c_3 = 0$$

egyensúlyi egyenletek alkotják.

Az  $\mathcal{L}_t = \mathcal{L}_{t1} \cup \mathcal{L}_{t3} \cup \mathcal{L}_{t5}$  görbén feszültségek, az  $\mathcal{L}_u = \mathcal{L}_{u2} \cup \mathcal{L}_{u4} \cup \mathcal{L}_{u6}$  görbén pedig az elmozdulások és a forgás van előírva. Ennek megfelelően a (7.1), (7.2a,b) és (7.3) mezőegyenletekhez az

$$(7.4) \quad u_\rho = \hat{u}_\rho, \quad \varphi^3 = \hat{\varphi}^3, \quad x \in \mathcal{L}_u$$

$$(7.5) \quad n_\rho t^{\rho\pi} = \hat{t}^\pi, \quad n_\rho \mu^{\rho 3} = \hat{\mu}^3 \quad x \in \mathcal{L}_t$$

elmozdulási és feszültségi peremfeltételek társulnak.

Jelölje  $\mathcal{F}_3^\rho$  és  $\mathcal{H}_{33}$  a feszültségfüggvény tenzorok nem azonosan zérus elemeit az  $A_i$ -n. Legyenek továbbá  $p^\rho$  és  $q_3$  a

$$(7.6) \quad \Delta p^\rho = -b^\rho \quad \text{és} \quad \Delta q_3 = c_3 \quad x \in A_i$$

POISSON egyenletek ismertnek feltételezett partikuláris megoldásai.

Duál rendszerben a mikropoláris rugalmasságtan első síkfeladatának mezőegyenleteit

– a (7.3) egyensúlyi egyenletek teljes megoldását adó

$$(7.7a) \quad t^{\pi\rho} = \varepsilon^{\pi\mu 3}\mathcal{F}_3^\rho_{;\mu} + g^{\pi\sigma}p^\rho_{;\sigma},$$

$$(7.7b) \quad \mu^{\nu 3} = \varepsilon^{\nu\pi 3}(\mathcal{H}_{33;\pi} + \varepsilon_{3\pi\rho}\mathcal{F}_3^\rho) + g^{\nu\rho}(\varepsilon_{\rho 3\eta}p^\eta + q_{3;\rho})$$

duál értelmező egyenletek,

– a HOOKE törvény

$$(7.8) \quad \gamma_{\nu\psi} = \overset{-1}{C}_{\nu\psi\pi\rho}t^{\pi\rho}, \quad \kappa_{\rho 3} = \overset{-1}{D}_{\rho 3\nu 3}\mu^{\nu 3}$$

inverze és

– az alakváltozásmezők kompatibilitásának szükséges feltételét adó

$$(7.9) \quad \mathcal{E}^{33} = \varepsilon^{3\rho 3}\kappa_{\rho;\pi}^3 = 0, \quad \mathcal{D}^3_\rho = \varepsilon^{3\nu\pi}(\gamma_{\pi\rho;\nu} + \varepsilon_{\pi\rho 3}\kappa_{\nu}^3) = 0$$

duál mérlegegyenletek (kompatibilitási differenciálegyenletek –  $\mathcal{E}^{33}$  és  $\mathcal{D}^3_\rho$  az inkompatibilitási tenzorok nem azonosan zérus elemei)

alkotják.

Ha a kompatibilitási differenciálegyenletek fennállnak, akkor az alakváltozási tenzorok kompatibilisek egy egyszeresen összefüggő tartományon, azaz a (7.1) primál kinematikai egyenleteknek egy és csakis egy megoldásuk van (eltekintve egy merevtestszerű mozgástól) az  $u_\alpha$  és  $\varphi^3$  elmozdulásmezőkre nézve. KOZÁK–SZEIDL megmutatta [31], hogy a (7.7a,b), (7.8) és (7.9) duál

mezőegyenletekhez az

$$(7.10a) \quad \tau^\pi \gamma_{\pi\rho} = \frac{d\hat{u}_\rho}{ds} + \tau^\pi \epsilon_{\rho\pi 3} \hat{\varphi}^3, \quad s \in \mathcal{L}_u$$

$$(7.10b) \quad \tau^\pi \kappa_\pi^3 = \frac{d\hat{\varphi}^3}{ds} \quad s \in \mathcal{L}_u$$

alakváltozási peremfeltételek társulnak, ahol  $s$  az ívkoordináta.

Tekintsük most az  $\mathcal{L}_t$  ívekre vonatkozó peremfeltételeket. A (7.5) és (7.7a,b) összehasonlításából a

$$(7.11a) \quad \hat{t}^\rho - \overset{\circ}{t}^\rho = n_\pi \epsilon^{\pi\nu 3} \mathcal{F}_{3;\nu}^\rho = \frac{d\mathcal{F}_3^\rho}{ds}, \quad s \in \mathcal{L}_t$$

$$(7.11b) \quad \hat{\mu} - \overset{\circ}{\mu} = n_\pi \epsilon^{\pi\nu 3} (\mathcal{H}_{33;\nu} + \epsilon_{3\nu\rho} \mathcal{F}_3^\rho) = \frac{d\mathcal{H}_{33}}{ds} - n_\rho \mathcal{F}_3^\rho \quad s \in \mathcal{L}_t$$

egyenletek következnek, ahol

$$(7.11c) \quad \overset{\circ}{t}^\rho = n_\pi g^{\pi\sigma} p_{;\sigma}^\rho \quad \text{és} \quad \overset{\circ}{\mu} = n_\nu g^{\nu\rho} (\epsilon_{\rho 3\eta} p^\eta + q_{3;\rho}).$$

A (7.11a) differenciálegyenlet megoldása direkt integrálással állítható elő. Jelölje  $\hat{\mathcal{F}}_3^\rho$  a megoldást. Nyilvánvaló, hogy

$$(7.12) \quad \hat{\mathcal{F}}_3^\rho(s) \mathbf{g}_\rho(s) = \int_{P_{ti}}^s [\hat{t}^\rho(\sigma) - \overset{\circ}{t}^\rho(\sigma)] \mathbf{g}_\rho(\sigma) d\sigma, \quad s \in \mathcal{L}_{ti}, \quad i = 1, 3, 5.$$

Legyen  $C_{(ti)}^\rho \mathbf{g}_\rho$  ( $i = 1, 3, 5$ ) integrációs állandó. Az

$$(7.13) \quad \mathcal{F}_3^\rho(s) \mathbf{g}_\rho = \hat{\mathcal{F}}_3^\rho(s) \mathbf{g}_\rho + C_{(ti)}^\rho \mathbf{g}_\rho, \quad s \in \mathcal{L}_{ti}, \quad i = 1, 3, 5$$

feltétel egyenértékű a (7.11a) feltétellel és viszont. Legyen továbbá  $\hat{\mathcal{H}}_{33}(s)$  a

$$(7.14) \quad \hat{\mu} - \overset{\circ}{\mu} = \frac{d}{ds} \hat{\mathcal{H}}_{33} - n_\rho \hat{\mathcal{F}}_3^\rho$$

differenciálegyenlet megoldása. Integrálás után kapjuk, hogy

$$(7.15) \quad \hat{\mathcal{H}}_{33} = \int_{P_{ti}}^s [\hat{\mu}(\sigma) - \overset{\circ}{\mu}(\sigma) + n_\rho \hat{\mathcal{F}}_3^\rho] d\sigma.$$

A (7.14) egyenlet (7.11b)–ből történő levonása után, tekintettel a (7.13)–ra is, formálisan írhatjuk, hogy

$$\frac{d}{ds} (\mathcal{H}_{33} - \hat{\mathcal{H}}_{33}) - n_\rho C^\rho = 0,$$

ahonnan azonnal következik a (7.11b)–vel egyenértékű

$$(7.16) \quad \mathcal{H}_{33}(s) = \hat{\mathcal{H}}_{33}(s) + C_{(ti)}^\rho \mathbf{g}_\rho - [\mathbf{g}_3(s) \times (\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_{P_{ti}})] \cdot \mathbf{g}_\rho C_{(ti)}^\rho, \quad s \in \mathcal{L}_{ti} \quad i = 1, 3, 5$$

peremfeltétel. Itt  $C_{(ti)}^\rho$  integrációs állandó.

**7.4. A kiegészítő kompatibilitási feltételek származtatása a kiegészítő energia maximumának elvéből.** A kiegészítő kompatibilitási feltételeket, megismételve első síkfeladatra a 6.4. szakasz gondolatmenetét, a teljes kiegészítő energia maximumának elvéből származtatjuk. Könnyen ellenőrizhető a (6.9) képlet segítségével és az első síkfeladatot értelmező (7.1)–(7.5) egyenletek figyelembevételével, hogy a teljes kiegészítő energia funkcionál a

$$(7.17) \quad K = -\frac{1}{2} \int_{A_i} (t^{\pi\rho} \gamma_{\pi\rho} + \mu_\nu^3 \kappa_\nu^3) dA + \int_{\mathcal{L}_u} (n_\pi t^{\pi\rho} \hat{u}_\rho + n_\nu \mu_\nu^3 \hat{\varphi}^3) ds$$

alakban írható fel. A (6.9) képletre vezető gondolatmenet ismétlésével pedig azonnal adódik a fenti funkcionálra vonatkozó

$$(7.18) \quad \delta K = - \int_{A_i} (\gamma_{\pi\rho} \delta t^{\pi\rho} + \kappa_\nu^3 \delta \mu_\nu^3) dA + \int_{\mathcal{L}_u} (n_\pi \delta t^{\pi\rho} \hat{u}_\rho + n_\nu \delta \mu_\nu^3 \hat{\varphi}^3) ds = 0$$

extremum feltétel. Mivel a  $t^{\pi\rho}$  és  $\mu'_3$  feszültségek statikailag lehetségesek, a variációik nem lehetnek tetszőlegesek, hanem ki kell, hogy elégítsék a

$$(7.19) \quad \delta t^{\pi\rho}_{;\rho} = 0, \quad \delta \mu'_{3;\nu} + \epsilon_{3\pi\rho} \delta t^{\pi\rho} = 0, \quad x \in A_i$$

$$(7.20) \quad n_\pi \delta t^{\pi\rho} = 0, \quad n_\nu \delta \mu'_3 = 0 \quad s \in \mathcal{L}_t$$

mellékfeltételeket, melyek annak figyelembevételével következnek a (7.3) egyensúlyi egyenletből és a (7.5) feszültségi peremfeltételből, hogy zérusnak vesszük a  $b^\pi$ ,  $c_3$  tartományi és a  $\hat{t}^\pi$ ,  $\hat{\mu}^3$  peremterhelés variációját. Könnyű ellenőrizni, hogy identikusan teljesülnek a (7.19) és (7.20) mellékfeltételek, ha a feszültségek  $\delta t^{\pi\rho}$  és  $\delta \mu'_3$  variációit a feszültségfüggvények és peremfeltételek átalakításakor adódó integrációs állandók variációival a

$$(7.21) \quad \delta t^{\pi\rho} = \epsilon^{\pi\mu 3} \delta \mathcal{F}_3{}^\rho{}_{;\mu}, \quad \delta \mu'_3 = \epsilon^{\nu\psi 3} (\delta \mathcal{H}_{33;\psi} + \epsilon_{3\psi\rho} \delta \mathcal{F}_3{}^\rho) \quad x \in A_i$$

és

$$(7.22) \quad \delta \mathcal{F}_3{}^\rho(s) = \delta C_{(ti)}^\rho, \quad i = 1, 3, 5; \quad s \in \mathcal{L}_{ti}$$

$$(7.23) \quad \delta \mathcal{H}_{33}(s) = \delta C_{(ti)}^{33} - [\mathbf{g}_3 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{ti}})] \cdot \mathbf{g}_\rho \delta C_{(ti)}^\rho, \quad i = 1, 3, 5; \quad s \in \mathcal{L}_{ti}$$

módon képezzük. A (7.21) és (7.18) összefüggések extremum feltételbe történő helyettesítése, a GREEN tétel alkalmazása és alkalmas átrendezés után – a részleteket a Függelék **A.7.2.** szakasza tartalmazza –

$$(7.24) \quad \delta K = \delta K_A + \delta K_{\mathcal{L}} + \delta K_u = 0$$

az extremum feltétel alakja, ahol

$$(7.25) \quad \delta K_A = - \int_{A_i} [\mathcal{D}_\rho^3 \delta \mathcal{F}_3{}^\rho + \mathcal{E}^{33} \delta \mathcal{H}_{33}] dA = 0$$

és

$$(7.26a) \quad \delta K_{\mathcal{L}} = \int_{\mathcal{L}_u \cup \mathcal{L}_t} (n_\mu \epsilon^{\mu\pi 3} \gamma_{\pi\rho} \delta \mathcal{F}_3{}^\rho + n_\pi \epsilon^{\pi\nu 3} \kappa_\nu^3 \delta \mathcal{H}_{33}) ds,$$

$$(7.26b) \quad \delta K_u = \int_{\mathcal{L}_u} \left[ n_\pi \epsilon^{\pi\mu 3} \delta \mathcal{F}_3{}^\rho{}_{;\mu} \hat{u}_\rho + n_\nu \epsilon^{\nu\psi 3} (\delta \mathcal{H}_{33;\psi} + \epsilon_{3\psi\rho} \delta \mathcal{F}_3{}^\rho) \hat{\varphi}^3 \right] ds.$$

A  $\delta K_{\mathcal{L}} + \delta K_u$  végső alakra hozása során vegyük figyelembe, hogy

- $n_\pi \epsilon^{\pi\mu 3} = \tau^\mu$  és  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_u \cup \mathcal{L}_t$ ;
- $\mathcal{L}_t$ -én a (7.22) és (7.23) képletek adják a feszültségfüggvények variációit,
- a feszültségfüggvények variációi mindenütt folytonosak az  $\mathcal{L}$ -en, vagyis a  $P_{t1}$ ,  $P_{t2}$ ,  $P_{t3}$ , és  $P_{t4}$  pontokban is,
- a kívánt eredmény eléréséhez parciális integrálásokat kell végezni a  $\delta K_u$  átalakítása során és az eredményül adódó képletekben ki kell használni a feszültségfüggvények folytonosságát.

A mondottak alapján, elhagyva a formális számítások lépéseit – v.ö.: Függelék **A.7.3.** szakasz –, a (7.26a) és (7.26b)–ből kapjuk, hogy

$$(7.27) \quad \delta K_{\mathcal{L}} + \delta K_u = \int_{\mathcal{L}_u} \left[ \tau^\pi \gamma_{\pi\rho} - \frac{d\hat{u}_\rho}{ds} - \tau^\pi \epsilon_{\rho\pi 3} \hat{\varphi}^3 \right] \delta \mathcal{F}_3{}^\rho ds + \int_{\mathcal{L}_u} \left[ \tau^\pi \kappa_\pi^3 - \frac{d\hat{\varphi}^3}{ds} \right] \delta \mathcal{H}_{33} ds \\ + \oint_{\mathcal{L}_1} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds \delta C_{(11)}^{33} + \oint_{\mathcal{L}_1} \tau^\pi [\gamma_{\pi\rho} - \kappa_\pi^3 \epsilon_{\rho 3\sigma} \mathbf{g}^\sigma \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{t5}})] \mathbf{g}^\rho ds \cdot \delta C_{(11)}^\psi \mathbf{g}_\psi$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1,3} \left\{ \int_{L_{ti}} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds - \hat{\varphi}^3 \Big|_{P_{ti}}^{P_{t,i+1}} \right\} \delta C_{33}^{(0i)} + \\
& + \sum_{i=1,3} \left\{ \int_{\mathcal{L}_{ti}} \tau^\pi [\gamma_{\pi\rho} - \kappa_\pi^3 \epsilon_{\rho 3\sigma} \mathbf{g}^\sigma \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{ti}})] \mathbf{g}^\rho ds - \hat{u}_\rho \mathbf{g}^\rho \Big|_{P_{ti}}^{P_{t,i+1}} \right. \\
& \left. + \hat{\varphi}^3 \epsilon_{\rho 3\sigma} \mathbf{g}^\sigma \cdot (\mathbf{r}_{P_{t,i+1}} - \mathbf{r}_{P_{ti}}) \mathbf{g}^\rho \Big|_{P_{t,i+1}} \right\} \cdot \delta C_{(0i)}^\varphi \mathbf{g}_\varphi = 0 .
\end{aligned}$$

A variációk tetszőleges volta miatt négy egyenletcsoport következik a (7.25) és (7.27) feltételekből. Részletezve,

a kompatibilitási (differenciál)egyenletek az  $A_i$ -n:

$$(7.28) \quad \mathcal{E}^{33}(x) = 0, \quad \mathcal{D}_\rho^3(x) = 0;$$

az alakváltozási peremfeltételek az  $\mathcal{L}_u$ -n:

$$(7.29) \quad \tau^\pi \gamma_{\pi\rho} - \frac{d\hat{u}_\rho}{ds} - \tau^\pi \epsilon_{\rho\pi 3} \hat{\varphi}^3 = 0, \quad \tau^\pi \kappa_\pi^3 - \frac{d\hat{\varphi}^3}{ds} = 0;$$

a nagybani kompatibilitási feltételek az  $\mathcal{L}_1$ -n:

$$(7.30) \quad \oint_{\mathcal{L}_1} \tau^\pi [\gamma_{\pi\rho} - \kappa_\pi^3 \epsilon_{\rho 3\sigma} \mathbf{g}^\sigma \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{t1}})] \mathbf{g}^\rho ds = 0, \quad \oint_{\mathcal{L}_1} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds = 0;$$

és a kiegészítő kompatibilitási feltételek az  $\mathcal{L}_o$  kontúron:

$$(7.31a) \quad \int_{\mathcal{L}_{ti}} \tau^\pi [\gamma_{\pi\rho} - \kappa_\pi^3 \epsilon_{\rho 3\sigma} \mathbf{g}^\sigma \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{ti}})] \mathbf{g}^\rho ds - \hat{u}_\rho \mathbf{g}^\rho \Big|_{P_{ti}}^{P_{t,i+1}} + \hat{\varphi}^3 \epsilon_{\rho 3\sigma} \mathbf{g}^\sigma \cdot (\mathbf{r}_{P_{t,i+1}} - \mathbf{r}_{P_{ti}}) \mathbf{g}^\rho \Big|_{P_{t,i+1}} = 0, \quad i = 1, 3$$

$$(7.31b) \quad \int_{\mathcal{L}_{ti}} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds - \hat{\varphi}^3(s) \Big|_{P_{ti}}^{P_{t,i+1}} = 0.$$

A (7.28), (7.29) és (7.30) feltételeket SZEIDL–KOZÁK [31] találta meg.

1. MEGJEGYZÉS: Az előzőekben áttekintett peremértékfeladat esetén a makró egyértékűségi feltételek három hármását kell teljesíteni az egyszeresen összefüggő tartományon szokásos (7.28) kompatibilitási differenciálegyenletek mellett. Az első hármast az  $\mathcal{L}_1$  kontúrra vonatkozó (7.30) nagybani kompatibilitási feltételek alkotják. A második két hármast az  $\mathcal{L}_{t1}$  és  $\mathcal{L}_{t3}$  ívekre vonatkozó (7.31a,b) kiegészítő kompatibilitási feltételekből áll. Kimutatható, hogy a hármastok közül bármelyik kettő független, azaz fennállásuk biztosítja a harmadik hármast fennállását is. Az állítás igazolását az **A.7.3.** és az **A.7.4.** szakaszok tartalmazzák – lásd a 115 és 117 oldalakat.

2. MEGJEGYZÉS: A feszültségi peremfeltételek integrálása  $3 \times 3$ , kezdetben határozatlan integrálási állandót vitt a feladatba, 3-at az  $\mathcal{L}_1$  kontúr mentén és  $2 \times 3$ -at az  $\mathcal{L}_{t1}$  és  $\mathcal{L}_{t3}$  íveken. Nyilvánvaló, hogy egy konstans hármast szabadon, így zérusnak is választható. Mivel a fennmaradó két hármast változása megváltoztatja az  $A$  tartomány feszültségi állapotát ezek nem vehetők fel tetszőlegesen, hanem a kompatibilitás két független makró feltételéből számíthatók. Ezek a feltételek, együtt a (7.28) kompatibilitási feltételekkel és a (7.29) alakváltozási peremfeltételekkel, az  $u_\alpha$ ,  $\varphi^3$  elmozdulásmezők egyértékűségének szükséges és elégséges feltételeit adják a háromszorosán összefüggő  $A$  tartományon.

**7.5. Alakváltozási peremfeltételek vegyes peremértékfeladatokra.** Az egyszerűség kedvéért, de a szükséges általánosság megsértése nélkül a jelen szakaszban feltételezzük, hogy:

1. A vizsgált  $A$  tartomány egyszeresen összefüggő és az  $\mathcal{L}_o$  kontúr sima.
2. A peremfeltételek ugyanolyan természetűek az  $\mathcal{L}_o$  minden pontjában.
3. Az  $s$  ívkoordináta egybeesik az  $x^2$ -vel, azaz koordinátavonal az  $\mathcal{L}_o$  kontúr.

A hiányzó alakváltozási peremfeltételek és makró kompatibilitási feltételek keresése során ismét a teljes kiegészítő energia minimum elvét fogjuk használni. Jelölje  $K_u$  az  $\mathcal{L}_o$  kontúron ébredő



feszültségek munkáját az ugyanitt előírt elmozdulásokon. Ezzel a jelöléssel, tekintettel továbbá a (7.24), (7.25) és (7.26a) képletekre, a stacionaritási feltétel mindig felírható a

$$\delta K = \delta K_A + \delta K_{\mathcal{L}_o} + \delta K_u = 0$$

alakban, ahol  $\delta K_A = 0$ , a  $\delta K_{\mathcal{L}_o}$ -t pedig a (7.26a) képlet adja feltéve, hogy  $\mathcal{L}_o$ -t írunk  $\mathcal{L}_u$  helyére, míg  $\delta K_u$  alakja az  $\mathcal{L}_o$  peremgörbén előírt peremfeltételektől függ. Következik innét, hogy a keresett feltételek mindig megkaphatók a

$$(7.32) \quad \delta K_{\mathcal{L}_o} + \delta K_u = 0$$

stacionaritási feltételből.

Ami a peremfeltételeket illeti az alábbi felsorolásban foglalt esetekre korlátozzuk a figyelmet. Megjegyezzük, hogy a peremfeltételek írása során azokat a feltételeket is megadjuk, amelyeket a feszültségfüggvények variációi kell, hogy kielégítsenek a vonatkozó feszültségek variációinak eltűnéséhez. (A továbbiakban  $\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = -1/R$ ;  $\Gamma_{22}^2 = -1/R$  a CHRISTOFFEL szimbólumok,  $R$  a kontúr görbületi sugara, az  $x^1$  és  $x^2$  szerinti parciális deriváltakat rendre  $\partial_1$  és  $\partial_2$  jelöli.)

**I.**

$$(7.33) \quad \hat{t}^\rho - \overset{\circ}{t}^\rho = \tau^\nu \mathcal{F}_3{}^\rho{}_{;\nu}, \quad \hat{\varphi}^3 = \varphi^3,$$

vagy ami ugyanaz

$$(7.34) \quad \mathcal{F}_3{}^\rho = \hat{\mathcal{F}}_3{}^\rho + C^\rho; \quad C^\rho \text{ tetszőleges állandó}$$

és

$$\delta \mathcal{F}_3{}^\rho = \delta C^\rho, \\ \delta \mathcal{H}_{33} \quad \text{szabadon variálható.}$$

**II.**

$$(7.35) \quad \hat{u}_\rho = u_\rho, \quad \hat{\mu}_3 - \overset{0}{\mu}_3 = \tau^\nu (\mathcal{H}_{33} - C_{33})_{;\nu} - n_\rho \mathcal{F}_3{}^\rho$$

és

$$\delta \mathcal{F}_3{}^1 = (\delta \mathcal{H}_{33} - \delta C_{33}) \partial_2, \\ \delta \mathcal{F}_3{}^2 \quad \text{szabadon variálható.}$$

**III.**

$$(7.36a) \quad \hat{u}_1 = u_1, \quad \hat{\varphi}^3 = \varphi^3,$$

$$(7.36b) \quad \hat{t}^2 - \overset{\circ}{t}^2 = \tau^\nu (\mathcal{F}_3{}^2 - C_3{}^2)_{;\nu}$$

és

$$\delta \mathcal{F}_3{}^1 \Gamma_{21}^2 = -(\delta \mathcal{F}_3{}^2 - \delta C_3{}^2) \partial_2.$$

**IV.**

$$(7.37a) \quad \hat{u}_2 = u_2, \quad \hat{\varphi}^3 = \varphi^3,$$

$$(7.37b) \quad \hat{t}^1 - \overset{0}{t}^1 = \tau^\nu (\mathcal{F}_3{}^1 - C_3{}^1)_{;\nu}$$

és

$$\delta \mathcal{F}_3{}^2 \Gamma_{22}^1 = -(\delta \mathcal{F}_3{}^1 - \delta C_3{}^1) \partial_2.$$

**V.**

$$(7.38a) \quad \hat{u}_2 = u_2,$$

$$(7.38b) \quad \hat{t}^1 - \overset{0}{t}^1 = \tau^\nu (\mathcal{F}_3{}^1 - C_3{}^1)_{;\nu},$$

$$(7.38c)$$

$$\hat{\mu}^3 - \overset{\circ}{\mu}^3 = \tau^\nu (\mathcal{H}_{33} - C_{33})_{;\nu} - n_1 (\mathcal{F}_3{}^1 - C_3{}^1)$$

és

$$(7.39a) \quad 0 = (\delta \mathcal{F}_3{}^1 - \delta C_3{}^1) \partial_2 + \Gamma_{22}^1 \delta \mathcal{F}_3{}^2,$$

$$(7.39b)$$

$$0 = (\delta \mathcal{H}_{33} - \delta C_{33}) \partial_2 - (\delta \mathcal{F}_3{}^1 - \delta C_3{}^1).$$

Az alakváltozási peremfeltételekre és a kompatibilitás makró feltételeire vezető eljárás illusztrálása kedvéért az utolsó esetet tekintjük át részletesebben. A fennmaradó másik négy esetben elhagyjuk a formális átalakítások részletezését. Az utolsó esetben (7.32)–ből, tekintettel a (7.26a)–ra, és a jelen szakasz első bekezdésében tett feltételezéseinkre, következik, hogy

$$\begin{aligned}
\delta K_{\mathcal{L}_o} + \delta K_u &= \oint_{\mathcal{L}_o} \left( n_\pi \varepsilon^{\pi\mu 3} \gamma_{\mu\rho} \delta \mathcal{F}_3^\rho + n_\psi \varepsilon^{\psi\nu 3} \kappa_\nu^3 \delta \mathcal{H}_{33} \right) ds + \oint_{\mathcal{L}_o} n_\pi \varepsilon^{\pi\mu 3} \delta \mathcal{F}_3^2{}_{;\mu} \hat{u}_2 ds = \\
&= \oint_{\mathcal{L}_o} \tau^\nu \left( \gamma_{\nu\rho} \delta \mathcal{F}_3^\rho + \kappa_\nu^3 \delta \mathcal{H}_{33} \right) ds + \oint_{\mathcal{L}_o} \tau^\nu \left[ (\delta \mathcal{F}_3^2 \partial_\nu) + \Gamma_{\nu\pi}^2 \delta \mathcal{F}_3^\pi \right] \hat{u}_2 ds = \\
&= \oint_{\mathcal{L}_o} \left[ \gamma_{21} \delta \mathcal{F}_3^1 + \gamma_{22} \delta \mathcal{F}_3^2 + \kappa_2^3 \delta \mathcal{H}_{33} \right] ds + \oint_{\mathcal{L}_o} \left[ \hat{u}_2 \Gamma_{21}^2 \delta \mathcal{F}_3^1 - (\hat{u}_2 \partial_2) \delta \mathcal{F}_3^2 \right] ds = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

A (7.39a,b) képletek alapján

$$\delta \mathcal{F}_3^1 - \delta C_3^1, \quad \delta \mathcal{H}_{33} - \delta C_{33} \quad \text{és} \quad [(\delta \mathcal{F}_3^1 - \delta C_3^1) \partial_2] / \Gamma_{22}^1$$

írható  $\delta \mathcal{F}_3^1$ ,  $\delta \mathcal{H}_{33}$  és  $\delta \mathcal{F}_3^2$  helyett. Alkalmas átrendezés után a

$$[(\delta \mathcal{H}_{33} - \delta C_{33}) \partial_2] + \delta C_3^1$$

kifejezés helyettesíthető a  $\delta \mathcal{F}_3^1$  helyett. Végezetül kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\delta K_{\mathcal{L}_o} + \delta K_u = 0 &= - \oint_{\mathcal{L}_o} \kappa_2^3 ds \delta C_{33} - \oint_{\mathcal{L}_o} (\gamma_{21} - \hat{u}_2 \Gamma_{21}^1) ds \delta C_3^1 \\
(7.40) \quad &+ \oint_{\mathcal{L}_o} \left\{ \kappa_2^3 - \partial_2 \left[ \gamma_{21} + \hat{u}_2 \Gamma_{21}^1 + \partial_2 \left( \frac{1}{\Gamma_{22}^1} (\gamma_{22} - \hat{u}_2 \partial_2) \right) \right] \right\} \delta \mathcal{H}_{33} ds.
\end{aligned}$$

Az utóbbi feltételből következő alakváltozási peremfeltételek és makró kompatibilitási feltételek a lenti felsorolásban lelhetők fel – lásd V.

A (7.40)–re vezető gondolatmenet másik négy esetben történő ismétlésével az alábbi alakváltozási és makró kompatibilitási feltételeket kapjuk:

**I.**

$$(7.41) \quad \kappa_2^3 - \frac{d\hat{\varphi}^3}{ds} = 0,$$

$$(7.42) \quad \oint_{\mathcal{L}_o} \tau^\pi (\gamma_{\pi\rho} + \varepsilon_{3\pi\rho} \hat{\varphi}^3) \mathbf{g}^\rho ds = 0.$$

**II.**

$$(7.43) \quad \gamma_{22} - \frac{d\hat{u}_2}{ds} = 0, \quad \kappa_2^3 - \frac{d}{ds} \left( \gamma_{21} - \frac{d\hat{u}_1}{ds} \right) = 0,$$

$$(7.44) \quad \oint_{\mathcal{L}_o} \kappa_2^3 ds = 0.$$

**III.**

$$(7.45) \quad \kappa_2^3 - \frac{d\hat{\varphi}^3}{ds} = 0, \quad \gamma_{22} - \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{1}{\Gamma_{12}^2} \left( \gamma_{21} - \frac{d\hat{u}_1}{ds} - \hat{\varphi}^3 \right) \right] + \Gamma_{22}^1 \hat{u}_1 = 0,$$

$$(7.46) \quad \oint_{\mathcal{L}_o} (\gamma_{22} + \Gamma_{22}^1 \hat{u}_1) ds = 0.$$

Ha egyenes az  $\mathcal{L}_o$  egy íve, akkor ezen az egyenesen a (7.45b) helyett kapjuk, hogy

$$\gamma_{21} - \frac{d\hat{u}_1}{ds} - \hat{\varphi}^3 = 0.$$

IV.

$$(7.47) \quad \kappa_2^3 - \frac{d\hat{\varphi}^3}{ds} = 0, \quad \gamma_{21} + \Gamma_{21}^2 \hat{u}_2 - \hat{\varphi}^3 + \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{1}{\Gamma_{22}^1} \left( \gamma_{22} - \frac{d\hat{u}_2}{ds} \right) \right] = 0,$$

$$(7.48) \quad \oint_{\mathcal{L}_o} (\gamma_{21} + \Gamma_{21}^2 \hat{u}_2 - \hat{\varphi}^3) ds = 0.$$

Ha egyenes az  $\mathcal{L}_o$  egy íve, akkor ezen az egyenesen a (7.47b) helyett kapjuk, hogy

$$\gamma_{22} - \frac{d\hat{u}_2}{ds} = 0.$$

V.

$$(7.49) \quad \kappa_2^3 - \partial_2 \left[ \gamma_{21} + \hat{u}_2 \Gamma_{21}^1 + \partial_2 \left( \frac{1}{\Gamma_{22}^1} (\gamma_{22} - \hat{u}_2 \partial_2) \right) \right] = 0,$$

$$(7.50) \quad \oint_{\mathcal{L}_o} \kappa_2^3 ds = 0, \quad \oint_{\mathcal{L}_o} \partial_2 \left[ \frac{1}{\Gamma_{22}^1} (\gamma_{22} - \hat{u}_2 \partial_2) \right] ds = 0.$$

Ha egyenes az  $\mathcal{L}_o$  egy íve, akkor ezen az egyenesen a (7.49) helyett kapjuk, hogy

$$\gamma_{22} - (\hat{u}_2 \partial_2) = 0.$$

3. MEGJEGYZÉS: Ha a peremfeltételek az

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= \overset{\circ}{u}_1, \\ \hat{t}^2 - \overset{0}{t}^2 &= \tau^\nu (\mathcal{F}_3^2 - C_3^2)_{;\nu}, \\ \hat{\mu}^2 - \overset{0}{\mu}^2 &= \tau^\nu (\mathcal{H}_{33} - C_{33})_{;\nu} - n_1 \mathcal{F}_3^1 \end{aligned}$$

alakban írhatók fel, akkor a

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta \mathcal{F}_3^2 - \delta C_3^2) \partial_2 + \Gamma_{21}^2 \delta \mathcal{F}_3^1, \\ 0 &= (\delta \mathcal{H}_{33} - \delta C_{33}) \partial_2 - \delta \mathcal{F}_3^1 \end{aligned}$$

egyenletek fejezik ki a feszültségek variációinak zérus voltát az  $\mathcal{L}_0$  kontúron. Ezek az egyenletek nem alkalmasak arra, hogy közvetlenül elimináljunk tetszőlegesen kiválasztott kettőt a  $\delta \mathcal{F}_3^1$ ,  $\delta \mathcal{F}_3^2$  illetve  $\delta \mathcal{H}_{33}$  variációk közül a  $\delta K = 0$  stacionaritási feltételben.

**7.6. Eredmények.** Az egyes eredményeket sorszámozzuk.

1. A kompatibilitás (7.31a,b) kiegészítő feltételei a teljes kiegészítő energia minimum elvéből következő Euler egyenletek a mikropoláris rugalmasságtan első síkfeladata esetén. A kompatibilitás makró feltételeit kell használni a feszültségi peremfeltételek integrálása során kapott integrációs állandók számítására.
2. A tekintett öt vegyes típusú peremértékfeladat esetén rendre I. (7.41), (7.42); II. (7.43), (7.44); III. (7.45), (7.46); IV. (7.47), (7.48); és V. (7.49), (7.50) az alakváltozási peremfeltételek illetve a kompatibilitás makró feltételei.

Alapvető feltevés volt a fenti eredmények levezetése során hogy kicsik az alakváltozások és érvényes a HOOKE törvény. Mivel a (7.24) variációs egyenlet [részeit illetően lásd a (7.25) és (7.26a,b) képleteket] megegyezik a virtuális munka elv duál alakjával – ez az elv független az anyagegyenlettől – következik, hogy az alakváltozási peremfeltételek és a makró kompatibilitás feltételei anyagtörvénytől függetlenül geometriailag lineáris feladatokra érvényesek.

Az (7.31a,b) kiegészítő egyértékűségi feltételek variációs elvből történő származtatása a szerző eredménye. A többi eredmény 50–50 %-ban Némethné Iván Ildikó és a szerző eredménye.

A vonatkozó publikációt illetően a [73] tanulmány érdemel említést.

## 8. A SÍKRUGALMASSÁGTAN PEREMINTEGRÁLEGYENLETEI DUÁL RENDSZERBEN ELSŐRENDŰ FESZÜLTSEGFÜGGVÉNYEKEL – KLASSZIKUS ESET

**8.1. Irodalmi előzmények.** Bár számos tanulmány jelent meg síkrugalmasságtani feladatok primál rendszerbeni megoldásáról – lásd pl. [46], [6], [83] vagy [21] – a pályázó ismeretei szerint alig található olyan cikk a síkrugalmasságtan szakirodalmában, amely a duál rendszer egyenleteit veszi alapul, azaz valós feszültségfüggvényeket tekint alapváltozónak. Kivételt jelent JASWON, MATI és SYMM cikke [23]– érdemes ehelyütt JASWON és SYMM könnyebben hozzáférhető könyvére is hivatkozni [24] – amelyben az ismeretlen biharmonikus függvényt (valójában másodrendű feszültségfüggvényt) két ismeretlennek tekintett harmonikus függvény segítségével, egyszerű réteg potenciáljaként adták meg a szerzők; az ismeretlen kontúrmenti forrassűrűség meghatározására pedig alkalmas peremintegrálegyenleteket vezettek le.

Elsőrendű feszültségfüggvények alkalmazását síkbeli és térbeli feladatokra FRAEIJIS DE VEU-  
BEKE kezdeményezte [11], [12] egy új, a teljes kiegészítő energia minimumának elvén alapuló végeselemes eljárás kapcsán mivel a  $C^0$  folytonosságú elsőrendű feszültségfüggvények biztosítják a folytonos felületi terhelés meglétét és ily módon lehetővé vált izoparametrikus elemeket alkalmazni elsőrendű feszültségfüggvényekre.

Ha elsőrendű feszültségfüggvényeket alkalmazunk, akkor a feszültségek meghatározása a feszültségfüggvények első deriváltjainak számítását igényli, ellentétben az AIRY féle másodrendű feszültségfüggvénnyel [2], ennek ismeretében ui. második deriváltak adják a feszültségeket. Az elsőrendű feszültségfüggvény idézett tulajdonsága vonzóvá teszi ezeket a függvényeket a peremelemes alkalmazások számára, annak ellenére, hogy a nyomatéki egyensúly fenntartása egy további egyenletet igényel. Megjegyezzük, hogy az AIRY féle feszültségfüggvény alkalmazásának rendkívül bő irodalma van. A teljesség igénye nélkül emeljük ki ehelyütt MUSZKHELISVILI és iskolája eredményeit [39]. MUSZKHELISVILI felismerte, hogy az AIRY féle feszültségfüggvényre vonatkozó megoldás két reguláris komplex függvény segítségével adható meg. Mivel ez a megoldás teljesíti a vonatkozó mezőegyenletet – a kompatibilitási egyenletet Airy féle feszültségfüggvénnyel – egy adott peremértékfeladat megoldásához csak a peremfeltételek kielégítését kell biztosítani.

Az elsőrendű feszültségfüggvények alkalmazása kapcsán számos kérdés merül fel. Mivel duál rendszerben vagyunk tisztázni kell az egyértékűség szükséges és elégséges feltételeit, különös tekintettel a vegyes peremértékfeladatokra és a többszörösen összefüggő tartomány esetére. Meg kell keresni az elsőrendű feszültségfüggvényekre vonatkozó alapmegoldást is. Az alapmegoldás ismeretében mód nyílik a SOMIGLIANA féle identitás [50] duál rendszerbeni analogonjának felállítására és ily módon az úgynevezett direkt<sup>4</sup> módszer integrálegyenletei is adódnak. Végezetül számítógépi programot is érdemes kidolgozni a vonatkozó peremintegrálegyenlet numerikus megoldására.

**8.2. Célkitűzések.** A fenti szakaszban áttekintett problémák alapján pályázó célul tűzte ki az alábbi feladatok megoldását a síkrugalmasságtan elsőrendű feszültségfüggvényekkel felépített duál rendszerében síkalakváltozás feltételezése mellett:

- Az egyértékűség feltételeinek meghatározása a vegyes peremértékfeladatok egy osztálya és többszörösen összefüggő tartomány esetén.
- Az elsőrendű feszültségfüggvényekkel kapcsolatos alapmegoldás előállítása.
- A SOMIGLIANA identitás duál rendszerbeni analogonjának levezetése és ezzel a direkt módszer integrálegyenletének felállítására végesben fekvő, azaz belső tartomány esetére.
- Számító program kifejlesztése másodrendű izoparametrikus peremelemek felhasználásával.

A vonatkozó publikációkat illetően [67], [69], [68] és [77] érdemel említést.

**8.3. Duál egyenletrendszer elsőrendű feszültségfüggvényekkel és az egyértékűség feltételei.** Legyen  $t^{\kappa\lambda} = t^{\lambda\kappa}$  a síkfeladatokra érvényes  $t^{\kappa\lambda}_{;\kappa} + b^\lambda = 0$  egyensúlyi egyenlet partikuláris megoldása. Az elsőrendű feszültségfüggvényeket, ugyanúgy mint a mikropoláris esetben,

<sup>4</sup>Direkt módszerről beszélünk, ha a vonatkozó integrálegyenletekben a test peremén vett egyes fizikai mennyiségek az ismeretlenek.

$\mathcal{F}_3^\lambda$  jelöli. Síkalakváltozás esetén a duál egyenletrendszer – feltéve, hogy a 7.1. ábrán vázolt  $A_i$  belső tartomány a vizsgálat tárgya – az egyensúlyi egyenlet megoldását adó

$$(8.1) \quad t^{\kappa\lambda} = \epsilon^{\kappa\rho 3} \mathcal{F}_3^\lambda{}_{;\rho} + \overset{o}{t}^{\kappa\lambda} \quad x \in A_i$$

duál értelmező egyenlet (duál kinematikai egyenlet), az

$$(8.2) \quad e_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2\mu} \left( t_{(\kappa\lambda)} - \nu g^{\nu\psi} t_{\nu\psi} g_{\kappa\lambda} \right) \quad x \in A_i$$

inverz HOOKE törvény, az (5.4)-ből következő és egyszeresen összefüggő tartományra vonatkozó

$$(8.3) \quad \epsilon^{\kappa\rho 3} e_{\lambda\kappa;\rho} + \varphi_{;\lambda}^3 = \epsilon^{\kappa\rho 3} (e_{\lambda\kappa;\rho} - \epsilon_{\lambda\kappa 3} \varphi_{;\rho}^3) = 0 \quad x \in A_i$$

kompatibilitási egyenlet, valamint a nyomatéki egyensúlyt biztosító és külön is előírandó

$$(8.4) \quad \epsilon_{3\kappa\lambda} t^{\kappa\lambda} = 0 \quad x \in A_i$$

szimmetriafeltétel alkotják. Vegyük észre, hogy a (8.4) szimmetriafeltétel teljesülése esetén  $t^{12} = t^{21}$ , következésképp a  $t^{12}$ -t és  $t^{21}$ -t adó egyenletek egyike elhagyható. Ily módon kilenc egyenlet van a kilenc ismeretlen –  $\mathcal{F}_3^1, \mathcal{F}_3^2, t^{11}, t^{12} = t^{21}, t^{22}, e_{11}, e_{12} = e_{21}, e_{22}$  és  $\varphi^3$  – meghatározására.

A teljesség és a későbbiek kedvéért kartéziusi koordinátarendszerben is felírjuk a mezőegyenleteket:

- Duál értelmező egyenletek (duál kinematikai egyenletek) ( $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_3^1, \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3^2$ ):

$$(8.5a) \quad t_{11} = \mathcal{F}_1 \partial_2 + \overset{o}{t}_{11}, \quad t_{12} = \mathcal{F}_2 \partial_2 + \overset{o}{t}_{12}, \quad x \in A_i$$

$$(8.5b) \quad t_{21} = -\mathcal{F}_1 \partial_1 + \overset{o}{t}_{21}, \quad t_{22} = -\mathcal{F}_2 \partial_1 + \overset{o}{t}_{22}. \quad x \in A_i$$

- A HOOKE törvény megfordítása:

$$(8.6a) \quad e_{11} = \frac{1}{2\mu} (t_{11} - \nu(t_{11} + t_{22})), \quad x \in A_i$$

$$(8.6b) \quad e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2\mu} t_{(12)} = \frac{1}{4\mu} (t_{12} + t_{21}), \quad x \in A_i$$

$$(8.6c) \quad e_{22} = \frac{1}{2\mu} (t_{22} - \nu(t_{11} + t_{22})). \quad x \in A_i$$

- Kompatibilitási egyenletek:

$$(8.7a) \quad e_{11} \partial_2 - e_{12} \partial_1 + \varphi_3 \partial_1 = 0, \quad x \in A_i$$

$$(8.7b) \quad e_{21} \partial_2 - e_{22} \partial_1 + \varphi_3 \partial_2 = 0. \quad x \in A_i$$

- A nyomatéki egyensúly feltétele:

$$(8.8) \quad t_{12} = t_{21}. \quad x \in A_i$$

Amint azt már említettük a vizsgált tartomány egyelőre a 7.1. ábrán vázolt háromszorosán összefüggő és teljes egészében a végesben fekvő síkbeli tartomány. Elvben minden egyes zárt peremgörbe páros számú ívre bontható és az íveken felváltva, vagy a feszültség, vagy az elmozdulás az előírt. A jelen esetben az  $\mathcal{L}_t = \mathcal{L}_{t1} \cup \mathcal{L}_{t3} \cup \mathcal{L}_{t5}$  görbén feszültségek, az  $\mathcal{L}_u = \mathcal{L}_{u2} \cup \mathcal{L}_{u4} \cup \mathcal{L}_{u6}$  görbén pedig elmozdulások adóttak. Az  $n_\pi t^{\pi\rho} = \hat{t}^\rho$  peremfeltételbe helyettesítve (8.1)-et az  $\mathcal{F}_3^\rho$ -ra vonatkozó

$$(8.9) \quad \hat{t}^\rho - \overset{o}{t}^\rho = n_\kappa \epsilon^{\kappa\nu 3} \mathcal{F}_3^\rho{}_{;\nu} = \frac{d\mathcal{F}_3^\rho}{ds}$$

közönséges differenciálegyenletet kapjuk, ahol  $\overset{o}{t}^\rho = n_\pi \overset{o}{t}^{\pi\rho}$ . Legyen

$$\hat{\mathcal{F}}_3^\rho \mathbf{g}_\rho(s) = \int_{P_{ti}}^s \left[ \hat{t}^\rho(\sigma) - \overset{o}{t}^\rho(\sigma) \right] \mathbf{g}_\rho(\sigma) d\sigma. \quad s \in \mathcal{L}_{ti} \quad i = 1, 3, 5$$

Legyen továbbá  $C_{(ti)}^\rho(P_{ti}) \mathbf{g}_\rho(P_{ti})$  integrációs állandó. Az

$$(8.10) \quad \mathcal{F}_3^\rho(s) \mathbf{g}_\rho(s) = \hat{\mathcal{F}}_3^\rho(s) \mathbf{g}_\rho(s) + C_{(ti)}^\rho(s) \mathbf{g}_\rho(s) \quad i = 1, 3, 5$$

feltétel egyenértékű a (8.9) peremfeltétellel és megfordítva.

Kartéziuszi koordinátarendszerben

$$(8.11) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_1(s) &= \hat{\mathcal{F}}_1(s) + C_{(ti)1}, & s \in \mathcal{L}_{ti} \\ \mathcal{F}_2(s) &= \hat{\mathcal{F}}_2(s) + C_{(ti)2}, & s \in \mathcal{L}_{ti} \end{aligned} \quad (i = 1, 3, 5)$$

a (8.10) peremfeltételt adó két skaláregyenlet.

1. MEGJEGYZÉS: Vegyük észre, hogy az ily módon bevezetett, egyelőre határozatlan integrációs állandók száma megegyezik a terhelt ívek számának kétszeresével.

Mivel az elmozdulásmező nem szerepel az ismeretlenek között tisztázni kell, hogy milyen peremfeltételek írhatók elő az  $\mathcal{L}_u$ -t alkotó íveken. A probléma megoldásához a teljes kiegészítő energia LAGRANGE féle multiplikátor technikával módosított – a módosítás a nyomatéki egyensúly biztosítása miatt szükséges –

$$(8.12) \quad \mathcal{K} = K(t^{\kappa\lambda}, \varphi^3) = -\frac{1}{2} \int_{A_i} t^{\kappa\lambda} e_{\kappa\lambda} dA + \int_{\mathcal{L}_u} n_\kappa t^{\kappa\lambda} \hat{u}_\lambda ds - \int_{A_i} t^{\kappa\lambda} \epsilon_{\kappa\lambda 3} \varphi^3 dA$$

alakjához tartozó

$$(8.13) \quad \delta\mathcal{K} = 0$$

stacionaritási feltétel jelenti a kulcsot, hiszen a stacionaritási feltételnek biztosítania kell az  $e_{\kappa\lambda}$  alakváltozásmező és a  $\varphi^3$  forgásmező kinematikailag lehetséges voltához szükséges valamennyi feltételt, ideértve a vonatkozó peremfeltételeket is. A (8.12) funkcionálban  $e_{\kappa\lambda}$  a (8.2) HOOKE törvényből számított,  $t^{\kappa\lambda}$ -nak teljesíteni kell az egyensúlyi egyenletet és a feszültségi peremfeltételt, de ugyanakkor nem szükséges, hogy szimmetrikus legyen. A feszültségek variációi ki kell, hogy elégítsék a

$$(8.14) \quad \delta t^{\kappa\lambda}_{;\kappa} = 0 \quad x \in A_i \quad \text{és} \quad n_\kappa \delta t^{\kappa\lambda} = 0 \quad x \in \mathcal{L}_t$$

feltételeket. Könnyű belátni, hogy mindkét feltétel teljesül, ha a  $\delta t^{\kappa\lambda}$ -t feszültségfüggvények variációival adjuk meg a

$$(8.15) \quad \delta t^{\kappa\lambda} = \epsilon^{\kappa\rho 3} \delta \mathcal{F}_{3;\rho}^\lambda$$

alakban, ahol  $\delta \mathcal{F}_3^\lambda$  tetszőleges az  $A_i$ -n, az  $\mathcal{L}_t$ -n azonban – tekintettel (8.10) összefüggésre – fenn kell állnia a

$$(8.16) \quad \delta \mathcal{F}_3^\rho(s) = \delta C_{(ti)}^\rho \quad (i = 1, 3, 5)$$

feltételnek.

Az  $e_{\kappa\lambda}$  alakváltozásmezők kinematikailag lehetséges voltához szükséges (és elégséges) feltételek levezetése a

$$(8.17) \quad \delta\mathcal{K} = - \int_{A_i} e_{\kappa\lambda} \delta t^{\kappa\lambda} dA + \int_{\mathcal{L}_u} n_\kappa \delta t^{\kappa\lambda} \hat{u}_\lambda ds - \int_{A_i} \delta t^{\kappa\lambda} \epsilon_{\kappa\lambda 3} \varphi^3 dA - \int_{A_i} t^{\kappa\lambda} \epsilon_{\kappa\lambda 3} \delta \varphi^3 dA = 0$$

stacionaritási feltétel alkalmas átalakítását igényli. Az átalakítás gondolatmenetét az alábbiak részletezik:

1. A (8.15) feltétel helyettesítése az első és második felületi integrálba, illetve (8.1) helyettesítése a harmadik felületi integrálba.
2. Az

$$n_\kappa \delta t^{\kappa\lambda} = n_\kappa \epsilon^{\kappa\rho 3} \delta \mathcal{F}_{3;\rho}^\lambda = \frac{d\delta \mathcal{F}_3^\lambda}{ds}$$

összefüggés helyettesítése az  $\mathcal{L}_u$ -n vett vonalintegrálba.

3. Az (A.7.1) GREEN–GAUSS tétel értelemszerű alkalmazása az első és második felületi integrál esetén.
4. Parciális integrálások végrehajtása az  $\mathcal{L}_u$ -t alkotó ívek mentén kihasználva, hogy fennáll a (8.16) egyenlőség az ívek végpontjaiban (folytonosság!).

5. A GREEN–GAUSS tétel alkalmazásával kapott vonalintegrálok felbontása az

$$\int_{\mathcal{L}} \dots = \int_{\mathcal{L}_u} \dots + \int_{\mathcal{L}_t} \dots$$

képlet alapján, majd a (8.15) összefüggés helyettesítése az  $\mathcal{L}_t$ -n vett integrál esetén.

6. Az eredmény rendezése és átalakítása az

$$(8.18) \quad n_\rho \epsilon^{\kappa\rho 3} = -\tau^\kappa$$

képlet kihasználásával.

A fenti lépések végrehajtása után

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_{A_i} (\epsilon^{\kappa\rho 3} e_{\kappa\lambda;\rho} + \varphi^3_{;\lambda}) \delta \mathcal{F}_3^\lambda dA - \int_{A_i} \mathcal{F}_3^\psi \delta \varphi^3 dA \\ &+ \sum_{i=2,4,6} \int_{\mathcal{L}_{ui}} \left\{ n_\pi [\epsilon^{\pi\kappa 3} e_{\kappa\lambda} - \delta_\lambda^\pi \varphi^3] - \frac{d\hat{u}_\lambda}{ds} \right\} \delta \mathcal{F}_3^\lambda ds \\ &+ \sum_{i=1,3,5} \left\{ \int_{\mathcal{L}_{ti}} n_\pi [\epsilon^{\pi\kappa 3} e_{\kappa\lambda} - \delta_\lambda^\pi \varphi^3] \mathbf{g}^\lambda ds - \hat{u}_\lambda \mathbf{g}^\lambda \Big|_{P_{ti}}^{P_{t,i+1}} \right\} \cdot \mathbf{g}_\sigma \delta C_{(ti)}^\sigma = 0 \end{aligned}$$

a stacionaritási feltétel alakja. A vonatkozó variációk tetszőlegessége miatt innen a (8.3) kompatibilitási feltétel, a (8.4) szimmetriafeltétel – utóbbiban  $t^{\kappa\lambda}$  az  $\mathcal{F}_3^\psi$  feszültségfüggvénnyel van kifejezve, azaz  $\mathcal{F}_3^\psi = 0$  –, a keresett

$$(8.19) \quad \frac{d\hat{u}_\lambda}{ds} = n_\pi [\epsilon^{\pi\kappa 3} e_{\kappa\lambda} - \delta_\lambda^\pi \varphi^3]$$

alakváltozási peremfeltétel, az

$$(8.20) \quad \int_{\mathcal{L}_{t5}} n_\pi [\epsilon^{\pi\kappa 3} e_{\kappa\lambda} - \delta_\lambda^\pi \varphi^3] \mathbf{g}^\lambda ds = 0$$

nagybani kompatibilitási feltétel, valamint az

$$(8.21) \quad \int_{\mathcal{L}_{ti}} n_\pi [\epsilon^{\pi\kappa 3} e_{\kappa\lambda} - \delta_\lambda^\pi \varphi^3] \mathbf{g}^\lambda ds - \hat{u}_\lambda \mathbf{g}^\lambda \Big|_{P_{ti}}^{P_{t,i+1}} = 0 \quad (i = 1, 3)$$

kiegészítő egyértékűségi feltétel következik. Kartéziuszi koordinátarendszerben (8.19), (8.20) és (8.21)–ből rendre a

$$(8.22a) \quad \frac{d\hat{u}_1}{ds} = n_1 e_{21} - n_2 e_{11} - n_1 \varphi_3,$$

$$(8.22b) \quad \frac{d\hat{u}_2}{ds} = n_1 e_{22} - n_2 e_{12} - n_2 \varphi_3,$$

illetve az

$$(8.23) \quad \begin{aligned} \int_{\mathcal{L}_{ti}} [n_1 e_{21} - n_2 e_{11} - n_1 \varphi_3] ds - \hat{u}_1 \Big|_{P_{ti}}^{P_{t,i+1}} &= 0, \\ \int_{\mathcal{L}_{ti}} [n_1 e_{22} - n_2 e_{12} - n_2 \varphi_3] ds - \hat{u}_2 \Big|_{P_{ti}}^{P_{t,i+1}} &= 0 \end{aligned} \quad (i = 1, 3, 5); \quad P_{t5} = P_{t6}$$

egyenletek következnek.

2. MEGJEGYZÉS: A (8.19) alakváltozási peremfeltétel közvetlenül is megkapható, ha az

$$e_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2}(u_{\kappa;\lambda} + u_{\lambda;\kappa})$$

kinematikai egyenletet a peremgörbén tekintjük, megszorozzuk  $n_\pi \epsilon^{\pi\kappa 3} = \tau^\kappa$ -val és ezt követően kihasználjuk, hogy  $u_{[\kappa;\lambda]} = -\epsilon_{\kappa\lambda 3} \varphi^3$ .

3. MEGJEGYZÉS: A (8.20) nagybani kompatibilitási feltétel, valamint a (8.21) kiegészítő egyértékűségi feltétel előállítható a (8.19) alakváltozási peremfeltétel alkalmas integrálásával is.

4. MEGJEGYZÉS: Kimutatható, hogy (8.3) kompatibilitási feltételek fennállása esetén csak kettő független a (8.20) és (8.21) feltételek (háromszor két feltétel) közül – lásd az **A.8.1.** és **A.8.2.** szakaszt. Ez a kettő tetszőlegesen választható meg. Ezzel összhangban a háromszor kettő

$C^{(ti)\rho} \mathbf{g}_\rho$  integrációs állandó közül egyszer kettő, mondjuk  $C^{(t1)\rho} \mathbf{g}_\rho$ , zérusnak választható, mivel az  $\mathcal{F}_3^{(t1)\rho} \mathbf{g}_\rho = C^{(t1)\rho} \mathbf{g}_\rho =$  állandó feszültségfüggvényhez nem tartozik feszültség. A mondottak egyben azt is jelentik, hogy a feszültségi peremfeltételekben álló határozatlan integrációs állandók száma, és a kompatibilitás független makró feltételeinek száma megegyezik.

5. MEGJEGYZÉS: A kompatibilitás szükséges és elégséges feltételeit a 7.1. ábrán vázolt tartomány és a vizsgálni kívánt peremértékfeladatok körében a (8.3) kompatibilitási egyenlet, a (8.20) nagybani kompatibilitási feltétel, valamint a (8.21) kiegészítő egyértékűségi feltételek alkotják.

**8.4. Alapegyenlet és alapmegoldás.** Előljáróban megemlítjük, hogy a jelen szakaszban valamennyi egyenletet egyenesvonalú, kartéziuszi koordinátarendszerben tekintünk. Feltételezzük továbbiakban azt is, hogy nincs tartományi terhelés. A (8.5a,b) képletek a (8.6a,b,c) HOOKE törvénybe, majd az eredmény a (8.7a,b) kompatibilitási egyenletekbe történő helyettesítésével az

$$(8.24a) \quad \frac{1}{2\mu}(1-\nu)\Delta\mathcal{F}_1 - \frac{1}{2\mu}\left(\frac{1}{2}-\nu\right)(\mathcal{F}_1\partial_1 + \mathcal{F}_2\partial_2)\partial_1 + \varphi_3\partial_1 = 0,$$

$$(8.24b) \quad \frac{1}{2\mu}(1-\nu)\Delta\mathcal{F}_2 - \frac{1}{2\mu}\left(\frac{1}{2}-\nu\right)(\mathcal{F}_1\partial_1 + \mathcal{F}_2\partial_2)\partial_2 + \varphi_3\partial_2 = 0$$

differenciálegyenleteket kapjuk. A fenti egyenletekhez a nyomatóki egyensúlyt kifejező (8.4) szimmetriafeltétel – utóbbiban  $t^{\kappa\lambda}$  már a  $\mathcal{F}_3^\psi$  feszültségfüggvénnyel van felírva – társul:

$$(8.24c) \quad \mathcal{F}_1\partial_1 + \mathcal{F}_2\partial_2 = 0.$$

A fenti egyenletek mátrix alakba is átírhatók:

$$(8.25) \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2\mu}(1-\nu)\Delta - \frac{1}{2\mu}\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\partial_1\partial_1 & -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\partial_1\partial_2 & -\partial_1 \\ -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\partial_2\partial_1 & \frac{1}{2\mu}(1-\nu)\Delta - \frac{1}{2\mu}\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\partial_2\partial_2 & -\partial_2 \\ -\partial_1 & -\partial_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ -\varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6. MEGJEGYZÉS: Az utóbbi egyenletet alapegyenletnek nevezzük.

Legyen  $\mathfrak{D}_{lk}$  ( $l, k = 1, 2, 3$ ) a (8.25) alapegyenletben álló differenciáloperátor. Legyen továbbá  $\mathbf{u}_k = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, -\varphi_3)$  az ismeretlenek vektora. A bevezetett jelölésekkel

$$(8.26) \quad \mathfrak{D}_{ik}\mathbf{u}_k = 0$$

az alapegyenlet. Jelölje  $D_{kj}$  a  $\mathfrak{D}_{jk}$  elemhez tartozó előjeles aldeterminánst. Nyilvánvaló, hogy

$$(8.27) \quad D_{ik}\mathfrak{D}_{kl} = \mathfrak{D}_{ik}D_{kl} = \det(\mathfrak{D}_{jl})\delta_{kl}.$$

Legyen  $\chi_l$  új ismeretlen – GALJORKIN vektor [32] [22] – :

$$(8.28) \quad \mathbf{u}_k = D_{kl}\chi_l.$$

Utóbbi képlet (8.26)–ba történő helyettesítésével – tekintettel a (8.27) képletre is – a

$$(8.29) \quad \mathfrak{D}_{ik}\mathbf{u}_k = \mathfrak{D}_{ik}D_{kl}\chi_l = \det(\mathfrak{D}_{jl})\chi_i = 0$$

eredmény adódik. Ez azt jelenti, hogy az új ismeretlenre nézve megszűnik az egyenletek csatolása.

7. MEGJEGYZÉS: A későbbiek kedvéért megadjuk a fenti képletekben álló adjungáltakat és a determináns értékét:

$$(8.30) \quad [D_{kl}] = \begin{bmatrix} -\partial_2\partial_2 & \partial_1\partial_2 & \frac{1}{2\mu}(1-\nu)\Delta\partial_1 \\ \partial_2\partial_1 & -\partial_1\partial_1 & \frac{1}{2\mu}(1-\nu)\Delta\partial_2 \\ \frac{1}{2\mu}(1-\nu)\Delta\partial_1 & \frac{1}{2\mu}(1-\nu)\Delta\partial_2 & \frac{1}{8\mu^2}(1-\nu)\Delta\Delta \end{bmatrix}$$

$$(8.31) \quad \det(\mathfrak{D}_{jl}) = -\frac{1}{2\mu}(1-\nu)\Delta\Delta$$



Legyen  $Q(\xi_1, \xi_2)$  és  $M(x_1, x_2)$  a sík két pontja ( $M \neq Q$ ) –, azaz a forráspont és a hatás pontja. Legyen továbbá  $\mathbf{e}$  a  $Q$  ponthoz kötött egységvektor. Az  $\mathbf{e}$  vektor összetevőit  $e_i$  jelöli. Egyelőre feltételezzük, hogy a  $Q$  pont rögzített. A két pont távolsága  $R$ , az  $M$  pont  $Q$  pontra vonatkoztatott helyvektora pedig  $r_\kappa$ . A

$$\overset{M}{\mathfrak{D}}_{ik} \mathbf{u}_k + \delta(M - Q) e_i = 0$$

egyenlet megoldását, ahol  $\delta(M - Q) e_i$  a  $Q$  ponthoz kötött diszkontinuitás, alapmegoldásnak nevezzük – a deriválás operátora felett álló  $M$  (vagy  $Q$ ) azt jelöli, hogy a deriválást a vonatkozó pont koordinátái szerint vesszük<sup>5</sup>. Nyilvánvaló fentiek alapján – v.ö.: (8.28), (8.29) és (8.31) –, hogy az alapmegoldás megkapható a  $\chi_i$  GALJORKIN függvényekre vonatkozó alapmegoldásból, azaz a

$$(8.32) \quad \det(\overset{M}{\mathfrak{D}}_{jl}) \chi_i + \delta(M - Q) e_i = -\frac{1}{2\mu} (1 - \nu) \overset{MM}{\Delta} \Delta \chi_i + \delta(M - Q) e_i = 0$$

differenciálegyenlet megoldásából. A síkbeli biharmonikus egyenlettel kapcsolatos alapmegoldás felhasználásával [24]

$$(8.33) \quad \chi_i(M, Q) = \frac{\mu}{4\pi(1 - \nu)} R^2 (\ln R - 1) e_i$$

a GALJORKIN függvényekre vonatkozó alapmegoldás. A GALJORKIN féle függvényekre vonatkozó alapmegoldás ismeretében, elhagyva a (8.28)–ra támaszkodó és viszonylag hosszú formális átalakításokat, az

$$(8.34) \quad \mathbf{u}_k = \mathfrak{U}_{kl}(M, Q) e_l(Q)$$

képlet adódik az alapmegoldásra – ez rögzítettnek vett  $Q$  mellett az  $M$  függvénye –, ahol

$$(8.35) \quad [\mathfrak{U}_{kl}(M, Q)] = \frac{\mu}{4\pi(1 - \nu)} \begin{bmatrix} -2 \ln R - 3 - 2 \frac{r_2 r_2}{R^2} & 2 \frac{r_1 r_2}{R^2} & \frac{2}{\mu} (1 - \nu) \frac{r_1}{R^2} \\ 2 \frac{r_2 r_1}{R^2} & -2 \ln R - 3 - 2 \frac{r_1 r_1}{R^2} & \frac{2}{\mu} (1 - \nu) \frac{r_2}{R^2} \\ \frac{2}{\mu} (1 - \nu) \frac{r_1}{R^2} & \frac{2}{\mu} (1 - \nu) \frac{r_2}{R^2} & 0 \end{bmatrix}$$

az alapmegoldások mátrixa – a többesszám a 10. MEGJEGYZÉS-ben foglaltakra utal.

8. MEGJEGYZÉS: A számítás helyessége a

$$(8.36) \quad \begin{aligned} \overset{M}{\partial}_\lambda R &= \frac{r_\lambda}{R}, & \overset{M}{\partial}_\lambda \frac{1}{R} &= -\frac{r_\lambda}{R^3}, \\ \overset{M}{\partial}_\lambda \ln R &= \frac{r_\lambda}{R^2}, & \overset{M}{\partial}_\lambda R^2 \ln R &= 2r_\lambda \ln R + r_\lambda, \\ \overset{M}{\partial}_\kappa \overset{M}{\partial}_\lambda R^2 \ln R &= 2\delta_{\kappa\lambda} \ln R + 2 \frac{r_\kappa r_\lambda}{R^3} + \delta_{\kappa\lambda}, & \overset{M}{\Delta} R^2 \ln R &= 4 \ln R + 4, \\ \overset{M}{\partial}_\rho \overset{M}{\Delta} R^2 \ln R &= 4 \frac{r_\rho}{R}, & \overset{M}{\partial}_\psi \overset{M}{\partial}_\rho \overset{M}{\Delta} R^2 \ln R &= \frac{4}{R^2} \left( \delta_{\psi\rho} - 2 \frac{r_\psi r_\rho}{R^2} \right) \end{aligned}$$

képletek felhasználásával ellenőrizhető. A {páratlan} [páros] rendű  $Q$  pont szerinti deriváltak előjele ugyancsak a fenti képletekből adódik, az előjel pedig {eltérő} [azonos].

9. MEGJEGYZÉS: Az alapmegoldások  $\mathfrak{U}_{kl}(M, Q)$  mátrixa eleget tesz az

$$(8.37) \quad \mathfrak{U}_{kl}(M, Q) = \mathfrak{U}_{lk}(M, Q) = \mathfrak{U}_{kl}(Q, M) = \mathfrak{U}_{lk}(Q, M)$$

szimmetriafeltételeknek. Következésképp

$$(8.38) \quad \mathbf{u}_k = \mathfrak{U}_{kl}(M, Q) e_l(Q) = e_l(Q) \mathfrak{U}_{lk}(M, Q)$$

10. MEGJEGYZÉS:  $\mathfrak{U}_{kl}(M, Q)$  valamennyi oszlopa és sora mint háromméretű vektor mindkét változójában kielégíti a (8.25) alapegyenletet. A vonatkozó formális számításokat terjedelmi okok miatt elhagyjuk.

<sup>5</sup>Ha nincs ok a félreértésre, akkor nem alkalmazzuk ezt a jelölést.

A feszültségekre vonatkozó alapmegoldást annak figyelembevételével kapjuk meg (8.5a,b) felhasználásával (8.34) oszlopaiból [v.ö.: (8.35)], hogy most zérus a partikuláris megoldás<sup>6</sup>:

$$(8.39) \quad \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix} = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)R^2} \begin{bmatrix} -6r_2 + 4\frac{r_2^3}{R^2} & 2r_1 - \frac{4r_1r_2^2}{R^2} & -\frac{4}{\mu}(1-\nu)\frac{r_1r_2}{R^2} \\ 2r_1 - \frac{4r_2^2r_1}{R^2} & -2r_2 + \frac{4r_1^2r_2}{R^2} & \frac{2}{\mu}(1-\nu)\frac{r_1^2 - r_2^2}{R^2} \\ -2r_2 + \frac{4r_1^2r_2}{R^2} & 6r_1 - 4\frac{r_1^3}{R^2} & \frac{4}{\mu}(1-\nu)\frac{r_1r_2}{R^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}.$$

A feszültségek az  $M$  pontban ébrednek a  $Q$  pontbeli diszkontinuitás hatására. Könnyű ellenőrizni a  $t_{12}$ -re vezető gondolatmenet ismétlésével, hogy  $t_{21} = t_{12}$ . A feszültségekre vonatkozó alapmegoldással a (8.6a,b,c) egyenletek (a HOOKE törvény) segítségével kapjuk az alakváltozási tenzor elemeire vonatkozó

(8.40)

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)R^2} \begin{bmatrix} -2(3-2\nu)r_2 + 4\frac{r_2^3}{R^2} & 2(1-2\nu)r_1 - 4\frac{r_1r_2^2}{R^2} & -\frac{4}{\mu}(1-\nu)\frac{r_1r_2}{R^2} \\ 2r_1 - \frac{4r_2^2r_1}{R^2} & -2r_2 + \frac{4r_1^2r_2}{R^2} & \frac{2}{\mu}(1-\nu)\frac{r_1^2 - r_2^2}{R^2} \\ -2(1-2\nu)r_2 + 4\frac{r_1^2r_2}{R^2} & 2(3-2\nu)r_1 - 4\frac{r_1^3}{R^2} & \frac{4}{\mu}(1-\nu)\frac{r_1r_2}{R^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

alapmegoldásokat az  $M$  pontban. Vezessük be a későbbiek kedvéért a

$$(8.41) \quad \mathbf{t}_\lambda = -\frac{du_\lambda}{ds}$$

jelölést<sup>7</sup>. A  $\mathbf{t}_\lambda$  vektor az elmozdulások ívkoordináta szerinti deriváltjának ellentettje a vizsgált  $A_i$  (vagy  $A_e$ ) tartomány  $\mathcal{L}_u \cup \mathcal{L}_t$  peremgörcbén. A (8.40), (8.22a,b,c) és (8.41) egybevetéséből, ismét elhagyva a formális átalakításokat, a

$$(8.42a) \quad \mathbf{t}_\lambda(\overset{\circ}{M}) = e_l(Q)\mathfrak{I}_{l\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)$$

eredményt kapjuk az alapmegoldásból adódó  $\mathbf{t}_\lambda$  vektorra, ahol

(8.42b)

$$\mathfrak{I}_{l\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)R^2} \begin{bmatrix} n_1r_1 \left( 4\frac{r_2^2}{R^2} - 2(3-2\nu) \right) & -n_2r_1 \left( 4\frac{r_2^2}{R^2} + 2(1-2\nu) \right) \\ +n_2r_2 \left( 4\frac{r_2^2}{R^2} - 2(3-2\nu) \right) & -n_1r_2 \left( 4\frac{r_1^2}{R^2} - 2(1-2\nu) \right) \\ -n_1r_2 \left( 4\frac{r_1^2}{R^2} + 2(1-2\nu) \right) & n_2r_2 \left( 4\frac{r_1^2}{R^2} - 2(3-2\nu) \right) \\ -n_2r_1 \left( 4\frac{r_2^2}{R^2} - 2(1-2\nu) \right) & +n_1r_1 \left( 4\frac{r_1^2}{R^2} - 2(3-2\nu) \right) \\ -n_1\frac{2}{\mu}(1-\nu)\frac{r_1^2 - r_2^2}{R^2} & -n_1\frac{4}{\mu}(1-\nu)\frac{r_1r_2}{R^2} \\ -n_2\frac{4}{\mu}(1-\nu)\frac{r_1r_2}{R^2} & +n_2\frac{2}{\mu}(1-\nu)\frac{r_1^2 - r_2^2}{R^2} \end{bmatrix}.$$

A fenti képletben és a továbbiakban a  $Q$  és  $M$  betűk felett álló karika azt jelenti, hogy a vonatkozó pont az  $A$  tartomány peremére lokalizált. Az  $n_\lambda$  normálist az  $\overset{\circ}{M}$  pontban tekintjük.

11. MEGJEGYZÉS: Visszaidézve, hogy a vizsgált peremértékfeladatok körében a peremgörbe egy pontjában vagy az elmozdulásvektor ívkoordináta szerinti deriváltja, vagy pedig a feszültségfüggvények írhatók elő, érdemes a későbbiek kedvéért a feszültségfüggvények alapmegoldásból

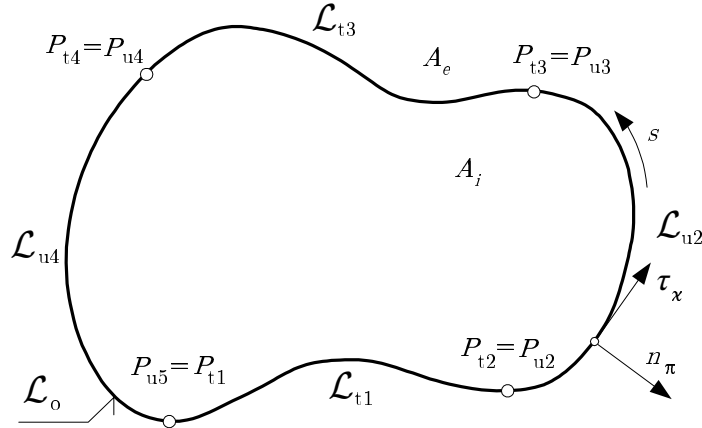
<sup>6</sup>Feltettük ugyanis, hogy zérus a térfogati terhelés értéke.

<sup>7</sup>Szándékos a fraktur betűtípussal szedett  $t$  választása a derivált jelölésére. Ez a mennyiség ugyanis a peremen ébredő feszültségek duális párja a síkfeladatok duál rendszerében. Lehetne duál feszültségvektornak is nevezni.

adódó értékeit felírni a peremen. A (8.34) és a (8.37) képletek egybevetéséből az

$$(8.43) \quad u_\lambda = e_l(Q) \mathfrak{U}_{l\lambda}(\overset{o}{M}, Q)$$

eredmény következik.



8.1. ábra.

12. MEGJEGYZÉS: A  $\mathfrak{T}_{l\lambda}(\overset{o}{M}, Q)$  valamennyi oszlopa mint háromméretű vektor a  $Q$  változóban kielégíti a (8.25) alapegyenletet. A vonatkozó formális számításokat terjedelmi okok miatt elhagyjuk.

**8.5. Somigliana identitás és formulák duál rendszerben – belső tartomány.** A továbbiakban feltételezzük, hogy a 8.1. ábrán vázolt végesben fekvő egyszeresen összefüggő  $A_i$  belső tartomány a vizsgálat tárgya. Az  $\mathcal{L}_o$  kontúr páros számú ívre bontott amelyeken vagylagosan elmozdulások (illetve az  $s$  ívkoordináta szerinti deriváltjuk), vagy feszültség (illetve feszültségfüggvény) van előírva. A 8.1. ábrán vázolt esetben négy ívre bontott az  $\mathcal{L}_o$  kontúr, de ez a körülmény egyelőre nem játszik szerepet az átalakításokban. Az  $\mathcal{F}_3^\psi$ ,  $t^{\kappa\lambda}$ ,  $e_{\kappa\lambda}$  és  $\varphi^3$  függvényeket az  $A_i$  tartomány egy rugalmas állapotának nevezzük, ha kielégítik a (8.5a,b), (8.6a,b,c), (8.7a,b) és (8.8) mezőegyenleteket. Legyen

$$\mathcal{F}_3^\psi, t^{\kappa\lambda}, e_{\kappa\lambda}, \varphi^3 \quad \text{és} \quad \overset{*}{\mathcal{F}}_3^\psi, \overset{*}{t}^{\kappa\lambda}, \overset{*}{e}_{\kappa\lambda}, \overset{*}{\varphi}^3$$

az  $A_i$  tartomány két rugalmas állapota. A GREEN–GAUSS tétel alkalmazásával és (8.1) kihasználásával (mivel nincs tartományi teher  $\overset{o}{t}^{\kappa\lambda} = 0$ ) fennáll, hogy

$$(8.44) \quad \int_{A_i} [\epsilon^{\kappa\rho 3} e_{\kappa\lambda;\rho} + \varphi^3_{;\lambda}] \overset{*}{\mathcal{F}}_3^\lambda dA - \int_{A_i} \mathcal{F}_{3;\psi}^\psi \overset{*}{\varphi}^3 dA = \\ = \oint_{\mathcal{L}_o} n_\pi [\epsilon^{\pi\kappa 3} e_{\kappa\lambda} - \delta_\lambda^\pi \varphi^3] \overset{*}{\mathcal{F}}_3^\lambda ds \\ - \int_{A_i} \overset{*}{t}^{\kappa\lambda} e_{\kappa\lambda} dA - \int_{A_i} \overset{*}{\mathcal{F}}_{3;\psi}^\psi \varphi^3 dA - \int_{A_i} \mathcal{F}_{3;\psi}^\psi \overset{*}{\varphi}^3 dA.$$

13. MEGJEGYZÉS: Vegyük észre, hogy a jobboldalon álló első tartományi integrál (itt a HOOKE törvényre is tekintettel kell lenni a belátás során) és az utolsó két tartományi integrál összege nem függ attól, hogy a \* melyik betű felett áll a szorzatban (azaz az első vagy második betű felett).

Ha a fenti egyenletben áthelyezzük a \*-ot az első rugalmas állapotot jelölő betűk felé majd levonjuk az így kapott egyenletből (8.44)-et, figyelembe véve a 13. MEGJEGYZÉSben mondottakat

is, akkor a duál SOMIGLIANA identitást kapjuk síkfeladatokra:

$$\begin{aligned}
(8.45) \quad & \int_{A_i} \underbrace{\left\{ [\epsilon^{\kappa\rho 3} e_{\kappa\lambda;\rho} + \varphi^3_{;\lambda}] \mathcal{F}_3^\lambda - \mathcal{F}_{3;\psi}^\psi \varphi^3 \right\}}_{\mathbf{u}_k(\mathfrak{D}_{kl}\mathbf{u}_l^*)} dA - \\
& - \int_{A_i} \underbrace{\left\{ [\epsilon^{\kappa\rho 3} e_{\kappa\lambda;\rho} + \varphi^3_{;\lambda}] \mathcal{F}_3^\lambda + \mathcal{F}_{3;\psi}^\psi \varphi^3 \right\}}_{\mathbf{u}_k^*(\mathfrak{D}_{kl}\mathbf{u}_l)} dA = \\
& = \oint_{\mathcal{L}_o} \underbrace{n_\pi [\epsilon^{\pi\kappa 3} e_{\kappa\lambda} - \delta_\lambda^\pi \varphi^3]}_{\mathbf{t}_\lambda} \underbrace{\mathcal{F}_3^\lambda}_{\mathbf{u}_\lambda} ds - \oint_{\mathcal{L}_o} \underbrace{n_\pi [\epsilon^{\pi\kappa 3} e_{\kappa\lambda} - \delta_\lambda^\pi \varphi^3]}_{\mathbf{t}_\lambda} \underbrace{\mathcal{F}_3^\lambda}_{\mathbf{u}_\lambda^*} ds.
\end{aligned}$$

A baloldalon az alapegyenleteket alkotó (8.3) kompatibilitási egyenletek és (8.4) szimmetria-feltétel integráljai – az első esetben  $e_{\kappa\lambda}$ -t a  $\mathcal{F}_3^\psi$  feszültségfüggvényekkel kifejezve gondoljuk, a második esetben eleve azzal kifejezve írtuk –, röviden tehát az alapegyenletek integráljai állnak. A jobboldalon pedig az  $\mathcal{L}_o$  kontúron előírható fizikai mennyiségek integráljai láthatók. Következésképp – tekintettel a (8.25) alatti képletre, az idézett képlet alapján bevezetett (8.26) jelölésre, továbbá a (8.19) képletre és a képlethez kötődő (8.41) jelölésre – a SOMIGLIANA identitást a GREEN identitáshoz [24] hasonló alakban is felírhatjuk:

$$(8.46) \quad \int_{A_i} \left[ \mathbf{u}_k(\mathfrak{D}_{kl}\mathbf{u}_l^*) - \mathbf{u}_k^*(\mathfrak{D}_{kl}\mathbf{u}_l) \right] dA = \oint_{\mathcal{L}_o} [\mathbf{u}_\lambda^* \mathbf{t}_\lambda - \mathbf{u}_\lambda \mathbf{t}_\lambda] ds.$$

14. MEGJEGYZÉS: A (8.46)–ra vezető gondolatmenet során valójában sehol sem használtuk ki, hogy  $\mathbf{u}_k^*$  és  $\mathbf{u}_k$  az  $A_i$  tartomány rugalmas állapotai (azaz kompatibilisek). Ez annyit jelent, hogy (8.46) mindig fennáll, ha az  $\mathbf{u}_k^*$  és  $\mathbf{u}_k$  kellő rendben differenciálható az  $A_i$  tartományon; egyéb tekintetben mindkét függvény tetszőleges lehet.

A duál SOMIGLIANA képletek előállítására érdekében feltesszük, hogy  $\mathbf{u}_k^*$  a (8.34), (8.35) képletekkel adott rugalmas állapot. Ez esetben a vonalintegrálban álló  $\mathbf{t}_\lambda^*$ -t a (8.42a), (8.42b) képletek adják.

Mostmár azt is kihasználjuk majd, hogy az  $\mathbf{u}_l$  egy feltevés szerint nem szinguláris rugalmas állapota az  $A_i$  tartománynak.

Mivel a  $*$ -al jelölt állapot szinguláris a  $Q$  pontban (a forráspontban), a  $Q$  pont  $A_i$  tartományhoz viszonyított elhelyezkedésétől függően az alábbi három esetet különböztetjük meg:

1. Ha  $Q \in A_i$ , akkor a  $Q$  pont teljes egészében az  $A_i$ -n belül fekvő  $R_\varepsilon$  sugarú  $A_\varepsilon$  környezetét eltávolítjuk az  $A_i$  tartományból –  $A_\varepsilon$  kontúrját  $\mathcal{L}_\varepsilon$  jelöli, a kontúr  $A_i$ -n belüli  $\mathcal{L}'_\varepsilon$  íve most megegyezik  $\mathcal{L}_\varepsilon$ -al – és a kétszeresen összefüggő  $A' = A_i \setminus A_\varepsilon$  tartományra alkalmazzuk a duál SOMIGLIANA identitást.
2. Ha  $Q = \overset{\circ}{Q} \in \partial A_i = \mathcal{L}_o$ , akkor a  $\overset{\circ}{Q}$  pont  $R_\varepsilon$  sugarú  $A_\varepsilon$  környezetének az  $A_i$ -n belül fekvő  $A_i \cap A_\varepsilon$  résztartományát kizárjuk az  $A_i$  tartományból és az egyszeresen összefüggő  $A' = A_i \setminus (A_i \cap A_\varepsilon)$  tartományra alkalmazzuk a duál SOMIGLIANA identitást. Megjegyezzük, hogy ez esetben két részből áll a tartomány kontúrja: a résztartomány eltávolítása után az  $\mathcal{L}_o$ -ból megmaradó  $\mathcal{L}'_o$  ívből, valamint az  $\mathcal{L}_\varepsilon$  kör  $A$ -ban fekvő  $\mathcal{L}'_\varepsilon$  ívéből.
3. Ha  $Q \notin (A_i \cup \mathcal{L}_o)$ , akkor az eredeti  $A_i$  tartományra alkalmazzuk a duál SOMIGLIANA identitást.

Mivel a vizsgált tartományokban mind  $\mathbf{u}_k^*$  mind pedig  $\mathbf{u}_k$  rugalmas állapot a (8.46) tartományi integráljai zérus értékűek. A három különböző esetet, csak a gondolatmenetre koncentrálna a figyelmet, az alábbiak tekintik át.

1. Ha  $Q \in A$ , akkor a mondottak alapján (8.46)–ből adódik, hogy

$$(8.47) \quad \oint_{\mathcal{L}_o} [u_\lambda^* t_\lambda - \dot{u}_\lambda t_\lambda] ds + \oint_{\mathcal{L}_\varepsilon} [u_\lambda^* t_\lambda - \dot{u}_\lambda t_\lambda] ds = \\ = e_k(Q) \left\{ \oint_{\mathcal{L}_o} [\mathfrak{T}_{k\lambda}(\dot{M}, Q) u_\lambda(\dot{M}) - \mathfrak{U}_{k\lambda}(\dot{M}, Q) t_\lambda(\dot{M})] ds_{\dot{M}} + \oint_{\mathcal{L}_\varepsilon} [\mathfrak{T}_{k\lambda}(\dot{M}, Q) u_\lambda(\dot{M}) - \mathfrak{U}_{k\lambda}(\dot{M}, Q) t_\lambda(\dot{M})] ds_{\dot{M}} \right\} = 0.$$

A (8.47) egyenlet fennáll tetszőleges  $e_k(Q)$ –ra, következésképp a kapcsos zárójelben álló kifejezés zérus:

$$(8.48) \quad \oint_{\mathcal{L}_o} [\mathfrak{T}_{k\lambda}(\dot{M}, Q) u_\lambda(\dot{M}) - \mathfrak{U}_{k\lambda}(\dot{M}, Q) t_\lambda(\dot{M})] ds_{\dot{M}} + \\ + \oint_{\mathcal{L}_\varepsilon} [\mathfrak{T}_{k\lambda}(M, Q) u_\lambda(M) - \mathfrak{U}_{k\lambda}(M, Q) t_\lambda(M)] ds_M = 0.$$

Igazolható, hogy<sup>8</sup>

$$(8.49a) \quad \oint_{\mathcal{L}_\varepsilon} \mathfrak{T}_{\kappa\lambda}(M, Q) ds_M = \delta_{\kappa\lambda}, \quad \lim_{R_\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\mathcal{L}_\varepsilon} \mathfrak{T}_{\kappa\lambda}(M, Q) [u_\lambda(M) - u_\lambda(Q)] ds_M = 0,$$

$$(8.49b) \quad \oint_{\mathcal{L}_\varepsilon} \mathfrak{T}_{3\lambda}(M, Q) ds_M = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{1}{R_\varepsilon} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0,$$

(Az utóbbi képlet bármely zérustól különböző  $R_\varepsilon$ –ra fennáll, következésképp zérus az integrál határértéke, ha  $R_\varepsilon \rightarrow 0$ .)

$$(8.49c) \quad \lim_{R_\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\mathcal{L}_\varepsilon} \mathfrak{T}_{3\lambda}(M, Q) [u_\lambda(M) - u_\lambda(Q)] ds_M = \\ = \lim_{R_\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \oint_{\mathcal{L}_\varepsilon} \mathfrak{T}_{3\lambda}(M, Q) \left[ \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_1} \Big|_Q r_1 + \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_2} \Big|_Q r_2 \right] ds_M + I_\varepsilon(R_\varepsilon) \right\} = \\ = \frac{1}{4\pi\mu} (t_{21} - t_{12}) + \lim_{R_\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(R_\varepsilon) = 0,$$

(Mivel  $u_\lambda(M)$  rugalmas állapot a feszültségi tenzor szimmetrikus, az  $I_\varepsilon$  kifejezés pedig homogén az  $R_\varepsilon$ –ban.)

$$(8.49d) \quad \lim_{R_\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\mathcal{L}_\varepsilon} \mathfrak{U}_{\kappa\lambda}(M, Q) t_\lambda(M) ds_M = 0,$$

(Fel kellett használni itt és fel kell használni a következő átalakításban is a

$$t_\lambda = -\frac{\partial u_\lambda}{\partial s} = -\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} - \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds}$$

összefüggést. Azt is figyelembe kellett venni, hogy  $\lim_{R_\varepsilon \rightarrow 0} R_\varepsilon \ln R_\varepsilon = 0$ .)

$$(8.49e) \quad \lim_{R_\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\mathcal{L}_\varepsilon} \mathfrak{U}_{3\lambda}(M, Q) t_\lambda(M) ds_M = \varphi_3|_Q = -\mathfrak{u}_3|_Q.$$

Ha a (8.49a,...,e) képletek felhasználásával képezzük a (8.48) összefüggésben az  $\mathcal{L}_\varepsilon$  körön vett integrálok határértékét midőn  $R_\varepsilon \rightarrow 0$ , akkor az első duál SOMIGLIANA formulát kapjuk:

$$(8.50) \quad \mathfrak{u}_k(Q) = \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{U}_{k\lambda}(\dot{M}, Q) t_\lambda(\dot{M}) ds_{\dot{M}} - \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{T}_{k\lambda}(\dot{M}, Q) u_\lambda(\dot{M}) ds_{\dot{M}}.$$

<sup>8</sup>A (8.49a,...,e) összefüggések formális igazolását, azok hosszadalmas volta miatt sehol sem publikálta a szerző. Az alábbiak csak a gondolatmenet főbb lépéseit és a legfontosabb részeredményeket tekintik át. A további részletek a szerző kéziratában lelhetők fel.

15. MEGJEGYZÉS: Az első duál SOMIGLIANA formula szerint, ha ismerjük az  $u_\lambda(\overset{\circ}{M})$  feszültségfüggvényeket, valamint az elmozdulásmező  $s$  ívkoordináta szerinti  $-t_\lambda(\overset{\circ}{M})$  deriváltját (a duál feszültséget) az  $\mathcal{L}_o$  kontúron, akkor kvadratúrák segítségével számítható az  $u_k = (F_1, F_2, -\varphi_3)$  rugalmas állapot az  $A$  tartomány  $Q$  belső pontjában.

2. Ha  $Q = \overset{\circ}{Q} \in \partial A = \mathcal{L}_o$ , akkor a (8.46)–ból a (8.47)–re vezető lépésekkel, az egyenlet további számításokban szerepet játszó részét tartva csak meg, írhatjuk, hogy

$$(8.51) \quad \int_{\mathcal{L}'_o} [\mathfrak{T}_{\kappa\lambda}(\overset{\circ}{M}, \overset{\circ}{Q})u_\lambda(\overset{\circ}{M}) - \mathfrak{U}_{\kappa\lambda}(\overset{\circ}{M}, \overset{\circ}{Q})t_\lambda(\overset{\circ}{M})] ds_{\overset{\circ}{M}} + \int_{\mathcal{L}'_\varepsilon} [\mathfrak{T}_{\kappa\lambda}(M, \overset{\circ}{Q})u_\lambda(M) - \mathfrak{U}_{\kappa\lambda}(M, \overset{\circ}{Q})t_\lambda(M)] ds_M = 0.$$

Igazolható, hogy<sup>9</sup>

$$(8.52a) \quad \lim_{R_\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{L}'_\varepsilon} \mathfrak{T}_{\kappa\lambda}(M, \overset{\circ}{Q}) ds_M = c_{\kappa\lambda}(\overset{\circ}{Q}),$$

ahol  $c_{\kappa\lambda}(\overset{\circ}{Q}) = \delta_{\kappa\lambda}/2$  ha sima az  $\mathcal{L}_o$  kontúr a  $\overset{\circ}{Q}$  pontban. Ha a kontúr nem sima, akkor  $c_{\kappa\lambda}(\overset{\circ}{Q})$  a  $\overset{\circ}{Q}$  pontbeli érintők egymással bezárt szögétől függ<sup>10</sup>.

Ugyancsak igazolható, hogy

$$(8.52b) \quad \lim_{R_\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{L}'_\varepsilon} \mathfrak{T}_{\kappa\lambda}(M, \overset{\circ}{Q}) \left[ u_\lambda(M) - u_\lambda(\overset{\circ}{Q}) \right] ds_M = 0,$$

$$(8.52c) \quad \lim_{R_\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{L}'_\varepsilon} \mathfrak{U}_{\kappa\lambda}(M, \overset{\circ}{Q}) t_\lambda(M) ds_M = 0.$$

Ha a (8.52a,b,c) képletek felhasználásával képezzük a (8.51) határértékét midőn  $R_\varepsilon \rightarrow 0$ , akkor a második duál SOMIGLIANA formulát kapjuk:

$$(8.53) \quad c_{\kappa\lambda}(\overset{\circ}{Q})u_\lambda(\overset{\circ}{Q}) = \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{U}_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, \overset{\circ}{Q})t_\lambda(\overset{\circ}{M}) ds_{\overset{\circ}{M}} - \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{T}_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, \overset{\circ}{Q})u_\lambda(\overset{\circ}{M}) ds_{\overset{\circ}{M}}.$$

16. MEGJEGYZÉS: A (8.53)–ban álló két vonalintegrált CAUCHY féle főértékben kell venni.

17. MEGJEGYZÉS: Mivel az  $\mathcal{L}_o$  kontúr egy pontjában vagylagosan írhatók elő az  $u_\lambda(\overset{\circ}{M})$  feszültségfüggvények, illetve az elmozdulásmező  $s$  ívkoordináta szerint vett  $-t_\lambda(\overset{\circ}{M})$  deriváltjai a (8.53) olyan integrálegyenlet (a direkt módszer integrálegyenlete), amely alkalmas a hiányzó  $u_\lambda(\overset{\circ}{M})$ , vagy  $t_\lambda(\overset{\circ}{M})$  meghatározására. Ezek ismeretében pedig, alkalmazható az első duál SOMIGLIANA formula.

3. Ha  $Q \notin (A \cup \mathcal{L}_o)$ , akkor a (8.46)–ban csak az  $\mathcal{L}_o$  kontúron vett integrál marad meg, és a (8.47)–re vezető lépésekkel rögtön adódik a harmadik duál SOMIGLIANA formula:

$$(8.54) \quad 0 = \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{U}_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)t_\lambda(\overset{\circ}{M}) ds_{\overset{\circ}{M}} - \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{T}_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)u_\lambda(\overset{\circ}{M}) ds_{\overset{\circ}{M}}.$$

A (8.50) első duál SOMIGLIANA formula és a (8.5a,b) képletek felhasználásával (utóbbi esetben annak figyelembevételével, hogy zérus a feszültségekre vonatkozó partikuláris megoldás) adódik deriválásokkal az  $\mathfrak{s}_k = (t_{11}, t_{12}, t_{22})$  feszültségekre vonatkozó

$$(8.55) \quad \mathfrak{s}_k(Q) = \oint_{\mathcal{L}_o} D_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)t_\lambda(\overset{\circ}{M}) ds_{\overset{\circ}{M}} - \oint_{\mathcal{L}_o} S_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)u_\lambda(\overset{\circ}{M}) ds_{\overset{\circ}{M}}$$

<sup>9</sup>A (8.52a,b,c) összefüggések formális igazolását, ugyancsak azok hosszadalmas volta miatt sehol sem publikálta a szerző.

<sup>10</sup>Amint az a későbbiek során kiderül majd, hivatkozunk ehelyütt a (8.81) képlettel kapcsolatban a 23. MEGJEGYZÉSre – v.ö.: 81. o. –, nincs szükség  $c_{\kappa\lambda}(\overset{\circ}{Q})$  képletszerű ismeretére a numerikus megoldásban.

formula, ahol a  $D_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)$  elemeit a

$$(8.56a) \quad D_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q) = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)R^2} \hat{D}_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q),$$

$$(8.56b) \quad \hat{D}_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q) = \begin{bmatrix} 6r_2 - 4r_2^3/R^2 & -2r_1 + 4r_1r_2^2/R^2 \\ -2r_1 + 4r_1r_2^2/R^2 & 2r_2 - 4r_1^2r_2/R^2 \\ 2r_2 - 4r_1^2r_2/R^2 & -6r_1 + 4r_1^3/R^2 \end{bmatrix}$$

képletekből, az  $S_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)$  elemeit pedig az

$$(8.57a) \quad S_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)R^2} \hat{S}_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q),$$

$$(8.57b) \quad \hat{S}_{11} = \frac{1}{R^2}(n_1r_1 + n_2r_2) \left[ 16\frac{r_2^3}{R^2} - 4(5-2\nu)r_2 \right] - n_2 \left[ 4\frac{r_2^2}{R^2} - 2(3-2\nu) \right],$$

$$(8.57c)$$

$$\hat{S}_{12} = n_1 \left[ 4\frac{r_1^2}{R^2} - 2(1-2\nu) \right] - \frac{1}{R^2}n_2r_1 \left[ 16\frac{r_2^3}{R^2} - 4(1+2\nu)r_2 \right] - \frac{1}{R^2}n_1r_2 \left[ 16\frac{r_1^2r_2}{R^2} - 4(1-2\nu)r_2 \right],$$

$$(8.57d) \quad \hat{S}_{21} = \hat{S}_{12},$$

$$(8.57e)$$

$$\hat{S}_{22} = \frac{1}{R^2}n_1r_2 \left[ 16\frac{r_1^3}{R^2} - 4(3-2\nu)r_1 \right] + \frac{1}{R^2}n_2r_1 \left[ 16\frac{r_1r_2^2}{R^2} - 4(1-2\nu)r_2 \right] - n_2 \left[ 4\frac{r_2^2}{R^2} + 2(1-2\nu) \right],$$

$$(8.57f) \quad \hat{S}_{31} = \hat{S}_{22},$$

$$(8.57g) \quad \hat{S}_{32} = \frac{1}{R^2}(n_1r_1 + n_2r_2) \left[ 16\frac{r_1^3}{R^2} - 4(5-2\nu)r_1 \right] - n_1 \left[ 4\frac{r_1^2}{R^2} - 2(3-2\nu) \right]$$

képletekből kell számítani.

**8.6. Somigliana identitás és formulák duál rendszerben – külső tartomány.** Az  $A_e$  külső tartományon a koordinátásk  $\mathcal{L}_o$  zárt görbén kívül fekvő részét értjük – v.ö. 8.1. ábra. Feltételezzük, hogy állandó értékűek a végtelen távoli pontban működő feszültségek. Ezeket a

$$t_{11}(\infty), t_{12}(\infty) = t_{21}(\infty) \text{ és } t_{22}(\infty).$$

módon jelöljük. Azt is fel fogjuk tételezni, hogy zérus értékű a merevtestszerű forgás a végtelenben, azaz

$$(8.58) \quad \varphi_3(\infty) = 0.$$

Vegyük észre, hogy kompatibilis a végtelen távoli pontban vett alakváltozási tenzor, ezt a HOOKE törvényből kapjuk a végtelenbeli feszültségek felhasználásával, mivel teljesíti a (8.3) kompatibilitási egyenletet. A végtelenben vett feszültségek a

$$(8.59) \quad \tilde{u}_\lambda(Q) = \epsilon_{\alpha 3 \rho} \xi_\alpha t_{\lambda \rho}(\infty) + c_\lambda(\infty)$$

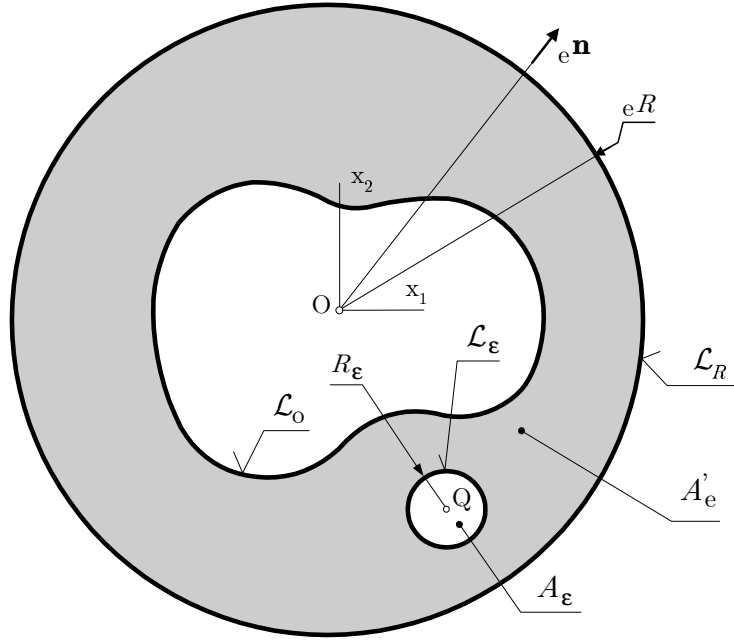
feszültségfüggvényekből származtathatók – emlékeztetünk arra, hogy  $\xi_\alpha$   $Q$  koordinátáit jelöli –, ahol nem tartozik feszültség a  $c_\lambda(\infty)$  konstans feszültségfüggvény vektorhoz. Legyen továbbá

$$(8.60) \quad \tilde{u}_3(Q) = -\varphi_3(\infty) = 0.$$

Az  $A_e$  külső tartományra vonatkozó duál SOMIGLIANA formulák levezetése során az előző szakasz gondolatmenetét követjük. A gondolatmenet kifejtése során az eltérésekre helyezük a hangsúlyt. Ismét feltételezzük, hogy az  $\mathbf{u}_k^*$  rugalmas állapot a (8.34) és (8.35) alapg megoldáshoz tartozó rugalmas állapot. Az  $\mathbf{u}_k$  rugalmas állapot pedig egy tetszőleges rugalmas állapota az  $A_e$  tartománynak. A végtelenben azonban fenn kell állnia a

$$\mathbf{u}_k = \tilde{\mathbf{u}}_\lambda \text{ és } \mathbf{u}_3 = \tilde{\mathbf{u}}_3 = 0$$

feltételeknek. A  $Q$  pont helyzetétől függően ismét három esetet különböztetünk meg – a 8.2. ábra az első esetet szemlélteti. Azt is feltételezzük, hogy az  $O$  origó az  $A_i$  tartomány belső pontja.



8.2. ábra.

1. Ha  $Q \in A_\varepsilon$  akkor az  $\mathcal{L}_o$  kontúrgörbével, a  $\mathcal{L}_\varepsilon$  körrel, valamint az  ${}_eR$  sugarú és  $O$  középpontú külső körrel határolt háromszorosan összefüggő  $A'_\varepsilon$  tartomány a vizsgálat tárgya. Itt, amint az jól látszik az ábráról is,  $\mathcal{L}_\varepsilon$  a  $Q$  pont  $A_\varepsilon$ -al jelölt és  $R_\varepsilon$  sugarú környezete. Az  ${}_eR$  sugár elegendően nagy ahhoz, hogy mind  $\mathcal{L}_o$ -t, mind pedig  $\mathcal{L}_\varepsilon$ -t tartalmazza. További feltevés, hogy  $A_\varepsilon$  teljes egészében a halványzürkével jelölt  $A'_\varepsilon$  tartományon belül helyezkedik el. Alkalmazzuk most a duál SOMIGLIANA identitást az  $A'_\varepsilon$  tartományra és képezzük az így kapott

$$(8.61) \quad \oint_{\mathcal{L}_o} [\mathfrak{T}_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)u_\lambda(\overset{\circ}{M}) - \mathfrak{U}_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)t_\lambda(\overset{\circ}{M})] ds_{\overset{\circ}{M}} + \oint_{\mathcal{L}_\varepsilon} [\mathfrak{T}_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)u_\lambda(\overset{\circ}{M}) - \mathfrak{U}_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)t_\lambda(\overset{\circ}{M})] ds_{\overset{\circ}{M}} + \oint_{\mathcal{L}_R} [\mathfrak{T}_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)u_\lambda(\overset{\circ}{M}) - \mathfrak{U}_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)t_\lambda(\overset{\circ}{M})] ds_{\overset{\circ}{M}} = 0$$

egyenlet határértéket amint  $R_\varepsilon \rightarrow 0$  és  ${}_eR \rightarrow \infty$ . Ami az első két integrál összegének határértékét illeti, érdemes felfigyelni arra a körülményre, hogy ez ugyanaz, mint a (8.47) képletben álló első két integrál határértéke:

$$(8.62) \quad \oint_{\mathcal{L}_o} \dots + \lim_{R_\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\mathcal{L}_\varepsilon} \dots = u_k(Q) + \oint_{\mathcal{L}_o} [\mathfrak{T}_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)u_\lambda(\overset{\circ}{M}) - \mathfrak{U}_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)t_\lambda(\overset{\circ}{M})] ds_{\overset{\circ}{M}} .$$

Ami pedig a harmadik integrált illeti

$$(8.63) \quad \lim_{{}_eR \rightarrow \infty} \oint_{\mathcal{L}_R} \dots = -\tilde{u}_k(Q)$$

a vonatkozó határérték – az igazolás gondolatmenetét illetően a 18. MEGJEGYZÉS-re utalunk. A (8.62) és (8.63) alatti eredmények felhasználásával azonnal adódik a (8.61) identitásból a külső tartományra vonatkozó első duál SOMIGLIANA formula:

$$(8.64) \quad u_k(Q) = \tilde{u}_k(Q) + \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{U}_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)t_\lambda(\overset{\circ}{M}) ds_{\overset{\circ}{M}} - \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{T}_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)u_\lambda(\overset{\circ}{M}) ds_{\overset{\circ}{M}} .$$

18. MEGJEGYZÉS: A (8.64) egyenlet előállításához hosszadalmas formális átalakításokat igényel. Első lépésben sorba kell fejteni az  $\mathfrak{U}_{k\lambda}$  és  $\mathfrak{T}_{k\lambda}$  alapgépeket az  ${}_eR$  sugár



1, 0, -1, -2 etc. kitevőjű hatványai szerint. A sorfejtés alapjául a

$$(8.65a) \quad x_\alpha(\overset{\circ}{M}) = {}_e R n_\alpha(\overset{\circ}{M}), \quad r_\alpha(\overset{\circ}{M}, Q) = x_\alpha(\overset{\circ}{M}) - \xi_\alpha(Q),$$

$$(8.65b) \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{eR} \left( 1 + \frac{n_\alpha(\overset{\circ}{M})\xi_\alpha(Q)}{eR} - \frac{1}{2} \frac{\xi_\alpha(Q)\xi_\alpha(Q)}{eR^2} + \dots \right),$$

$$(8.65c) \quad \ln \frac{1}{R} = \ln \frac{1}{eR} + \frac{n_\alpha(\overset{\circ}{M})\xi_\alpha(Q)}{eR} - \frac{1}{2} \frac{\xi_\alpha(Q)\xi_\alpha(Q)}{eR^2} + \dots,$$

$$(8.65d) \quad \frac{r_\alpha r_\beta}{eR^2} \approx n_\alpha n_\beta + 2n_\alpha n_\beta \frac{n_\psi \xi_\psi}{eR} - \frac{1}{eR} (\xi_\alpha n_\beta + n_\alpha \xi_\beta) + \dots$$

összefüggések szolgálnak. Figyelembe kell venni emellett az alábbiakat is:

(a) A tartomány külső normálisa és az érintőirányú egységvektor tekintetében az

$$(8.66a) \quad n_a = (\sin \varphi, \cos \varphi), \quad \tau_\alpha = (-\cos \varphi, \sin \varphi)$$

összefüggések állnak fenn, ahol  $\varphi$  a polárszög.

(b) Ha  ${}_e R \rightarrow \infty$  – lásd a (8.41), (8.19), (8.58) és (8.2) képleteket –, akkor

$$(8.66b) \quad \mathfrak{t}_\lambda(\overset{\circ}{M}) = -\frac{du_\lambda}{ds} = \tau_\kappa e_{\kappa\lambda} = \tau_\kappa \frac{1}{2\mu} [t_{\kappa\lambda}(\infty) - \nu t_{\psi\psi}(\infty)\delta_{\kappa\lambda}]$$

és

$$(8.66c) \quad ds_{\overset{\circ}{M}} = {}_e R d\varphi.$$

(c) Mivel konstans a feszültségi és az alakváltozási tenzor határértéke amint az  ${}_e R \rightarrow \infty$  az  ${}_e R$  együtthatói mindig ugyanolyan típusúak: egy a végtelenben állandó kifejezés meg van szorozva a trigonometrikus függvényekre vonatkozó

$$\int_0^{2\pi} \sin^n \varphi \cos^k \varphi d\theta$$

integrállal, ahol az  $n$  és  $k$  természetes számok, értékük a tekintett tagtól függ, de maga az integrál zérus.

(d) Ami az  ${}_e R$  nulla kitevőjű hatványát illeti az együtthatók hasonlóak, de tartalmazzák a  $\xi_\alpha$ -t is és nem szükségképpen zérus értékűek.

(e) Fennáll, hogy

$$(8.66d) \quad \oint_{\mathcal{L}_R} \mathfrak{T}_{\kappa\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q) ds_{\overset{\circ}{M}} = -\delta_{\kappa\lambda}.$$

(Ugyanez az összefüggés igaz a végesben fekvő  $A_i$  belső tartományra is feltéve, hogy a tartomány belső pontja a  $Q$  pont.)

A szöveg hosszának ésszerű keretek között való tartása miatt nem részletezzük jobban a (8.64) SOMIGLIANA formulát adó átalakításokat.

2. Ha  $Q = \overset{\circ}{Q} \in \partial A = \mathcal{L}_o$ , akkor az  $\mathcal{L}'_o$ ,  $\mathcal{L}'_\varepsilon$  és  $\mathcal{L}_R$  görbékkel határolt kétszeresen összefüggő  $A'_\varepsilon$  tartomány a vizsgálat tárgya, ahol  $\mathcal{L}'_o$  az  $\mathcal{L}_o$  peremgörbe azon része, amely a  $\overset{\circ}{Q}$  középpontú és  $R_\varepsilon$  sugarú  $A_\varepsilon$  kör eltávolítása után marad meg; míg  $\mathcal{L}'_\varepsilon$  a  $A_\varepsilon$  körvonal  $A_\varepsilon$ -n belül fekvő része. A duál SOMIGLIANA identitás utóbbi tartományra történő alkalmazásával és az így adódó egyenlet  $R_\varepsilon \rightarrow 0$ ,  ${}_e R \rightarrow \infty$  határértékének meghatározásával az  $A_\varepsilon$  külső tartományra vonatkozó második duál SOMIGLIANA formulát kapjuk:

$$(8.67) \quad c_{\kappa\lambda}(\overset{\circ}{Q})u_\lambda(\overset{\circ}{Q}) = \tilde{u}_\kappa(Q) + \oint_{\mathcal{L}'_o} \mathfrak{U}_{\kappa\lambda}(\overset{\circ}{M}, \overset{\circ}{Q})\mathfrak{t}_\lambda(\overset{\circ}{M}) ds_{\overset{\circ}{M}} - \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{T}_{\kappa\lambda}(\overset{\circ}{M}, \overset{\circ}{Q})u_\lambda(\overset{\circ}{M}) ds_{\overset{\circ}{M}}.$$

19. MEGJEGYZÉS: Az (8.67) egyenlet az  $u_\lambda(\overset{\circ}{M})$ ,  $\overset{\circ}{M} \in \mathcal{L}_u$  és  $\mathfrak{t}_\lambda(\overset{\circ}{M})$ ,  $\overset{\circ}{M} \in \mathcal{L}_t$  ismeretlenekre vonatkozó integrálegyenlet. Más néven a direkt módszer integrálegyenlete külső tartományra.

20. MEGJEGYZÉS: Az átalakításokat ismét nem részletezzük. Ennek az az oka, hogy az  $\mathcal{L}_R$  körön vett integrálok tekintetében nincs semmi eltérés az előző  $Q \in A_e$  esethez képest, ami pedig a fennmaradó tagokat illeti azok szószerint ugyanúgy adódnak mint a belső tartományra vonatkozó (8.53) integrálegyenlet esetén.

3. Ha  $Q \in A_i$ , akkor azonnal kapjuk az előzőekben mondottak alapján a külső tartományra vonatkozó harmadik duál SOMIGLIANA formulát:

$$(8.68) \quad 0 = \tilde{u}_k(Q) + \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{U}_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q) t_\lambda(\overset{\circ}{M}) ds_{\overset{\circ}{M}} - \oint_{\mathcal{L}_o} \mathfrak{T}_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q) u_\lambda(\overset{\circ}{M}) ds_{\overset{\circ}{M}}.$$

Legyen

$$(8.69) \quad \tilde{s}_k(Q) = (t_{11}(\infty), t_{12}(\infty), t_{22}(\infty)) = \text{állandó}.$$

A feszültségeket adó (8.55) képlettel kapcsolatos gondolatmenet szószerinti ismétlésével kapjuk meg a

$$(8.70) \quad \mathfrak{s}_k(Q) = \tilde{s}_k(Q) + \oint_{\mathcal{L}_o} D_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q) t_\lambda(\overset{\circ}{M}) ds_{\overset{\circ}{M}} - \oint_{\mathcal{L}_o} S_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q) u_\lambda(\overset{\circ}{M}) ds_{\overset{\circ}{M}}$$

formulát, amely a külső  $A_e$  tartomány egy belső pontjában alkalmazható a feszültségek meghatározására. Ami  $D_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)$  és  $S_{k\lambda}(\overset{\circ}{M}, Q)$  számítását illeti az (8.56a), ..., (8.57g) összefüggésekre utalunk.

### 8.7. A vonalintegrálok diszkretizálása és a numerikus megoldás egyenletrendszere.

A szokásos és jól ismert eljárást [3] alkalmaztuk a direkt módszer integrálegyenleteinek megoldására. A program Fortran 90 programozási nyelven készült.

Az alábbiak az algoritmus legfontosabb jellegzetességeit ismertetik.

A számítás során részlegesen nem folytonos, kvadratikus alakfüggvényeket használtunk. Ezek a  $\eta \in [-1, 1]$  intervallumra képezik le a tekintett peremelemet. Az alakfüggvények az  $\eta^1$ ,  $\eta^2$  és  $\eta^3$  koordinátájú csomópontokra támaszkodó LAGRANGE polinomok:

$$(8.71) \quad \begin{aligned} N^1(\eta) &= \frac{1}{(\eta^1 - \eta^2)(\eta^1 - \eta^3)}(\eta - \eta^2)(\eta - \eta^3), \\ N^2(\eta) &= \frac{1}{(\eta^2 - \eta^3)(\eta^2 - \eta^1)}(\eta - \eta^3)(\eta - \eta^1), \\ N^3(\eta) &= \frac{1}{(\eta^3 - \eta^1)(\eta^3 - \eta^2)}(\eta - \eta^1)(\eta - \eta^2), \end{aligned}$$

ahol előzetesen az  $\eta^1 = -1$  és  $-1 < \eta^2 < \eta^3 < 1$  módon rögzítjük le a csomóponti koordinátákat, ha az  $\eta = 1$  pontban van a diszkontinuitás, illetve a  $\eta^3 = 1$  és  $-1 < \eta^1 < \eta^2 < 1$  módon, ha az  $\eta = -1$  pontban van a diszkontinuitás. Az  $\eta^1 = -1$ ,  $\eta^2 = 0$  és  $\eta^3 = 1$  értékekre a fenti polinomok a szokásos izoparametrikus approximációt szolgáltatják.

Legyen  $n_{bn}$  a csomópontok száma. Jelölje  $n_{be}$  a peremelemek számát. Magukat a peremeleket az  $\mathcal{L}_e$  módon jelöljük;  $e = 1, \dots, n_{be}$ .

Legyenek

$$(8.72) \quad \mathbf{u}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^j \\ \mathbf{u}_2^j \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{t}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^j \\ \mathbf{t}_2^j \end{bmatrix} \quad j = 1, \dots, n_{bn}$$

a feszültségfüggvények és a  $-du_\lambda/ds$  elmozdulásderivált (mátrixai) a  $j$ -ik csomópontban. A teljes peremre nézve az

$$(8.73a) \quad \mathbf{u}^T = \left[ \underbrace{\mathbf{u}_1^1 \mathbf{u}_2^1}_{\mathbf{u}_1^T} \mid \underbrace{\mathbf{u}_1^2 \mathbf{u}_2^2}_{\mathbf{u}_2^T} \mid \dots \mid \underbrace{\mathbf{u}_1^{n_{bn}} \mathbf{u}_2^{n_{bn}}}_{\mathbf{u}_{n_{bn}}^T} \right]$$

$$(8.73b) \quad \mathbf{t}^T = \left[ \underbrace{\mathbf{t}_1^1 \mathbf{t}_2^1}_{\mathbf{t}_1^T} \mid \underbrace{\mathbf{t}_1^2 \mathbf{t}_2^2}_{\mathbf{t}_2^T} \mid \dots \mid \underbrace{\mathbf{t}_1^{n_{bn}} \mathbf{t}_2^{n_{bn}}}_{\mathbf{t}_{n_{bn}}^T} \right]$$

képletek értelmezik a feszültségfüggvények  $\mathbf{u}$  és az elmozdulásderivált  $\mathbf{t}$  mátrixát. Az  $a(j, e)$  függvény az  $e$ -ik elem globális sorszámozás szerint  $j$ -ik csomópontjának lokális (elemen belüli) sorszámát adja meg. A későbbiek kedvéért az alábbiakban értelmezzük a

$$(8.74) \quad \hat{\mathbf{h}}_{ij} = \left[ \sum_{e \in j} \int_{\mathcal{L}_e} \mathfrak{T}_{\kappa\lambda}(Q_i, \eta) N^{a(j,e)}(\eta) J(\eta) d\eta \right]$$

és

$$(8.75) \quad \mathbf{b}_{ij} = \left[ \sum_{e \in j} \int_{\mathcal{L}_e} \mathfrak{U}_{\kappa\lambda}(Q_i, \eta) N^{a(j,e)}(\eta) J(\eta) d\eta \right]$$

integrálokat, ahol az összegezés azokra az elemekre terjed ki, melyeknek csomópontja a  $j$ -ik csomópont; az  $i$  rögzített csomópontot jelöl (ennek kollokációs pont a neve), míg  $J(\eta)$  a JACOBI féle függvénydetermináns. Felhasználva a (8.72), ..., (8.75) alatti és a

$$(8.76) \quad \mathbf{c}_{ii} = [c_{\kappa\lambda}(Q_i)] ,$$

valamint a

$$(8.77) \quad \mathbf{h}_{ij} = \begin{cases} \hat{\mathbf{h}}_{ii} + \mathbf{c}_{ii} & \text{ha } i = j \\ \hat{\mathbf{h}}_{ij} & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

jelöléseket a

$$(8.78) \quad \left[ \mathbf{h}_{i1} \quad \mathbf{h}_{i2} \quad \cdots \quad \mathbf{h}_{in_{bn}} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{u}_{n_{bn}} \end{bmatrix} = \left[ \mathbf{b}_{i1} \quad \mathbf{b}_{i2} \quad \cdots \quad \mathbf{b}_{in_{bn}} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{t}_{n_{bn}} \end{bmatrix} . \quad i = 1, \dots, n_{bn}$$

egyenletet kapjuk a  $\overset{o}{Q} = Q_i$  kollokációs pontban vett második duál SOMIGLIANA formulából. A fenti egyenletek egyesítése a

$$(8.79) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} & \cdots & \mathbf{h}_{1n_{bn}} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} & \cdots & \mathbf{h}_{2n_{bn}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{h}_{n_{bn}1} & \mathbf{h}_{n_{bn}2} & \cdots & \mathbf{h}_{n_{bn}n_{bn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{u}_{n_{bn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} & \cdots & \mathbf{b}_{1n_{bn}} \\ \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} & \cdots & \mathbf{b}_{2n_{bn}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{b}_{n_{bn}1} & \mathbf{b}_{n_{bn}2} & \cdots & \mathbf{b}_{n_{bn}n_{bn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{t}_{n_{bn}} \end{bmatrix}$$

vagy tömörebb formában írva a

$$(8.80) \quad \mathbf{Hu} = \mathbf{Bt}$$

egyenletrendszerre vezet.

A fenti egyenletben vagylagosan adott az  $\mathbf{u}_k$ , illetve a  $\mathbf{t}_k$  hiszen egy csomópontban a két érték közül csak az egyik ismert a peremfeltételek alapján. Másként fogalmazva annyi ismeretlenünk van ahány egyenlet áll rendelkezésre, és (8.80) alkalmas átrendezése után lineáris egyenletrendszert kapunk az ismeretlen csomóponti értékekre. Az ismeretlen csomóponti értékek meghatározása után pedig ismertnek vehetjük az  $\mathbf{u}_\lambda(\overset{o}{M})$  és  $\mathbf{t}_\lambda(\overset{o}{M})$  mezőfüggvényeket a teljes  $\mathcal{L}_o$  kontúron. Következésképp belső pontokban a (8.50) első duál SOMIGLIANA formula segítségével számítható  $\mathbf{u}_k(Q)$ , a (8.55), (8.56a, ..., b) és (8.57a, ..., g) képletek felhasználásával pedig a  $t_{11}(Q)$ ,  $t_{12}(Q)$  és  $t_{22}(Q)$  feszültségek adódnak.

Az  $\mathcal{L}_u$  pontjaiban a feszültségfüggvények lokális approximációjának (8.9) jobboldalába történő helyettesítésével számítjuk a feszültségeket.

21. MEGJEGYZÉS: Ha feszültségeket írunk elő a teljes  $\mathcal{L}_o$  kontúron, akkor  $\mathbf{t}$  az ismeretlen és a feladat duál DIRICHLET típusú feladat.

22. MEGJEGYZÉS: Ha az elmozdulásmezőt írjuk elő a teljes  $\mathcal{L}_o$  kontúron, akkor a feszültségfüggvényeket tartalmazó  $\mathbf{u}$  az ismeretlen és a feladat duál NEUMANN feladat. Mivel a konstans feszültségfüggvényekhez nem tartozik feszültség, a feszültségfüggvények csak egy konstans vektor

erejéig meghatározottak. Konstans feszültségfüggvényhez nem tartozik feszültség és alakváltozás. Következésképp

$$t_\lambda = -\frac{du_\lambda}{ds} = -\varphi^3 \frac{dx^\kappa}{ds} \epsilon_{3\kappa\lambda},$$

ahol a  $\varphi^3$  – mint egy adott pontbeli merevtestszerű forgás – tetszőleges állandó, amely zérusnak is választható. Utóbbi esetben  $\mathbf{t} = \mathbf{0}$  és ha a konstans feszültségfüggvényeket az  $u_k = 1$  ( $k = 1, \dots, n_{bn}$ ) módon vesszük fel, akkor azt kapjuk, hogy

$$(8.81) \quad \sum_{j=1}^{2n_{bn}} H_{ij} = 0 \quad \text{vagy ami ugyanaz, hogy} \quad H_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{2n_{bn}} H_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, 2n_{bn};$$

ahol  $H_{ij}$  a  $\mathbf{H}$  mátrix egy eleme.

23. MEGJEGYZÉS: A képlet jelentőségét az adja, hogy a  $c_{\kappa\lambda}$ -át is magába foglaló – v.ö.: (8.76) és (8.77) –  $H_{ii}$  meghatározása, hasonlóan a primál rendszerbeni feladatokhoz, CAUCHY féle főértékben vett integrálok numerikus számítását igényli. Ezek az integrálok a fenti képlet alapján, azaz a  $H_{ij}$  mátrixelemek ismeretében, numerikus integrálás nélkül adódnak. A  $H_{ij}$  mátrixelemek számítása persze nem megy numerikus integrálás nélkül, de ezek az integrálok nem szingulárisak és a szokványos GAUSS integrálással számíthatók.

Ha külső tartomány a vizsgált tartomány, akkor egy taggal bővül a megoldandó egyenletrendszer. Definiáljuk az  $\tilde{\mathbf{u}}$  mátrixot az

$$(8.82) \quad \tilde{\mathbf{u}}^T = [\underbrace{\tilde{u}_1^1 \tilde{u}_2^1}_{\tilde{\mathbf{u}}_1^T} | \underbrace{\tilde{u}_1^2 \tilde{u}_2^2}_{\tilde{\mathbf{u}}_2^T} | \dots | \underbrace{\tilde{u}_1^{n_{bn}} \tilde{u}_2^{n_{bn}}}_{\tilde{\mathbf{u}}_{n_{bn}}^T}]$$

egyenlettel, ahol  $\tilde{\mathbf{u}}_j$  egy olyan mátrix amely a  $Q_j$  ( $j = 1, \dots, n_{bn}$ ) pontokban vett  $\tilde{u}_\kappa$  értékeket tartalmazza. Ezzel a jelöléssel az

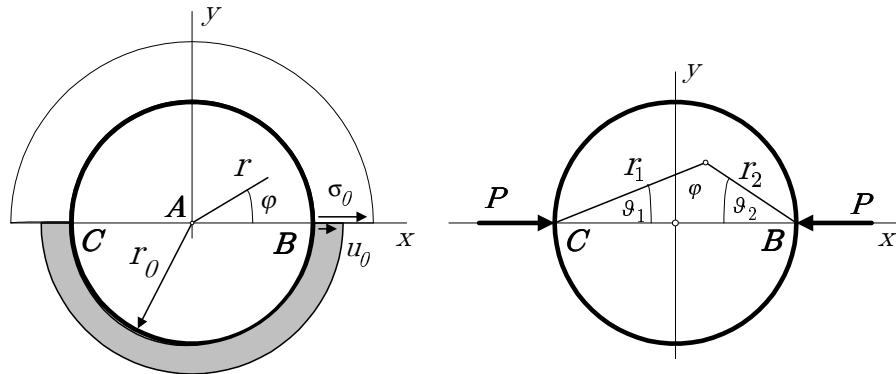
$$(8.83) \quad \mathbf{H}\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mathbf{t}.$$

alakban írható fel az ismeretlen csomóponti értékekre megoldandó egyenletrendszer. A

$$(8.84) \quad H_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{2n_{bn}} H_{ij} + 1, \quad i = 1, 2, \dots, 2n_{bn}$$

egyenlet kihasználásával ismét elkerülhető az erősen szinguláris integrálok számítása. A (8.84) egyenlet ugyanúgy kapható meg mint a belső tartományra vonatkozó (8.81) alatti párja. Feltevés, hogy az  $\tilde{\mathbf{u}}_j$ -ban álló  $c_\rho$  állandót – lásd a (8.59) összefüggést – zérusnak választjuk.

**8.8. Számpéldák.** Amint már említettük Fortran forrásnyelvű program készült a numerikus megoldás kiszámítására. A fordító Microsoft Fortran Power Station, Version 1.0c. Az alábbi három teszt feladat jól illusztrálja a kidolgozott eljárás megbízhatóságát. Az első két esetben a 8.2. ábrán vázolt  $r_o = 10$  mm sugarú, kör alakú  $A$  tartomány képezi a vizsgálat tárgyát. A tartomány anyagának  $\mu = 8 \cdot 10^4$  MPa rugalmassági modulusa és  $\nu = 0.3$  a POISSON tényező.



8.3. ábra.

1. Mintapélda: A  $BC$  íven  $\sigma_o = 100$  MPa a radiális feszültség (sugárirányú terhelés). A  $CB$  íven  $u_o = (1 - 2\nu)\sigma_o r_o / 2\mu$  a radiális elmozdulás. Könnyű ellenőrizni, hogy a fenti értékek a tartomány egy homogén feszültségi állapotához tartozó peremértékek. A vonatkozó megoldásokat –  $r$  és  $\varphi$  polárkoordináták – a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_x = \sigma_o y = \sigma_o r \sin \varphi, & \quad \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_y = -\sigma_o x = -\sigma_o r \cos \varphi, \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_o, & \quad \tau_{xy} = 0, \\ u_x = \frac{1 - 2\nu}{2\mu} \sigma_o x = \frac{1 - 2\nu}{2\mu} \sigma_o r \sin \varphi, & \\ u_y = \frac{1 - 2\nu}{2\mu} \sigma_o y = \frac{1 - 2\nu}{2\mu} \sigma_o r \cos \varphi & \end{aligned}$$

képletek adják. A  $BC$  íven

$$u_x = \mathcal{F}_x = \sigma_o r_o \sin \varphi, \quad u_y = \mathcal{F}_y = -\sigma_o r_o \cos \varphi;$$

a  $CB$  íven pedig

$$-t_x = \frac{du_x}{ds} = \frac{1 - 2\nu}{2\mu} \sigma_o \sin \varphi, \quad -t_y = \frac{du_y}{ds} = \frac{1 - 2\nu}{2\mu} \sigma_o \cos \varphi$$

a peremfeltételek. Az alábbi táblázat a feszültségek számított értékeit tartalmazza:

x [mm]	y [mm]	$\sigma_{xx}$ [MPa]	$\tau_{xy}$ [MPa]	$\sigma_{yy}$ [MPa]
-7.50	0.00	99.99927	0.0001113	99.99983
-5.00	0.00	99.99912	0.0000478	99.99988
-2.50	0.00	99.99917	0.0000182	99.99983
0.00	0.00	99.99918	0.0000000	99.99982
2.50	0.00	99.99917	0.0000182	99.99983
5.00	0.00	99.99912	0.0000478	99.99988
7.50	0.00	99.99927	0.0001112	99.99983
7.50	5.00	99.98317	0.0048330	100.00853
5.00	7.50	100.00854	0.0048269	99.98308
9.00	1.00	99.96938	0.0122755	100.02786

I. táblázat

A számítás során 16 egyforma elemre osztottuk fel a teljes peremgörbét (azaz nem használtuk ki a szimmetriából adódó lehetőségeket.)

2. Mintapélda: Az a tartomány  $B$  és  $C$  pontjaiban  $P = -100.0$  N/mm nagyságú nyomóerő működik. Ezeket a viszonyokat a 8.2. ábra jobboldali fele szemlélteti. A terhelés jellegéből következően a  $BC$  és  $CB$  íveken rendre

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x &= P = -100, & \mathcal{F}_y &= 0, \\ \mathcal{F}_x &= 0, & \mathcal{F}_y &= 0\end{aligned}$$

a peremfeltétel. A feladatnak ismert a pontos megoldása [39]. Az ábra jelöléseivel

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{2P}{\pi} \left[ \frac{\cos^3 \vartheta_1}{r_1} + \frac{\cos^3 \vartheta_2}{r_2} \right] - \frac{P}{\pi r_o}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{2P}{\pi} \left[ \frac{\sin \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_1}{r_1} - \frac{\sin \vartheta_2 \cos^2 \vartheta_2}{r_2} \right], \\ \sigma_{yy} &= \frac{2P}{\pi} \left[ \frac{\sin^2 \vartheta_1 \cos \vartheta_1}{r_1} + \frac{\sin^2 \vartheta_2 \cos \vartheta_2}{r_2} \right] - \frac{P}{\pi r_o}\end{aligned}$$

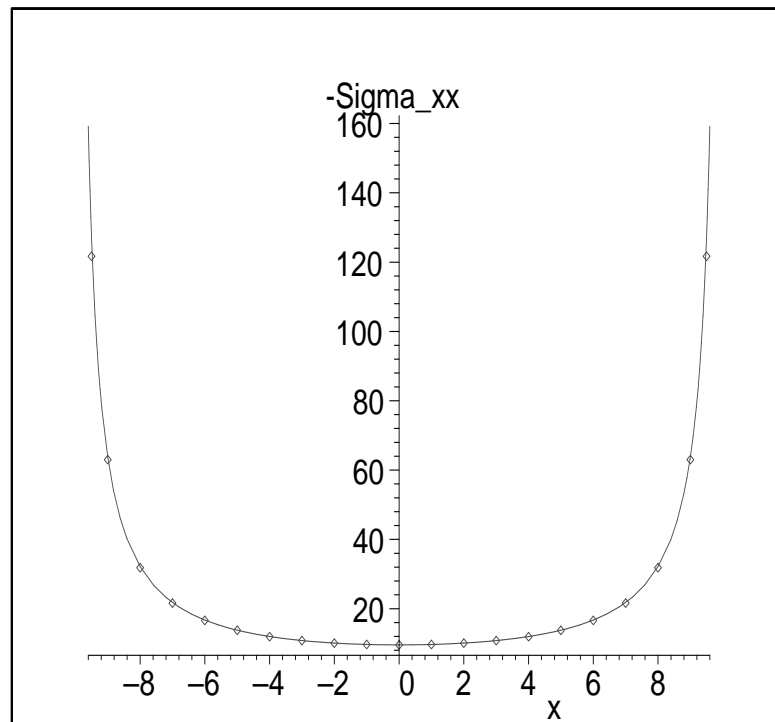
a feszültségek értéke a tartomány  $x, y$  koordinátájú pontjaiban. A II. táblázat néhány jellegzetes pontban megadja a pontos – ez a pont koordinátáit adó sorban van – és a peremelem módszerrel számított értékeket:

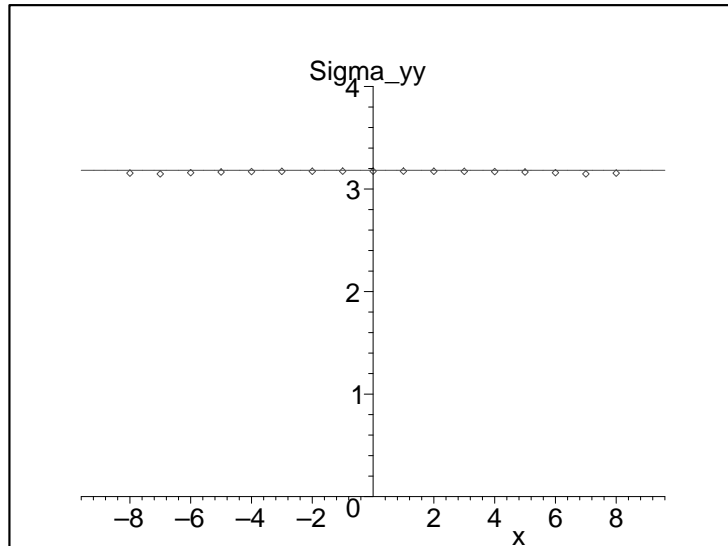
x [mm]	y [mm]	$\sigma_{xx}$ [MPa]	$\tau_{xy}$ [MPa]	$\sigma_{yy}$ [MPa]
-8.00	0.00	-32.18467	0.000000	3.183099
		-31.81677	0.000000	3.155008
-7.00	0.00	-21.78238	0.000000	3.183099
		-21.59899	0.000000	3.148007
-5.00	0.00	-13.79343	0.000000	3.183099
		-13.73097	0.000000	3.166082
-3.00	0.00	-10.80854	0.000000	3.183099
		-10.77734	0.000000	3.171960
0.00	0.00	-9.549296	0.000000	3.183099
		-9.528533	0.000000	3.173908
0.00	3.00	-7.533503	0.000000	2.218605
		-7.525384	0.000000	2.215954
0.00	5.00	-4.965634	0.000000	1.145916
		-4.969546	0.000000	1.148126
0.00	7.00	-2.551956	0.000000	0.372921
		-2.562635	0.000000	0.375987

II. táblázat

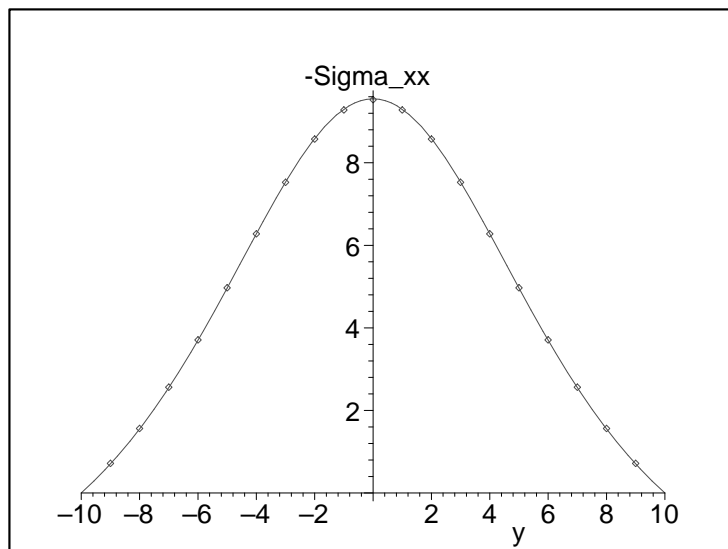
A számítás során 40 egyforma elemre osztottuk fel a teljes peremgörbét. Ennek ellenére valamivel nagyobb a relatív hiba mint az előző feladatban. A hiba növekszik ha a  $C$  (illetve a  $B$ ) feszültséggyűjtő pont felé haladunk, mivel ekkor végtelenhez tart a  $\sigma_{xx}$  normálfeszültség. Nyilvánvaló, hogy véges szakadása van a feszültségfüggvény értékének az erők támadáspontjaiban. A szakadás korrekt kezelése érdekében a vonatkozó elemek egyik végpontjában nem folytonos (partially discontinuous) alakfüggvényeket alkalmaztunk.

A numerikus megoldást nemcsak a II. táblázattal, hanem a 8.4.-8.7. ábrák révén grafikusan is szemléltetjük. Az analitikus megoldást folytonos vonal, a numerikus megoldást pedig gyémántok ábrázolják. Az ábrák léptékében szinte érzékelhetetlen a két megoldás közti különbség.

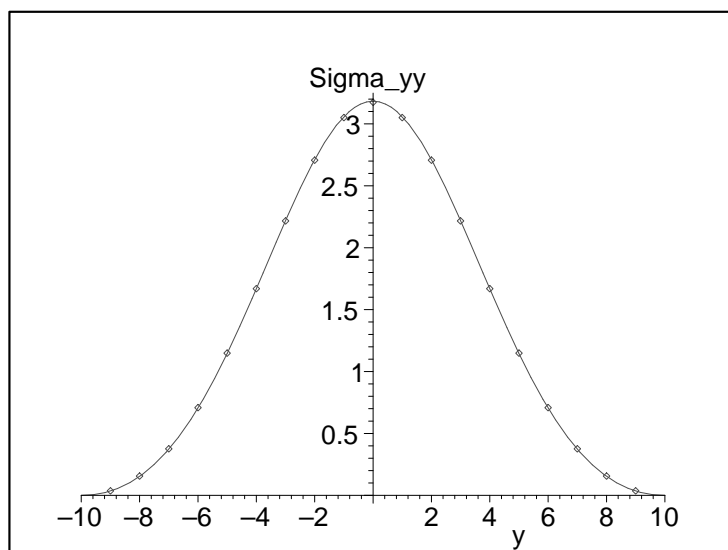
8.4. ábra. Pontos és numerikus megoldás  $-\sigma_{xx}$  értéke a vízszintes átmérőn



8.5. ábra. Pontos és numerikus megoldás –  $\sigma_{yy}$  értéke a vízszintes átmérőn

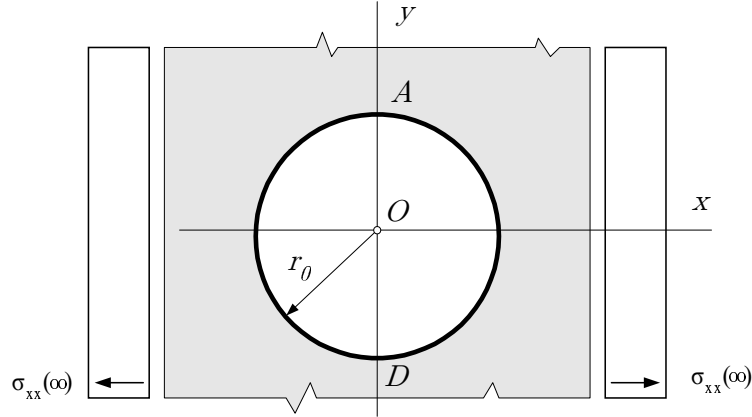


8.6. ábra. Pontos és numerikus megoldás –  $\sigma_{xx}$  értéke a függőleges átmérőn



8.7. ábra. Pontos és numerikus megoldás –  $\sigma_{yy}$  értéke a függőleges átmérőn

3. Mintapélda: Bár az  $\mathcal{L}_o$  peremgörbe és az anyagjellemzők ugyanazok mint az előző két feladatban a vizsgálat tárgyát képező tartomány azonban olyan külső tartomány – lásd a 8.8. ábrát – amelyre a  $\sigma_{xx}(\infty) = 100[\text{MPa}]$ ,  $\sigma_{xy}(\infty) = \sigma_{yx}(\infty) = \sigma_{yy}(\infty) = 0$  feszültségállapotot írjuk elő a végtelen távoli pontban.



8.8. ábra. Az  $r_o = 10$  [mm] sugarú és  $O$  középpontú körrel határolt külső tartomány

Amint az jól ismert a polárkoordinátarendszerben írt

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{\sigma_{xx}(\infty)}{2} \left[ \left(1 - \frac{r_o^2}{r^2}\right) + \left(1 + \frac{3r_o^4}{r^4} - \frac{4r_o^2}{r^2}\right) \cos 2\varphi \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\sigma_{xx}(\infty)}{2} \left[ \left(1 + \frac{r_o^2}{r^2}\right) - \left(1 + \frac{3r_o^4}{r^4}\right) \cos 2\varphi \right], \\ \sigma_{r\varphi} &= \frac{\sigma_{xx}(\infty)}{2} \left[ \left(1 - \frac{3r_o^4}{r^4} + \frac{2r_o^2}{r^2}\right) \sin 2\varphi \right]\end{aligned}$$

képletek a fenti probléma pontos megoldásait adják a feszültségekre nézve [79, 39].

x [mm]	y [mm]	$\sigma_{xx}$ [MPa]	$\tau_{xy}$ [MPa]	$\sigma_{yy}$ [MPa]
0.00	10.00	300.0395	0.000000	0.001035
		300.0000	0.000000	0.000000
0.00	11.00	243.7623	0.000000	21.51840
		243.7743	0.000000	21.51494
0.00	12.00	207.0554	0.000000	31.82829
		207.0602	0.000000	31.82870
0.00	13.00	182.1018	0.000000	36.23794
		182.1049	0.000000	36.23823
0.00	14.00	164.5539	0.000000	37.48413
		164.5564	0.000000	37.48438
0.00	15.00	151.8498	0.000000	37.03671
		151.8518	0.000000	37.03704

III. táblázat

A III. táblázat az  $y$  tengely mentén hasonlítja össze a számított (első érték) és pontos megoldást (második érték). A számítás során 16 egyforma nagyságú elemre osztottuk fel az  $\mathcal{L}_o$  peremgörbét.

**8.9. Eredmények.** Az egyes eredményeket sorszámozzuk.

1. Az egyértékűség feltételeinek meghatározása többszörösen összefüggő tartomány és a egyes peremértékfeladatok azon osztályára, amikor az egyes kontúrgörbék páros számú ívre vannak felosztva és az íveken váltakozva feszültség, illetve elmozdulás az előírt.
2. Az elsőrendű  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_x$ ,  $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_y$  feszültségfüggvényekre vonatkozó alapmegoldás és ennek birtokában a feszültségi tenzorra, az alakváltozási tenzorra, illetve az elmozdulásvektor



ívkoordináta szerint vett deriváltjára vonatkozó alapmegoldások – v.ö.: (8.35), (8.39), (8.40) és (8.42a,b) képletek – előállítására.

3. A belső tartománnyal kapcsolatos (8.50), (8.53) és (8.54) duál SOMIGLIANA képletek valamint a tartomány belső pontjaiban a feszültségeket adó (8.55), (8.56a,...,g) és (8.57a,...,g) képletek előállítása és ezzel összefüggésben az  $\mathfrak{U}_{k\lambda}(M, Q)$ ,  $\mathfrak{T}_{k\lambda}(M, Q)$  alapmegoldások tulajdonságainak vizsgálata. Ezzel valójában megtörtént a direkt módszer peremintegrálegyenleteinek levezetése belső tartományra.
4. A külső tartománnyal kapcsolatos (8.64), (8.67) és (8.68) duál SOMIGLIANA képletek valamint a tartomány belső pontjaiban a feszültségeket adó (8.70) képlet előállítása. Ezzel valójában megtörtént a direkt módszer peremintegrálegyenleteinek levezetése külső tartományra. Külön szépsége a kapott eredményeknek, hogy a végtelenbeli konstans feszültségállapot része a külső tartományra vonatkozó formalizmusnak.
5. Algoritmus és számítóprogram kidolgozása mind a belső mind pedig a külső tartományra vonatkozó peremértékfeladatok megoldására kvadratikus peremelemek felhasználásával. Ezzel összefüggésben annak igazolása, hogy a  $\mathbf{H}$  rendszermátrix belső tartományon a (8.81) külső tartományon pedig a (8.82) képletnek tesz eleget. A képletek jelentőségét az adja, hogy elkerülhető segítségükkel az erősen szinguláris  $H_{ii}$  integrálok valamilyen integrálformula alapján történő számítása.

A vonatkozó publikációkat illetően a [67, 69] előadásokra, a [68] cikkekre, valamint a [77] könyvrészletre utalunk. A felsorolt eredmények 100%-ban a szerző eredményei.

## 9. PEREMELEM MÓDSZER SÍKFELADATOKRA PRIMÁL RENDSZERBEN – A KÜLSŐ TARTOMÁNYRA VONATKOZÓ EGYENLETEK PONTOSÍTÁSA

**9.1. Irodalmi előzmények.** Bár igen nagy azon cikkek száma, melyek a peremelem módszer síkrugalmaságtani alkalmazásaival foglalkoznak – a teljesség igénye nélkül emeljük ki ehelyütt a [84, 21, 49, 10, 9] cikkeket, valamint a [3, 20] könyveket (az utóbbiakban további hivatkozások is találhatóak) – a feladat külső tartományokra történő megfogalmazásának mindenütt az a hátránya, hogy nem írhatók elő feszültségek a végtelen távoli pontban.

Ami az okokat illeti ismét hivatkozunk a [10] tanulmányra, amelyben feltevést fogalmaznak meg az elmozdulásmező végtelenbeli viselkedésére vonatkozóan. A megfogalmazott feltevés mellett lehetővé válik a BETTI formula felállításának és egzisztenciájának igazolása. A feltevés ugyanakkor kizárja az elméletből azokat a feladatokat, amelyre nézve az elmozdulásmezőhöz konstans végtelenbeli alakváltozásmező, következésképp konstans végtelenbeli feszültségállapot tartozik.

Szeretnénk hangsúlyozni, hogy ezek a feladatok is megoldhatók a szuperpozíció elv alkalmazásával.

Ennek ellenére, felmerül az a kérdés a 8. Fejezet eredményeinek fényében – itt a 4. alatt felsorolt eredményekre utalunk (lásd a 86. oldalt), ismét hangsúlyozva, hogy a végtelenbeli feszültségi állapot duál rendszerben a formalizmus része –, vajon a végtelenbeli konstans feszültségállapot leírásához szükséges tagok primál rendszerben beépíthetők-e a formalizmusba.

**9.2. Célkitűzések.** A jelen szakasznak az a célja, hogy választ adjon a felvetett kérdésre kimutatva, hogy az elmozdulásmező végtelenbeli viselkedésére kirótt alkalmas feltevés mellett a végtelenbeli feszültségi állapot beépíthető a külső tartományra vonatkozó formalizmusba.

Az eredményeket a [66] tanulmány közölte.

**9.3. A síkrugalmaságtan egyenletei primál rendszerben.** A jelen fejezetben, ugyanúgy mint a 8.4. szakaszban, indexes jelölést és derékszögű kartézusi koordinátarendszert alkalmazunk. A vizsgálat tárgyát képező egyszerűen összefüggő tartományt  $A_e$  peremgörbét  $\mathcal{L}_o$  jelöli – szem előtt tartva a későbbi átalakításokat is hivatkozunk ehelyütt a 8.2. ábrára.

Síkalakváltozás feltételezése mellett homogén izotróp testre a klasszikus rugalmaságtan meőegyenleteit az

$$(9.1) \quad e_{\rho\lambda} = \frac{1}{2}(\partial_\rho u_\lambda + u_\rho \partial_\lambda)$$

kinematikai egyenlet, a

$$(9.2) \quad t_{\rho\lambda} = 2\mu \left( e_{\rho\lambda} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{\rho\lambda} e_{\varphi\varphi} \right)$$

HOOKE törvény és a

$$(9.3) \quad t_{\rho\lambda} \partial_\lambda + b_\rho = 0$$

egyensúlyi egyenletek alkotják. A fenti egyenleteket ki kell egészíteni a vonatkozó peremfeltételekkel. Ezeket nem részletezzük mivel nem játszanak közvetlen szerepet a gondolatmenetben.

Az  $u_\lambda$ -ra vonatkozó alapegyenlet a

$$(9.4) \quad \mathcal{D}_{\rho\lambda} u_\lambda + \frac{b_\rho}{\mu} = 0$$

alakban írható fel, ahol

$$(9.5) \quad \mathcal{D}_{\rho\lambda} = \Delta \delta_{\rho\lambda} + \frac{1}{1-2\nu} \partial_\rho \partial_\lambda, \quad \Delta = \partial_\sigma \partial_\sigma.$$

Jelölje ismét  $Q(\xi_1, \xi_2)$  és  $M(x_1, x_2)$  a forráspontot, illetve a hatás pontját – v.ö.: 8.4. szakasz. A  $Q$  pontot egyenlőre rögzítettnek vesszük.  $R$  a  $Q$  és  $M$  pontok távolsága,  $r_\kappa$  pedig az  $M$  pont  $Q$  pontra vonatkoztatott helyvektora.

Az  $M$ , illetve  $Q$  fölött álló kis karika azt jelenti hogy a pont az  $\mathcal{L}_o$  peremgörbére esik:  $\overset{\circ}{M}$ ,  $\overset{\circ}{Q}$ .

A (9.4) alapegyenlethez tartozó alapmegoldásokat az

$$(9.6) \quad U_{\lambda\kappa}(M, Q) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln \frac{1}{R} \delta_{\kappa\lambda} + \frac{r_\kappa r_\lambda}{R^2} - \frac{7-8\nu}{2} \delta_{\kappa\lambda} \right]$$

és

$$(9.7) \quad T_{\lambda\kappa}(M, Q) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^2} \left[ (1-2\nu)(n_\lambda r_\kappa - n_\kappa r_\lambda - n_\sigma r_\sigma \delta_{\kappa\lambda}) - 2 \frac{n_\sigma r_\sigma r_\kappa r_\lambda}{R^2} \right]$$

képletek szolgáltatják, ahol

$$u_\lambda(M) = U_{\lambda\kappa}(M, Q) e_\kappa(Q) \quad \text{és} \quad t_\lambda(M) = T_{\lambda\kappa}(M, Q) e_\kappa(Q)$$

az elmozdulásvektor, illetve a feszültségvektor az  $n_\lambda = n_\lambda(M)$  normálisú felületelem  $M$  pontjában a  $Q$  pontban működő  $e_\kappa = e_\kappa(Q)$  erő hatására.

**9.4. Alapképletek külső tartományra.** A 8.2. ábra az  $\mathcal{L}_o$ ,  $\mathcal{L}_\varepsilon$  és az  $O$  középpontú  ${}_eR$  sugarú  $\mathcal{L}_R$  körrel határolt háromszorosan összefüggő  $A'_e$  tartományt szemlélteti.  $\mathcal{L}_\varepsilon$  a  $Q$  pont  $R_\varepsilon$  sugarú  $A_\varepsilon$  környezetének peremgörbéje. Az  ${}_eR$ , feltevés szerint elegendően nagy ahhoz, hogy teljes egészében magába foglalja mind  $\mathcal{L}_o$ -t, mind pedig  $\mathcal{L}_\varepsilon$ -t. További feltevés, hogy  $A_\varepsilon$  az  $A'_e$  tartomány belsejében fekszik. Nyilvánvaló, hogyha  ${}_eR \rightarrow \infty$  és  $R_\varepsilon \rightarrow 0$  akkor  $A'_e \rightarrow A_e$ .

Legyen  $u_\kappa(M)$  és  $g_\kappa(M)$  két elegendően sima – legalább kétszer folytonosan deriválható – egyébként tetszőleges vektormező <sup>11</sup>  $A_e$ -n. Jelölje  $t_{\lambda\kappa}[u_\rho(M)]$  és  $t_{\lambda\kappa}[g_\rho(M)]$  az  $u_\kappa(M)$  és  $g_\kappa(M)$  vektormezőkből mint elmozdulásmezőkből adódó feszültségeket. A parciális integrálások elvégzésével belátható

$$(9.8) \quad \int_{A'_e - A_\varepsilon} \left[ u_\lambda(M) \left( \mu \overset{M}{\mathcal{D}}_{\lambda\sigma} g_\sigma(M) \right) - g_\lambda(M) \left( \mu \overset{M}{\mathcal{D}}_{\lambda\sigma} u_\sigma(M) \right) \right] dA_M = \\ = \oint_{\mathcal{L}_o} \left[ u_\lambda(\overset{\circ}{M}) t_{\lambda\kappa} \left[ g_\rho(\overset{\circ}{M}) \right] n_\kappa(\overset{\circ}{M}) - g_\lambda(\overset{\circ}{M}) t_{\lambda\kappa} \left[ u_\rho(\overset{\circ}{M}) \right] n_\kappa(\overset{\circ}{M}) \right] ds_{\overset{\circ}{M}} \\ + \oint_{\mathcal{L}_\varepsilon} \left[ u_\lambda(\overset{\circ}{M}) t_{\lambda\kappa} \left[ g_\rho(\overset{\circ}{M}) \right] n_\kappa(\overset{\circ}{M}) - g_\lambda(\overset{\circ}{M}) t_{\lambda\kappa} \left[ u_\rho(\overset{\circ}{M}) \right] n_\kappa(\overset{\circ}{M}) \right] ds_{\overset{\circ}{M}} \\ + \oint_{\mathcal{L}_R} \left[ u_\lambda(\overset{\circ}{M}) t_{\lambda\kappa} \left[ g_\rho(\overset{\circ}{M}) \right] n_\kappa(\overset{\circ}{M}) - g_\lambda(\overset{\circ}{M}) t_{\lambda\kappa} \left[ u_\rho(\overset{\circ}{M}) \right] n_\kappa(\overset{\circ}{M}) \right] ds_{\overset{\circ}{M}}$$

egyenlet, amelyben a betű felett álló  $\overset{\circ}{M}$  azt jelöli, hogy a vonatkozó deriválásokat az  $M$  pont koordinátái szerint vesszük, míg  $n_\kappa(\overset{\circ}{M})$  az  $\overset{\circ}{M}$  pontban vett külső normális, a SOMIGLIANA identitás primál rendszerben síkalakváltozás esetén [24]<sup>12</sup>. Legyen  $g_\lambda(Q) = U_{\lambda\kappa}(M, Q) e_\kappa(Q)$ . Ez a függvény az  $A'_e$  tartomány egy nemszinguláris rugalmas állapota – a  $Q$  pont ui. nem része ennek a tartománynak. Legyen továbbá az  $u_\lambda(M)$  az  $A_e$ , következésképp az  $A'_e$  tartomány(ok) egy rugalmas állapota, amely tetszőleges a végesben, de aszimptotikusan simul a

$$(9.9) \quad \tilde{u}_\kappa(M) = c_\kappa + \varepsilon_{3\rho\kappa} x_\rho \varphi + e_{\kappa\beta}(\infty) x_\beta$$

függvényhez, ha  $x_\beta$ , vagy ami ugyanaz, ha  $M$  tart a végtelenhez. Itt  $c_\kappa$  egy merevtestszerű eltolódás,  $\varphi = \varphi_3$  a merevtestszerű forgás a végesben,  $c_\kappa + \varepsilon_{3\rho\kappa} x_\rho \varphi$  a vonatkozó merevtestszerű mozgás, míg  $e_{\kappa\beta}(\infty)$  állandó alakváltozási tenzor a végtelen távoli pontban – a megfelelő mozgást az  $e_{\kappa\beta}(\infty) x_\beta$  tag adja. Az  $e_{\kappa\beta}(\infty)$ -hoz tartozó feszültségek a HOOKE törvény felhasználásával határozhatók meg:

$$(9.10) \quad t_{\rho\lambda}(\infty) = 2\mu \left( e_{\rho\lambda}(\infty) + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{\rho\lambda} e_{\varphi\varphi}(\infty) \right)$$

<sup>11</sup>Kiderül a továbbiak folyamán, hogy a két bevezetett vektormező elmozdulásmező szerepét tölti be, ez az  $u_\kappa(M)$  vektormező esetén az elmozdulásmezőre megszokott jelölés alkalmazásának indoka.

<sup>12</sup>Az idézett mű térbeli feladatokra adja meg az identitást és a jelölésrendszere is különböző.

A fenti képletek SOMIGLIANA identitásba való helyettesítésével kapjuk, hogy

$$(9.11) \quad \int_{A'_\varepsilon - A_\varepsilon} \left[ u_\lambda(M) \left( \mu \overset{M}{\mathcal{D}}_{\lambda\sigma} U_{\sigma\kappa}(M, Q) \right) - \left( \mu \overset{M}{\mathcal{D}}_{\lambda\sigma} u_\sigma(M) \right) U_{\lambda\kappa}(M, Q) \right] dA_M e_\kappa(Q) =$$

$$= \oint_{\mathcal{L}_o} \left[ u_\lambda(\overset{\circ}{M}) T_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) - t_\lambda(\overset{\circ}{M}) U_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) \right] ds_{\overset{\circ}{M}} e_\kappa(Q)$$

$$+ \oint_{\mathcal{L}_\varepsilon} \left[ u_\lambda(\overset{\circ}{M}) T_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) - t_\lambda(\overset{\circ}{M}) U_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) \right] ds_{\overset{\circ}{M}} e_\kappa(Q)$$

$$+ \oint_{\mathcal{L}_R} \left[ u_\lambda(\overset{\circ}{M}) T_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) - t_\lambda(\overset{\circ}{M}) U_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) \right] ds_{\overset{\circ}{M}} e_\kappa(Q),$$

mivel  $t_{\lambda\kappa} \left[ u_\rho(\overset{\circ}{M}) \right] n_\kappa(\overset{\circ}{M}) = t_\lambda(\overset{\circ}{M})$  a feszültségvektor a peremgörbén. Következésképp

$$t_{\lambda\kappa} \left[ g_\rho(\overset{\circ}{M}) \right] n_\kappa(\overset{\circ}{M}) = T_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) e_\kappa(Q).$$

Ha tartozik térfogati terhelés az  $u_\sigma$  vektormezőhöz, akkor (9.4)-ből következően nem zérus a

$$\left( \mu \overset{M}{\mathcal{D}}_{\lambda\sigma} u_\sigma(M) \right) U_{\lambda\kappa}(M, Q)$$

tag értéke. Mivel azonban a gondolatmenetben és a megkapni remélt plusz tagokban nem játszik szerepet a térfogati terhelés, feltételezzük továbbiakban, hogy az zérus értékű.

Nyilvánvaló, hogy elhagyhatjuk az  $e_\kappa(Q)$ -t. Ami az így adódó eredményt illeti az a célunk, hogy tisztázzuk mi az egyenlet határértéke, ha  $R_\varepsilon \rightarrow 0$  és  ${}_eR \rightarrow \infty$ . A baloldal eltűnik a fenti feltételek teljesülése esetén és amint az jól ismert (lásd pl. [3, 20]).

$$\oint_{\mathcal{L}_o} \dots + \lim_{R_\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\mathcal{L}_\varepsilon} \dots = u_\kappa(Q) + \oint_{\mathcal{L}_o} \left[ u_\lambda(\overset{\circ}{M}) T_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) - t_\lambda(\overset{\circ}{M}) U_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) \right] ds_{\overset{\circ}{M}}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$(9.12) \quad u_\kappa(Q) = \lim_{{}_eR \rightarrow \infty} \oint_{\mathcal{L}_R} \left[ t_\lambda(\overset{\circ}{M}) U_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) - u_\lambda(\overset{\circ}{M}) T_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) \right] ds_{\overset{\circ}{M}}$$

$$+ \oint_{\mathcal{L}_o} \left[ t_\lambda(\overset{\circ}{M}) U_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) - u_\lambda(\overset{\circ}{M}) T_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) \right] ds_{\overset{\circ}{M}}.$$

Az utóbbi képlet fényében az első SOMIGLIANA féle formula külső tartományra történő levezetése a jobboldalon álló első integrál határértékének meghatározását igényli.

**9.5. A külső tartományra vonatkozó Somigliana formulák módosítása.** A jelen szakasz célja a keresett határértéket adó

$$(9.13) \quad I_\kappa = \lim_{{}_eR \rightarrow \infty} \oint_{\mathcal{L}_R} \left[ t_\lambda(\overset{\circ}{M}) U_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) - u_\lambda(\overset{\circ}{M}) T_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) \right] ds_{\overset{\circ}{M}} =$$

$$= c_\kappa + \varepsilon_{3\rho\kappa} \xi_\rho \varphi + e_{\kappa\beta}(\infty) \xi_\beta = \tilde{u}_\kappa(Q)$$

képlet igazolása. Helyettesítsük, figyelembevéve az

$$x_\beta(\overset{\circ}{M}) = {}_eR n_\beta(\overset{\circ}{M})$$

összefüggést,  $t_{\lambda\rho}(\infty)n_\rho(\overset{\circ}{M})$ -t a  $t_\lambda(\overset{\circ}{M})$  helyére és  $c_\lambda + \varepsilon_{3\rho\lambda}x_\rho\varphi + e_{\kappa\beta}(\infty)x_\beta$ -t az  $u_\lambda(\overset{\circ}{M})$  helyére. Ily módon kapjuk, hogy

$$(9.14) \quad \begin{aligned} I_\kappa &= \overset{(1)}{I_\kappa} + \overset{(2)}{I_\kappa} + \overset{(3)}{I_\kappa} + \overset{(4)}{I_\kappa} = - \lim_{eR \rightarrow \infty} \oint_{\mathcal{L}_R} c_\lambda T_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) ds_{\overset{\circ}{M}} \\ &\quad - \lim_{eR \rightarrow \infty} \varepsilon_{3\rho\lambda} eR \varphi \oint_{\mathcal{L}_R} n_\rho(\overset{\circ}{M}) T_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) ds_{\overset{\circ}{M}} \\ &\quad + \lim_{eR \rightarrow \infty} t_{\lambda\rho}(\infty) \oint_{\mathcal{L}_R} n_\rho(\overset{\circ}{M}) U_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) ds_{\overset{\circ}{M}} \\ &\quad - \lim_{eR \rightarrow \infty} e_{\kappa\beta}(\infty) eR \oint_{\mathcal{L}_R} n_\beta(\overset{\circ}{M}) T_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) ds_{\overset{\circ}{M}}. \end{aligned}$$

1. MEGJEGYZÉS: Összhangban a (9.9) összefüggés kapcsán mondottakkal mind a feszültségek, mind pedig az alakváltozások állandók, következésképp függetlenek az  $s$  ívkoordinátától.

Mivel

$$\oint_{\mathcal{L}_R} T_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) ds_{\overset{\circ}{M}} = -\delta_{\kappa\lambda} \quad \text{és} \quad \varepsilon_{3\rho\lambda} \oint_{\mathcal{L}_R} r_\rho T_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) ds_{\overset{\circ}{M}} = 0$$

(a második integrál  $Q$  pontban működő egységnyi erő okozta és az  $\mathcal{L}_R$  körön ébredő feszültségek origóra vett nyomatéka), ezért írhatjuk, hogy

$$(9.15) \quad \begin{aligned} \overset{(1)}{I_\kappa} + \overset{(2)}{I_\kappa} &= c_\kappa - \lim_{eR \rightarrow \infty} \varepsilon_{3\rho\lambda} \varphi \oint_{\mathcal{L}_R} (\xi_\rho + r_\rho) T_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) ds_{\overset{\circ}{M}} \\ &= c_\kappa - \lim_{eR \rightarrow \infty} \left[ \varepsilon_{3\rho\lambda} \varphi \xi_\rho \oint_{\mathcal{L}_R} T_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) ds_{\overset{\circ}{M}} + \varepsilon_{3\rho\lambda} \varphi \oint_{\mathcal{L}_R} r_\rho T_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) ds_{\overset{\circ}{M}} \right] \\ &= c_\kappa + \varepsilon_{3\rho\kappa} \varphi \xi_\rho, \end{aligned}$$

ami világosan mutatja, hogy a (9.15) összefüggés merevtestszerű mozgást állít elő.

Első lépésben sorba kell fejteni az  $U_{\lambda\kappa}$  és  $T_{\lambda\kappa}$  alapg megoldásokat az  $eR$  sugár  $1, 0, -1, -2$  etc. kitevőjű hatványai szerint. A sorfejtés alapjául a duál rendszerben már alkalmazott (8.65a,...,d) összefüggések szolgálnak. Ezek felhasználásával kapjuk, hogy

$$(9.16) \quad \begin{aligned} \overset{(3)}{I_\kappa} &= \overset{(31)}{I_\kappa} + \overset{(32)}{I_\kappa} + \overset{(33)}{I_\kappa} + \overset{(34)}{I_\kappa} + \overset{(35)}{I_\kappa} = \\ &= \lim_{eR \rightarrow \infty} t_{\lambda\rho}(\infty) \oint_{\mathcal{L}_R} n_\rho C_1 (3 - 4\nu) \left[ \ln \frac{1}{eR} + C_2 \delta_{\lambda\kappa} \right] ds_{\overset{\circ}{M}} \\ &\quad + \lim_{eR \rightarrow \infty} t_{\lambda\rho}(\infty) \oint_{\mathcal{L}_R} n_\rho C_1 (3 - 4\nu) \frac{n_\alpha \xi_\alpha}{eR} ds_{\overset{\circ}{M}} \delta_{\lambda\kappa} \\ &\quad + \lim_{eR \rightarrow \infty} t_{\lambda\rho}(\infty) \oint_{\mathcal{L}_R} n_\rho C_1 n_\lambda n_\kappa ds_{\overset{\circ}{M}} \\ &\quad + \lim_{eR \rightarrow \infty} t_{\lambda\rho}(\infty) \oint_{\mathcal{L}_R} n_\rho C_1 2n_\lambda n_\kappa \frac{n_\alpha \xi_\alpha}{eR} ds_{\overset{\circ}{M}} \\ &\quad - \lim_{eR \rightarrow \infty} t_{\lambda\rho}(\infty) \oint_{\mathcal{L}_R} n_\rho C_1 \frac{1}{eR} (\xi_\lambda n_\kappa + n_\lambda \xi_\kappa) ds_{\overset{\circ}{M}} \end{aligned}$$

és

$$(4) \quad \begin{aligned} \overset{(41)}{I_\kappa} &= \overset{(42)}{I_\kappa} + \overset{(42)}{I_\kappa} = \\ &= \lim_{eR \rightarrow \infty} e_{\kappa\beta}(\infty) 2\mu(1 - 2\nu) C_1 \oint_{\mathcal{L}_R} n_\beta (n_\lambda \xi_\kappa + n_\kappa \xi_\lambda + n_\alpha \xi_\alpha \delta_{\lambda\kappa} + eR \delta_{\lambda\kappa}) \frac{ds_{\overset{\circ}{M}}}{eR} \\ &\quad + \lim_{eR \rightarrow \infty} e_{\kappa\beta}(\infty) 4\mu C_1 \oint_{\mathcal{L}_R} n_\beta \left( n_\lambda n_\kappa + 3n_\lambda n_\kappa \frac{n_\alpha \xi_\alpha}{eR} - \frac{1}{eR} (\xi_\lambda n_\kappa + n_\lambda \xi_\kappa) \right) ds_{\overset{\circ}{M}} \end{aligned}$$

ahol

$$C_1 = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \quad \text{és} \quad C_2 = \frac{7-8\nu}{2}.$$

Az  $I_\kappa^{(3)}$  és  $I_\kappa^{(4)}$  integrálok számítása során vegyük figyelembe – megismételve részben a 78. oldalon mondottakat –, hogy:

1. Az  $\mathcal{L}_R$  körön

$$(9.17) \quad n_a = (\sin \vartheta, \cos \vartheta)$$

a külső normális, ahol  $\vartheta$  a polárszög.

2. Az  $\mathcal{L}_R$  kör íveleme a

$$(9.18) \quad ds_M = {}_e R d\vartheta$$

alakban írható fel.

3. Ha  ${}_e R \rightarrow \infty$  akkor az  ${}_e R$  együtthatói mindig a következő alakban írhatók fel: egy a végtelenben állandó kifejezés az

$$\int_0^{2\pi} \sin^n \vartheta \cos^k \vartheta d\vartheta$$

integrállal szorozva, ahol természetes számok az  $n$  és  $k$  kitevők, de maga az integrál zérus értékű.

4. Ami az  ${}_e R$  nulla kitevőjű hatványait illeti hasonlóak az együtthatók, de tartalmazzák a  $\xi_\alpha$ -t és a vonatkozó trigonometrikus integrálok nem szükségképp zérusok.

5. A képletekben megjelenő trigonometrikus integrálokat az alábbiak részletezik:

$$(9.19) \quad \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta d\vartheta = \pi, \\ \int_0^{2\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta = \int_0^{2\pi} \cos^3 \vartheta d\vartheta = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin^4 \vartheta d\vartheta &= \int_0^{2\pi} \cos^4 \vartheta d\vartheta = \frac{3}{4}\pi, \\ \int_0^{2\pi} \sin^3 \vartheta \cos \vartheta d\vartheta &= \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \cos^3 \vartheta d\vartheta = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta &= \frac{1}{4}\pi. \end{aligned}$$

Az integrálások elvégzése után

$$(9.20) \quad \begin{aligned} I_\kappa &\stackrel{(31)}{=} \stackrel{(33)}{=} I_\kappa = 0, \\ I_\kappa &\stackrel{(32)}{=} C_1 \pi (3 - 4\nu) [t_{\kappa 1}(\infty) \xi_1 + t_{\kappa 2}(\infty) \xi_2], \\ I_1 &\stackrel{(34)}{=} C_1 \pi \frac{1}{2} [3t_{11}(\infty) \xi_1 + 2t_{12}(\infty) \xi_2 + t_{22}(\infty) \xi_2], \\ I_2 &\stackrel{(34)}{=} C_1 \pi \frac{1}{2} [t_{11}(\infty) \xi_2 + 2t_{12}(\infty) \xi_1 + 3t_{22}(\infty) \xi_1], \\ I_1 &\stackrel{(35)}{=} -C_1 \pi [2t_{11}(\infty) \xi_1 + t_{12}(\infty) \xi_2 + t_{22}(\infty) \xi_1], \\ I_2 &\stackrel{(35)}{=} -C_1 \pi [t_{11}(\infty) \xi_2 + t_{12}(\infty) \xi_1 + 2t_{22}(\infty) \xi_2], \end{aligned}$$

illetve

$$(9.21) \quad \begin{aligned} I_\kappa &\stackrel{(41)}{=} C_1 \pi 2\mu (1 - 2\nu) [e_{11}(\infty) + e_{22}(\infty)] \xi_\kappa, \\ I_1 &\stackrel{(42)}{=} -C_1 \pi 4\mu (1 - 2\nu) [2e_{11}(\infty) \xi_1 + e_{21}(\infty) \xi_2 + e_{21}(\infty) \xi_1], \\ I_2 &\stackrel{(42)}{=} -C_1 \pi 4\mu (1 - 2\nu) [e_{11}(\infty) \xi_2 + e_{21}(\infty) \xi_1 + 2e_{21}(\infty) \xi_2] \end{aligned}$$

az eredmény. Felhasználva a (9.20), (9.21) és (9.3) összefüggéseket következik, hogy

$$I_\kappa + I_\kappa = e_{\kappa\beta}(\infty)\xi_\beta.$$

Ha elhagyjuk a merevtestszerű mozgást, azaz zérus értékűnek tekintjük az  $I_\kappa + I_\kappa$  összeget, akkor kapjuk, hogy

$$I_\kappa = e_{\kappa\beta}(\infty)\xi_\beta,$$

amit felhasználva azonnal következik az első és módosított SOMIGLIANA formula a (9.12) és (9.13) összefüggésekből:

$$(9.22) \quad u_\kappa(Q) = e_{\kappa\beta}(\infty)\xi_\beta(Q) + \oint_{\mathcal{L}_o} \left[ t_\lambda(\overset{\circ}{M})U_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) - u_\lambda(\overset{\circ}{M})T_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) \right] ds_{\overset{\circ}{M}}.$$

$Q \in A_e$

Ha  $Q = \overset{\circ}{Q}$  az  $\mathcal{L}_o$  körön van, akkor semmi sem változik az  $\mathcal{L}_R$  körön vett integrál határértéke tekintetében. Következésképp

$$(9.23) \quad C_{\kappa\rho}(\overset{\circ}{Q})u_\rho(\overset{\circ}{Q}) = e_{\kappa\beta}(\infty)\xi_\beta(\overset{\circ}{Q}) + \oint_{\mathcal{L}_o} \left[ t_\lambda(\overset{\circ}{M})U_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, \overset{\circ}{Q}) - u_\lambda(\overset{\circ}{M})T_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, \overset{\circ}{Q}) \right] ds_{\overset{\circ}{M}},$$

$Q = \overset{\circ}{Q} \in \mathcal{L}_o$

ahol  $C_{\kappa\rho} = \delta_{\kappa\rho}/2$  ha sima a peremgörbe a  $\overset{\circ}{Q}$  pontban. Ez az egyenlet a direkt módszer módosított integrálegyenlete primál rendszerben (vagy a második SOMIGLIANA formula külső tartományra).

Ha a  $Q$  pont az  $\mathcal{L}_o$  peremgörbén belül helyezkedik el, azaz az  $A_i$  tartományban van, akkor nem nehéz az előzőek alapján belátni, hogy

$$(9.24) \quad 0 = e_{\kappa\beta}(\infty)\xi_\beta(Q) + \oint_{\mathcal{L}_o} \left[ t_\lambda(\overset{\circ}{M})U_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) - u_\lambda(\overset{\circ}{M})T_{\lambda\kappa}(\overset{\circ}{M}, Q) \right] ds_{\overset{\circ}{M}},$$

$Q = \overset{\circ}{Q} \in A_i$

ami a harmadik SOMIGLIANA formula külső tartományra. Munkaigényes formális számolással lehet megmutatni, hogy a  $Q$  pontban ébredő feszültségek a

$$(9.25) \quad t_{\kappa\sigma}(Q) = t_{\kappa\sigma}(\infty) + \oint_{\mathcal{L}_o} t_\lambda(\overset{\circ}{M})D_{\lambda\kappa\sigma}(\overset{\circ}{M}, Q) ds_{\overset{\circ}{M}} - \oint_{\mathcal{L}_o} u_\lambda(\overset{\circ}{M})S_{\lambda\kappa\sigma}(\overset{\circ}{M}, Q) ds_{\overset{\circ}{M}}$$

képletből adódnak, ahol – amint az jól ismert –, a  $D_{\lambda\kappa\sigma}(\overset{\circ}{M}, Q)$  és  $S_{kls}(\overset{\circ}{M}, Q)$  kétt pont mátrixokat a

$$(9.26) \quad D_{\lambda\kappa\sigma}(\overset{\circ}{M}, Q) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\frac{1}{R^2} \left[ (1-2\nu)(r_\lambda\delta_{\kappa\sigma} - \delta_{\lambda\sigma}r_\kappa - \delta_{\lambda\kappa}r_\sigma) - 2\frac{r_\lambda r_\kappa r_\sigma}{R^2} \right]$$

és

$$(9.27) \quad S_{\lambda\kappa\sigma}(\overset{\circ}{M}, Q) = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)}\frac{1}{R^2} \left\{ \frac{2}{R^2}n_\rho r_\rho [(1-2\nu)r_\lambda\delta_{\kappa\sigma} + \nu(\delta_{\lambda\kappa}r_\sigma + \delta_{\lambda\sigma}r_\kappa)] \right. \\ \left. - 8n_\rho r_\rho \frac{r_\lambda r_\kappa r_\sigma}{R^4} + \frac{2}{R^2}\nu(n_\kappa r_\lambda r_\sigma + n_\sigma r_\lambda r_\kappa) - (1-4\nu)n_\lambda\delta_{\kappa\sigma} \right. \\ \left. + \frac{1}{R^2}(1-2\nu)(2n_\lambda r_\kappa r_\sigma + n_\kappa\delta_{\lambda\sigma} + n_\sigma\delta_{\lambda\kappa}) \right\}$$

összefüggések szolgáltatják.

**9.6. Eredmények.** A klasszikus rugalmasságtan síkfeladataival kapcsolatos módosított (9.22), (9.23) és (9.24) SOMIGLIANA formulák levezetése külső tartományra, valamint a tartomány belső pontjaiban a feszültségeket adó képlet módosítása – v.ö.: (9.25) összefüggés – primál rendszerben. A kapott összefüggések révén a végtelenbeli konstans feszültségállapot is részévé válik a külső tartományra vonatkozó formalizmusnak.

A fenti eredményt a [66] cikk tartalmazza. Ez 100%-ban a szerző eredménye.



## 10. ÖSSZEFOGLALÁS

### 10.1. Az értekezésben megoldott tudományos feladatok előzményei, célkitűzések.

**10.1.1.** Elöljáróban a szóhasználat egyértelművé tétele érdekében röviden áttekintünk néhány – részben már eddig is említett – fogalmat.

Az értekezés gondolatmenete – külön említés nélkül – a duál rendszerre vonatkozik. Ahol primál rendszerről van szó ott arra az értekezés külön felhívja a figyelmet.

A síkbeli és térbeli tartomány lehet egyszeresen, vagy többszörösen összefüggő.

Azt fogjuk mondani, hogy *kompatibilis az alakváltozási tenzor* (az *alakváltozási tenzor és a forgási alakváltozási tenzor*), ha az alakváltozási tenzor(ok)ból integrálással olyan elmozdulásmező (elmozdulásmező és független forgásmező) képezhető, hogy abból (azokból) amely(ek)ből, felhasználva a primál rendszer kinematikai egyenleteit – amelyek az alakváltozási tenzort (az alakváltozási tenzort és a forgási alakváltozási tenzort) adják meg az elmozdulásmezővel (az elmozdulásmezővel és a független forgásmezővel) kifejezve – visszacapjuk az alakváltozási tenzort (az alakváltozási tenzort és a forgási alakváltozási tenzort).

Az alakváltozási tenzormezők kompatibilitását a kompatibilitási feltételek biztosítják.

A *virtuális munka elv*, bármely alakját tekintjük is (klasszikus esetben [29], mikropoláris esetben [60] ad áttekintést az duál alakjairól), mindig anyagegyenlettől független elv.

Ezzel szemben a *rugalmasságtan variációs elvei* esetén, mind a primál mind pedig a duál rendszerben – vagy a mellékfeltételeken keresztül vagy pedig közvetlenül a vonatkozó funkcionálban – megjelenik az anyagegyenlet.

*Szabad variációs feladatról* beszélünk, ha nincs mellékfelétel a vonatkozó funkcionál értelmezési tartományát alkotó mezőkre nézve. Ekkor az értelmezési tartományt alkotó valamennyi mező szabadon variálható.

A *klasszikus rugalmasságtan SOMIGLIANA képletei* [50] a potenciálmélet úgynevezett Green képleteinek rugalmasságtani általánosításai. Ha ismerjük a teljes peremen az elmozdulás- és feszültségmezőt, továbbá az úgynevezett elsőrendű és másodrendű alpmegoldásokat, akkor az első SOMIGLIANA képlet felhasználásával, integrálásokat végrehajtva számítható a test belsejében az elmozdulásmező. Mivel a peremfeltételek nem adják meg a teljes peremen az elmozdulás- és feszültségmezőt, további egyenlet szükséges ezek számítására. A második SOMIGLIANA képlet ugyanolyan szerkezetű mint az első SOMIGLIANA képlet, de a peremen adja meg az elmozdulásmezőt. Következésképp olyan integrálegyenletnek tekinthető – ez az úgynevezett *direkt módszer integrálegyenlete* – amelyben a feszültségvektor az ismeretlen abban a perempontban, ahol az elmozdulásmező adott, illetve megfordítva az elmozdulásvektor az ismeretlen abban a perempontban, ahol a feszültségvektor adott. Ennek az egyenletnek a megoldása nyitja meg az utat az első SOMIGLIANA képlet felhasználása előtt.

Az egyensúlyi feltételek, (egyensúlyi mezőegyenlet(ek), és a feszültségi peremfeltétel(ek)) feszültségfüggvényekkel történő teljesítésének és a kompatibilitási feltételek teljesítésének egyenletei – matematikai szerkezetüket tekintve – szoros rokonságban állnak egymással. A következő **10.1.2.** és **10.1.3.** szakasz az egyensúlyi feltételek feszültségfüggvényekkel történő teljesítésének problémakörét veszi szemügyre, majd a **10.1.4.** és **10.1.5.** szakasz a kompatibilitási feltételek teljesítésének problémáit taglalja.

A **10.1.6.** és **10.1.7.** szakaszok az előzőekhez kapcsolódva a rugalmasságtani síkfeladatok megoldásait tekinti át különös tekintettel a peremelem módszer alkalmazására.

Az előzmények áttekintése után mindegyik szakasz tartalmazza a vonatkozó megoldandó tudományos célkitűzést is.

**10.1.2.** A *klasszikus feladatok* keretei között MAXWELL [35] és MORERA [37] az egyensúlyi egyenlet két egymástól különböző megoldását adta meg. Ezek mindegyike három–három feszültségfüggvényt tartalmaz. BELTRAMI [5] észrevette, hogy az említett és más megoldások is megkaphatók az általa javasolt megoldásból, feltéve hogy a megoldásában álló szimmetrikus tenzor alkalmasan választott három–három elemének helyére zérust írunk. A BELTRAMI féle megoldás teljességét többek között ORNSTEIN [43], GÜNTHER [15] valamint DORN & SCHIELD [13] igazolta, a bizonyítások azonban csak egyetlen zárt felülettel határolt tartományra érvényesek. Ezt a körülményt RIEDER [45] vette észre, amikor megfigyelte, hogy több zárt felülettel

határolt tartományok esetén a BELTRAMI féle megoldás önegyensúlyi minden zárt felületen, következésképp nem lehet teljes. A BELTRAMI féle megoldás alkalmas, intuitív úton választott kiegészítésével egymástól függetlenül SCHAEFER [47] és GURTIN [16] talált egymástól formálisan is különböző, de teljes megoldásokat.

Az idézett cikkekben a feszültségfüggvények bevezetése intuitive történt. Ebben a tekintetben az előrelépés TONTI [80] és STIPPES [55] érdeme, akik a nem teljes BELTRAMI féle megoldást variációs elvből (TONTI), illetve a virtuális munka elvből (STIPPES) származtatták. Problémát jelentett azonban, hogy mellékfeltételként a hat SAINT VENANT féle kompatibilitási feltételt alkalmazták, holott ezek nem függetlenek egymástól [29]. Ebből adódik, hogy az így nyert megoldás, amely megegyezik formailag a BELTRAMI féle megoldással *hat feszültségfüggvényt foglal magába, holott BELTRAMI szerint három feszültségfüggvény elegendő tetszőleges feszültségi állapot megadásához, ha a tartományt egyetlen zárt felület határolja.*

Ez az ellentmondás az ún. SOUTHWELL féle paradoxon [51], [52] duális párja – az utóbbira nézve lásd a **10.1.4.** szakaszt. Érdekes azt is megemlíteni, hogy a matematikai átalakítások során mindkét szerző, azaz TONTI is és STIPPES is figyelmen kívül hagyta a test határfelületén megjelenő integrálokat és azt is feltételezték, hogy nincs térfogaton megoszló teher.

*Mikropoláris feladatokra* GÜNTHER [15] adta meg elsőként az egyensúlyi egyenletek feszültségfüggvényekkel történő megoldását. Nem vette azonban észre, hogy az általa talált megoldás önegyensúlyi minden zárt felületen, következésképp – hasonlóan a klasszikus esetre vonatkozó BELTRAMI féle megoldáshoz – nem teljes, ha a vizsgált tartományt több zárt felület határolja. A GÜNTHER féle megoldás kiegészítésével, egymástól függetlenül, SCHAEFER [48] és CARLSON [7] talált formailag különböző, valójában azonban egymással egyenértékű megoldásokat.

Nyitott kérdés maradt azonban a megoldás határozottságának kérdése – ezen a szükséges feszültségfüggvények számának kérdését értjük – és ezzel összefüggésben a SOUTHWELL paradoxon mikropoláris analogonjának megoldása. Lineáris esetben KOZÁK–SZEIDL [30] megmutatta, hogy *a kilenc–kilenc feszültségfüggvény helyett hat–hat feszültségfüggvény* elegendő tetszőleges feszültségi állapot leírásához.

Mivel a kompatibilitási mezőegyenletek száma kilenc–kilenc mikropoláris testre – ezeket NOWACKI [41] adta meg (lásd a **10.1.4.** szakaszt) –, de ezek nem függetlenek, a SOUTHWELL paradoxon duális párja úgy fogalmazható meg, hogy STIPPES gondolatmenetét [55] követve levezethetők ugyan az egyensúlyi egyenletek megoldásai feszültségfüggvényekkel a virtuális munka elvből, de ez a megoldás kilenc–kilenc feszültségfüggvényt tartalmaz hat–hat helyett. A klasszikus esethez hasonlóan arra is ügyelni kell, hogy a megoldás több zárt felülettel határolt testre is érvényes legyen.

Az egyensúlyi egyenletek megoldását tetszőleges terhelésre – egy zárt felülettel határolt egyszeresen összefüggő test esetén – *általános megoldásnak* nevezzük.

*Teljes az egyensúlyi egyenletek megoldása*, ha több zárt felülettel határolt egyszeresen összefüggő tartomány tetszőleges, azaz az egyes zárt felületek nem szükségképpen önegyensúlyi terhelései esetén is teljesül az egyensúlyi egyenletet.

**1. CÉLKITŰZÉS:** Az egyensúlyi egyenletek általános és teljes megoldásának származtatása több zárt felülettel határolt, egyszeresen összefüggő testre virtuális munka elv segítségével.

A mellékfeltételek helyes megválasztása biztosítsa, hogy

- (a) klasszikus esetben a megoldás *három független feszültségfüggvényt* tartalmaz és ezzel a SOUTHWELL paradoxon duális párját is megoldom,
- (b) mikropoláris esetben a megoldás *hat–hat feszültségfüggvényt* tartalmaz a és ezzel megoldódik a SOUTHWELL paradoxon duális párjának analogonja mikropoláris testre.
- (c) A megoldáshoz kötődő cél a térfogati terhelés helyes figyelembevétele, a vonatkozó integrálátalakítások tekintetében pedig a mechanikai jelentés tisztázása (különösen a felületi integrálok vonatkozásában).

**10.1.3.** *A klasszikus esetben* számos mű, többek között ABOVSZKI, ANDREJEV és DERUGA könyve [1] foglalkozik részletesen a rugalmasságtan variációs elveivel. Ha azonban azokra a variációs elvekkkel szorítkozunk, ahol az egyensúlyi egyenletek feszültségfüggvényekkel való megoldása

jelenik meg, mint a probléma egyik EULER egyenlete, akkor ebben tekintetben egyedinek tekinthető az említett könyv. TONTI és STIPPES már idézett cikkeihez képest van előrelépés a peremen megjelenő integrálok tekintetében, de az átalakítások részben hibásak és hiányoznak azok a tagok is a megoldásból, amelyek biztosítanák, hogy a megoldás több zárt felülettel határolt tartományon is érvényes legyen.

Közismert, hogy a kompatibilitási mezőegyenletek matematikai szerkezete és a **10.1.2.** szakaszban említett BELTRAMI féle megoldás matematikai szerkezete ugyanaz. Ezt a hasonlóságot mechanikailag *statikai-kinematikai analógiának*, matematikailag pedig *dualitásnak* szokás nevezni. Nyilvánvaló, hogy az alakváltozási peremfeltételek teljesülése biztosítja a kompatibilitást  $S_u$ -n. Felidézve, hogy a kompatibilitás és az egyensúly duál fogalmak felmerül a kérdés: hogyan kell megválasztani a feszültségfüggvényeket az  $S_t$ -én [ $S_u$  duális párján] ha azt akarjuk, hogy ne származzon belőlük feszültség. Más szavakkal: *van-e mód a statikai-kinematikai analógia peremfeltételekre vonatkozó kiterjesztésére, azaz dualitás megállapítására a peremfeltételek tekintetében?*

*Mikropoláris esetben* is több szerző foglalkozott. *A primál rendszer legfontosabb variációs elvei* NOWACKI [41] könyvében le lehetők fel. *A virtuális munka elv duál alakjait és a duál rendszer legfontosabb variációs elveit* KOZÁK-SZEIDL [31] és SZEIDL [59], [58] adta meg. Azok a variációs elvek azonban, ahol az egyensúlyi egyenletek általános és teljes, *hat-hat feszültségfüggvényt* tartalmazó megoldása jelenik meg mint EULER egyenlet, még hiányoznak.

A mikropoláris rugalmasságtanban azonos szerkezetűek a kompatibilitási egyenletek és az egyensúlyi egyenletek SCHAEFER féle megoldásának homogén részei: az {előbbi}[utóbbi] megkapható az (utóbbiból)[előbbiből], ha abban  $(\kappa, \gamma)$  [ $\mathcal{H}, \mathcal{F}$ ] helyett  $(\mathcal{H}, \mathcal{F}-t)[\kappa, \gamma-t]$  írunk. Felmerül a kérdés, ugyanúgy mint a klasszikus esetben, hogy *van-e mód ennek a statikai-kinematikai analógiának, dualitásnak, a peremfelületre történő kiterjesztésére.*

**2. CÉLKITŰZÉS:** A fentiekben részletezett gondolatok (az egyensúlyi egyenletek általános és teljes megoldását adó variációs elvek, integrálatalakítások a peremen, statikai-kinematikai analógia) jegyében

- (a) klasszikus esetben a vonatkozó variációs elvek módosítása és kiegészítése
- (b) mikropoláris esetben a vonatkozó variációs elvek megalkotása, továbbá
- (c) a statikai-kinematikai analógia kiterjesztése mindkét esetben a peremfeltételekre.

**10.1.4.** *A klasszikus esetben* SOUTHWELL [51], [52] volt az első, aki a kompatibilitási feltételeket a teljes kiegészítő energia maximum elvből<sup>13</sup>, mint variációs elvből származtatta. Ugyanakkor arra is rámutatott, hogyha három feszültségfüggvényt alkalmaz – a MAXWELL [35] és MORERA [37] féle megoldásokat használta fel – akkor csak három kompatibilitási differenciálegyenlet következik a hat SAINT VENANT féle kompatibilitási egyenletek közül a stacionaritási feltételből. Mivel egy zárt felülettel határolt tartományon tetszőleges feszültségi állapot megadható alkalmasan választott három feszültségfüggvénnyel – több zárt felülettel határolt tartomány és/vagy zérustól különböző térfogati terhelés esetén a feszültségfüggvénnyel nyerhető megoldást ki kell egészíteni az egyensúlyi egyenletek egy partikuláris megoldásával – SOUTHWELL ellentmondásra jutott, hiszen az alakváltozásmezők kompatibilitásának elégséges feltétele a hat SAINT VENANT féle kompatibilitási egyenlet fennállása. A paradoxont, amelyre jutott, utána nevezték el SOUTHWELL paradoxonnak. SOUTHWELL idézett cikkei után a következő kérdések maradtak megoldatlanok: Elegendő-e a kompatibilitás fennállásához három kompatibilitási egyenlet fennállása. Ha igen, melyik három. Ha igen, vannak-e további feltételek a kompatibilitás fennállásához.

A paradoxon részletes leírása, ez a feszültségfüggvények megválasztásának összes lehetséges esetét felöleli, RIEDER tanítványának STICKFORTHnak a nevéhez fűződik [54], aki WASHIZU egy részeredményének [82] általánosításával kimutatta, hogy a kompatibilis alakváltozásmezők elegendő bizonyos peremfeltételeknek. Ezeknek a feltételeknek később KOZÁK a kompatibilitási peremfeltétel nevet adta, és kimutatta, háromféleképpen is, tiszta matematikai úton [27], a kiegészítő energia minimum elv felhasználásával [26] és a virtuális munka elv duál alakjának felhasználásával [28], hogy az alakváltozásmezők kompatibilitásának szükséges és elégséges feltétele

<sup>13</sup>Gyakran nevezik a teljes kiegészítő energia minimum elvnek

három alkalmasan választott kompatibilitási differenciálegyenlet és a kompatibilitási peremfeltételek fennállása. Az utóbbi két tanulmány egyedüli abban a tekintetben, hogy a vizsgálatok vegyes peremértékfeladatra vonatkoznak.

Az eddig idézett tanulmányok mindegyike *egyszeresen összefüggő* tartományt tételez fel.

Többszörösen összefüggő tartomány, síkfeladatok és feszültségi peremfeltételek feltételezése mellett PRAGER [44] kimutatta, hogy a MITCHELL féle feltételek [36], [18], vagy ami ugyanaz a kompatibilitás makró feltételei, természetes peremfeltételek, amelyek a CASTIGLIANO elvből következnek<sup>14</sup>. PRAGER eredményét egymástól függetlenül HU HAICHANG [19] és SZEIDL–VAN GEMERT [78] általánosította vegyes peremértékfeladatokra (az elsőbbség HU HAICHANG–é). Ami a háromméretű feladatokat illeti, feszültségi peremfeltételeket és többszörösen összefüggő tartományt tételezve fel MORIGUTI [38] és STICKFORTH [53] dolgozatait kell említeni, megjegyezve, hogy STICKFORTH nem ismerte MORIGUTI idézett cikkét. Az utóbbi két dolgozat sem adott azonban megoldást a SOUTHWELL paradoxonra és a vegyes peremértékfeladatok esetét szintén figyelmen kívül hagyták.

A szóhasználat egyértelműsége kedvéért az alábbiakban állapotunk meg. A *kompatibilitás makró feltételein* a többszörösen összefüggő tartományon szükséges azon feltételek összességét értjük, amelyeknek a kompatibilitási (differenciál)egyenleteken és peremfeltételeken túlmenően – ezeknek mind egyszeresen, mind pedig többszörösen összefüggő tartományon fenn kell állniuk – teljesülniök kell. A kompatibilitás makró feltételeit két csoportba soroljuk attól függően, hogy milyenek a peremfeltételek annak a zárt felületi görbének a pontjaiban, amely mentén ezeket a feltételeket tekintjük. Ha a görbe minden pontjában feszültség előírt, akkor a vonatkozó makró feltétel *nagybani kompatibilitási feltétel*. Ha a görbének van legalább egy olyan íve, amelynek mentén elmozdulások az adottak, akkor a vonatkozó feltételt (feltételeket ha több ilyen ív létezik) *kiegészítő kompatibilitási feltételeknek* nevezzük.

Kitűnik a fenti irodalmi áttekintésből, hogy sem MORIGUTI [38], sem pedig STICKFORTH [53] nem adta meg a kompatibilitás kiegészítő feltételeit.

*Mikropoláris testre* KOZÁK–SZEIDL [30] majd SZEIDL [57] vizsgálta a tetszőleges feszültségi állapot előállításához szükséges feszültségfüggvények számának kérdését, valamint a független, szükséges és elégséges kompatibilitási feltételek kérdését a klasszikus esettel azonos feltételezések mellett, vagyis egyszeresen összefüggő térbeli testre. Az [71] előadás és az [61] tanulmány többszörösen összefüggő tartomány és feszültségi peremfeltételek mellett a duál virtuális munka elv, valamint a teljes kiegészítő energia maximum elv segítségével vizsgálta a kompatibilitási feltételek kérdését és kimutatták, hogy az idézett elvek mindegyike biztosítja a *nagybani kompatibilitási feltételek* teljesülését.

A szerző ismeretei szerint a *kiegészítő kompatibilitási feltételek* kérdésével a vonatkozó szakirodalom mikropoláris esetben sem foglalkozott.

**3. CÉLKITŰZÉS:** Háromméretű problémák és vegyes peremértékfeladatok feltételezése mellett klasszikus és mikropoláris esetben is

- (a) geometriai megfontolásokból levezetni a kompatibilitás kiegészítő feltételeit, továbbá
- (b) igazolni formális számításokkal, hogy a kompatibilitás vegyes peremértékfeladatok és háromméretű test esetére vonatkozó kiegészítő feltételei a teljes kiegészítő energia maximuma elvből következő természetes peremfeltételek.

**10.1.5.** SZEIDL–KOZÁK [31], majd SZEIDL [59] foglalkozott először a mikropoláris rugalmasságtan ún. *első síkfeladatának* duál rendszerével, illetve az egyenértékű variációs elvekkel. Kimutatták, hogy az alakváltozásmezők kinematikailag lehetséges voltának szükséges és elégséges feltételei, közöttük a többszörösen összefüggő tartományon érvényes makró kompatibilitási feltételek (jelen esetben a *nagybani kompatibilitási feltételek*) mind következnek a teljes kiegészítő energia maximuma elvből, ha a peremfeltételek ugyanolyan természetűek minden egyes zárt kontúron, azaz vagy az elmozdulások, vagy pedig a feszültségek vannak előírva.

Ha az egyes kontúrok páros számú ívre vannak felosztva, és az ívek mentén vagy az elmozdulás vagy pedig a feszültség az előírt, akkor tisztázatlan a *kiegészítő egyértékűségi feltételek* kérdése, bár valószínűsíthető, hogy ezek a feltételek is következnek a kiegészítő energia maximuma elvből.

<sup>14</sup>A szóhasználat PRAGER szóhasználatára, valójában a teljes kiegészítő energia minimum elvről van szó.

A klasszikus síkfeladatok esetére ezt a kérdést, egymástól függetlenül, HU–HAICHANG [19] és SZEIDL–VAN GEMERT [78] vizsgálta (az elsőbbség HU–HAICHANGÉ), akik megmutatták, hogy valamennyi kiegészítő feltétel következik a teljes kiegészítő energia maximuma elvből.

További probléma, hogy nem ismeretesek az alakváltozási peremfeltételek, ha a kontúr egy–egy ívén érintőirányú elmozdulás, normálirányú feszültség, vagy érintőirányú feszültség, normálirányú elmozdulás, illetve forgás vagy nyomatéki feszültség az előírt az összes lehetséges eset alapul vételével.

**4. CÉLKITŰZÉS:** A kompatibilitás kiegészítő feltételeinek levezetése a mikropoláris rugalmasságtan első síkfeladatára, ha egy kontúr páros számú ívre osztott és az íveken felváltva, vagy a feszültség, vagy az elmozdulás az előírt, valamint az ismeretlen alakváltozási peremfeltételek levezetése.

**10.1.6.** Bár számos tanulmány jelent meg klasszikus esetben a síkrugalmasságtani feladatok primál rendszerbeni megoldásáról peremintegrálegyenletekkel (peremelem módszerrel) – lásd pl. [46], [6], [83] vagy [21] – a pályázó ismeretei szerint alig található olyan cikk a síkrugalmasságtan szakirodalmában, amely a *duál rendszer* egyenleteit veszi alapul, azaz valós feszültségfüggvényeket tekint alapváltozónak. Kivételt jelent JASWON, MATI és SYMM cikke [23]– érdemes ehelyütt JASWON és SYMM könnyebben hozzáférhető könyvére is hivatkozni [24] – amelyben az ismeretlen biharmonikus függvényt (valójában másodrendű feszültségfüggvényt) két ismeretlennek tekintett harmonikus függvény segítségével, egyszerű réteg potenciáljaként adták meg a szerzők; az ismeretlen kontúrmenti forrassűrűség meghatározására pedig alkalmas peremintegrálegyenleteket vezettek le.

Elsőrendű feszültségfüggvények alkalmazását síkbeli és térbeli feladatokra FRAEIJES DE VEU-BEKE kezdeményezte [11], [12] egy új, a teljes kiegészítő energia minimumának elvén alapuló végeselemes eljárás kapcsán, mivel a sima elsőrendű feszültségfüggvények biztosítják a szakaszokként folytonos felületi terhelés meglétét és így módon lehetővé vált izoparametrikus elemeket alkalmazni elsőrendű feszültségfüggvényekre.

Ha elsőrendű feszültségfüggvényeket alkalmazunk síkbeli feladatok megoldására, akkor a feszültségek meghatározása a feszültségfüggvények első deriváltjainak számítását igényli, ellentétben az AIRY féle másodrendű feszültségfüggvénnyel [2], ennek ismeretében ui. második deriváltak adják a feszültségeket. Az elsőrendű feszültségfüggvény idézett tulajdonsága vonzóvá teszi ezeket a függvényeket a peremelemes alkalmazások számára, annak ellenére, hogy a nyomatéki egyensúly fenntartása egy további egyenletet igényel. Megjegyezzük, hogy az AIRY féle feszültségfüggvény alkalmazásának rendkívül bő irodalma van. A teljesség igénye nélkül emeljük ki ehelyütt MUSZKHELISVILI és iskolája eredményeit [39]. MUSZKHELISVILI felismerte, hogy az AIRY féle feszültségfüggvényre vonatkozó megoldás két reguláris komplex függvény segítségével adható meg. Mivel ez a megoldás teljesíti a vonatkozó mezőegyenletet – a kompatibilitási egyenletet Airy féle feszültségfüggvénnyel – egy adott peremértékfeladat megoldásához csak a peremfeltételek kielégítését kell biztosítani.

Az *elsőrendű feszültségfüggvények duál rendszerbeni* síkbeli rugalmasságtani feladatokban történő alkalmazása kapcsán számos kérdés merül fel. Tisztázni kell az elmozdulásmező egyértékűségének szükséges és elégséges feltételeit, különös tekintettel a vegyes peremértékfeladatokra és a többszörösen összefüggő tartomány esetére. Meg kell keresni az elsőrendű feszültségfüggvényekre vonatkozó alapmegoldást (az *duál* alapegyenletek megoldását, ha a Dirac függvény az inhomogenitást okozó tag ezekben egyenletekben). Az alapmegoldás ismeretében mód nyílik a SOMIGLIANA féle identitás [50] *duál rendszerbeni* analogonjának felállítására és így módon az úgynevezett direkt<sup>15</sup> módszer integrálegyenletei is adódnak. Végezetül számítógépi programot is érdemes kidolgozni a vonatkozó peremintegrálegyenlet numerikus megoldására.

A fentebb megfogalmazott kérdésekkel kapcsolatos az

**5. CÉLKITŰZÉS:**

A síkbeli rugalmasságtani feladatok körében:

<sup>15</sup>Direkt módszerről beszélünk, ha a vonatkozó integrálegyenletekben a test peremén vett egyes fizikai mennyiségek az ismeretlenek.

- (a) az elmozdulásmező egyértékűségéhez szükséges feltételek meghatározása a vegyes peremértékfeladatok egy osztálya és többszörösen összefüggő tartomány esetén az elsőrendű feszültségfüggvényeket és a merevtestszerű forgást tekintve alapváltozóknak (olyan ismeretleneknek, melyekkel az összes többi ismeretlen kifejezhető)
- (b) az elsőrendű feszültségfüggvényekkel kapcsolatos első és másodrendű alapegyszámok előállítására,
- (c) a SOMIGLIANA identitás *duál rendszerbeni analogonjának* levezetése és ezzel a direkt módszer integrálegyenletének felállítására mind belső, mind pedig külső tartományra, továbbá
- (d) számítási algoritmus kidolgozása, a megoldandó lineáris egyenletrendszer tulajdonságainak vizsgálata, majd számítógépes program kifejlesztése és számítások végzése másodrendű izoparametrikus peremelemek felhasználásával.

**10.1.7.** Bár igen nagy azon cikkek száma, melyek a *peremelem módszer síkrugalmasságtani alkalmazásaival* foglalkoznak – a teljesség igénye nélkül emeljük ki ehelyütt a [84, 21, 49, 10, 9] cikkeket, valamint a [3, 20] könyveket (az utóbbiakban további hivatkozások is találhatóak) – a feladat külső tartományokra történő megfogalmazásának mindenütt az a hátránya, hogy nem írhatóak elő feszültségek a végtelen távoli pontban.

Ami az okokat illeti ismét hivatkozunk a [10] tanulmányra, amelyben feltevést fogalmaznak meg az elmozdulásmező végtelenbeli viselkedésére vonatkozóan. A megfogalmazott feltevés mellett lehetővé válik a BETTI formula felállítása valamint a DIRICHLET és NEUMANN típusú peremértékfeladatok unicitásának és egzisztenciájának igazolása. A feltevés ugyanakkor kizárja az elméletből azokat a feladatokat amelyekre nézve az elmozdulásmezőhöz konstans végtelenbeli alakváltozásmező, következésképp konstans végtelenbeli feszültségállapot tartozik.

Szeretnénk hangsúlyozni, hogy ezek a feladatok is megoldhatók a szuperpozíció elv ügyes alkalmazásával.

Ennek ellenére, felmerül az a kérdés az értekezés 8. Fejezetében foglalt eredmények fényében – eszerint a végtelenbeli feszültségi állapot duál rendszerben a formalizmus része –, hogy a végtelenbeli konstans feszültségállapot leírásához szükséges tagok primál rendszerben is beépíthetők-e a formalizmusba. Ezzel a kérdéssel függ össze a

- 6. CÉLKITŰZÉS:** amely annak megmutatása, hogy az elmozdulásmező végtelenbeli viselkedésére kirótt alkalmas feltevés mellett *primál rendszerben* is beépíthető a végtelenbeli feszültségi állapot a külső tartományra vonatkozó formalizmusba.

**10.2. Az elvégzett vizsgálatok és a kutatás módszere.** A fentiekben megfogalmazott célkitűzések, mint kutatási feladatok megoldása során egyrészt elméleti ismeretek másrészt numerikus eljárások alkalmazására van szükség. Az elméleti vizsgálatok elsősorban a kontinuummechanika és a rugalmasságtan ismeretét tételezték fel, de fel kellett emellett használni a matematikai analízis, az indexes tenzorkalkulus és a variációszámítás módszereit és eszközeit is.

A síkrugalmasságtan duál rendszerében kifejlesztett peremelem módszer a numerikus megoldásokban alkalmazható. Az eljárás megbízhatóságát néhány számpélda illusztrálja. A numerikus szimuláció, tekintettel az erősen szinguláris integrálok pontos kiszámításának nehézségeire, az algoritmus alapos átgondolását igényelte. A kifejlesztett programot Fortran 90 nyelven írtam, az operációs rendszer WinXX típusú (Win98 és Windows NT) volt.

### 10.3. Eredmények.

**1. Tézis:** Megmutattam, hogy [klasszikus] (mikropoláris) esetben levezethető az egyensúlyi egyenletek általános és teljes megoldása – azaz a több zárt felülettel határolt testre érvényes [SCHAEFER féle megoldás és a GURTIN féle megoldás is] (SCHAEFER féle megoldás) – a virtuális munka elv általános primál alakjából, ha ismeretesek az alakváltozásmezők kompatibilitásával kapcsolatos feltételek közöttük a  $V$  térfogati tartományra vonatkozó [három] (hat-hat) *független* kompatibilitási egyenlet és az alakváltozási peremfeltételek.

A tézishez kapcsolódó részeredmények:

- (a) A mellékfeltételek [három](hat-hat) független mezőegyenletet tartalmaznak következésképp tetszőleges feszültségi állapot megadható [három](hat-hat) feszültségfüggvény segítségével. Ezzel megoldást nyert [a SOUTHWELL paradoxon duális párja](a SOUTHWELL paradoxon duális párja mikropoláris esetre). A gondolatmenet egyik eredménye [FINZI intuitív módon elért eredményének, miszerint a  $H_{kl}$  feszültségfüggvény tenzor szabály szerint kiválasztott három eleme – ezek indexeit  $AB$  jelöli – zérusnak választható](KOZÁK–SZEIDL intuitív módon elért eredményének, miszerint a  $H_{kl}$  és  $F_y^b$  feszültségfüggvény tenzorok szabály szerint kiválasztott három-három eleme – ezek indexeit  $AB$  és  $\frac{L}{K}$  jelöli – zérusnak választható), független igazolása. Ugyancsak a gondolatmenet eredménye [KOZÁK egyik eredményének, miszerint a nem zérus elemek indexei pedig ugyanazok kell, hogy legyenek mint a független kompatibilitási egyenletek  $RS$  indexei] (KOZÁK–SZEIDL egyik eredményének, miszerint a nem zérus elemek indexei pedig ugyanazok kell, hogy legyenek mint a független kompatibilitási egyenletek  $XY$  és  $S^T$  indexei), független igazolása.
- (b) Az  $S$  felületen vett integrálok hosszadalmas és nehéz átalakításainak megadása formálisan is igazolta azt a természetes követelményt, hogy a feszültségeket ugyanúgy kell számítani mind a  $V$ -n, mind pedig az  $S$ -n.
- (c) A gondolatmenetet módszertani jelentőségű mivel mind klasszikus, mind pedig mikropoláris esetben eredményesen alkalmazhatónak bizonyult.

**2. Tézis:** [Klasszikus esetben módosítottam és kiegészítettem] (Mikropoláris esetben megkonstruáltam) az egyensúlyi egyenletek általános és teljes megoldását adó *szabad variációs elv funkcionálját*, és ennek speciális eseteként megadtam *a módosított teljes potenciális energia funkcionált* is. A gondolatmenet eredményeként megtaláltam a statikai kinematikai analógia hiányzó, a vizsgálat tárgyát képező test határfelületére vonatkozó egyenleteit is.

A tézishez kapcsolódó részeredmények:

- (a) A szabad variációs feladat funkcionáljai nem tartalmaznak semmiféle ellentmondást (paradoxont) a kompatibilitási egyenletek és a feszültségfüggvények száma tekintetében, mindkettő [három] (*hat*), nem pedig [*hat*, mint ABOVSZKIJ, ANDREJEV és DERUGA [1]] (*kilenc*, mint NOWACZKY [41]) könyvében.
- (b) A szabad variációs feladat funkcionáljai megengedik a vegyes peremfeltételek figyelembevételét, hiszen a peremfelület – a teljes  $S$  felület – az  $S_u$  és  $S_t$  jelű részekre bontott, és ezeken különböző típusú peremfeltételek írhatók elő. Ezt az teszi lehetővé, hogy a funkcionálok értelmezési tartománya az  $S_t$ -n értelmezett feszültségfüggvényeket is tartalmaz.
- (c) Kiadódhatnak az elmozdulásmező folytonosságához szükséges illesztési feltételek az  $S_u$  és  $S_t$  felületrészek közös  $g$  határgörbéjén.
- (d) A módosított teljes potenciális energia funkcionálok stacionaritási feltételéből is kiadódhatnak, mint EULER egyenletek az egyensúlyi egyenletek általános és teljes SCHAEFER által talált megoldásai [48, 47]. A megoldás [csak három] (csak hat) feszültségfüggvényt tartalmaz ha a mellékfeltételeket alkalmasan választjuk meg.
- (e) A statikai-kinematikai analógia hiányzó, és a test határfelületére vonatkozó egyenletei megőrzik a mezőegyenletek kapcsán megfigyelt dualitást:

[ Klasszikus esetben az  $S_t$ -n érvényes peremfeltételek az  $S_u$ -ra vonatkozó két alakváltozási peremfeltétel, valamint egy kiegészítő feltétel *duális párjai* mivel [az előbbi] (az utóbbi) feltételek azonnal megkaphatók [az utóbbi] (az előbbi) feltételekből, ha rendre [ $e$ -t és  $u$ -t írunk  $H$  és  $w$  helyett] ( $H$ -t és  $w$ -t írunk  $e$  és  $u$  helyett). Mivel az említett kiegészítő feltétel nem független az alakváltozási peremfeltételektől duális párja az  $S_t$  szintén nem független az első két peremfeltételtől. ]

( Mikropoláris esetben az  $S_t$ -n érvényes két peremfeltétel az  $S_u$ -ra vonatkozó két alakváltozási peremfeltétel *duális párja* mivel [az előbbi] (az utóbbi) feltételek azonnal megkaphatók [az utóbbi] (az előbbi) feltételekből, ha rendre [ $\gamma$ ,  $\kappa$ -t és  $u$ ,  $\varphi$ -t írunk a  $H$ ,  $F$  különbségek és  $w$ ,  $r$  helyett] ( $H$ ,  $F$  különbségeket és  $w$ ,  $r$ -t írunk  $\gamma$ ,  $\kappa$  és  $u$ ,  $\varphi$  helyett). )

**3. Tézis:** [Klasszikus] (Mikropoláris) esetben megmutattam, hogy a *teljes kiegészítő energia maximum elv* többszörösen összefüggő térbeli tartomány és a vegyes peremértékfeladatok egy

tág osztálya esetén biztosítja az ún. *kiegészítő egyértékűségi feltételek* fennállását. Bár a vizsgálatokat csak egy háromszorosán összefüggő térbeli tartományra végeztem el, ezt a tartományt az értekezés 5.1. ábrája szemlélteti, a gondolatmenet lépéseiben ez a körülmény nem játszott olyan mértékű szerepet, hogy ne lehetne azt megismételni négy, vagy többszörösen összefüggő térbeli tartomány és azonos jellegű vegyes peremértékfeladatok esetén.

A kiegészítő egyértékűségi feltételeket geometriai megfontolásokból is lezártam. Mivel ezekben a megfontolásokban nem jelenik meg az anyagegyenlet, a kiegészítő egyértékűségi feltételek fizikailag nemlineáris, de geometriailag lineáris feladatokra is érvényesek.

**4. Tézis.** Megmutattam a mikropoláris rugalmasságtan első síkfeladata esetén is, hogy a kompatibilitás úgynevezett kiegészítő feltételei a *kiegészítő energia maximum* elvből következő EULER egyenletek között szerepelnek, ha többszörösen összefüggő a tartomány. Ezeket a feltételeket kell felhasználni a feszültségi peremfeltételek integrálása során kapott integrációs állandók számítására.

Az egyszerűen összefüggő tartományon tekintett öt vegyes típusú peremértékfeladatra is *meghatároztuk* az alakváltozási peremfeltételeket, valamint a kompatibilitás kiegészítő feltételeit.<sup>16</sup>

**5. Tézis:** A klasszikus rugalmasságtan síkfeladatai esetén *duál rendszerben* meghatároztam az elmozdulásmező egyértékűségének feltételeit többszörösen összefüggő tartomány esetén a vegyes peremértékfeladatok azon osztályára, amikor az egyes peremgörbék (kontúrgörbék) páros számú ívre vannak felosztva és az íveken váltakozva feszültség, illetve elmozdulás az előírt. Meghatároztam továbbá az elsőrendű feszültségfüggvényekkel és a merevtestszerű forgással kapcsolatos alapmegoldást és ennek birtokában a feszültségi tenzorra, valamint az alakváltozási tenzorra vonatkozó alapmegoldásokat, továbbá az úgynevezett másodrendű alapmegoldást.

Az alapmegoldások ismerete tette lehetővé az alábbi feladatok megoldását:

- Az  $[A_i$  belső] ( $A_e$  külső) tartománnyal kapcsolatos duál SOMIGLIANA képletek, valamint a tartományok belső pontjaiban a feszültségeket megadó formulák levezetése. Ezek közül a második duál SOMIGLIANA képletek, a direkt módszer integrálegyenletei.
- Algoritmus és számító program kidolgozását a belső és a külső tartományra vonatkozó peremértékfeladatok megoldására kvadratikus peremelemek felhasználásával, továbbá annak igazolását, hogy a megoldandó lineáris egyenletrendszerben szereplő rendszermátrix formuláival elkerülhető az erősen szinguláris integrálok valamilyen integrálformula alapján történő számítása.

**6. Tézis:** Levezettem a klasszikus rugalmasságtan síkfeladataira *primál rendszerben* a külső tartományra vonatkozó és a végtelen távoli pont feszültségállapotát tükröző, plusz taggal módosított SOMIGLIANA formulákat és meghatároztam hogyan módosítja a tartomány belső pontjaiban a feszültségeket adó képletet a végtelen távoli pont feszültségállapota. A kapott összefüggések révén a végtelenbeli konstans feszültségállapot is részévé válik a külső tartományra vonatkozó formalizmusnak.

**10.4. Az eredmények hasznosításának lehetőségei.** A **10.3.** Eredmények című szakaszban ismertetett eredmények egy része

- a kontinuummechanika és rugalmasságtan terén elért új elvi eredmény (ehelyütt az egyenlősúlyi egyenletek általános és teljes megoldásának származtatásával kapcsolatos eredményekre – 1. Tézis –, a duál rendszerben megkonstruált variációs elvekre és a statikai-kinematikai analógiának a test határfelületére történő kiterjesztésére – 2. Tézis –, illetve a kiegészítő egyértékűségi feltételek variációs elvből illetve geometriai megfontolásokból történő levezetésére, valamint egyes hiányzó alakváltozási peremfeltételek előállítására – 3. és 4. Tézisek – gondol a szerző),

másik része pedig

<sup>16</sup>Az ebben a mondatban foglalt eredmény közös felerészben Némethné Iván Ildikóval.



- a peremelem módszerhez kötődő eredmény (ehelyütt a peremelem módszer duál rendszerbeni síkfeladatokra történő előállítására – 5. Tézis – és a primál rendszerben már meglévő egyenletek külső tartomány esetére vonatkozó módosítására – 6. Tézis – utal a szerző).

Az eredmények hasznosítása, figyelembe véve, hogy azok jelentős része elvi jellegű, elsősorban a kontinuummechanika és a peremelem módszer területén végzett kutató munkában, valamint az oktatásban illetve a továbbképzésben várható.

Hasznosítási lehetőség kínálkozik többek között

- az egyensúlyi egyenletek általános és teljes megoldása leszámaztatását illetően speciális feladatok (pl. héjakkal kapcsolatos feladatok) esetén, hiszen az értekezés vonatkozó eredményei módszertani jellegűek is,
- végeeselemes programok kifejlesztésében, ha az algoritmus a teljes kiegészítő energia stacionaritási voltán alapul, hiszen választ kaptunk arra a kérdésre, hogy nem kell előre figyelembe venni az egyértékűség többszörösen összefüggő tartományra vonatkozó pótlólagos feltételeit,

és végül

- a kereskedelmi célú peremelemes programok fejlesztésében, illetve az ún. peremkontúr módszer duál rendszerbeni kidolgozásában. Az utóbbi feladat megoldását illetően utalunk a következő szakaszban idézett legelső publikációra.

## 10.5. Az értekezés témakörében készült legfontosabb publikációk felsorolása.

### Könyvrészlet idegen nyelven:

1. Szeidl, Gy.–Szirbik, S.: *Boundary contour method for plane problems in a dual formulation with quadratic shape functions*, Chapter 14 in *New Developments in the Boundary Element Method* edited by V. Kompis, Springer-Verlag, 2002, pp. 209–232.

### Szakkikk idegen nyelven:

2. Kozák, I.–Szeidl, Gy.: *On the field equations and boundary conditions of dual systems in micropolar theory of elasticity*, *Bulletins for Applied Mathematics*, XLIII, (1986), 212–226.
3. Szeidl, Gy.: *On Derivation of Stress Functions in Micropolar Theory of Elasticity*, *Acta Techn. Hung.*, 104(1–3) (1991–92), 277–296.
4. Szeidl, Gy.–I. van Gemert: *On Mitchell's Conditions for Plane Problems in Elastostatics*, *Acta Mechanica*, 93(1–3), (1992), 99–118.
5. Szeidl, Gy.–Kozák, I.: *Complete Solution for Stresses in Terms of Stress Functions, Part I, Derivation from the Principle of Virtual Work*, *Technische Mechanik*, 16(2), (1996), 147–168.
6. Szeidl, Gy.–Kozák, I.: *Complete Solution for Stresses in Terms of Stress Functions, Part II, Modification of Variational Principles*, *Technische Mechanik*, 16(3), (1996), 197–208.
7. Szeidl, Gy.–Iván, I.: *Macro Conditions of Compatibility and Strain Boundary Conditions for Some Mixed Plane Boundary Value Problems of Micropolar Elastostatics*, *Publications of the University of Miskolc, Series D, Natural Sciences, Mathematics*, 36(2), (1996), 35–45.
8. Szeidl, Gy.: *Compatibility Conditions for Mixed Boundary Value Problems in Micropolar Theory of Elasticity*, *Publications of the University of Miskolc, Series D, Natural Sciences, Mathematics*, 37(3) (1997), 105–116.
9. Szeidl, Gy.: *On Compatibility Conditions for Mixed Boundary Value Problems*, *Technische Mechanik*, 17(3), (1997), 245–262.
10. Szeidl, Gy.: *Boundary Integral Equations for Plane Problems – Remark to the Formulation for Exterior Regions*, *Publications of the University of Miskolc, Series D, Natural Sciences, Mathematics*, 40(1) (1999), 79–88.
11. Szeidl, Gy.: *Kinematic Admissibility of Strains for Same Mixed Boundary Value Problems in the Dual System of Micropolar Theory of Elasticity*, *Journal of Computational and Applied Mechanics*, 1(2), (2000), 191–203.

12. Szeidl, Gy.: *Boundary Integral Equations for Plane Problems in Terms of Stress Functions of Order One*, Journal of Computational and Applied Mechanics, 2(2), (2001), 237-261.
13. Szeidl, Gy.: *Dual Forms of the Principle of Virtual Work for Multiply Connected Micropolar Body*, GÉP, XXXVIII, (1986), 243-244.

**Konferenciaelőadás idegen nyelven:**

14. Szeidl, Gy.: *Integral Equations of Plane Elasticity in Terms of Stress Functions of Order One*, MICROCAD-SYSTEM '94 International Computer Science Conference, Kharkov, Printed Matters of the Conference, page 44-46, 3.-5. May, 1994.
15. Szeidl, Gy.: *Boundary Integral Equations of Plane Elasticity in Terms of Stress Functions of Order One*, 6<sup>th</sup> International Conference on Numerical Methods, Abstracts, page 35, 22.-26. August, 1994.
16. Szeidl, Gy.: *On Derivation of Stress Functions in Elasticity*, In The Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics in Hamburg; ICIAM95, Book of Abstracts, page 455. Springer Verlag, 3.-7. July, 1995.
17. Szeidl, Gy.-Iván, I.: *Fundamental Solutions and Boundary Integral Equations for the First Plane Problem of Micropolar Elastostatics in Dual System*, Conference on Numerical Methods and Computational Mechanics, Abstracts, page 74, July 15-19, 1996.

**Konferenciaelőadás magyar nyelven:**

18. Szeidl, Gy.: *Dual Variational Principles and Compatibility Conditions in the Large in Micropolar Theory of Elasticity*, In The 4-th Hungarian Conference on Mechanics, page 38, 24-26 August 1983.
19. Szeidl, Gy.: *Nagybani kompatibilitási feltételek többszörösen összefüggő mikropoláris anyagú testre vegyes peremfeltételek mellett*, A VIII. Magyar Mechanikai Konferencia Programja, pp. 100. Miskolci Egyetem, 1995 augusztus 29-31.
20. Szeidl Gy. – Kozák I.: *A virtuális munka elv, az egyensúlyi egyenletek teljes megoldása feszültségfüggvényekkel, peremfeltételek*, A VIII. Magyar Mechanikai Konferencia Programja, 101. o. Miskolci Egyetem, 1995 augusztus 29-31.

## A. FÜGGELÉK

### A.1. Általános egyenletek.

**A.1.1.** Jól ismert, hogy

$$(A.1.1) \quad \epsilon_{lpr} \epsilon^{rst} = \delta_{mr}^{lp} = \delta_l^s \delta_p^t - \delta_l^t \delta_p^s.$$

A felbontási tétel szerint bármilyen  $d_{km}$  tenzor megadható a

$$(A.1.2) \quad d_{lp} = d_{(lp)} + d_{[lp]}$$

alakban, ahol  $d_{(lp)}$  és  $d_{[lp]}$  a tenzor szimmetrikus és ferdeszimmetrikus részei:

$$(A.1.3) \quad d_{(lp)} = (d_{lp} + d_{pl})/2 \quad \text{és} \quad d_{[lp]} = (d_{lp} - d_{pl})/2.$$

Nyilvánvaló, hogy fennáll a

$$(A.1.4) \quad d_{[lp]} = \epsilon_{lpr} \epsilon^{rst} d_{st}/2$$

egyenlet.

**A.1.2.** A  $d_{.lm}^k$  tenzor  $s$  index szerint vett  $d_{.lm;s}^k$  kovariáns deriváltját a

$$(A.1.5) \quad d_{.lm;s}^k = d_{.lm,s}^k + \Gamma_{ps}^k d_{.lm}^p - \Gamma_{ls}^p d_{.pm}^k - \Gamma_{ms}^p d_{.lp}^k$$

képlet értelmezi, ahol

$$(A.1.6) \quad \Gamma_{ps}^k = \mathbf{g}_{k,m} \cdot \mathbf{g}^s$$

a másodrendű CHRISTOFFEL szimbólum. Az (A.1.1-A.1.6) egyenletek bármilyen görbevonalú KR-ben fennállnak.

**A.1.3.** Az  $S$  felületen

$$(A.1.7) \quad b_{\alpha\beta}(\xi) = \Gamma_{\alpha\beta}^3 = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}^3 \quad \text{és} \quad b_{\beta}^{\mu}(\xi) = -\Gamma_{3\beta}^{\mu} = \mathbf{a}_{3,\beta} \cdot \mathbf{a}^{\mu} \quad \xi \in S$$

a nem azonosan zérus CHRISTOFFEL szimbólumok, míg

$$(A.1.8) \quad \Gamma_{33}^{\mu} = \Gamma_{3\beta}^3 = \Gamma_{33}^3 = 0. \quad \xi \in S$$

Itt  $b_{\alpha\beta}$  és  $b_{\beta}^{\mu}$  a görbületi tenzor kovariáns és vegyes indexű alakjai.

**A.1.4.** A  $d_{.lm}^k$  tenzor  $S$  felületen vett kovariáns deriváltját a

$$(A.1.9) \quad d_{.lm;\sigma}^k(\xi) = d_{.lm|\sigma}^k(\xi) = d_{.lm,\sigma}^k + \Gamma_{p\sigma}^k d_{.lm}^p - \Gamma_{l\sigma}^p d_{.pm}^k - \Gamma_{m\sigma}^p d_{.lp}^k \quad \xi \in S$$

egyenlet értelmezi. A  $d_{.lm}^k$  tenzor  $d_{.lm}^k$ ;  $d_{.lm}^3$ ;  $\dots$ ;  $d_{.33}^3$  részeit, ezek mindegyikét az  $S$  felületen tekintjük, harmad-, másod-, első és zérusrendű altenzoroknak nevezük. A  $d_{.lm}^k$  altenzor *felületi kovariáns* deriváltját a

$$(A.1.10) \quad d_{.lm;\sigma}^k(\xi) = d_{.lm,\sigma}^k + \Gamma_{\pi\sigma}^k d_{.lm}^{\pi} - \Gamma_{\lambda\sigma}^{\pi} d_{.lm}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\pi} d_{.lm}^{\mu} \quad \xi \in S$$

képlet értelmezi. Az (A.1.10) és (A.1.7) képletek (A.1.9) összefüggésbe történő helyettesítésével kapjuk, hogy

$$(A.1.11) \quad d_{.lm;\sigma}^k(\xi) = d_{.lm|\sigma}^k(\xi) = d_{.lm,\sigma}^k - b_{\sigma}^k d_{.lm}^3 + b_{\lambda\sigma} d_{.3\mu}^k + b_{\mu\sigma} d_{.l3}^k. \quad \xi \in S$$

A fenti egyenletet olyan szabálynak vesszük a továbbiakban, amely összefüggést teremt a felületen vett és felületi kovariáns deriváltak között. Vegyük észre, hogy a  $\xi^3$  változása nincs hatással a  $d_{.lm;\sigma}^k$  deriváltra.

**A.1.5.** Legyen  $s_{. \beta}^{\alpha}$  egy elegendően sima tenzormező az  $S$  felületen. Az (A.1.10) összefüggés felhasználásával igazolható, hogy

$$(A.1.12) \quad s_{. \beta}^{\alpha}{}_{;\vartheta\lambda} - s_{. \beta}^{\alpha}{}_{;\lambda\vartheta} = -s_{. \beta}^{\pi} R_{. \pi\vartheta\lambda}^{\alpha} - s_{. \pi}^{\alpha} R_{. \beta\vartheta\lambda}^{\pi}, \quad \xi \in S$$

amelyben

$$(A.1.13) \quad R_{. \beta\vartheta\lambda}^{\pi} = \frac{\partial \Gamma_{\beta\lambda}^{\pi}}{\partial x^{\vartheta}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\vartheta}^{\pi}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\vartheta\nu}^{\pi} \Gamma_{\beta\lambda}^{\nu} - \Gamma_{\nu\pi}^{\lambda} \Gamma_{\beta\vartheta}^{\nu} \quad \xi \in S$$

a felület RIEMANN-CHRISTOFFEL tenzora. Ugyancsak igazolható [8], hogy

$$(A.1.14) \quad R_{. \beta\vartheta\lambda}^{\pi} = b_{\vartheta}^{\pi} b_{\beta\lambda} - b_{\lambda}^{\pi} b_{\beta\vartheta} \neq 0. \quad \xi \in S$$

Tekintsük szabálynak az (A.1.12) összefüggést és alkalmazzuk azt az  $u_l$  elmozdulásmező kovariáns deriváltjai esetén. Ekkor írható, hogy

$$(A.1.15) \quad u_{\kappa||\mu\lambda} - u_{\kappa||\lambda\mu} = u_{\nu} (b_{\mu}^{\nu} b_{\kappa\lambda} - b_{\lambda}^{\nu} b_{\kappa\mu}) \quad \xi \in S$$

és

$$(A.1.16a) \quad (u_{\lambda|\kappa})_{|\pi\mu} - (u_{\lambda|\kappa})_{|\mu\pi} = b_{\kappa}^{\nu} b_{\mu\pi} (u_{\nu|\lambda} - u_{\lambda|\nu}), \quad \xi \in S$$

$$(A.1.16b) \quad (e_{3\lambda} - u_{3|\lambda})_{|\kappa\mu} - (e_{3\lambda} - u_{3|\lambda})_{|\mu\kappa} = (e_{3\nu} - u_{3|\nu})(b_{\kappa}^{\nu} b_{\lambda\mu} - b_{\mu}^{\nu} b_{\lambda\kappa}), \quad \xi \in S$$

ahol figyelembe vettük az (A.1.14) képletet is. Az (A.1.15) és (A.1.16a,b) összefüggések szerint nem cserélhető fel a felületi kovariáns deriválások sorrendje. Nem nehéz igazolni, hogy

(A.1.17)

$$b_{\alpha\beta|\lambda} - b_{\alpha\lambda|\beta} = 0, \quad \text{vagy más alakban} \quad \epsilon^{3\beta\lambda} b_{\alpha\beta|\lambda} = 0, \quad \text{illetve hogy} \quad \epsilon^{3\beta\lambda} b_{\beta|\lambda}^{\alpha}. \quad \xi \in S$$

A fenti egyenletek MAINARDI-CODAZZI képletek néven ismertek [8].

**A.1.6.** Zérus értékűek a metrikus tenzorok, valamint permutációs tenzorok kovariáns deriváltjai. Ez azt jelenti, hogy

$$(A.1.18) \quad g_{kl;s} = 0; \quad g_{\dots;s}^{mn} = 0; \quad \delta_{i;m}^k = 0; \quad \epsilon_{klm;s} = 0; \quad \epsilon_{\dots;s}^{prrm} = 0 \quad x \in V$$

és hogy

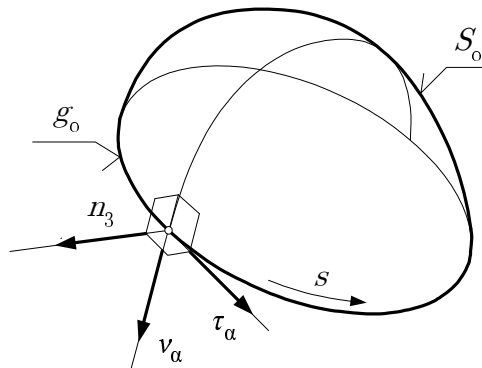
$$(A.1.19a) \quad a_{\kappa\lambda|\sigma} = a_{\kappa\lambda|\sigma} = 0; \quad a_{\dots|\sigma}^{\mu\nu} = a_{\dots|\sigma}^{\mu\nu} = 0; \quad \delta_{\kappa|\mu}^{\lambda} = \delta_{\kappa|\mu}^{\lambda} = 0. \quad \xi \in S$$

$$(A.1.19b) \quad \epsilon_{\kappa\lambda 3|\sigma} = \epsilon_{\kappa\lambda 3|\sigma} = 0; \quad \epsilon_{\dots|\sigma}^{\pi\rho 3} = \epsilon_{\dots|\sigma}^{\pi\rho 3} = 0. \quad \xi \in S$$

**A.1.7.** Tekintsük a  $d_{.lm;k}^k(x) c^{lm}(x)$   $x \in V$  szorzatot. Nem nehéz igazolni a GREEN-GAUSS tétel (cf. KELLOG [25]) felhasználásával, hogy fennáll az

$$(A.1.20) \quad \int_V d_{.lm;k}^k c^{lm} dV = \int_S n_3 d_{.lm}^3 c^{lm} dA - \int_V d_{.lm}^k c_{\dots;k}^{lm} dV.$$

egyenlet. Az utóbbi képlet a parciális integrálás szabály tényleges integrálok esetén.



A.1. ábra.

**A.1.8.** Legyen az  $S_0$  egy tetszőleges, az irányított  $g_0$  görbe által határolt felület. Ami az irányítást illeti úgy választjuk meg a pozitív haladási irányt a  $g_0$  görbe mentén, hogy a  $\tau_\alpha, n_3$  és  $\nu_\alpha$  vektorok —  $\nu_\alpha$  a  $g_0$  görbe érintőjében fekvő normálisa — jobbsodratú vektorhármast alkossanak (ha a pozitív irányban haladunk, akkor baloldalon fekszik a felület). Megmutatható a STOKES tétel felhasználásával, hogy

$$(A.1.21) \quad \int_{S_0} n_3 \epsilon^{3\eta\alpha} b_{\alpha|\eta}^l c_l dA = \oint_{g_0} b_{\alpha}^l c_l \tau^\alpha ds - \int_{S_0} n_3 \epsilon^{3\eta\alpha} b_{\alpha|\eta}^l c_{l|\eta} dA.$$

**A.1.9.** Megmutatható a felületi és vonalintegrálok közötti kapcsolatot adó GREEN tétel felhasználásával (cf. MASON [34]), hogy fennáll a

$$(A.1.22) \quad \int_{S_0} b_{l|\eta}^\eta c_l dA = \oint_{g_0} \nu_\eta b_l^\eta c_l ds - \int_{S_0} b_{l|\eta}^\eta c_{l|\eta} dA$$

egyenlet. Ha zárt az  $S_0$  felület, akkor eltűnnek az (A.1.21) és (A.1.22) képletekben álló vonalintegrálok.

**A.1.10.** Legyen a  $b^l$  a  $g_0$  görbén vett vektormező. A

$$(A.1.23) \quad \oint_{g_0} \tau^\eta b_{|\eta}^l c_l ds = \oint_{g_0} \tau^\eta b^l c_{l|\eta} ds, \quad \text{valamint} \quad \oint_{g_0} \tau^\eta b_{|\eta}^\lambda c_\lambda ds = \oint_{g_0} \tau^\eta b^\lambda c_{\lambda|\eta} ds$$

képletek a  $g_0$  görbén vett integrálok átalakításánál hasznosak.

## A.2. Átalakítások az 1. Fejezethez.

**A.2.1.** *Kinematikai összefüggések.* A  $\varphi^r$  merevtestszerű forgást az

$$(A.2.1) \quad \varphi^r = \frac{1}{2} \epsilon^{rst} u_{t;s} \quad x \in V$$

egyenlet értelmezi. A  $-\epsilon_{lpr}$  tenzorral történő átszorzással és az (A.1.1) képlet helyettesítésével a fenti egyenletből a

$$(A.2.2) \quad -\epsilon_{lpr} \varphi^r = \frac{1}{2} (u_{l;p} - u_{p;l}) = u_{[l;p]} = \Omega_{lp}. \quad x \in V$$

összefüggés következik, ahol  $\Omega_{kl}$  a forgató tenzor. Az (A.2.2) összefüggést és a (1.1) kinematikai egyenlet is felhasználva írjuk  $u_{l;p}$ -t  $d_{lp}$  helyére az (A.1.2)-ban:

$$(A.2.3) \quad u_{l;p} = e_{lp} - \epsilon_{plr} \varphi^r = e_{lp} + \Omega_{lp}. \quad x \in V$$

Mivel  $\epsilon^{rst} u_{q;ts} = 0$  az (1.1) összefüggésre is tekintettel az (A.2.1)-ből következik, hogy

$$(A.2.4) \quad \varphi^r_{;q} = \frac{1}{2} \epsilon^{rst} (u_{t;qs} + u_{q;ts}) = \epsilon^{str} e_{tq;s}. \quad x \in V$$

Ha most átszorozunk  $\epsilon_{plr}$ -el és kihasználjuk (A.1.1)-et az (A.2.4)-ből kapjuk, hogy:

$$(A.2.5) \quad \epsilon_{plr} \varphi^r_{;p} = e_{lq;p} - e_{pq;l} = \Omega_{lp;q}. \quad x \in V$$

**A.2.2.** Az  $I_{V_1}^B$  integrál – lásd az (1.22)<sub>1</sub> számú képletet – átalakítása. Ez a következő lépésekkel hajtható végre:

- A  $\Delta B^l$ -t adó (1.6) összefüggés jobboldalának helyettesítése és parciális integrálások végrehajtása a vonatkozó és szabálynak vett (A.1.20) képlet felhasználásával;
- Az (A.2.3) felbontási tétel helyettesítése az  $u_{l;p}$  gradiens tekintetében és parciális integrálás végrehajtása az  $\varphi^r$ -t tartalmazó tag esetén.
- Az (A.2.4) összefüggés helyettesítése  $\varphi^r_{;p}$ -ra nézve, majd parciális integrálások végrehajtása azon tagok tekintetében melyek tartalmazzák az  $e_{lq;p}$  és  $e_{pq;l}$  gradienseket.

Az (a), (b) és (c) lépések végrehajtása és néma indexpárok alkalmas átnevezése után az

$$(A.2.6) \quad I_{V_1}^B = - \int_V (g^{pq} B^l_{;q} + g^{lq} B^p_{;q} - g^{pl} B^k_{;k}) e_{lp} dV + \int_S n_3 a^{3q} B^l_{;q} u_l dA + I_{A_1}^B$$

eredményt kapjuk, ahol

$$(A.2.7) \quad I_{A_1}^B = - \int_S n_3 a^{3p} B^l \epsilon_{pls} \varphi^s dA + \int_S (n_3 a^{3q} B^l e_{lq} - n_3 a^{pq} B^3 e_{pq}) dA.$$

Az  $I_{V_1}^B$  integrál végleges alakjának előállítása az  $I_{A_1}^B$  felületi integrál átalakítását igényli. Az átalakítás során fel kell használni a

$$(a) \quad n_3 a^{3p} B^l \epsilon_{pls} \varphi^s = n_q a^{qp} B^l \epsilon_{pls} \epsilon^{skv} \frac{1}{2} u_{v;k},$$

$$(b) \quad n_3 a^{3q} B^l e_{lq} - n_3 a^{pq} B^3 e_{pq} = n_k a^{pq} B^l \epsilon_{pls} \epsilon^{skv} \frac{1}{2} (u_{v;q} + u_{q;v})$$

és

$$(c) \quad n_k u_{v;q} - n_q u_{v;k} = \epsilon_{kqr} \epsilon^{rab} n_a u_{v;b}$$

összefüggéseket. Ezek helyessége könnyen belátható, ha figyelembe vesszük az (A.1.1), valamint az (A.1.19a) és (A.1.19b) képleteket.

Az (a) és (b) (A.2.7)-be történő helyettesítése, alkalmas átrendezéssel társulva, lehetővé teszi a (c) kihasználását:

$$I_{A_1}^B = \frac{1}{2} \int_S a^{pq} B^l \epsilon_{pls} \epsilon^{skv} (n_k u_{v;q} - n_q u_{v;k}) dA + \frac{1}{2} \int_S n_k a^{pq} B^l \epsilon_{pls} \epsilon^{skv} u_{q;v} dA.$$

Figyeljük meg az eredményül kapott integranduszok mindegyike tartalmazza az elmozdulásmező gradiensét. Az átalakítás befejezése a parciális integrálás (A.1.21) szabályának alkalmazását igényli. Az a cél, hogy az elmozdulásmezőben lineáris tagokat kapjunk. Az integrálás során tekintettel kell lenni az

(A.1.18), valamint az (A.1.19a) és (A.1.19b) képletekre és nem szabad elfeledkezni arról sem, hogy most zárt az  $S$  felület. Az utóbbi lépéseket végrehajtva

$$(A.2.8) \quad I_{A1}^B = -\frac{1}{2} \int_S n_3 \delta_a^3 a^{pq} \epsilon_{pls} \epsilon^{suw} \epsilon_{kqr} \epsilon^{rab} B_{;b}^l u_k dA - \frac{1}{2} \int_S n_3 \delta_a^3 a^{pq} \epsilon_{pls} \epsilon^{skv} B_{;v}^l u_q dA \\ = \int_S n_3 (a^{lq} B_{;q}^3 - a^{3l} B_{;k}^k) u_l dA$$

az eredmény, ha kihasználjuk az (A.1.1) azonosságot.

**A.2.3.** Az  $I_{V_2}^B$  integrál – lásd az (1.22)<sub>2</sub> számú képletet – átalakítása. Ez az átalakítás nagyon hasonló az  $I_{V_1}^B$  integrál átalakításához és így csak több lépésben hajtható végre. A lépések pedig:

- (a) Az (1.8) összefüggés jobboldalának helyettesítése a  $\Delta\Delta\Psi$ -re nézve és az első parciális integrálás végrehajtása;
- (b) Az (A.2.3) felbontás helyettesítése és a  $\varphi^r$ -t tartalmazó tagok parciális integrálása;
- (c) Az  $\varphi^r_{;n}$ -t adó (A.2.4) képlet helyettesítése majd az  $e_{ln;q}$ -t és  $e_{qn;l}$ -t tartalmazó tagok integrálása.

A néma indexpárok alkalmas átnevezése és az ezt követő átrendezés az

$$(A.2.9) \quad I_{V_2}^B = - \int_V (g^{pq} \Delta\Psi^l_{;q} + g^{lq} \Delta\Psi^p_{;q} - g^{pq} g^{ml} \Psi^k_{;kmq}) e_{lp} dV + \int_S n_3 a^{3q} a^{mn} \Delta\Psi^l_{;q} u_l dA + I_{A_2}^B$$

eredményre vezet, ahol

$$(A.2.10) \quad I_{A_2}^B = - \int_S n_3 a^{pq} a^{3m} \Psi^l_{;mq} \epsilon_{pls} \varphi^s dA + \int_S (n_3 a^{3q} a^{mn} \Psi^l_{;mq} e_{ln} - n_3 a^{pq} a^{mn} \Psi^3_{;mq} e_{pn}) dA.$$

Az  $I_{V_2}^B$  integrál végleges alakjának előállítás az  $I_{A_2}^B$  felületi integrál átalakítását igényli. Nem nehéz megmutatni, hogy

$$(d) \quad n_3 a^{pq} a^{3m} \Psi^l_{;mq} \epsilon_{pls} \varphi^s = n_n a^{pq} a^{mn} \Psi^l_{;mq} \epsilon_{pls} \epsilon^{suw} \frac{1}{2} u_{v;u}$$

és

$$(e) \quad n_3 a^{3q} a^{mn} \Psi^l_{;mq} e_{ln} - n_3 a^{pq} a^{mn} \Psi^l_{;mq} e_{pn} = n_u a^{pq} a^{mn} \Psi^l_{;mq} \epsilon_{pls} \epsilon^{suw} \frac{1}{2} (u_{v;n} + u_{n;v}).$$

A (d) és (e) felhasználásával kapjuk, hogy

$$I_{A_2}^B = \frac{1}{2} \int_S a^{pq} a^{mn} \Psi^l_{;mq} \epsilon_{pls} \epsilon^{suw} (n_u u_{v;n} - n_n u_{v;n}) dA + \frac{1}{2} \int_S n_u a^{pq} a^{mn} \Psi^l_{;mq} \epsilon_{pls} \epsilon^{suw} u_{n;v} dA.$$

Írjuk az  $\epsilon_{run} \epsilon^{rab} n_a u_{v;b}$  kifejezést a zárójelben álló tag helyére és ismételjük meg az (A.2.8)-ra vezető gondolatmenetet. Ily módon az

$$(A.2.11) \quad I_{A_2}^B = -\frac{1}{2} \int_S n_3 \delta_a^3 a^{pq} a^{mn} \Psi^l_{;mqb} \epsilon_{pls} \epsilon^{suw} \epsilon_{run} \epsilon^{rab} u_v dA - \frac{1}{2} \int_S n_3 \delta_u^3 a^{pq} a^{mn} \Psi^l_{;mqv} \epsilon_{pls} \epsilon^{suw} u_n dA \\ = \int_S n_3 (a^{lq} \Delta\Psi^3_{;q} - a^{3q} a^{ml} \Psi^k_{;kmq}) u_l dA$$

eredményre jutunk.

**A.2.4.** Az  $I_{1U}^S$  integrál átalakítása — lásd az (1.33) egyenletet. A variációs elvekkel kapcsolatos egyes átalakítások kedvéért – a jelen és a következő két szakaszban azt tételezzük fel, hogy nyitott a felület – a részleteket illetően az A.1. ábrára utalunk. Az átalakítások során felhasználjuk

— az

$$(A.2.12) \quad n_3 \epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} u_{[\lambda|\kappa]} \tilde{H}_{\eta\vartheta;3} \equiv 0, \quad \xi \in S$$

$$(A.2.13) \quad n_3 \epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} u_{[\lambda|\kappa]} b_{\eta\vartheta} \tilde{H}_{33} \equiv 0 \quad \xi \in S$$

és

$$(A.2.14) \quad n_3 \epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} u_{[\lambda|\kappa]} b_{\beta}^{\vartheta} \tilde{H}_{\eta\vartheta} \equiv 0 \quad \xi \in S$$

azonosságokat, ahol az utóbbi kettő az

$$\epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} u_{[\lambda|\kappa]} \tilde{H}_{\eta\vartheta;3} = \epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} \epsilon_{\lambda\kappa 3} \varphi^3 \tilde{H}_{\eta\vartheta;3} = -\epsilon^{\vartheta\eta^3} \varphi^3 \tilde{H}_{\eta\vartheta;3} \equiv 0 \quad \xi \in S$$

egyenletből következik, ha  $b_{\eta\vartheta}$ -t, illetve  $\tilde{H}_{\eta\vartheta}$ -t gondolunk  $\tilde{H}_{\eta\vartheta;3}$  helyett,

— az

$$(A.2.15) \quad n_3 \epsilon^{\kappa \eta^3} \epsilon^{\lambda \vartheta^3} (b_\beta^\beta u_{\lambda|\kappa} - b_\lambda^\alpha u_{\alpha|\kappa}) \tilde{H}_{\eta\vartheta} = n_3 \epsilon^{\kappa \eta^3} \epsilon^{\lambda \vartheta^3} (-\delta_{\sigma\lambda}^{\alpha\beta}) u_{\alpha|\kappa} b_\beta^\sigma \tilde{H}_{\eta\vartheta} =$$

$$(A.2.16) \quad = n_3 \epsilon^{\kappa \eta^3} \epsilon^{\alpha\beta^3} \epsilon_{\sigma\lambda^3} \epsilon^{\vartheta\lambda^3} u_{\alpha|\kappa} b_\beta^\sigma \tilde{H}_{\eta\vartheta} = n_3 \epsilon^{\kappa \eta^3} \epsilon^{\lambda \vartheta^3} u_{\lambda|\kappa} b_\vartheta^\nu \tilde{H}_{\eta\nu} \quad \xi \in S$$

átalakítást, amely az (A.1.1) felhasználásával és az  $\lambda, \vartheta \rightarrow \alpha, \beta$ , illetve az  $\vartheta, \lambda \rightarrow \nu, \vartheta$  indexcserékkel ellenőrizhető,

valamint

— a

$$(A.2.17) \quad - \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa \eta^3} \epsilon^{\lambda \vartheta^3} u_{\lambda|\kappa|\vartheta} \tilde{H}_{\eta^3} dA = \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa \eta^3} \epsilon^{\lambda \vartheta^3} u_{\lambda|\kappa} \tilde{H}_{\eta^3|\vartheta} dA + \\ + \oint_{g_o} n_3 \epsilon^{\kappa \eta^3} \tau^\lambda u_{\lambda|\kappa} \tilde{H}_{\eta^3} ds$$

és a

$$(A.2.18) \quad - \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa \eta^3} \epsilon^{\lambda \vartheta^3} (u_{3|\kappa})_{\|\lambda} \tilde{H}_{\eta\vartheta} dA = \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa \eta^3} \epsilon^{\lambda \vartheta^3} u_{3|\kappa} \tilde{H}_{\eta\vartheta\|\lambda} dA - \\ - \oint_{g_o} n_3 \epsilon^{\kappa \eta^3} \tau^\eta u_{3|\kappa} \tilde{H}_{\eta\vartheta} ds$$

egyenleteket – ezek az (A.1.22) GREEN tétel segítségével ellenőrizhetők – valamint a

$$(A.2.19) \quad \tau^\vartheta = -\epsilon^{\lambda \vartheta^3} \nu_\vartheta \quad \xi \in g_o$$

összefüggést nem feledkezve meg arról, hogy  $n_3 = 1$ .

Adjuk az (1.33)-ban álló első integrál integranduszához a zérus értékű (A.2.12) kifejezést, a második felületi integrál integranduszához pedig az ugyancsak zérus értékű (A.2.13) és (A.2.14) kifejezéseket. Ez lehetővé teszi az (A.2.15), (A.2.17) és (A.2.18) képletek helyettesítését. Az ezt követő átrendezés az

$$(A.2.20) \quad I_{1U}^S = - \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa \eta^3} \epsilon^{\lambda \vartheta^3} u_{\lambda|\kappa} \tilde{H}_{\eta\vartheta;3} + \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa \eta^3} \epsilon^{\lambda \vartheta^3} u_{\lambda|\kappa} (\tilde{H}_{\eta^3|\vartheta} - b_{\eta\vartheta} \tilde{H}_{33} + b_\vartheta^\nu \tilde{H}_{\eta\nu}) dA + \\ + \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa \eta^3} \epsilon^{\lambda \vartheta^3} u_{3|\kappa} (\tilde{H}_{\eta\vartheta\|\lambda} - b_{\eta\lambda} \tilde{H}_{33} - b_{\vartheta\lambda} \tilde{H}_{\eta^3}) dA \\ + \oint_{g_o} n_3 \epsilon^{\kappa \eta^3} \tau^\vartheta (u_{\vartheta|\kappa} \tilde{H}_{\eta^3} - u_{3|\kappa} \tilde{H}_{\eta\vartheta}) ds$$

eredményre vezet, ha kihasználjuk az

$$n_3 \epsilon^{\kappa \eta^3} \epsilon^{\lambda \vartheta^3} u_{3|\lambda} b_{\vartheta\kappa} \tilde{H}_{\eta^3} = n_3 \epsilon^{\kappa \eta^3} \epsilon^{\lambda \vartheta^3} u_{3|\kappa} b_{\vartheta\lambda} \tilde{H}_{\eta^3} \quad \xi \in S$$

azonosságot. Az (A.1.11)-ből következő

$$\tilde{H}_{\eta^3;\vartheta} = \tilde{H}_{\eta^3|\vartheta} - b_{\eta\vartheta} \tilde{H}_{33} + b_\vartheta^\nu \tilde{H}_{\eta\nu}, \quad \xi \in S$$

$$\tilde{H}_{\eta\vartheta;\lambda} = \tilde{H}_{\eta\vartheta\|\lambda} - b_{\eta\lambda} \tilde{H}_{33} - b_{\vartheta\lambda} \tilde{H}_{\eta^3} \quad \xi \in S$$

képletek második és harmadik felületi integrálba történő beírása és az ezt követő átrendezés lehetővé teszi a STOKES tétel alkalmazását a három integrál összegére nézve:

$$- \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa \eta^3} \epsilon^{\lambda \vartheta^3} [(\tilde{H}_{\eta\vartheta;3} + \tilde{H}_{\eta^3;\vartheta}) u_{\lambda;\kappa} + \tilde{H}_{\eta\lambda;\vartheta} u_{3|\lambda}] dA = - \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa \eta^3} \epsilon^{ldp} u_{l;\kappa} \tilde{H}_{\eta d;p} dA = \\ = - \int_{S_o} n_3 \epsilon^{3\eta\kappa} \epsilon^{ldp} \tilde{H}_{\eta d;p\kappa} u_l dA - \oint_{g_o} \tau^\eta \epsilon^{ldp} \tilde{H}_{\eta d;p} u_l ds.$$

Visszahelyettesítve ezt az eredményt az (A.2.20) képletbe, azt kapjuk, hogy

$$(A.2.21) \quad I_{1U}^S = - \int_{S_o} n_3 \epsilon^{3\eta\kappa} \epsilon^{ldp} \tilde{H}_{\eta d;p\kappa} u_l dA + \oint_{g_o} n_3 \epsilon^{\kappa \eta^3} \tau^\vartheta (u_{\vartheta|\kappa} \tilde{H}_{\eta^3} - u_{3|\kappa} \tilde{H}_{\eta\vartheta}) ds - \\ - \oint_{g_o} \tau^\eta \epsilon^{ldp} \tilde{H}_{\eta d;p} u_l ds.$$

Ha zárt a felület, azaz  $S_o \equiv S$ , akkor eltűnik a vonalintegrál és a fenti képlet az (1.35) alakra egyszerűsödik.

**A.2.5.** Az  $I_{1E}^S$  integrál átalakítása – lásd az (1.34a) egyenletet. Ha felhasználjuk

— az

$$\begin{aligned} \epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} (-b_\beta^\beta e_{\lambda\kappa} + b_\lambda^\alpha e_{\alpha\kappa}) \tilde{H}_{\eta\vartheta} &= \epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{\nu\tau^3} (e_{\sigma\kappa} b_\tau^\sigma - b_\sigma^\sigma e_{\tau\kappa}) \tilde{H}_{\eta\nu} = \\ &= \epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{\nu\tau^3} \delta_{\sigma\tau}^{\lambda\vartheta} e_{\lambda\kappa} b_\vartheta^\sigma \tilde{H}_{\eta\nu} = \epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} \epsilon_{\sigma\tau^3} \epsilon^{\nu\tau^3} e_{\lambda\kappa} b_\tau^\sigma \tilde{H}_{\eta\nu} = \epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} e_{\lambda\kappa} b_\vartheta^\nu \tilde{H}_{\eta\nu} \quad \xi \in S \end{aligned}$$

átalakítást – ez az  $\lambda \rightarrow \tau$ ,  $\beta \rightarrow \sigma$ ,  $\vartheta \rightarrow \nu$  indexcseréssel, valamint az (A.1.1) képlet segítségével ellenőrizhető,

— az (A.1.11)-ből következő

$$e_{\kappa\lambda|\vartheta} = e_{\kappa\lambda|\vartheta} + b_{\kappa\vartheta} e_{3\lambda} + b_{\lambda\vartheta} e_{\kappa 3} \quad \xi \in S$$

egyenletet

és végezetül

— az

$$(A.2.22) \quad \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} e_{3\kappa|\lambda} \tilde{H}_{\eta\vartheta} dA = - \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} e_{3\kappa} \tilde{H}_{\eta\vartheta|\lambda} dA + \oint_{g_o} n_3 \epsilon^{\kappa\eta^3} \tau^\vartheta e_{3\kappa} \tilde{H}_{\eta\vartheta} ds$$

és

$$(A.2.23) \quad \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} e_{\lambda\kappa|\vartheta} \tilde{H}_{\eta 3} dA = - \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} e_{\lambda\kappa} \tilde{H}_{\eta 3|\vartheta} dA + \oint_{g_o} n_3 \epsilon^{\kappa\eta^3} \tau^\lambda e_{\lambda\kappa} \tilde{H}_{\eta 3} ds$$

integrálátalakításokat – ezek a GREEN tétel, valamint az (A.2.19) képlet felhasználásával ellenőrizhetők,

akkor az (1.34a) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$(A.2.24) \quad I_{1E}^S = \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} [e_{\lambda\kappa} (\tilde{H}_{\eta\vartheta;3} - \tilde{H}_{\eta 3|\vartheta} + b_{\eta\vartheta} \tilde{H}_{33} + b_{\vartheta\nu} \tilde{H}_{\eta\nu}) + e_{3\lambda} b_{\kappa\vartheta} \tilde{H}_{\eta 3} + \\ + e_{3\kappa} (-\tilde{H}_{\eta\vartheta|\lambda} + b_{\eta\lambda} \tilde{H}_{\vartheta 3}) + e_{\kappa\lambda;3} \tilde{H}_{\eta\vartheta} + e_{\kappa 3|\lambda} \tilde{H}_{\eta\vartheta} + e_{\kappa\lambda|\vartheta} \tilde{H}_{\eta 3}] dA \\ + \oint_{g_o} n_3 \epsilon^{\kappa\eta^3} (\tau^\vartheta e_{3\kappa} \tilde{H}_{\eta\vartheta} - \tau^\lambda e_{\lambda\kappa} \tilde{H}_{\eta 3}) ds.$$

Következik az (A.1.11) deriválási szabályból, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\eta\vartheta|\lambda} &= \tilde{H}_{\eta\vartheta|\lambda} + b_{\eta\lambda} \tilde{H}_{3\vartheta} + b_{\vartheta\lambda} \tilde{H}_{\eta 3}, & \xi \in S \\ \tilde{H}_{\eta 3|\vartheta} &= \tilde{H}_{\eta 3|\vartheta} + b_{\eta\vartheta} \tilde{H}_{33} + b_\vartheta^\nu \tilde{H}_{\eta\nu}. & \xi \in S \end{aligned}$$

A fenti két egyenlet (A.2.24)-be történő helyettesítése, majd az ezt követő és alkalmas indexátnevezésekkel társuló átrendezés az

$$(A.2.25) \quad I_{1E}^S = \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa\rho^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} [-\tilde{H}_{\lambda\kappa} e_{\rho\vartheta;3} + \tilde{H}_{\lambda\kappa} e_{\rho 3;\vartheta} + \tilde{H}_{3\kappa} e_{\rho\vartheta;\lambda} \\ + \tilde{H}_{\lambda\kappa;3} e_{\rho\vartheta} - \tilde{H}_{\lambda\kappa|\vartheta} e_{\rho 3} - \tilde{H}_{3\kappa|\lambda} e_{\rho\vartheta}] dA \\ + \oint_{g_o} n_3 \epsilon^{\kappa\eta^3} (\tau^\vartheta e_{3\kappa} \tilde{H}_{\eta\vartheta} - \tau^\lambda e_{\lambda\kappa} \tilde{H}_{\eta 3}) ds$$

eredményre vezet. Felhasználva a STOKES tételt írhatjuk, hogy

$$(A.2.26a) \quad \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa\rho^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} \tilde{H}_{\lambda\kappa} e_{\rho 3|\vartheta} dA = \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa\rho^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} \tilde{H}_{\lambda\kappa|\vartheta} e_{\rho 3} dA + \oint_{g_o} \tau^\lambda \epsilon^{\kappa\rho^3} \tilde{H}_{\lambda\kappa} e_{\rho 3} ds$$

és

$$(A.2.26b) \quad \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa\rho^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} \tilde{H}_{3\kappa} e_{\rho\vartheta|\lambda} dA = \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa\rho^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} \tilde{H}_{3\kappa|\lambda} e_{\rho\vartheta} dA - \oint_{g_o} \tau^\vartheta \epsilon^{\kappa\rho^3} \tilde{H}_{3\kappa} e_{\rho\vartheta} ds.$$

Az (A.2.26a,b) képletek (A.2.25)-be történő helyettesítésével az  $I_{1E}^S$  integrál az

$$(A.2.27) \quad I_{1E}^S = \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} (-\tilde{H}_{\lambda\kappa} e_{\rho\vartheta;3} + \tilde{H}_{\lambda\kappa;3} e_{\rho\vartheta}) dA.$$

alakra egyszerűsödik. Figyeljük meg, hogy törlik egymást a vonalintegrálok.

Ha zárt a felület, azaz  $S_o \equiv S$  akkor a (1.37) egyenletet kapjuk.



**A.2.6.** Az  $I_{1E}^V$  integrál átalakítása — lásd az (1.34b) egyenletet. A GAUSS tétel kétszeri alkalmazásával és alkalmas indexátnevezésekkel az

$$(A.2.28) \quad I_{1E}^V = I_{2E}^V + I_{2E}^S$$

képlet adódik az (1.34b) egyenletből, ahol

$$(A.2.29a) \quad I_{2E}^V = \int_V \epsilon^{pyk} \epsilon^{ldr} H_{yd;kr} e_{rs} dV$$

és

$$(A.2.29b) \quad I_{2E}^S = \int_S n_3 \epsilon^{\kappa\rho 3} \epsilon^{lsp} (e_{\rho s;p} H_{l\kappa} - e_{\rho s} H_{l\kappa;p}) dA.$$

Ami a felületi integrált illeti érdemes szétválasztani azokat a tagokat, amelyeknek  $\epsilon^{lsp}$  az együtthatója. Elemi átalakításokkal kapjuk, hogy

$$(A.2.29c) \quad I_{2E}^S = \int_S n_3 \epsilon^{\kappa\rho 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} [H_{\lambda\kappa} e_{\rho\vartheta;3} - H_{\lambda\kappa} e_{\rho 3;\vartheta} - H_{3\kappa} e_{\rho\vartheta;\lambda} - H_{\lambda\kappa;3} e_{\rho\vartheta} + H_{\lambda\kappa|\vartheta} e_{\rho 3} + H_{3\kappa|\lambda} e_{\rho\vartheta}] dA.$$

Az utóbbi integrál (A.2.25)-el való egybevetése lehetővé teszi az (A.2.25)-ből (A.2.27)-re vezető gondolatmenet megismétlését. Az átalakítások után az

$$(A.2.30) \quad I_{2E}^S = \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa\rho 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} (H_{\lambda\kappa} e_{\rho\vartheta;3} - H_{\lambda\kappa;3} e_{\rho\vartheta}) dA + \oint_{g_o} n_3 \epsilon^{\kappa\rho 3} (\tau^\vartheta H_{3\kappa} e_{\rho\vartheta} - \tau^\lambda H_{\kappa\lambda} e_{\rho 3}) ds.$$

eredmény következik. Figyeljük meg, hogy a felület most is nyitottnak vett.

Ha zárt a felület, akkor  $S_o \equiv S$ , és eltűnik a vonalintegrál. Maga az (A.2.30) egyenlet pedig az

$$(A.2.31) \quad I_{2E}^S = \int_S n_3 \epsilon^{\kappa\rho 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} (H_{\lambda\kappa} e_{\rho\vartheta;3} - H_{\lambda\kappa;3} e_{\rho\vartheta}) dA$$

alakra egyszerűsödik.

Az (A.2.29a) és (A.2.31) (A.2.28)-ba történő helyettesítése (1.38)-at adja.

### A.3. Átalakítások a 2. Fejezethez.

**A.3.1.** A  $\delta_{\tilde{H}} \Pi_2^G$  integrál átalakítása – lásd a (2.14d) és (2.19)<sub>2</sub> egyenleteket. Hagyjuk el azokat a tagokat melyben megjelenik a  $\delta \tilde{H}_{\eta 3}$  variáció és helyettesítsük, felhasználva a (2.20) és (2.24) képleteket, a  $\tau^\eta \epsilon^{ldp} \delta \tilde{H}_{\eta d;p}$  és  $\tau^\vartheta \delta \tilde{H}_{\eta\vartheta}$  szorzatokat a (2.19)<sub>2</sub> stacionaritási feltételbe. Kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \delta_{\tilde{H}} \Pi_2^G &= \oint_g n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \tau^\vartheta (u_{3|\kappa} - \hat{u}_{3|\kappa}) \delta \tilde{\mathcal{H}}_{\eta\vartheta} ds + \oint_g n_3 \tau^\eta \epsilon^{ldp} \delta \tilde{\mathcal{H}}_{\eta d;p} (u_l - \hat{u}_l) ds = \\ &= \oint_g \epsilon^{\kappa\eta 3} \left( \frac{d \delta \tilde{w}_\eta}{ds} + \tau^\vartheta \epsilon_{\eta\vartheta 3} \delta \tilde{r}^3 \right) (u_{3|\kappa} - \hat{u}_{3|\kappa}) ds - \oint_g (u_l - \hat{u}_l) \frac{d \delta \tilde{r}^l}{ds} ds = 0, \end{aligned}$$

hiszen  $n_3 = 1$ .

Az  $\epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon_{\eta\vartheta 3} = -\delta_\vartheta^\kappa$  összefüggés felhasználása és parciális integrálások végrehajtása az (A.1.23)<sub>1</sub> alapján a (2.25) egyenletre vezet.

**A.3.2.** A (2.28b) integrál átalakítása. A parciális integrálás (A.1.21) alatti formulája és a

$$\epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{ldp} u_{\kappa;l p} \equiv 0 \quad \xi \in S_t$$

azonosság felhasználása alapján írhatjuk, hogy

$$(A.3.1) \quad \Pi_1^{S_t}(u_l) = I_1^{S_t} + I_1^G = - \int_{S_t} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{ldp} (-\tilde{\mathcal{H}}_{\eta d;p} u_{l;\kappa} + \tilde{\mathcal{H}}_{\eta d} u_{\kappa;l p}) dA - \oint_g \tau^\eta \epsilon^{ldp} \tilde{\mathcal{H}}_{\eta d;p} \hat{u}_l ds,$$

ahol az  $I_1^{S_t}$  és az  $I_1^G$  a felületi és vonalintegrált jelöli. Az (A.1.3) felbontási tétel és az (1.1) kinematikai egyenlet szerint

$$(A.3.2) \quad u_{l;\kappa} = e_{l\kappa} + u_{[l;\kappa]} \quad \text{és} \quad u_{\kappa;l} = e_{\kappa l} + u_{[\kappa;l]}. \quad \xi \in S_t$$

Az (A.3.2) képlet  $I_1^{S_t}$  felületi integrálba történő helyettesítése és az eredmény (2.28a,b,c)-vel történő egybevetése az

$$(A.3.3) \quad I_1^{S_t} = \Pi_1^{S_t 1} + I_2^{S_t}$$

összegre vezet, ahol

$$\begin{aligned} I_2^{S_t} &= - \int_{S_t} n_3 \epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{ldp} (-\tilde{\mathcal{H}}_{\eta d;p} u_{[l;\kappa]} + \tilde{\mathcal{H}}_{\eta d} u_{[\kappa;p]}) dA = \\ &= - \int_{S_t} n_3 \epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} (-\tilde{\mathcal{H}}_{\eta\vartheta;3} u_{[\lambda;\kappa]} + \tilde{\mathcal{H}}_{\eta^3;\vartheta} u_{[\kappa;p]} + \tilde{\mathcal{H}}_{\eta\vartheta;\lambda} u_{[3;\kappa]} + \\ &\quad + \tilde{\mathcal{H}}_{\eta\vartheta} u_{[\kappa;\lambda];3} - \tilde{\mathcal{H}}_{\eta^3} u_{[\kappa;\lambda];\vartheta} + \tilde{\mathcal{H}}_{\eta\vartheta} u_{[\kappa;3];\lambda}) dA. \end{aligned}$$

Mivel

$$(A.3.4) \quad \epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} \tilde{\mathcal{H}}_{\eta\vartheta} u_{[\kappa;\lambda];3} \equiv 0 \quad \xi \in S_t$$

és

$$(A.3.5) \quad \epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} \tilde{\mathcal{H}}_{\eta\vartheta;3} u_{[\lambda;\kappa]} \equiv 0 \quad \xi \in S_t$$

parciális integrálások végrehajtásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} I_2^{S_t} = I_3^{S_t} + I_1^G &= - \int_{S_t} n_3 \epsilon^{\kappa\eta^3} \epsilon^{\lambda\vartheta^3} [-\tilde{\mathcal{H}}_{\eta^3} (u_{[\lambda;\kappa]} + u_{[\kappa;\lambda]};\vartheta) - \tilde{\mathcal{H}}_{\eta\vartheta} (u_{[3;\kappa]} + u_{[\kappa;3]};\lambda)] dA \\ &\quad - \oint_g \tau^\vartheta \epsilon^{\kappa\eta^3} (\tilde{\mathcal{H}}_{\eta\vartheta} u_{[3;\kappa]} - \tilde{\mathcal{H}}_{\eta^3} u_{[\vartheta;\kappa]}) ds. \end{aligned}$$

Itt zérus értékű a felületi integrál. Tekintettel az (1.1) kinematikai egyenletre és a (2.26) folytonossági feltételre feltételezzük, hogy

$$(A.3.6) \quad u_{[3;\kappa]} = e_{\kappa 3} - \hat{u}_{3;\kappa} \quad \text{és} \quad u_{[\vartheta;\kappa]} = e_{\vartheta\kappa} - \hat{u}_{\vartheta;\kappa}. \quad \xi \in g$$

Az (A.3.6) helyettesítse és a kapott eredmény (2.28a,b,c), (A.3.1) és (A.3.2) képletekkel való egybevetése szerint

$$\Pi_1^{S_t} = \Pi_1^{S_t^1} + \Pi_1^G + C_1^G.$$

Ez igazolja a (2.30) funkcionállal kapcsolatos átalakítások helyességét.

#### A.4. Átalakítások a 3. és 4. Fejezetekhez.

**A.4.1.** Az  $I_1^V$  integrál átalakítása – lásd a (3.22) képletet. Parciális integrálások végrehajtásával, azaz az (A.1.20) összefüggés kihasználásával és alkalmas indexátnevezésekkel írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} (A.4.1) \quad I_1^V &= \int_V [\epsilon^{Spq} (\gamma_{qT;p} + \epsilon_{qTb} \kappa_p^b) F_S^T + \epsilon^{Xpk} \kappa_k^Y{}_{;p} H_{XY}] dV = \\ &= \int_V [\epsilon^{kyp} F_p^l{}_{;y} \gamma_{kl} + \epsilon^{apy} (H_{yb;p} + \epsilon_{bpl} F_y^l) \kappa_a^b] dV + \int_S n_3 [F_\eta^l \epsilon^{3\chi\eta} \gamma_{\chi l} + H_{\eta b} \epsilon^{3\pi\eta} \kappa_\pi^b] dA. \end{aligned}$$

**A.4.2.** Az  $I_1^S$  integrál átalakítása – lásd a (3.23) képletet. Az (A.1.21) STOKES tétel felhasználásával írható, hogy

$$(A.4.2a) \quad \int_{S_o} n_3 \epsilon^{3\chi\eta} u_{l;\chi} \tilde{F}_\eta^l dA = \kappa_\pi^b - \int_{S_o} n_3 \epsilon^{3\chi\eta} \tilde{F}_\eta^l{}_{;\chi} u_l dA$$

és

$$(A.4.2b) \quad \int_{S_o} n_3 \epsilon^{3\pi\eta} \varphi^b{}_{;\pi} \tilde{H}_{\eta b} dA = \oint_{g_o} \tau^\eta \varphi^b \tilde{H}_{\eta b} ds - \int_{S_o} n_3 \epsilon^{3\pi\eta} \tilde{H}_{\eta b;\pi} \varphi^b dA.$$

Vegyük észre, hogy  $S_o = S$ -re, ekkor zárt a felület és eltűnik a vonalintegrál, a fenti két integrál része az  $I_1^S$ -nek. Így írható, hogy

$$\begin{aligned} (A.4.3) \quad I_1^S &= \int_S [(\gamma_{\chi l} - u_{l;\chi} - \epsilon_{l\chi b} \varphi^b) \epsilon^{3\chi\eta} \tilde{F}_\eta^l + (\kappa_\pi^b - \varphi^b{}_{;\pi}) \epsilon^{3\pi\eta} \tilde{H}_{\eta b}] dA = \\ &= \int_S (\tilde{F}_\eta^l \epsilon^{3\chi\eta} \gamma_{\chi l} + \tilde{H}_{\eta b} \epsilon^{3\pi\eta} \kappa_\pi^b) dA + \int_{S_o} n_3 [\epsilon^{3\chi\eta} \tilde{F}_\eta^l{}_{;\chi} u_l + n_3 \epsilon^{3\pi\eta} (\tilde{H}_{\eta b;\pi} + \epsilon_{b\pi l} \tilde{F}_\eta^l) \varphi^b] dA. \end{aligned}$$

**A.4.3.** Integrálok a (4.24b) felületi integrál átalakításához. Az

$$(A.4.4a) \quad \int_{S_t} n_3 \epsilon^{3\pi\eta} \delta \kappa_{\eta;\pi}^b w_b dA = \oint_{g_o} \tau^\eta w_b \delta \kappa_\eta^b ds + \int_{S_t} n_3 \epsilon^{3\pi\eta} w_{b;\eta} \delta \kappa_\eta^b dA$$

és

$$(A.4.4b) \quad \int_{S_t} n_3 \epsilon^{3\pi\chi} \delta \gamma_{\chi l;\pi} r^l dA = \oint_{g_o} \tau^\eta r^l \delta \gamma_{\chi l} ds + \int_{S_t} n_3 \epsilon^{3\chi\eta} r^l{}_{;\eta} \delta \gamma_{\chi l} dA$$

integrálok helyessége az (A.1.21) STOKES tétel felhasználásával ellenőrizhető.

### A.5. Átalakítások az 5. Fejezethez.

**A.5.1.** Az (5.25) stacionaritási feltételben álló  $I_1^{S_u}$  integrál átalakítása. Legyenek az  $S_o$  felületen vett  $u_i$  és  $H_{kl}$  tenzorok elegendően simák. Az (A.2.21) és (1.33) egyenletek egybevetése alapján írhatjuk, hogy

$$(A.5.1) \quad \int_{S_o} n_3 \epsilon^{3\eta\kappa} \epsilon^{ldp} \mathcal{H}_{\eta d; p\kappa} u_l dA = - \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} \left\{ u_{\lambda|\kappa} \mathcal{H}_{\eta\vartheta; 3} + [(u_{3|\kappa})_{\parallel\lambda} + b_\lambda^\alpha u_{\alpha|\kappa} + b_\beta^\beta u_{(\lambda|\kappa)}] \mathcal{H}_{\eta\vartheta} \right. \\ \left. + [(u_{\lambda|\kappa})_{\parallel\vartheta} + u_{3|\lambda} b_{\vartheta\kappa}] \mathcal{H}_{\eta 3} + b_{\eta\vartheta} u_{(\lambda|\kappa)} \mathcal{H}_{33} \right\} dA \\ - \oint_{g_o} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \tau^\vartheta (u_{\vartheta|\kappa} \mathcal{H}_{\eta 3} - u_{3|\kappa} H_{\eta\vartheta}) ds + \oint_{g_o} \tau^\eta \epsilon^{ldp} \mathcal{H}_{\eta d; p} u_l ds.$$

A fenti átalakítás részletes igazolását illetően a [75] tanulmányra utalunk.

**A.5.2.** A fenti jelölések felhasználásával vetve egybe az (A.2.25) és az (1.34a) egyenleteket kapjuk, hogy

$$(A.5.2) \quad \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa\rho 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} [-\mathcal{H}_{\lambda\kappa} e_{\rho\vartheta; 3} + \mathcal{H}_{\lambda\kappa} e_{\rho 3; \vartheta} + \mathcal{H}_{3\kappa} e_{\rho\vartheta; \lambda} + \mathcal{H}_{\lambda\kappa; 3} e_{\rho\vartheta} - \mathcal{H}_{\lambda\kappa|\vartheta} e_{\rho 3} - \mathcal{H}_{3\kappa|\lambda} e_{\rho\vartheta}] dA = \\ = \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} \{ e_{\lambda\kappa} \mathcal{H}_{\eta\vartheta; 3} + (e_{\kappa\lambda|\parallel\vartheta} + e_{\lambda\kappa|\parallel\vartheta}) \mathcal{H}_{\eta 3} \\ + (e_{3\kappa|\parallel\lambda} + b_\lambda^\alpha e_{\alpha\kappa} - e_{\kappa\lambda; 3} + e_{\lambda 3|\kappa} - b_\beta^\beta e_{\lambda\kappa}) \mathcal{H}_{\eta\vartheta} + b_{\eta\vartheta} e_{\lambda\kappa} \mathcal{H}_{33} \} dA \\ + \oint_{g_o} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} (\tau^\vartheta e_{3\kappa} \mathcal{H}_{\eta\vartheta} - \tau^\lambda e_{\lambda\kappa} \mathcal{H}_{\eta 3}) ds.$$

Ami az (A.2.25) összefüggésre vezető átalakításokat illeti a Függelék **A.2.5.** szakaszára, illetve a [75] tanulmány 5.18 szakaszára utalunk. Ha felcseréljük az  $e$  és  $H$  betűket az (A.5.2) egyenletben, akkor ellenkezőre változik a felületi integrál előjele. Ezt figyelembevéve írhatjuk, hogy

$$(A.5.3) \quad \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa\rho 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} [-e_{\lambda\kappa} \mathcal{H}_{\rho\vartheta; 3} + e_{\lambda\kappa} \mathcal{H}_{\rho 3; \vartheta} + e_{3\kappa} \mathcal{H}_{\rho\vartheta; \lambda} + e_{\lambda\kappa; 3} \mathcal{H}_{\rho\vartheta} - e_{\lambda\kappa|\vartheta} \mathcal{H}_{\rho 3} - e_{3\kappa|\lambda} \mathcal{H}_{\rho\vartheta}] dA = \\ = \int_{S_o} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \epsilon^{\lambda\vartheta 3} \left\{ \mathcal{H}_{\lambda\kappa} e_{\eta\vartheta; 3} + (\mathcal{H}_{\kappa\lambda|\parallel\vartheta} + \mathcal{H}_{\lambda\kappa|\parallel\vartheta}) e_{\eta 3} \right. \\ \left. + (\mathcal{H}_{3\kappa|\parallel\lambda} + b_\lambda^\alpha \mathcal{H}_{\alpha\kappa} - \mathcal{H}_{\kappa\lambda; 3} + \mathcal{H}_{\lambda 3|\kappa} - b_\beta^\beta \mathcal{H}_{\lambda\kappa}) e_{\eta\vartheta} + b_{\eta\vartheta} \mathcal{H}_{\lambda\kappa} e_{33} \right\} dA \\ + \oint_{g_o} n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} (\tau^\vartheta \mathcal{H}_{3\kappa} e_{\eta\vartheta} - \tau^\lambda \mathcal{H}_{\lambda\kappa} e_{\eta 3}) ds.$$

**A.5.3.** Az  $I_L^G$  integrál átalakítása. Az (5.26), (5.29), (5.31), (5.33) és (5.35b) egyenletek felhasználásával adódik, hogy

$$(A.5.4) \quad I_L^G = I_1^G + I_2^G + I_3^G + I_1^{G\delta w} = \\ = \int_g n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \tau^\vartheta (\delta \mathcal{H}_{\vartheta\kappa} \hat{u}_{3|\eta} - \delta \mathcal{H}_{3\kappa} \hat{u}_{\vartheta|\eta}) ds - \int_g \tau^\eta \epsilon^{ldp} \delta \mathcal{H}_{\eta d; p} \hat{u}_l ds \\ - \int_g n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \tau^\vartheta (\delta \mathcal{H}_{\vartheta\kappa} e_{\eta 3}^U - \delta \mathcal{H}_{3\kappa} e_{\eta\vartheta}^U) ds - \int_g n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \tau^\vartheta (\delta \mathcal{H}_{\vartheta\kappa} e_{\eta 3}^T - \delta \mathcal{H}_{3\kappa} e_{\eta\vartheta}^T) ds \\ + \int_g n_3 \epsilon^{\kappa\eta 3} \tau^\vartheta (\delta w_{\vartheta|\kappa} e_{\eta 3}^T - \delta w_{3|\kappa} e_{\eta\vartheta}^T) ds - \int_g \tau^\eta \epsilon^{ldp} e_{\eta d; p}^T \delta w_l ds.$$

Az utóbbi egyenlet világosan mutatja azon vonalintegrálok szerkezetét, amelyeket egyszerűen összefüggő tartomány esetén kapunk az átalakítások során.

A továbbiak célja az (A.5.4) integrál alkalmasabb alakra történő transzformációja.

Az átalakítások során, többek között, a következő egyenleteket használjuk fel:

$$(A.5.5) \quad \delta w_{[\vartheta|\kappa]} = -\epsilon_{\vartheta\kappa 3} \delta r^3, \quad \delta w_{(\eta|\vartheta)} = \delta w_{\vartheta|\eta} + \epsilon_{\vartheta\eta 3} \delta r^3, \quad \xi \in S_t$$

ahol  $\delta r^3$  a vonatkozó vektorinvariáns harmadik összetevője.

Következik az (5.21b) egyenletből, hogy

$$\delta \mathcal{H}_{\lambda\eta; 3} - \delta \mathcal{H}_{3\eta; \lambda} = \delta \mathcal{H}_{3|\lambda|\parallel\eta} + b_\eta^\alpha \delta \mathcal{H}_{\alpha\lambda} - \delta w_{3|\lambda|\parallel\eta} - b_\eta^\alpha \delta w_{\alpha|\lambda}, \quad \xi \in S_t$$

ahonnan a  $0 = b_{\lambda\eta} (\delta \mathcal{H}_{33} - \delta w_{3; 3})$  összefüggés jobboldalhoz történő hozzáadásával – lásd a (5.24) összefüggést –, és az (A.1.10) szabály figyelembevételével kapjuk, hogy

$$(A.5.6) \quad \delta \mathcal{H}_{\lambda\eta; 3} - \delta \mathcal{H}_{3\eta; \lambda} = \delta \mathcal{H}_{3|\lambda|\parallel\eta} + b_\eta^\alpha \delta \mathcal{H}_{\alpha\lambda} - b_{\lambda\eta} \delta H_{33} - (\delta w_{3|\lambda|\parallel\eta} + b_\eta^\alpha \delta w_{\alpha|\lambda} - b_{\lambda\eta} \delta w_{3; 3}) \\ = \delta H_{3\lambda|\parallel\eta} - \delta w_{3; \lambda\eta}.$$

Nyilvánvaló a (5.21a) képlet alapján, hogy

$$(A.5.7) \quad \epsilon^{3\lambda\vartheta} \delta \mathcal{H}_{\vartheta\eta;\lambda} = \epsilon^{3\lambda\vartheta} \frac{1}{2} (\delta w_{\vartheta;\lambda\eta} + \delta w_{\eta;\vartheta\lambda}) = \epsilon^{3\lambda\vartheta} \frac{1}{2} \delta w_{\vartheta;\lambda\eta}. \quad \xi \in g$$

Különös figyelmet igényel a  $\binom{1,i}{g}$   $i = 1, \dots, 4$  görbéken végzett parciális integrálás, mivel szakadása van a  $\delta w_l$  vektormezőnek a  $P_{1i}$  pontokban.

Tekintsük most az  $I_1^G$  vonalintegrált — lásd a (5.26) egyenletet, vagypedig az (A.5.4) képlet első sorát. A

$$(A.5.8) \quad -\tau^\eta \epsilon^{ldp} \delta \mathcal{H}_{\eta d;p} \hat{u}_l = \tau^\eta \epsilon^{3\lambda\vartheta} \hat{u}_3 + \tau^\eta \epsilon^{\vartheta 3\lambda} (\delta \mathcal{H}_{\lambda\eta;3} - \delta \mathcal{H}_{3\eta|\lambda}) \hat{u}_\vartheta \quad \xi \in S_u$$

felbontás felhasználásával helyettesíthetővé válnak az (A.5.6) és (A.5.7) képletek. Ezután lehetőség nyílik a parciális integrálásokra a  $g$  görbe mentén. Végül helyettesítsük a  $\delta \mathcal{H}_{\lambda\kappa}$ -t és  $\delta \mathcal{H}_{3\lambda}$ -t adó (5.21a) és (5.23) képleteket is. A szükséges indexátnevezések után

$$(A.5.9) \quad I_1^G = I_5^G + \Sigma^1 = \int_g \tau^\eta \epsilon^{3\lambda\vartheta} \frac{1}{2} \delta w_{\lambda|\vartheta} \hat{u}_{3|\eta} ds - \int_g \tau^\eta \epsilon^{\vartheta 3\lambda} (\delta w_{(\lambda;3)} - \delta w_{3;\lambda}) \hat{u}_{\vartheta|\eta} ds \\ - \int_g \tau^\eta \epsilon^{\vartheta 3\lambda} \delta w_{\lambda;3} \hat{u}_{\vartheta|\eta} ds - \int_g \tau^\eta \epsilon^{3\kappa\eta} \delta w_{(\eta|\vartheta)} \hat{u}_{3|\kappa} ds \\ + \sum_{i=1,3} \left\{ \epsilon^{\vartheta 3\lambda} (\delta w_{(\lambda;3)} - \delta w_{3|\lambda}) \hat{u}_\vartheta \Big|_{P_{1i}} - \epsilon^{\vartheta 3\lambda} (\delta w_{(\lambda;3)} - \delta w_{3|\lambda}) \hat{u}_\vartheta \Big|_{P_{1,i+1}} \right\}$$

az eredmény. Figyeljük meg, hogy a  $\Sigma^1$  módon jelölt tagok tükrözik a tartomány többszörösen összefüggő voltát és azt a körülményt is, hogy vegyes peremértékfeladatról van szó.

Most pedig az  $I_3^G + I_1^{G\delta w}$  vonalintegrálra fordítjuk a figyelmet — lásd az (5.31) és (5.33) egyenleteket, vagypedig az (A.5.4) kifejezés utolsó sorát. Az  $\tau^\eta \epsilon^{ldp} e_{\eta d;p} \delta w_l$  összeg felbontását — a részleteket illetően az (A.5.8) egyenletre utalunk — és az (5.21a), (5.23), valamint az (A.5.5) egyenletek helyettesítését követő alkalmas átrendezés után

$$(A.5.10) \quad I_3^G + I_1^{G\delta w} = \int_g \tau^\eta \epsilon^{3\lambda\vartheta} e_{\vartheta\eta;\lambda} \delta w_3 ds + \int_g \tau^\eta \epsilon^{\vartheta 3\lambda} (e_{\lambda\eta;3}^T - e_{3\eta|\lambda}^T) \delta w_\vartheta ds \\ + \int_g \tau^\eta e_{3\eta}^T \delta r^3 ds + \int_g \tau^\eta \epsilon^{\kappa\eta 3} e_{\eta\vartheta}^T \delta w_{[\kappa;3]} ds.$$

Alkalmasabb alakra hozható az  $I_L^G$  vonalintegrál, ha az  $I_1^G$ -t és  $I_3^G + I_1^{G\delta w}$ -t adó (A.5.9) és (A.5.10) képleteket helyettesítjük, és ezt követően pedig az  $I_2^G$ -t adó képletrészekbe — lásd az (A.5.4)<sub>2</sub> kifejezés harmadik sorát — írjuk (5.21a) és (5.23) alapján  $\delta \mathcal{H}_{\lambda\kappa}$  és  $\delta \mathcal{H}_{\lambda 3}$  értékét. Ezt követően helyettesítsük az (A.5.5)<sub>2</sub> egyenletből  $\delta w_{(\eta|\vartheta)}$  értékét az  $[I_1^G \text{ (A.5.9)}] \{I_2^G\}$  kifejezések [utolsó] {első} vonalintegráljába. Alkalmas átrendezés után lehetőség nyílik az

$$\int_g \tau^\eta \epsilon^{\kappa\vartheta 3} (e_{\kappa 3}^U - \hat{u}_{3|\kappa}) \delta w_{\vartheta|\eta} ds = - \int_g \frac{d}{ds} [\epsilon^{\kappa\vartheta 3} (e_{\kappa 3}^U - \hat{u}_{3|\kappa})] \delta w_\vartheta ds + \Sigma^2$$

átalakítás felhasználására, ahol

$$(A.5.11) \quad \Sigma^2 = \sum_{i=1,3} \left\{ \epsilon^{\kappa\vartheta 3} (e_{\kappa 3}^U - \hat{u}_{3|\kappa}) [\delta w_\vartheta] \Big|_{P_{1i}} - \epsilon^{\kappa\vartheta 3} (e_{\kappa 3}^U - \hat{u}_{3|\kappa}) [\delta w_\vartheta] \Big|_{P_{1,i+1}} \right\}.$$

Ha emellett "megnöveljük" az  $I_L^G$  képlet jobboldalát az

$$0 = - \int_g \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{2} \epsilon^{3\lambda\vartheta} \hat{u}_{\vartheta|\lambda} \right\} \delta w_3 ds + \int_g \tau^\eta \frac{1}{2} \epsilon^{3\lambda\vartheta} \hat{u}_{\vartheta|\lambda} \delta w_{3|\eta} ds + \Sigma^3$$

kifejezéssel, amelyben

$$(A.5.12) \quad \Sigma^3 = \sum_{i=1,3} \left\{ \frac{1}{2} \epsilon^{3\lambda\vartheta} \hat{u}_{\vartheta|\lambda} [\delta w_3] \Big|_{P_{1,i}} - \frac{1}{2} \epsilon^{3\lambda\vartheta} \hat{u}_{\vartheta|\lambda} [\delta w_3] \Big|_{P_{1,i+1}} \right\},$$

akkor egy utolsó átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
I_L^G &= I_5^G + I_2^G + I_3^G + I_1^{G\delta w} + \Sigma^1 + \Sigma^2 + \Sigma^3 = \\
&= \int_g \{ \tau^\eta \epsilon^{\vartheta\lambda 3} (e_{\vartheta\eta;3} - e_{3\eta|\vartheta}) - \frac{d}{ds} [\epsilon^{\vartheta\lambda 3} (e_{\vartheta 3} - \hat{u}_{3|\vartheta})] \} \delta w_\lambda ds \\
&\quad + \int_g [\tau^\eta \epsilon^{3\rho\vartheta} e_{\vartheta\eta|\rho} - \frac{d}{ds} (\frac{1}{2} \epsilon^{3\lambda\vartheta} \hat{u}_{\vartheta|\lambda})] \delta w_{3\lambda} ds \\
&\quad + \int_g (e_{\eta 3}^U - e_{\eta 3}^T) \delta r^3 \tau^\eta ds + I_6^G + \Sigma^1 + \Sigma^2 + \Sigma^3 .
\end{aligned}
\tag{A.5.13}$$

A fenti egyenletben

$$\begin{aligned}
I_6^G &= - \int_g \tau^\eta \epsilon^{\vartheta 3\lambda} 2 \hat{u}_{(\eta|\vartheta)} \delta w_{(\lambda|3)} ds - \int_g \tau^\eta \epsilon^{\vartheta 3\lambda} e_{(\eta|\vartheta)}^T \delta w_{[3|\lambda]} ds \\
&\quad + \int_g \tau^\eta \epsilon^{\vartheta 3\lambda} (\hat{u}_{(\vartheta|\eta)} - \hat{u}_{[\vartheta|\eta]}) \delta w_{3|\lambda} ds \\
&\quad + \int_g \tau^\eta \epsilon^{\vartheta 3\lambda} \hat{u}_{[\eta|\vartheta]} \delta w_{[3|\lambda]} ds + \int_g \tau^\eta \epsilon^{\vartheta 3\lambda} e_{(\eta|\vartheta)}^U \delta w_{(3|\lambda)} ds = \\
&= \int_g \tau^\eta \epsilon^{\vartheta 3\lambda} (e_{(\eta|\vartheta)}^U - \hat{u}_{(\eta|\vartheta)}) \delta w_{(3|\lambda)} ds - \int_g \tau^\eta \epsilon^{\vartheta 3\lambda} (e_{(\eta|\vartheta)}^T - \hat{u}_{(\eta|\vartheta)}) \delta w_{[3|\lambda]} ds .
\end{aligned}
\tag{A.5.14}$$

## A.6. Átalakítások a 6. Fejezethez.

**A.6.1.** *Képlet az  $I_1^{MSu}$  integrál átalakításához.* Nem nehéz megmutatni az (A.1.21) STOKES tétel értelemeszerű alkalmazásával végrehajtott parciális integrálásokkal, hogy

$$\begin{aligned}
(A.6.1) \quad \int_{S_o} [n_3 \epsilon^{3\eta\pi} F_{\pi;:\eta}^l u_l + n_3 \epsilon^{3\eta\pi} (H_{\eta b;\pi} + \epsilon_{b\pi s} F_{\eta}^s) \varphi^b] dA &= \oint_{g_o} (\tau^\eta u_l F_{\eta}^l + \tau^\eta \varphi^b H_{\eta b}) ds \\
&\quad - \int_{S_o} [n_3 \epsilon^{3\chi\eta} (u_{l;\chi} + \epsilon_{l\chi b} \varphi^b) F_{\eta}^l + n_3 \epsilon^{3\eta\pi} \varphi^b_{;:\eta} H_{\eta b}] dA .
\end{aligned}$$

**A.6.2.** Hasonló módon igazolható, hogy

$$\begin{aligned}
(A.6.2) \quad \int_{S_o} [n_3 \epsilon^{3\chi\eta} \gamma_{\chi l} r^l_{;:\eta} + n_3 \epsilon^{3\pi\eta} \kappa_{\pi}^b (w_{b;\eta} + \epsilon_{b\eta s} r^s)] dA &= \oint_{g_o} (\tau^\eta \gamma_{\eta l} r^l + \tau^\eta \kappa_{\eta}^b w_b) ds \\
&\quad + \int_{S_o} [n_3 \epsilon^{3\pi\chi} (\gamma_{\chi l;\pi} + \epsilon_{\chi l b} \kappa_{\pi}^b) r^l + n_3 \epsilon^{3\eta\pi} \kappa_{\pi;:\eta}^b w^b] dA .
\end{aligned}$$

## A.7. Átalakítások a 7. Fejezethez.

**A.7.1.** *A GREEN-GAUSS féle integrálátalakítás képlete.* Tegyük fel, hogy síkfelület az (A.1.22) képlet  $S_o$  felülete – lásd az A.1. ábrát. Jelölje, ez esetben,  $A$  ezt a korlátos síktartományt és feleljen meg  $\mathcal{L}$  a  $g_o$  peremgörbének. Nyilvánvaló az ábra alapján, hogy a  $\nu_\eta$  vektor az  $A$  síktartomány külső normálisa lesz. Jelölje  $n_\eta$  ezt a normálist. Megtartva az egyéb jelöléseket, de ügyelve arra, hogy a felületi kovariáns deriváltakból kovariáns deriváltak lesznek az (A.1.22) parciális integrálási képletből a

$$(A.7.1) \quad \int_A b_{l;:\eta}^\eta c_l dA = \oint_{\mathcal{L}} n_\eta b_l^\eta c_l ds - \int_A b_l^\eta c_{l;\eta} dA$$

összefüggést kapjuk. Ez az egyenlet a GREEN-GAUSS integrálátalakításon alapuló parciális integrálás képlete.

**A.7.2.** *A (7.18) extremum feltétel átalakítása.* A (7.21)<sub>1,2</sub> képletek (7.18) extremum feltételbe történő helyettesítésével a

$$\begin{aligned}
\delta K &= - \int_A [\gamma_{\pi\rho} \epsilon^{\pi\mu 3} \delta \mathcal{F}_3^\rho_{;\mu} + \kappa_\nu^3 \epsilon^{\nu\psi 3} (\delta \mathcal{H}_{33;\psi} + \epsilon_{3\psi\rho} \delta \mathcal{F}_3^\rho)] dA + \\
&\quad \int_{\mathcal{L}_u} (n_\pi \epsilon^{\pi\mu 3} \delta \mathcal{F}_3^\rho_{;\mu} \hat{u}_\rho + n_\nu \epsilon^{\nu\psi 3} (\delta \mathcal{H}_{33;\psi} + \epsilon_{3\psi\rho} \delta \mathcal{F}_3^\rho) \hat{\varphi}^3) ds = 0
\end{aligned}$$

alakot kapjuk. Az (A.7.1) GAUSS–GREEN integrálatalakítási tétel értelemszerű alkalmazását követő alkalmas átrendezéssel és indexátnevezésekkel innen

$$(A.7.2) \quad \delta K = - \int_A [\epsilon^{\nu\psi 3} (\gamma_{\pi\rho;\nu} + \epsilon_{3\psi\rho} \kappa_\nu^3) \delta \mathcal{F}_3^\rho + \epsilon^{3\pi\rho} \kappa_\rho^3 ;_\pi \delta \mathcal{H}_{33}] dA + \\ + \int_{\mathcal{L}_u \cup \mathcal{L}_t} (n_\mu \epsilon^{\mu\pi 3} \gamma_{\pi\rho} \delta \mathcal{F}_3^\rho + n_\pi \epsilon^{\pi\nu 3} \kappa_\nu^3 \delta \mathcal{H}_{33}) ds + \\ + \int_{\mathcal{L}_u} [n_\pi \epsilon^{\pi\mu 3} \delta \mathcal{F}_3^\rho ;_\mu \hat{u}_\rho + n_\nu \epsilon^{\nu\psi 3} (\delta \mathcal{H}_{33;\psi} + \epsilon_{3\psi\rho} \delta \mathcal{F}_3^\rho) \hat{\varphi}^3] ds$$

az eredmény. Könnyű ellenőrizni a (7.9)<sub>1,2</sub> képletek felhasználásával, hogy a fenti egyenlet első, második és harmadik sora rendre a (7.24) képletet alkotó  $\delta K_A$ ,  $\delta K_{\mathcal{L}}$  és  $\delta K_u$  – v.ö.: (7.25), (7.26a) és (7.26b).

**A.7.3.** A  $\delta K_{\mathcal{L}}$  és  $\delta K_u$  integrálok átalakítása. A  $\delta K_{\mathcal{L}}$ -t adó (7.26a) képletből a

$$(A.7.3) \quad [\mathbf{g}_3 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{ti}})] \cdot \mathbf{g}_\rho = -\epsilon_{\rho 3\sigma} \mathbf{g}^\sigma \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{ti}})$$

átalakítás, a 7.3. szakasz első bekezdése alapján írható

$$C_{33} = C_{33} \quad i = 1, 3; \quad C_{33} = C_{33} \quad i = 5 \quad \text{és} \quad C_{(ti)}^\psi = C_{(0i)}^\psi \quad i = 1, 3; \quad C_{(ti)}^\psi = C_{(11)}^\psi \quad i = 5$$

jelölések, az  $n_\pi \epsilon^{\pi\mu 3} = \tau^\mu$  összefüggés, valamint az integrál additivitásának kihasználásával kapjuk, hogy

$$(A.7.4) \quad \delta K_{\mathcal{L}} = \int_{\mathcal{L}_u} [\tau^\pi \gamma_{\pi\rho} \delta \mathcal{F}_3^\rho + \tau^\pi \kappa_\pi^3 \delta \mathcal{H}_{33}] ds + \\ + \oint_{\mathcal{L}_1} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds \delta C_{33} + \oint_{\mathcal{L}_1} \tau^\pi [\gamma_{\pi\rho} - \kappa_\pi^3 \epsilon_{\rho 3\sigma} \mathbf{g}^\sigma \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{t5}})] \mathbf{g}^\rho ds \cdot \delta C_{(11)}^\psi \mathbf{g}_\psi + \\ + \sum_{i=1,3} \int_{L_{ti}} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds \delta C_{33} + \int_{L_{ti}} \tau^\pi [\gamma_{\pi\rho} - \kappa_\pi^3 \epsilon_{\rho 3\sigma} \mathbf{g}^\sigma \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{t5}})] \mathbf{g}^\rho ds \cdot \delta C_{(0i)}^\psi \mathbf{g}_\psi.$$

A  $\delta K_{\mathcal{L}}$ -t adó (7.25) képletből az  $n_\pi \epsilon^{\pi\mu 3} = \tau^\mu$  összefüggés helyettesítését követő parciális integrálások, majd az (A.7.3) összefüggés, valamint a (7.23) és (7.24) képletek helyettesítése után a

$$\delta K_u = - \int_{\mathcal{L}_u} \left[ \frac{d\hat{u}_\rho}{ds} + \tau^\pi \epsilon_{\rho\pi 3} \hat{\varphi}^3 \right] \delta \mathcal{F}_3^\rho ds - \int_{\mathcal{L}_u} \frac{d\hat{\varphi}^3}{ds} \delta \mathcal{H}_{33} ds + \\ - \sum_{i=1,3} \hat{\varphi}^3 \delta \mathcal{H}_{33} \Big|_{P_{ti}^{t,i+1}} - \sum_{i=1,3} \hat{u}_\rho \delta \mathcal{F}_3^\rho \Big|_{P_{ti}^{t,i+1}},$$

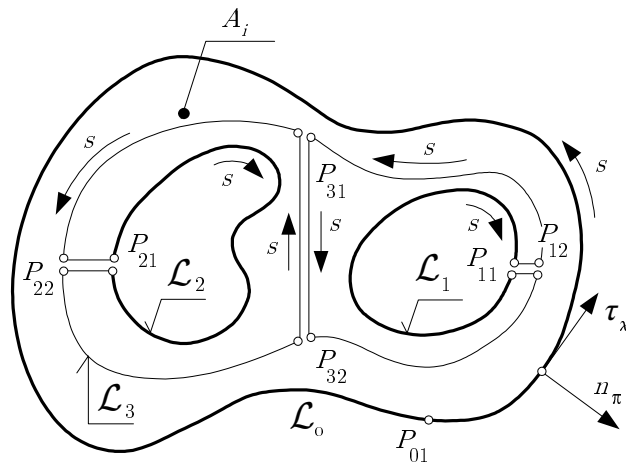
vagy ami ugyanaz a

$$(A.7.5) \quad \delta K_u = - \int_{\mathcal{L}_u} \left[ \frac{d\hat{u}_\rho}{ds} + \tau^\pi \epsilon_{\rho\pi 3} \hat{\varphi}^3 \right] \delta \mathcal{F}_3^\rho ds - \int_{\mathcal{L}_u} \frac{d\hat{\varphi}^3}{ds} \delta \mathcal{H}_{33} ds + \\ - \sum_{i=1,3} \hat{\varphi}^3 \Big|_{P_{ti}^{t,i+1}} \delta C_{33} - \sum_{i=1,3} \hat{u}_\rho \mathbf{g}^\rho \Big|_{P_{ti}^{t,i+1}} \cdot \delta C_{(0i)}^\psi \mathbf{g}_\psi + \\ + \sum_{i=1,3} \hat{\varphi}^3 \epsilon_{\rho 3\sigma} \mathbf{g}^\sigma \cdot (\mathbf{r}_{P_{t,i+1}} - \mathbf{r}_{P_{ti}}) \mathbf{g}^\rho \Big|_{P_{t,i+1}} \cdot \delta C_{(0i)}^\psi \mathbf{g}_\psi$$

eredmény következik. Az (A.7.4) és (A.7.5) képletek összege a (7.27) extremum feltétel baloldalát adja.

**A.7.4.** A független nagybani kompatibilitási feltételek. Tekintsük az A.2. ábrán vázolt háromszorosan összefüggő tartományt. Tekintsük továbbá a tartományon az önmagát nem metsző zárt görbék egy seregét. Azt fogjuk mondani, hogy a görbesereg egy görbecsaládot alkot, ha a családot alkotó bármelyik görbe, a görbe nyújtásával, zsugorításával és deformációjával átvihető a család egy másik görbéjébe. Két görbecsalád egymástól független, ha az egyik családnhoz tartozó valamilyen görbe nem vihető át, a görbe nyújtásával, zsugorításával és deformációjával a másik családnhoz tartozó valamilyik görbére. Az ábrán vázolt  $A_i$  tartományon, három egymástól független görbecsalád létezik:

- a ponttá zsugorítható görbék családja,
- az  $\mathcal{L}_1$  peremgörbét körülölelő és arra zsugorítható görbék családja, valamint
- az  $\mathcal{L}_2$  peremgörbét körülölelő és arra zsugorítható görbék családja.



A.2. ábra.

1. MEGJEGYZÉS: Bár a  $P_{12}, P_{31}, P_{22}, P_{32}, P_{12}$  pontokon áthaladó  $\mathcal{L}_3$  görbe mindkét lyukat körülöleli nem tekintjük függetlennek, mivel előállítható az alkalmasan választott és az  $\mathcal{L}_1$ , illetve  $\mathcal{L}_2$ -t körülölelő görbék egyesítésével – az egyesítés során azonban eltávolítva gondoljuk azon közös görbeívet, melyen oda vissza kétszer kell végighaladni (pl.:  $P_{32}P_{12}, P_{12}P_{31}, P_{31}P_{32} + P_{32}P_{31}, P_{31}P_{22}, P_{22}P_{32}$  – az egymás mellett álló két kis kör ugyanazt a pontot jelöli az ábrán).

Azt mondjuk, hogy annyszor(osan) összefüggő a tartomány – jelen esetben háromszorosan – amennyi a független görbecsaládok száma.

A továbbiakban mindig feltételezzük, hogy teljesülnek a (7.28) kompatibilitási feltételek (kompatibilitási differenciálegyenletek) az  $A_i$  tartományon, és erre a körülményre külön még egyszer nem hívjuk fel a figyelmet.

A (7.30) alapján némi átalakítással a

$$(A.7.6) \quad \oint_{\mathcal{L}_1} \tau^\pi [\gamma_{\pi\rho} - \kappa_\pi^3 \mathbf{g}_3 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{11}})] \mathbf{g}^\rho ds = 0, \quad \oint_{\mathcal{L}_2} \tau^\pi [\gamma_{\pi\rho} - \kappa_\pi^3 \mathbf{g}_3 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{21}})] \mathbf{g}^\rho ds = 0$$

módon írható és

$$(A.7.7) \quad \oint_{\mathcal{L}_1} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds = 0, \quad \oint_{\mathcal{L}_2} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds = 0$$

egyenletek a nagybani kompatibilitási feltételek az  $\mathcal{L}_1$  és  $\mathcal{L}_2$  peremgörbéken.

2. MEGJEGYZÉS: Az (A.7.6)<sub>1,2</sub> képletekben az  $A_i$  tartomány más rögzített pontjának helyvektora is állhat az  $\mathbf{r}_{P_{11}}$  és  $\mathbf{r}_{P_{21}}$  helyvektorok helyén. Ezt az állítást formálisan nem igazoljuk.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a fenti nagybani kompatibilitási feltételek fennállása esetén teljesülnek az  $\mathcal{L}_o$  külső peremgörbére vonatkozó

$$(A.7.8) \quad \oint_{\mathcal{L}_o} \tau^\pi [\gamma_{\pi\rho} - \kappa_\pi^3 \mathbf{g}_3 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{11}})] \mathbf{g}^\rho ds = 0, \quad \oint_{\mathcal{L}_o} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds = 0$$

nagybani kompatibilitási feltételek is.

Az igazolást csak a második, az (A.7.8)<sub>2</sub> nagybani kompatibilitási feltételre részletezzük, mivel az első (A.7.8)<sub>1</sub> nagybani kompatibilitási feltétel esetén az azonos gondolatmenet több írásmunkát igényel.

A bizonyítás azon alapul, hogy a (7.28) kompatibilitási differenciálegyenletek fennállása esetén a pontra zsugorítható görbecsaládok bármelyikére, mondjuk az  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1, P_{11}, P_{12}, P_{31}, P_{32}, P_{12}, P_{11}$  görbére nézve, teljesül a

$$(A.7.9) \quad \oint_{\mathcal{L}} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds = 0$$

egyenlet<sup>17</sup>. Pontokkal jelölve az integranduszt és kihasználva az integrál additivitását írhatjuk, hogy

$$(A.7.10) \quad \begin{aligned} \oint_{\mathcal{L}} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds &= \\ &= \int_{\mathcal{L}_1} \dots ds + \int_{P_{11}P_{12}} \dots ds + \int_{P_{12}P_{31}} \dots ds + \int_{P_{31}P_{32}} \dots ds + \int_{P_{32}P_{12}} \dots ds + \int_{P_{12}P_{11}} \dots ds = \end{aligned}$$

<sup>17</sup>Ennek az állításnak igazolása az idézett (7.28) nagybani kompatibilitási feltételekből következő kompatibilitási differenciálegyenletek levezetésén alapul. Ezek igazolását illetően a [41] könyvre utalunk.

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\int_{\mathcal{L}_1} \dots ds}_{=0} + \underbrace{\int_{P_{11}P_{12}} \dots ds + \int_{P_{12}P_{11}} \dots ds}_{=0} + \int_{P_{12}P_{31}} \dots ds + \int_{P_{31}P_{32}} \dots ds + \int_{P_{32}P_{12}} \dots ds = \\
&= \int_{P_{12}P_{31}} \dots ds + \int_{P_{31}P_{32}} \dots ds + \int_{P_{32}P_{12}} \dots ds = 0,
\end{aligned}$$

ahol a kapcsos zárójellel jelölt integrál, valamint a kapcsos zárójellel megjelölt integrálösszeg zérus értékű. Az első esetben az (A.7.8)<sub>1</sub>-re tekintettel, a második esetben pedig azért, mivel kétszer megyünk végig oda vissza ugyanazon a szakaszon.

Mivel az  $\mathcal{L}_1$  görbe és a  $P_{12}, P_{31}, P_{32}, P_{12}$  görbe ugyanahhoz a görbecsaládkhoz tartozik, hiszen az utóbbi körülöleli az  $\mathcal{L}_1$  görbét, adódik a következtetés, hogy: *ha teljesül a nagybani kompatibilitási feltétel egy adott görbecsalád egy tagjára – a jelen esetben az  $\mathcal{L}_1$  görbére –, akkor fennáll annak bármely más tagjára.*

Az utóbbi megállapítás alapján, mivel fennáll a nagybani kompatibilitási feltétel az  $\mathcal{L}_2$  görbére, fennáll az ugyanezen görbecsaládkhoz tartozó  $P_{22}, P_{32}, P_{31}, P_{22}$  görbére is:

$$(A.7.11) \quad \int_{P_{22}P_{32}} \dots ds + \int_{P_{32}P_{31}} \dots ds + \int_{P_{31}P_{22}} \dots ds = 0.$$

Képezzük, kihasználva hogy

$$\int_{P_{31}P_{32}} \dots ds + \int_{P_{32}P_{31}} \dots ds = 0$$

(kétszer megyünk végig oda vissza ugyanazon a szakaszon), az (A.7.10) és (A.7.11) egyenletek összegét:

$$(A.7.12) \quad \int_{P_{12}P_{31}} \dots ds + \int_{P_{31}P_{22}} \dots ds + \int_{P_{22}P_{32}} \dots ds + \int_{P_{32}P_{12}} \dots ds = \int_{\mathcal{L}_3} \dots ds = 0.$$

Az eredmény szerint, ha fennállnak az (A.7.7)<sub>1,2</sub> nagybani kompatibilitási feltételek, akkor fennáll ugyanez a nagybani kompatibilitási feltétel az  $\mathcal{L}_3$  görbén is. Következésképp fennáll az  $\mathcal{L}_3$ -al azonos görbecsaládkhoz tartozó  $\mathcal{L}_o$  görbén is. Ezt akartuk igazolni.

Az (A.7.8)<sub>1</sub> nagybani kompatibilitási feltétel esetén ugyanez a gondolatmenet vezet eredményre.

3. MEGJEGYZÉS: Hasonló gondolatmenettel mutatható ki, hogy a nagybani kompatibilitási feltételek fennállása az  $\mathcal{L}_o, \mathcal{L}_1$ , illetve az  $\mathcal{L}_o, \mathcal{L}_2$  görbéken biztosítja a nagybani kompatibilitási feltételek fennállását az  $\mathcal{L}_2$ , illetve  $\mathcal{L}_1$  görbén.

**A.7.5. Független kiegészítő kompatibilitási feltételek.** Az egyszerűség kedvéért a 8.1. ábra viszonyait – lásd 72. o. – vesszük alapul. Az  $\mathcal{L}_{t1}$  és  $\mathcal{L}_{t3}$  íveken a terhelések, az  $\mathcal{L}_{u2}$  és  $\mathcal{L}_{u4}$  jelű íveken pedig elmozdulásmező és a forgásmező az előírt. Következésképp teljesülnie kell az utóbbi íveken a (7.29) alakváltozási peremfeltételeknek.

Első lépésben megmutatjuk, hogy a (7.31b) alapján írható

$$(A.7.13) \quad \int_{\mathcal{L}_{t1}} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds - \hat{\varphi}^3(s) \Big|_{P_{t1}}^{P_{t2}} = 0$$

kiegészítő kompatibilitási feltétel fennállása esetén – feltételezve, hogy teljesülnek a (7.28) kompatibilitási feltételek (differenciálegyenletek) és a (7.29) alakváltozási peremfeltételek –, fennáll a

$$(A.7.14) \quad \int_{\mathcal{L}_{t3}} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds - \hat{\varphi}^3(s) \Big|_{P_{t3}}^{P_{t4}} = 0$$

kiegészítő kompatibilitási feltétel is.

Mivel a 8.1. ábrán vázolt tartomány egyszerűen összefüggő a (7.28) kompatibilitási feltételek (differenciálegyenletek) fennállása biztosítja a

$$\oint_{\mathcal{L}_o} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds = 0$$

nagybani kompatibilitási feltétel fennállását. Kihhasználva az integrál additivitását és helyettesítve az (A.7.13)-t írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
(A.7.15) \quad \oint_{\mathcal{L}_o} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds &= \int_{\mathcal{L}_{t1}} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds + \int_{\mathcal{L}_{u2}} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds + \int_{\mathcal{L}_{t3}} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds + \int_{\mathcal{L}_{u4}} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds = \\
&= \hat{\varphi}^3(P_{t2}) - \hat{\varphi}^3(P_{t1}) + \int_{\mathcal{L}_{u2}} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds + \int_{\mathcal{L}_{t1}} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds + \int_{\mathcal{L}_{u4}} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds = 0.
\end{aligned}$$



Ha teljesülnek a (7.29) alakváltozási peremfeltételek, akkor

$$\int_{\mathcal{L}_{u2}} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds = \hat{\varphi}^3(P_{t3}) - \hat{\varphi}^3(P_{t2}) \quad \text{és} \quad \int_{\mathcal{L}_{u4}} \tau^\pi \kappa_\pi^3 ds = \hat{\varphi}^3(P_{t1}) - \hat{\varphi}^3(P_{t4}),$$

és ezzel azonnal adódik (A.7.15)-ből az (A.7.14) fennállása. Ez azt jelenti, hogy eggyel kevesebb kiegészítő kompatibilitási feltétel szükséges a forgásmező esetén – kettő helyett egy.

A második lépésben megmutatjuk, hogy a (7.31a) alapján írható

$$(A.7.16) \quad \int_{\mathcal{L}_{t1}} [\tau^\pi \gamma_{\pi\rho} \mathbf{g}^\rho - \tau^\pi \kappa_\pi^3 \mathbf{g}_3 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{t1}})] ds + \mathbf{u}_{P_{t1}} - \mathbf{u}_{P_{t2}} + \hat{\varphi}_{P_{t2}} \times (\mathbf{r}_{P_{t2}} - \mathbf{r}_{P_{t1}}) = 0$$

kiegészítő kompatibilitási feltétel fennállása esetén – feltételezve, hogy teljesülnek a (7.28) kompatibilitási feltételek (differenciálegyenletek), a (7.29) alakváltozási peremfeltételek és a forgásmezővel kapcsolatos (A.7.13), (A.7.14) kiegészítő kompatibilitási feltételek –, fennáll a

$$(A.7.17) \quad \int_{\mathcal{L}_{t1}} [\tau^\pi \gamma_{\pi\rho} \mathbf{g}^\rho - \tau^\pi \kappa_\pi^3 \mathbf{g}_3 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{t3}})] ds + \mathbf{u}_{P_{t3}} - \mathbf{u}_{P_{t4}} + \hat{\varphi}_{P_{t4}} \times (\mathbf{r}_{P_{t4}} - \mathbf{r}_{P_{t3}}) = 0$$

kiegészítő kompatibilitási feltétel is.

A tekintett és 8.1. ábrán vázolt tartomány egyszeresen összefüggő volta miatt a (7.28) kompatibilitási feltételek (differenciálegyenletek) fennállása biztosítja a

$$\oint_{\mathcal{L}_{t1}} [\tau^\pi \gamma_{\pi\rho} \mathbf{g}^\rho - \tau^\pi \kappa_\pi^3 \mathbf{g}_3 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{t1}})] ds$$

nagybani kompatibilitási feltétel fennállását. Kihhasználva az integrál additivitását a fenti egyenlet a

$$(A.7.18) \quad \sum_{i=1,3} \int_{\mathcal{L}_{ti}} [\tau^\pi \gamma_{\pi\rho} \mathbf{g}^\rho - \tau^\pi \kappa_\pi^3 \mathbf{g}_3 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{t1}})] ds + \\ + \sum_{i=2,4} \int_{\mathcal{L}_{ui}} [\tau^\pi \gamma_{\pi\rho} \mathbf{g}^\rho - \tau^\pi \kappa_\pi^3 \mathbf{g}_3 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{t1}})] ds = 0$$

alakba írható át. Mivel az  $\mathcal{L}_{ui}$ ,  $i = 2, 4$  jelű íven teljesülnek a (7.29)<sub>1,2</sub> alakváltozási peremfeltételek kihasználhatók lesznek a továbbiakban a

$$(A.7.19a) \quad -\tau^\pi \kappa_\pi^3 \mathbf{g}_3 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{t1}}) = \frac{d\hat{\varphi}}{ds} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{t1}}) = \\ = -\frac{d}{ds} \hat{\varphi} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{t1}}) + \hat{\varphi} \times \frac{d\mathbf{r}}{ds} = -\frac{d}{ds} \hat{\varphi} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{t1}}) + \hat{\varphi} \times \boldsymbol{\tau}$$

és a

$$(A.7.19b) \quad \tau^\pi \gamma_{\pi\rho} \mathbf{g}^\rho = \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \boldsymbol{\tau} \times \hat{\varphi}$$

átalakítások. Valóban, az (A.7.19a,b) átalakítások helyettesítése az  $\mathcal{L}_{ui}$ ,  $i = 2, 4$  íveken vett integrálokba, majd az  $s$  szerinti integrálás elvégzése és az ezt követő rendezés az (A.7.18) egyenlet egy áttekinthetőbb alakjára vezet:

$$(A.7.20) \quad \underbrace{\int_{\mathcal{L}_{t1}} [\tau^\pi \gamma_{\pi\rho} \mathbf{g}^\rho - \tau^\pi \kappa_\pi^3 \mathbf{g}_3 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{t1}})] ds + \mathbf{u}_{P_{t1}} - \mathbf{u}_{P_{t2}} + \hat{\varphi}_{P_{t2}} \times (\mathbf{r}_{P_{t2}} - \mathbf{r}_{P_{t1}})}_{=0} + \\ + \int_{\mathcal{L}_{t3}} [\tau^\pi \gamma_{\pi\rho} \mathbf{g}^\rho - \tau^\pi \kappa_\pi^3 \mathbf{g}_3 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{t1}})] ds + \mathbf{u}_{P_{t2}} - \mathbf{u}_{P_{t4}} + \hat{\varphi}_{P_{t4}} \times (\mathbf{r}_{P_{t4}} - \mathbf{r}_{P_{t3}}) + \\ + (\hat{\varphi}_{P_{t4}} - \hat{\varphi}_{P_{t4}}) \times (\mathbf{r}_{P_{t3}} - \mathbf{r}_{P_{t1}}) = 0.$$

A fenti egyenlet utolsó sora az (A.7.14) kiegészítő kompatibilitási feltétel figyelembevételével az

$$(A.7.21) \quad (\hat{\varphi}_{P_{t4}} - \hat{\varphi}_{P_{t4}}) \times (\mathbf{r}_{P_{t3}} - \mathbf{r}_{P_{t1}}) = \int_{\mathcal{L}_{t3}} \tau^\pi \kappa_\pi^3 \mathbf{g}_3 \times (\mathbf{r}_{P_{t3}} - \mathbf{r}_{P_{t1}}) ds$$

alakot ölti. Ennek helyettesítése az (A.7.20) képletbe az igazolni kívánt (A.7.17) kiegészítő kompatibilitási feltételt adja. Következésképp további kettővel kevesebb a független kiegészítő kompatibilitási feltételek száma – a fenti vektoregyenlet két skaláregyenlettel egyenértékű.

4. MEGJEGYZÉS: A 7.1. ábrán szemléltetett összetettebb esetre, de más összetettebb esetekre is, a fentiekben ismertetett gondolatmenetek elemeinek kombinálásával végezhető el az igazolás. Ezek ismeretétől eltekintünk.

### A.8. Átalakítások a 8. Fejezethez.

**A.8.1.** *Független nagybani nagybani egyértékűségi feltételek.* A viszonyokat most is az A.2. ábrán vázolt háromszorosán összefüggő tartomány szemlélteti. A gondolatmenet szinte szó szerint megegyezik az A.7.4. szakasz gondolatmenetével.

Hangsúlyozni kívánjuk, hogy most is *feltételezzük a kompatibilitási feltételek – jelen esetben a (8.3) kompatibilitási differenciálegyenletek – teljesülését az  $A_i$  tartományon*, és erre a körülményre külön még egyszer nem hívjuk fel a figyelmet.

Az (8.20) alapján írható

$$(A.8.1) \quad \int_{\mathcal{L}_1} n_\pi [\epsilon^{\pi\kappa 3} e_{\kappa\lambda} - \delta_\lambda^\pi \varphi^3] \mathbf{g}^\lambda ds = 0 \quad \text{és} \quad \int_{\mathcal{L}_2} n_\pi [\epsilon^{\pi\kappa 3} e_{\kappa\lambda} - \delta_\lambda^\pi \varphi^3] \mathbf{g}^\lambda ds = 0$$

egyenletek a nagybani egyértékűségi feltételek az  $\mathcal{L}_1$  és  $\mathcal{L}_2$  peremgörbéken. A továbbiakban megmutatjuk, hogy a fenti nagybani egyértékűségi feltételek fennállása esetén teljesül az

$$(A.8.2) \quad \int_{\mathcal{L}_o} n_\pi [\epsilon^{\pi\kappa 3} e_{\kappa\lambda} - \delta_\lambda^\pi \varphi^3] \mathbf{g}^\lambda ds = 0$$

nagybani egyértékűségi feltétel is.

A bizonyítás azon alapul, hogy a (8.3) kompatibilitási feltételek fennállása esetén a pontra zsugorítható görbecsaládok bármelyikére, mondjuk az  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1, P_{11}, P_{12}, P_{31}, P_{32}, P_{12}, P_{11}$  görbére nézve, teljesül a

$$(A.8.3) \quad \int_{\mathcal{L}} n_\pi [\epsilon^{\pi\kappa 3} e_{\kappa\lambda} - \delta_\lambda^\pi \varphi^3] \mathbf{g}^\lambda ds = 0$$

egyenlet<sup>18</sup>. Pontokkal jelölve az integranduszt és kihasználva az integrál additivitását írhatjuk, hogy

$$(A.8.4) \quad \begin{aligned} & \int_{\mathcal{L}} n_\pi [\epsilon^{\pi\kappa 3} e_{\kappa\lambda} - \delta_\lambda^\pi \varphi^3] \mathbf{g}^\lambda ds = \\ &= \int_{\mathcal{L}_1} \dots ds + \int_{P_{11}P_{12}} \dots ds + \int_{P_{12}P_{31}} \dots ds + \int_{P_{31}P_{32}} \dots ds + \int_{P_{32}P_{12}} \dots ds + \int_{P_{12}P_{11}} \dots ds = \\ &= \underbrace{\int_{\mathcal{L}_1} \dots ds}_{=0} + \underbrace{\int_{P_{11}P_{12}} \dots ds + \int_{P_{12}P_{11}} \dots ds}_{=0} + \int_{P_{12}P_{31}} \dots ds + \int_{P_{31}P_{32}} \dots ds + \int_{P_{32}P_{12}} \dots ds = \\ &= \int_{P_{12}P_{31}} \dots ds + \int_{P_{31}P_{32}} \dots ds + \int_{P_{32}P_{12}} \dots ds = 0, \end{aligned}$$

ahol a kapcsos zárójellel jelölt integrál, valamint a kapcsos zárójellel megjelölt integrálösszeg zérus értékű. Az első esetben az (A.8.1)<sub>1</sub>-re tekintettel, a második esetben pedig azért, mivel kétszer megyünk végig oda vissza ugyanazon a szakaszon.

Mivel az  $\mathcal{L}_1$  görbe és a  $P_{12}, P_{31}, P_{32}, P_{12}$  görbe ugyanahhoz a görbecsaládhoz tartozik, ui. az utóbbi körülöleli az  $\mathcal{L}_1$  görbét, adódik a következtetés, hogy: *ha teljesül a nagybani kompatibilitási feltétel egy adott görbecsalád egy tagjára – a jelen esetben az  $\mathcal{L}_1$  görbére –, akkor fennáll annak bármely más tagjára.*

Az utóbbi megállapítás alapján, mivel fennáll a nagybani kompatibilitási feltétel az  $\mathcal{L}_2$  görbére, fennáll az ugyanezen görbecsaládhoz tartozó  $P_{22}, P_{32}, P_{31}, P_{22}$  görbére is:

$$(A.8.5) \quad \int_{P_{22}P_{32}} \dots ds + \int_{P_{32}P_{31}} \dots ds + \int_{P_{31}P_{22}} \dots ds = 0.$$

Képezzük, kihasználva hogy

$$\int_{P_{31}P_{32}} \dots ds + \int_{P_{32}P_{31}} \dots ds = 0$$

(kétszer megyünk végig oda vissza ugyanazon a szakaszon), az (A.8.4) és (A.8.5) egyenletek összegét:

$$(A.8.6) \quad \int_{P_{12}P_{31}} \dots ds + \int_{P_{31}P_{22}} \dots ds + \int_{P_{22}P_{32}} \dots ds + \int_{P_{32}P_{12}} \dots ds = \int_{\mathcal{L}_3} \dots ds = 0.$$

Az eredmény szerint, ha fennáll a nagybani egyértékűségi feltétel a  $\mathcal{L}_1$  és  $\mathcal{L}_2$  görbéken, akkor fennáll az  $\mathcal{L}_3$  görbén is. Következésképp fennáll az  $\mathcal{L}_3$ -al azonos görbecsaládhoz tartozó  $\mathcal{L}_o$  görbén is. Ezt akartuk igazolni.

<sup>18</sup>Ennek az állításnak igazolása számos rugalmasságtani könyvben fellelhető, és az idézett (8.3) kompatibilitási feltételekből következő SAINT VENANT féle kompatibilitási differenciálegyenletek levezetésén alapul. Ehelyütt a [40] mű 8. Fejezetére hivatkozunk.

2. MEGJEGYZÉS: Hasonló gondolatmenettel mutatható ki, hogy a nagybani kompatibilitási feltételek fennállása az  $\mathcal{L}_o$ ,  $\mathcal{L}_1$  görbéken, illetve az  $\mathcal{L}_o$ ,  $\mathcal{L}_2$  görbéken biztosítja a nagybani kompatibilitási feltételek fennállását az  $\mathcal{L}_2$ , illetve  $\mathcal{L}_1$  görbén.

**A.8.2. Független kiegészítő egyértékűségi feltételek.** Az egyszerűség kedvéért a 8.1. ábra viszonyait – lásd 72. o. – vesszük alapul. Az  $\mathcal{L}_{t1}$  és  $\mathcal{L}_{t3}$  íveken terhelés, az  $\mathcal{L}_{u2}$  és  $\mathcal{L}_{u4}$  jelű íveken pedig elmozdulásmező az előírt. Következésképp teljesülnie kell ugyanitt a (8.19) alakváltozási peremfeltételeknek.

Megmutatjuk, hogy a (8.21) alapján írható

$$(A.8.7) \quad \int_{\mathcal{L}_{t3}} n_\pi [\epsilon^{\pi\kappa 3} e_{\kappa\lambda} - \delta_\lambda^\pi \varphi^3] \mathbf{g}^\lambda ds = \hat{\mathbf{u}}(P_{t4}) - \hat{\mathbf{u}}(P_{t3})$$

kiegészítő egyértékűségi feltétel fennállása esetén – feltételezve, hogy teljesülnek a (8.3) kompatibilitási feltételek és a (8.19) alakváltozási peremfeltételek –, fennáll a

$$(A.8.8) \quad \int_{\mathcal{L}_{t1}} n_\pi [\epsilon^{\pi\kappa 3} e_{\kappa\lambda} - \delta_\lambda^\pi \varphi^3] \mathbf{g}^\lambda ds = \hat{\mathbf{u}}(P_{t2}) - \hat{\mathbf{u}}(P_{t1})$$

kiegészítő egyértékűségi feltétel is.

Mivel a 8.1. ábrán vázolt tartomány egyszerűen összefüggő a (8.3) kompatibilitási feltételek fennállása biztosítja a

$$(A.8.9) \quad \oint_{\mathcal{L}_o} n_\pi [\epsilon^{\pi\kappa 3} e_{\kappa\lambda} - \delta_\lambda^\pi \varphi^3] \mathbf{g}^\lambda ds = 0$$

nagybani kompatibilitási feltétel fennállását. Kihasználva az integrál additivitását és helyettesítve az (A.8.7)-t írhatjuk, hogy

$$(A.8.10) \quad \begin{aligned} \oint_{\mathcal{L}_o} \dots ds &= \int_{\mathcal{L}_{t1}} \dots ds + \int_{\mathcal{L}_{u2}} \dots ds + \int_{\mathcal{L}_{t3}} \dots ds + \int_{\mathcal{L}_{u4}} \dots ds = \\ &= \int_{\mathcal{L}_{t1}} \dots ds + \int_{\mathcal{L}_{u2}} \dots ds + \hat{\mathbf{u}}(P_{t4}) - \hat{\mathbf{u}}(P_{t3}) + \int_{\mathcal{L}_{u4}} \dots ds = 0. \end{aligned}$$

Ha teljesülnek a (8.19) alakváltozási peremfeltételek, akkor

$$\int_{\mathcal{L}_{u2}} \dots ds = \hat{\mathbf{u}}(P_{t2}) - \hat{\mathbf{u}}(P_{t1}) \quad \text{és} \quad \int_{\mathcal{L}_{u4}} \dots ds = \hat{\mathbf{u}}(P_{t1}) - \hat{\mathbf{u}}(P_{t4})$$

és ezzel azonnal adódik (A.8.10)-ból az (A.8.8) fennállása. Ez azt jelenti, hogy eggyel kevesebb kiegészítő egyértékűségi feltétel szükséges – kettő helyett egy.

3. MEGJEGYZÉS: A 7.1. ábrán szemléltetett összetettebb esetre, de más összetettebb esetekre is, a fentiekben ismertetett gondolatmenetek elemeinek kombinálásával végezhető el az igazolás.

## HIVATKOZÁSOK

- [1] N. Abovski, N. Andreev, and A. Deruga. *Variational Principles of the Theory of Elasticity and Theory of Shells*. Nauka Publishers, Moscow, 1978.
- [2] G. Airy. On the Strains in the Interior of Beams. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 153:49–80, 1863.
- [3] P. K. Banarjee and R. Butterfield. *Boundary Element Methods in Engineering Science*. Mir, Moscow, 1984.
- [4] G. BÉda, I. Kozák, and J. Verhás. *Continuum Mechanics*. Akadémiai Kiadó, 1995.
- [5] E. Beltrami. Osservazioni sulla Nota precedente. *Atti Reale Accad. naz. Lincei Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, 5(1/1):141–142, 1892.
- [6] B. H. G. Brady. A Direct Formulation of the Boundary Element Method of Stress Analysis for Complete Plane Strain. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, 16:235–244, 1979.
- [7] D. E. Carlson. On Günthers Stress Functions for Couple Stresses. *Quart. Appl. Math.*, 25:139–146, 1967.
- [8] A. Connel. *Applications of Tensor Analysis*. Dover Publications, 1957.
- [9] C. Constanda. Integral Equations of the First Kind in Plane Elasticity. *Quarterly of Applied Mathematics*, LIII(4):783–793, 1995.
- [10] C. Constanda. The Boundary Integral Equation Method in Plane Elasticity. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 123(11):3385–3396, 1995.
- [11] B. M. F. de Veubeke. Stress Function Approach. In *Proc. World. Cong. on Finite Element Methods in Structural Mechanics*, pages J1–J51, 1975.
- [12] B. M. F. de Veubeke and A. Millard. Discretization of Stress Fields in Finite Element Method. *J. Franklin Inst.*, 302:389–412, 1976.
- [13] W. Dorn and A. Schield. A Converse of Virtual Work Theorem for Deformable Solids. *Quart. Appl. Math.*, 14(2):209–213, 1956.
- [14] B. Finzi. Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui. *Rend. Lincei, Ser. 6*, 19:578–584;620–623, 1934.
- [15] W. Günther. Spannungsfunktionen und Verträglichkeitsbedingungen der Kontinuumsmechanik. *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.*, 6:207–219, 1954.
- [16] M. Gurtin. A Generalization of the Beltrami Stress Functions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 4:1–29, 1963.
- [17] M. Gurtin. *Handbuch der Physik, Festkörpermechanik*, volume 2, chapter The Linear Theory of Elasticity, pages 17, 57–60, 163–164. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, NewYork, first edition, 1972.
- [18] M. Gurtin. The Linear Theory of Elasticity. In *Handbuch der Physik, Festkörpermechanik*, volume 2, pages 54–59; 17. Springer-Verlag, 1972.
- [19] H. Haichang. *Variational Principles of Theory of Elasticity with Applications*. Gordon and Breach, NewYork, 1986.
- [20] W. S. Hall. *Boundary Element Method*. Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1994.
- [21] W.-J. He, H.-J. Ding, and H.-C. Hu. A Necessary and Sufficient Boundary Integral Formulation for Plane Elasticity Problems. *Communications in Numerical Methods and Engineering*, 12:413–424, 1996.
- [22] L. Hörmander. *Linear Partial Differential Operators*. Springer-Verlag, Berlin, 1964.
- [23] M. A. Jaswon, M. Maiti, and G. T. Symm. Numerical Biharmonic Analysis and Some Applications. *Int. J. Solids Structures*, 3:309–332, 1967.
- [24] M. A. Jaswon and G. T. Symm. *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*. Academic Press, London – NewYork – San Francisco, 1977.
- [25] O. Kellog. *Foundations of Potential Theory*. Dover Publications, 1957.
- [26] I. Kozák. Determination of Compatibility Boundary Conditions in Linear Elastostatics with the Aid of the Principle of Minimum Complementary Energy. *Publ. Techn. Univ. Heavy Industry, Miskolc, Ser.D. Natural Sciences*, 34(2):83–98, 1980.
- [27] I. Kozák. Notes on the Field Equations with Stresses and on the Boundary Conditions in the Linearized Theory of Elasticity. *Acta Techn. Hung.*, 90(3–4):221–225, 1980.
- [28] I. Kozák. Principle of Virtual Work in Terms of Stress Functions. *Publ. Techn. Univ. Heavy Industry, Miskolc, Ser.D. Natural Sciences*, 34(2):147–163, 1980.
- [29] I. Kozák. *Vékony héjak feszültségmezővel felépített elmélete*. Dr. Sc. Thesis, Hungarian Academy of Sciences, 1988. (in Hungarian).
- [30] I. Kozák and G. Szeidl. The Field Equations and the Boundary Conditions with Force–Stresses and Couple–Stresses in the Linearized Theory of Micropolar Elastostatics. *Acta Techn. Hung.*, 90(3–4):57–80, 1980.
- [31] I. Kozák and G. Szeidl. Contribution to the Field Equations and Boundary Conditions in Terms of Stresses of the First Plane Problem of Micropolar Elasticity. *Publ TUHI., Series D, Natural Sciences*, 34(2):135–146, 1981.
- [32] A. I. Lurie. On Theory of Systems of Linear Differential Equations with Constant Coefficients. *Transactions of the Leningrad Industrial Institute, Number 6., Section of Physics and Mathematics*, 6(3):31–36, 1937.
- [33] A. I. Lurie. *Theory of Elasticity*. Nauka, Moskow, 1970.
- [34] J. Mason. *Incremental and Energy Methods in Solid Mechanics and Shell Theory*. Elsevier, Amsterdam–Oxford–New York, 1980.

- [35] J. Maxwell. On Reciprocal Figures, Frames, and Diagrams of Forces. *Trans. Roy. Soc. Edinburgh*, 26:1–40, 1870.
- [36] J. Mitchell. On Direct Determination of Stress in an Elastic Solid with Application to the Theory of Plates. *Proceedings of London Mathematical Society*, 31:100–124, 1900.
- [37] G. Morera. Soluzione generale delle equazioni indefinite dell equilibrio di un corpo continuo. *Atti Reale Accad. naz. Lincei Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, 5(1/1):137–141, 1892.
- [38] S. Moriguti. On Castigliano's Theorem in Three Dimensional Elastostatics. *Journal of the Society of Applied Mechanics of Japan*, 1(6):175–180, 1948.
- [39] I. I. Muskhelishvili. *Some Fundamental Problems of Mathematical Theory of Elasticity*. Publisher NAUKA, Moscow, sixth edition, 1966.
- [40] W. Nowaczky. *Theory of Elasticity*. Mir, Moscow, 1970. in Russian.
- [41] W. Nowaczky. *Theory of Micropolar Elasticity*. Springer Verlag, Wien – NewYork – Udine, 1970.
- [42] J. T. Oden and J. N. Reddy. *Variational Methods in Theoretical Mechanics*. Springer – Verlag, 1986.
- [43] W. Ornstein. Stress Functions of Maxwell and Morera. *Quart. Appl. Math.*, 2:198–201, 1954.
- [44] W. Prager. On Plane Elastic Strains in Doubly-Connected Domains. *Quart. Appl. Math.*, 3:377–380, 1946.
- [45] G. Rieder. Topologische Fragen in der Theorie der Spannungsfunktionen. *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.*, 7:4–65, 1960.
- [46] R. J. Rizzo. An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics. *Q. J. Appl. Math.*, 25:83–95, 1967.
- [47] H. Schaefer. Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums und des elastischen Körpers. *Z. Angew. Math. Mech.*, 33:356–362, 1953.
- [48] H. Schaefer. Die Spannungsfunktionen eines Kontinuums mit momentenspannungen i.-ii. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Serie des sciences techniques*, 15(1):63–67, 69–73, 1967.
- [49] P. Schiavone and C.-Q. Ru. On the Exterior Mixed Problem in Plane Elasticity. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 1:335–342, 1996.
- [50] C. Somigliana. Sopra l' equilibrio di un corpo elastico isotropo I. *Nuovo Cimento*, 17 – 20:140–148, 272–276; 161–166; 84–90, 278–282; 181–185, 1885–1886.
- [51] R. Southwell. Castigliano's Principle of Minimum Strain Energy. *Proc. Roy. Soc. London (A)*, 154:4–21, 1936.
- [52] R. Southwell. Castigliano's Principle of Minimum Strain Energy and the Conditions of Compatibility for Strain. In *S. Timoshenko 60th Anniversary Volume*. The McMillan Co., 1938.
- [53] J. Stickforth. Zur Anwendung des Castiglianoschen Prinzips und der Beltramischen Spannungsfunktionen bei mehrfach zusammenhängenden Körpern unter Berücksichtigung von Eigenspannungen. *Techn. Mitt. Krupp., Forsch.-Ber.*, 22:83–92, 1964.
- [54] J. Stickforth. On the Derivation of Conditions of Compatibility from Castigliano's Principle by Means of Three Dimensional Stress Functions. *J. Math. and Phys.*, 44:214–225, 1965.
- [55] M. Stippes. On Stress Functions in Classical Elasticity. *Quart. Appl. Math.*, 24:119–120, 1966.
- [56] G. Szeidl. Principle of Virtual Work in Terms of Stress Functions for Micropolar Body. *Publ TUHI., Series D, Natural Sciences*, 34(2):221–238, 1981.
- [57] G. Szeidl. Supplements to the Field Equations and Boundary Conditions in Terms of Stresses of the Second Plane Problem of Micropolar Elasticity. *Publ TUHI., Series D, Natural Sciences*, 34(2):179–190, 1981.
- [58] G. Szeidl. Dual Variational Principles in Linear Micropolar Elastostatics. *Acta Techn. Hung.*, 93(3–4):277–296, (1981)[1983].
- [59] G. Szeidl. Dual Variational Principles for the First Plane Problem of Micropolar Elastostatics. *Publ TUHI., Series D, Natural Sciences*, 35(3):3–20, 1982.
- [60] G. Szeidl. *Variational Principles and Solutions to Some Boundary Value Problems in the Asymmetric Elasticity [A nemszimmetrikus rugalmasságtan duál variációs elvei és egyes peremértékfeladatainak megoldása]*. Ph. D. Thesis, Hungarian Academy of Sciences, 1985. (in Hungarian).
- [61] G. Szeidl. Dual Forms of the Principle of Virtual Work for Multiply Connected Micropolar Body. *GÉP*, XXXVIII:243–244, 1986.
- [62] G. Szeidl. On Derivation of Stress Functions in Micropolar Theory of Elasticity. *Acta Techn. Hung.*, 104(1–3):277–296, 1991–92.
- [63] G. Szeidl. Nagybani kompatibilitási feltételek többszörösen összefüggő mikropoláris anyagú testre vegyes peremfeltételek mellett. In *A VII. Magyar Mechanikai Konferencia Programja*, page 100. Miskolci Egyetem, 1995 augusztus 29–31.
- [64] G. Szeidl. Compatibility Conditions for Mixed Boundary Value Problems in Micropolar Theory of Elasticity. *Publications of the University of Miskolc, Series D, Natural Sciences, Mathematics*, 37(3):105–116, 1997.
- [65] G. Szeidl. On Compatibility Conditions for Mixed Boundary Value Problems. *Technische Mechanik*, 17:245–262, 1997.
- [66] G. Szeidl. Boundary integral equations for plane problems – remark to the formulation for exterior regions. *Publications of the University of Miskolc, Series D, Natural Sciences, Mathematics*, 40(1):79–88, 1999.
- [67] G. Szeidl. Boundary Integral Equation Method for Plane Problems in Dual System. In *MICROCAD-SYSTEM '93 Nemzetközi Számítástechnikai Találkozó, ME Miskolc, Abstracts*, page 48, 2.–6. March, 1996.

- [68] G. Szeidl. Boundary Integral Equations for Plane Problems in Terms of Stress Functions of Order One. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, 2(2):237–261, 2001.
- [69] G. Szeidl. Boundary Integral Equations of Plane Elasticity in Terms of Stress Functions of Order One. In *6<sup>th</sup> International Conference on Numerical Methods, Abstracts*, page 35, 22.–26. August, 1994.
- [70] G. Szeidl. Compatibility Conditions in the Large and Stress Functions in Linear Elasticity. In *TAM 400 Seminar, University of Illinois at Urbana Champaign, Department of Theoretical and Applied Mechanics*, page 455, 23 January 1992.
- [71] G. Szeidl. Dual Variational Principles and Compatibility Conditions in the Large in Micropolar Theory of Elasticity. In *The 4–th Hungarian Conference on Mechanics*, page 38, 24–26 August 1983.
- [72] G. Szeidl. On Derivation of Stress Functions in Elasticity. In *The Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics in Hamburg; ICIAM95, Book of Abstracts*, page 455. Springer Verlag, 3.–7. July, 1995.
- [73] G. Szeidl and I. Iván. Macro Conditions of Compatibility and Strain Boundary Conditions for Some Mixed Plane Boundary Value Problems of Micropolar Elastostatics. *Publications of the University of Miskolc, Series D, Natural Sciences, Mathematics*, 36(2):35–45, 1996.
- [74] G. Szeidl and I. Kozák. A virtuális munka elv, az egyensúlyi egyenletek teljes megoldása feszültségfüggvényekkel, peremfeltételek. In *A VII. Magyar Mechanikai Konferencia Programja*, page 101. Miskolci Egyetem, 1995.
- [75] G. Szeidl and I. Kozák. Complete Solution for Stresses in Terms of Stress Functions, Part I Derivation from the Principle of Virtual Work. *Technische Mechanik*, 16(2):147–168, 1996.
- [76] G. Szeidl and I. Kozák. Complete Solution for Stresses in Terms of Stress Functions, Part II Modification of Variational Principles. *Technische Mechanik*, 16(3):197–208, 1996.
- [77] G. Szeidl and S. Szirbik. *New Developments in the Boundary Element Method: Boundary Contour Method for Plane Problems in a Dual Formulation with Quadratic Shape Functions*, chapter 14. Springer-Verlag, 2002.
- [78] G. Szeidl and I. van Gemert. On Mitchell’s Conditions for Plane Problems in Elastostatics. *Acta Mechanica*, 93(1–3):99–118, 1992.
- [79] S. Timoshenko and J. N. Goodier. *Theory of Elasticity*. McGraw–Hill, New York – Toronto – London, 1951.
- [80] E. Tonti. Variational Principles in Elastostatics. *Meccanica*, 14:201–208, 1967.
- [81] E. Tonti. A Mathematical Model for Physical Theories I. II. *Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei*, pages 175–181; 351–356, 1972.
- [82] K. Washizu. A Note on the Condition of Compatibility. *J. Math. and Phys.*, 36:306–312, 1957.
- [83] J. O. Watson. Advanced Implementation of the Boundary Element Method for Two– and Three–dimensional Elastostatics. In P. K. Banarjee and R. Butterfield, editors, *Developments in Boundary Element Methods–1*, The Development Series, chapter 3, pages 31–63. Applied Science, London, first edition, 1979.
- [84] L. Xio-Yan. A Bem Formulation of New Boundary Stress Components. *Computers and Structures*, 10:895–906, 1994.