

INTERNATIONAL UNION OF THEORETICAL  
AND APPLIED MECHANICS  
MAGYAR NEMZETI BIZOTTSÁGA

**XIV. MAGYAR MECHANIKAI KONFERENCIA**  
**AZ ELŐADÁSOK ÖSSZEFOGLALÓI**



MISKOLC-EGYETEMVÁROS

2023. augusztus 29-31.

ISBN 978-963-358-301-2

INTERNATIONAL UNION OF THEORETICAL  
AND APPLIED MECHANICS  
MAGYAR NEMZETI BIZOTTSÁGA

**XIV. MAGYAR MECHANIKAI KONFERENCIA**  
**AZ ELŐADÁSOK ÖSSZEFOGLALÓI**

Szerkesztette:

Baksa Attila, Bertóti Edgár és Kiss László Péter

MISKOLC-EGYETEMVÁROS

2023. augusztus 29-31.

ISBN 978-963-358-301-2

## A KONFERENCIA RENDEZÉSÉBEN RÉSZTVEVŐ INTÉZMÉNYEK

**IUTAM Magyar Nemzeti Bizottsága**  
**Magyar Tudományos Akadémia**  
**Szilárd Testek Mechanikája Bizottsága**  
**MTA Miskolci Területi Bizottsága**  
**Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem**  
**Miskolci Egyetem Gépészmérnöki és Informatikai Kar**  
**Műszaki Mechanikai Intézet**

<b>Tudományos Bizottság</b>		<b>Helyi Szervező Bizottság</b>	
Elnök:	Páczelt István	Elnök:	Bertóti Edgár
Tagok:	Bagi Katalin	Tagok:	Baksa Attila
	Baranyi László		Gönczi Dávid
	Domokos Gábor		Kiss László Péter
	Dunai László		Lengyel Ákos József
	Ecsedi István		Szirkik Sándor
	Inspurger Tamás		Tóth Balázs
	Jármai Károly		
	Károlyi György		
	Keppler István		
	Kiss Rita M.		
	Kollár László		
	Kossa Attila		
	Kurutzné Kovács Márta		
	Pere Balázs		
	Stépán Gábor		
	Szeidl György		
	Tarnai Tibor		
	Várkonyi Péter		

Adminisztráció: Ágos Istvánné (Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet)

## Tartalomjegyzék

Vizi Máté Benjámin - Orosz Gábor - Takács Dénes - Stépán Gábor <i>A gördülő kerék dinamikája: stacionárius mozgás és stabilitás</i> .....	1
Regős Krisztina - Domokos Gábor - Bozóki Sándor - Kovács Flórián - Papp Dávid <i>A legegyszerűbb monostatikus poliéder nyomában: algoritmikus válasz Conway kérdésre</i> .....	2
Fodor Balázs - Kossa Attila <i>A Mooney-Rivlin-féle hiperelasztikus anyagmodell stabilitási vizsgálata többtengelyű terhelés esetén</i> .....	3
Imre Emőke <i>A nemlineáris modellillesztési eljárásoknak a paraméterter direkt szorzat alakú felbontásán alapuló javítása</i> .....	4
Szinvai Szabolcs - Kovács Tamás <i>A tapadás numerikus modellezésének lehetőségei vasbetonszerkezetekben</i> .....	5
Várkonyi Péter László - Guerra Riano Andres Felipe - Sipos András Árpád <i>Adaptív hajlításmentes szerkezetek</i> .....	6
Tóth Balázs <i>Adaptív pontfelhősűritésen alapuló radiális bázisfüggvény technika rugalmasságtani feladatok megoldására</i> .....	7
Iklódi Zsolt - Dombóvári Zoltán <i>Akadozó csúszás modellezése rendkívül alacsony sebességgel mozgó lineáris vezetékekben</i> .....	8
Martinovich Kristóf - Bachrathy Dániel <i>Állapotfüggő időkésésre vezető esztergálási modell stabilitásvizsgálata</i> .....	9
Kovács Róbert - Fehér Anna <i>Általánosított termodinamikai modellek kísérleti háttere és kiértékelési módszertana</i> .....	10
Zana Roland Reginald - Zelei Ambrus Miklós <i>Alulaktuált robot szabályozásának elméleti és kísérleti vizsgálata</i> .....	11
Székrenyes András <i>Anyaghibát tartalmazó kompozit rúd stabilitása periodikus retardált terhelés mellett</i> .....	12
Szücs Mátyás - Fülöp Tamás <i>Az alakváltozási tenzor előállítása felületen mért elmozdulásjelből</i> .....	13
Lámer Géza <i>Az anyagi testekben ébredő belső erők csoportosítása az anyag viselkedésének kinematikai jellege (rendezetlen, kollektív, mintázatos) szerint</i> .....	14
Kurutz Márta - Lakatos Éva - Csákány Tibor - Varga Péter <i>Biomechanikai kísérleti eredmények igazolása végeelem-módszerrel a lumbális stabilizálás egyes műtéti területein</i> .....	15
Serfőző Dániel - Pere Balázs <i>Csillapítás karakterisztika pontos definiálása ütközési feladatokhoz</i> .....	16



Bachrathy Dániel <i>Dinamikai rendszerek robusztus stabilitás térképe több-dimenziós felező módszerrel és stabilizálhatóság</i> .....	17
Pere Balázs - Serfőző Dániel <i>Dinamikus érintkezési feladatok vizsgálata végeelem módszer segítségével</i> .....	18
Haba Tamás - Budai Csaba <i>Egy szabadsági fokú mintavételes mechanikai rendszerek rezgései</i> .....	19
Kiss K. Ádám <i>Egykerekű önegyensúlyozó közlekedési eszköz vizsgálata</i> .....	20
Páczelt István <i>Elmozdulás és szögelfordulás szabályozása a rugalmas tartó-merev lemez alkotta mechanikai szerkezetnél</i> .....	21
Béda Gyula - Béda Péter <i>Első-, illetve másodrendű gradiens anyagok</i> .....	22
Nagy Dalma J. - Inspurger Tamás <i>Emberi egyensúlyozás lineárisan megvezetett ingával</i> .....	23
Fodor Gergő - Bachrathy Dániel <i>Emberi egyensúlyozás: sztochasztikus tulajdonságok vizsgálata mobil applikációval végzett mérések segítségével</i> .....	24
Dorogi Dániel - Kollár László E. <i>Erőmérések periodikusan gerjesztett rugalmas kábel esetén</i> .....	25
Kollár László E. <i>Felfüggesztett vezeték lengésének csillapítása digitális szabályozással</i> .....	26
Kovács Mórió <i>Fémhabok végeelemes szimulációinak memóriaoptimalizált kidolgozása</i> .....	27
Kádár Fanni - Stépán Gábor - Habib Giuseppe <i>Fold bifurkációk és bistabilitás mechanikai rendszerekben</i> .....	28
Baranyai Tamás <i>Folytonos és diszkrét geometrikus feszültségfüggvények</i> .....	29
Szaksz Bence - Stépán Gábor - Orosz Gábor <i>Forgalomszabályozás önvezető felvezető járművel</i> .....	30
Dobák Dávid - Csernák Gábor <i>Gauss-folyamat alapú látens erő modell alkalmazása mechanikai rendszerek identifikációjára</i> .....	31
Ván Péter <i>Gradiensfüggő, azaz gyengén nemlokális kontinuummechanika és a holografikus elv</i> .....	32
Szeidl György - Messaoudi Abderrazek <i>Green-függvények négyponos peremérték feladatokra alkalmazásokkal</i> .....	33
Patkó Dóra - Habib Giuseppe - Zelei Ambrus <i>Harmonikusan gerjesztett rendszerek robusztusságának becslése a dinamikai integritás mérőszámával</i> .....	34

Ecse di István - Baksa Attila - Habbachi Marwen <i>Háromszög keresztmetszetű állandó görbületű bimodulusú görberúd hajlítása</i> .....	35
Horváth András Levente - Kossa Attila <i>Hengeres rugalmas hasáb kontaktfelületi görbületének hatása az adhézióra</i> .....	36
Horváth András - Kollár Dénes <i>Hibrid zárt szelvények vizsgálata hegesztésszimulációval és laboratóriumi mérésekkel</i> .....	37
Horváth Péter - Brinissat Maramé - Hajdu Flóra - Papp Csenge - Szalai Péter - Apagyi Antal - Major Zoltán - Kuti Rajmund <i>Híd rezgéseinek vizsgálata áthaladó jármű esetén</i> .....	38
Berezvai Szabolcs <i>Hogyan teljesít a mechanika alaptárgyakon egy chatbot?</i> .....	39
Bártfai András - Dombóvári Zoltán <i>Időben változó paraméterű esztergálás véges idejű stabilitás vizsgálatának numerikus szimulációs problémája</i> .....	40
Köpeczi-Bócz Ákos Tamás - Sykora Henrik - Takács Dénes <i>Időkésés adataalapú identifikációja SINDy algoritmus segítségével</i> .....	41
Michel Sébastien - Sipos András A. <i>Influence of bending on the cracking pattern of a circular brittle ring under hydrostatic pressure</i> .....	42
Almádi Gergő - Domokos Gábor - Regős Krisztina <i>Inhomogén politópok mechanikai komplexitása - avagy van-e egy tetraédernek lelke?</i> .....	43
Bertóti Edgár <i>Inverz anyagegyenletek nemlineárisan rugalmas, izotrop és inkompesszibilis anyagokra</i> .....	44
Molnár Zsombor - Tóth Balázs <i>Kétmezős hp-verziós végeelem módszer kifejlesztése erősített termodinamikai modellek megoldására</i> .....	45
Máté Péter - Szekrényes András <i>Kísérleti módszer fejlesztése rudak tiszta hajlítására a nemlineáris tartományban</i> .....	46
Roszevák Zsolt - Haris István <i>Különböző monolit vasbeton szerkezeti csomópontok numerikus és laboratóriumi vizsgálata térbeli ciklikus terheléssel</i> .....	47
Antali Máté <i>Kvázi-sebességek hatékony megválasztása nemsima és nemlineáris dinamikai rendszerekben</i> .....	48
Hajdu Dávid - Dombóvári Zoltán <i>Marási folyamatok stabilitásvizsgálata a szerszám radiális ütésének figyelembevételével</i> .....	49
Kovács Ádám - Bende Margit <i>Mechanika oktatás a BME GPK német nyelvű képzésében 1992-2023</i> .....	50

Sipos András Árpád <i>Mechanikai és természeti formák eredete és fejlődése</i> .....	51
Bodor Bálint - Bencsik László <i>Mechanikai rendszerek trajektóriakövető szabályozása variációs számítási módszerekkel</i> .....	52
Magyar Bálint - Csernák Gábor - Zana Roland - Wohlfart Richárd - Miklós Ákos - Hénap Gábor - Stépán Gábor <i>Menetes kötés előfeszítésének hatása a modális csillapításra</i> .....	53
Bende Margit <i>Miért jó a redukált vektorkettős fogalmát bevezetni a mechanika oktatásban?</i> .....	54
Mihályi Levente - Takács Dénes <i>Nyerges vontató pályakövető tolatása körív mentén</i> .....	55
Kossa Attila <i>Öngyógyító szuperrugalmas bioanyagok mechanikai modellezése</i> .....	56
Takács Dénes - Avedisov Sergei S. - He Chaozhe R. - Orosz Gábor <i>Önvezetés járművek közötti kommunikációs adatokon tanított neurális hálózat segítségével</i> .....	57
Horváth Hanna Zsófia - Takács Dénes <i>Önvezető elektromos kétkerekű jármű egyensúlyozása</i> .....	58
Vörös Illés - Takács Dénes <i>Önvezető jármű pályakövető szabályozásának nemlineáris vizsgálata</i> .....	59
Rozgonyi Dániel - Kovács Nauzika <i>Öszvér rácsos tartók viselkedésének numerikus vizsgálata</i> .....	60
Berezvai Szabolcs - McMeeking Robert M. <i>Prony-sor alapú numerikus inverziós módszer viszkoelasztikus anyagok leírásához</i> .....	61
Bauer Balázs - Habib Giuseppe <i>Reduced order modelling of porpoising in race cars</i> .....	62
Hauck Bence - Szekrényes András <i>Rétegelt kompozit lemezek numerikus modellezése kiegészítő dinamikai feltételekkel</i> .....	63
Bodnár Dávid - Jármái Károly <i>Sajátfrekvencia optimalás ipari robotoknál</i> .....	64
Bablana Adrienn - Keppler István <i>Szárítóberendezések optimális anyagáramlási csatornáinak kialakítása diszkrét elemek módszerével</i> .....	65
Havasi Kristóf - Kossa Attila <i>Szilikon gumilap mechanikai viselkedésének részletes leírása többtengelyű feszültségi állapot esetén</i> .....	66
Sajtos István - Ther Péter Pál <i>Szimmetrikus tartószerkezetek aszimmetrikus tönkremeneteli lehetősége</i> .....	67

Takács Donát M. - Fülöp Tamás <i>Termodinamikailag kiterjesztett, szimplektikus numerikus módszer viszkoelasztikus mechanikájú, hőtágulással és hővezetéssel járó szilárdtest-viselkedés szimulációjára</i> .....	68
Miklós Ákos - Wohlfart Richárd - Hénap Gábor - Magyar Bálint - Zana Roland - Csernák Gábor - Stépán Gábor <i>Termoelasztikus hatás mérése ferromágneses rúdban terjedő longitudinális lökéshullám esetén</i> .....	69
Béda Péter <i>Tört-rendű deriváltak alkalmazása nem-lokális anyagok instabilitási feladataiban</i> ..	70
Jármai Károly - Andisheh Kaveh - Taheri Hafez - Karpenko Michail - MacRae Gregory - Clifton Charles - Dong Pingsha - Mago Nandor <i>Újrafelhasználható szeizmikus keretszerkezet a körkörös gazdaság tervezési koncepciójához</i> .....	71
Gábos Zoltán - Gazdagh Zoltán - Dombóvári Zoltán <i>Változtatható közel lineáris örvényáramú csillapítóelem fejlesztése egy geometriai nemlinearitással rendelkező, két végén befogott homogén rúd rezgésének csillapítására</i> .....	72
Finta Ervin - Antali Máté <i>Vasúti kerék rezgéseinek dinamikai jellemzői és stabilitása</i> .....	73
Balogh Tamás - Insperger Tamás <i>Virtuális rúdegyensúlyozás törtrendű dinamikával</i> .....	74
Fülöp Tamás <i>Viszkoelasztikus-hőtágulási-hővezetési egyenletrendszer motivációja, háttere és numerikus megoldása</i> .....	75

## A GÖRDÜLŐ KERÉK DINAMIKÁJA: STACIONÁRIUS MOZGÁS ÉS STABILITÁS

Vizi Máté Benjámin<sup>1</sup>, Orosz Gábor<sup>2</sup>, Takács Dénes<sup>1</sup> és Stépán Gábor<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ELKH-BME Gépek Dinamikája Kutatócsoport

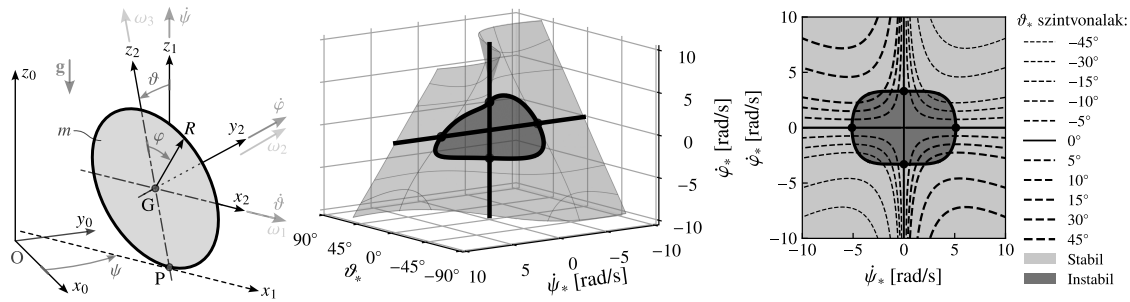
<sup>2</sup>University of Michigan, Dept. of Mechanical Engineering és Dept. of Civil and Environmental Engineering

<sup>3</sup>BME, Műszaki Mechanikai Tanszék

vizi@mm.bme.hu, orosz@umich.edu, takacs@mm.bme.hu, stepan@mm.bme.hu

A gördülő kerék dinamikai modellje az autonóm egykerékű járművek [1, 2] modellezésének alapjául szolgál. A modell segítségével megismerjük alapvető dinamikai viselkedést, azaz a lehetséges stacionárius mozgásokat és azok stabilitásáról is képet kapunk. Ráadásul új szabályozási stratégiákat is fejleszthetünk ezek alapján [3].

A kereket egy  $m$  tömegű és  $R$  sugarú korongként modellezzük, és azt feltételezzük, hogy megcsúszás nélkül gördül a vízszintes talajon. A mechanikai modell részletesen az 1. ábra bal oldali paneljén látható.



1. ábra. Mechanikai modell (bal panel) és a stacionárius mozgások (középső és jobb panel)

Kihasználva a gördülésből adódó kinematikai kényszereket, a mozgásegyenlet felírható az Appell-egyenlettel [4]. Amennyiben a szükséges 3 pszeudo sebességet az  $\omega$  szögsebesség  $F_2(x_2, y_2, z_2)$  koordináta-rendszerbeli komponenseinek választjuk, azaz

$$\omega = [\dot{\vartheta} \quad \dot{\psi} \sin \vartheta + \dot{\phi} \quad \dot{\psi} \cos \vartheta]^T_{F_2} \Rightarrow \omega_1 = \dot{\vartheta}, \quad \omega_2 = \dot{\psi} \sin \vartheta + \dot{\phi}, \quad \omega_3 = \dot{\psi} \cos \vartheta; \quad (1)$$

a gördülő kerék mozgásegyenlete az alábbi alakban adódik:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \frac{6\omega_2\omega_3}{5} - \frac{\omega_3^2 \tan \vartheta}{5} + \frac{4g \sin \vartheta}{5R}, \\ \dot{\omega}_2 = -\frac{2\omega_1\omega_3}{3}, \\ \dot{\omega}_3 = -2\omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3 \tan \vartheta, \\ \dot{\vartheta} = \omega_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\psi} = \omega_3 \frac{1}{\cos \vartheta}, \\ \dot{\phi} = \omega_2 - \omega_3 \tan \vartheta, \\ \dot{x}_G = \omega_1 R \sin \psi \cos \vartheta + \omega_2 R \cos \psi, \\ \dot{y}_G = -\omega_1 R \cos \psi \cos \vartheta + \omega_2 R \sin \psi. \end{cases} \quad (2)$$

A gördülő keréknek 3 féle stacionárius mozgása létezik: az egyenesen gördülés, az egy helyben pörgés és a kanyarodva gördülés. A stacionárius mozgások egyetlen egyenlettel leírhatóak:

$$5\dot{\psi}_*^2 R \sin \vartheta_* \cos \vartheta_* + 6\dot{\psi}_* \dot{\phi}_* R \cos \vartheta_* + 4g \sin \vartheta_* = 0, \quad (3)$$

ez az összefüggés egy felületként van megjelenítve az 1. ábra középső paneljén. Kis sebességek esetén a stacionárius mozgások instabilak, viszont elegendően nagy sebesség esetén stabillá válnak, a kritikus sebességek a különböző mozgásokra az alábbiak:

$$\dot{\phi}_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{g}{3R}}, \quad \dot{\psi}_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{4g}{5R}}, \quad \dot{\psi}_{\text{krit},1,2} = \sqrt{\frac{2g}{5R} \frac{3 - 6 \cos^2 \vartheta_* \pm \sqrt{76 \sin^4 \vartheta_* - 96 \sin^2 \vartheta_* + 9}}{(2 \sin^2 \vartheta_* - 3) \cos \vartheta_*}}. \quad (4)$$

A gördülő kerék stacionárius mozgásainak segítségével új szabályozási módszerek fejleszthetőek, az egyenesen gördülést lehet használni a haladás stabilizálására kis sebességek esetén, a kanyarodva gördülést pedig különböző manőverekhez lehet felhasználni.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] Y. Naveh, P. Z. Bar Yoseph, Y. Halevi, Nonlinear modeling and control of a unicycle, *Dynamics and Control* 9:279–296, 1999.
- [2] H. Suzuki, S. Moromugi, T. Okura, Development of robotic unicycles, *Journal of Robotics and Mechatronics* 26(5):540–549, 2014.
- [3] X. Cao, D. C. Bui, D. Takács, G. Orosz, Autonomous unicycle: Modeling, dynamics, and control, *submitted*, 2023.
- [4] P. Appell, Sur une forme générale des équations de la dynamique (On a general form of the equations of dynamics), *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Journal for Pure and Applied Mathematics)* 121:310–319, 1900.

## A LEGEGYSZERŰBB MONOSTATIKUS POLIÉDER NYOMÁBAN: ALGORITMIKUS VÁLASZ CONWAY KÉRDÉSÉRE

**Regős Krisztina**<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> BME, ÉPK, Morfológia és Geometriai modellezés Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

<sup>2</sup> BME-ELKH Szilárd Testek Morfodinamikája Kutatócsoport  
regos.kriszti@gmail.com

**Domokos Gábor**<sup>1,2</sup>, **Bozóki Sándor**<sup>3,4</sup>, **Kovács Flórián**<sup>2,5</sup>, **Papp Dávid**<sup>6</sup>

<sup>3</sup> SZTAKI, ELKH, Budapest  
1111 Budapest, Kende utca 13.

<sup>4</sup> Budapesti Corvinus Egyetem  
1093, Budapest, Fővám tér 8.

<sup>5</sup> BME, ÉMK, Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

<sup>6</sup> North Carolina State University, Department of Mathematics  
3222 SAS Hall / Campus Box 8205, Raleigh, NC 27695, USA

domokos@iit.bme.hu, bozoki.sandor@sztaki.hu, kovacs.florian@emk.bme.hu, dpapp@ncsu.edu

A mindössze  $S=1$  stabil vagy mindössze  $U=1$  instabil egyensúlyi ponttal rendelkező, úgynevezett monostatikus, konvex poliéderek geometriájának titokzatos jegyeire Conway és Guy 1969-es cikke [1] és az ott bemutatott, Conway-Guy poliéderként is emlegetett  $F=19$  lapú,  $V=34$  csúcú test hívta fel a tudományos világ figyelmét. Ezen test létezése azt is igazolta, hogy  $V=34$  csúcs elégséges egy konvex, monostatikus poliéder előállításához. Conway azt is megmutatta, hogy ugyanezen feladathoz a szükséges feltétel  $V>4$ . Azóta megjelent néhány konkrét konstrukció [2,3], melyekkel az elégséges feltételt jelentő felső korlátot sikerült  $V \leq 18$ -ra csökkenteni. Ugyanakkor egyetlen olyan eredmény sem született a Conway-Guy cikk óta mely az alsó, szükséges feltételt jelentő korlátot emelte volna feljebb: utóbbihoz ugyanis nem elegendő egy konkrét konstrukció, hanem egy általános algoritmusra van szükség.

Előadásomban egy olyan geometriai-mechanikai algoritmust juttatok be, mellyel az alsó korlát mono-instabil poliéderek esetében elvileg tetszőlegesen (egészen a szükséges minimumig) emelhető, ezáltal a feladat teljesen megoldható. Az algoritmus egyenletrendszerét optimalizálási feladatra lefordítva a csúcsaiban egységnyi tömeggel terhelt poliéderek esetében sikerült teljes megoldást adnunk [4,5]: itt a csúcsok minimális száma  $V=11$  és ezzel a csúcs-számmal létezik megoldás is.

A homogén eset továbbra is nyitott, de a bemutatott algoritmus – elvben – ott is alkalmazható.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] J.H. Conway, R.K. Guy, Stability of polyhedra, *SIAM Review* 11(1):78–82, 1969. doi.org/10.1137/1011014
- [2] A. Bezdek, On stability of polyhedra. In: *Workshop on Discrete Geometry*, September 13-16 2011, Fields Institute, Canada, pp. 2490–2491.
- [3] A. Reshetov, A unistable polyhedron with 14 faces, *Internat. J. Comput. Geom. Appl.* 24(1):39–59, 2014. <https://doi.org/10.1142/S0218195914500022>
- [4] S. Bozóki, G. Domokos, F. Kovács, K. Regős, Mono -unstable polyhedra with point masses have at least 8 vertices, *International Journal of Solids and Structures* 234–235: 111276, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111276>.
- [5] D. Papp, K. Regős, G. Domokos, S. Bozóki, The smallest mono-unstable convex polyhedron with point masses has 8 faces and 11 vertices, *European Journal of Operational Research* 310 (2) : 511-517, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2023.04.028>.

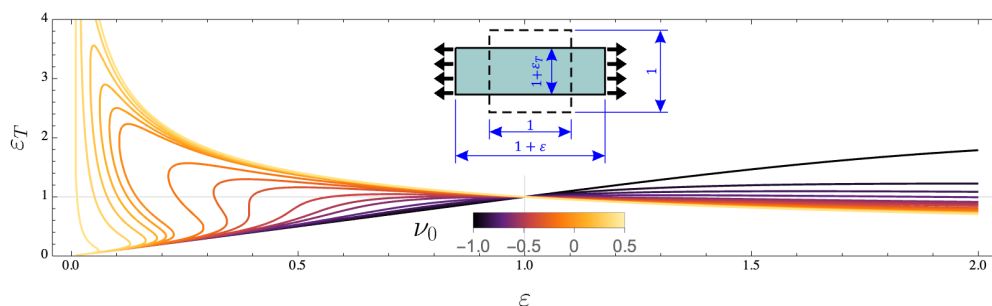
# A MOONEY-RIVLIN-FÉLE HIPERELASZTIKUS ANYAGMODELL STABILITÁSI VIZSGÁLATA TÖBBTENGELYŰ TERHELÉS ESETÉN

Fodor Balázs<sup>1,2</sup> és Kossa Attila<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

<sup>2</sup>BMW Group, Research and Innovation Center, Knorrstraße 147, 80788 Munich, Germany  
balazs.fodor@bmw.de, kossa@mm.bme.hu

Teljes járműves szimulációs környezetben gyakran erősen egyszerűsített anyagmodelleket használnak a szimulációs idő csökkentése érdekében, melyek szélsőséges terhelés során instabil viselkedést mutathatnak. Ez a jelenség annak ellenére fordulhat elő, hogy minden anyag megfelel a Drucker-féle stabilitási kritériumnak. Az anyagmodellek stabilitásának vizsgálata széles körben kutatott terület [1]. Vizsgálatunkban egy- és kéttengelyű terheléseket vesszünk figyelembe, mivel ezen terhelési esetek kulcsfontosságúak az anyagmodell paramétereinek meghatározásához. A térfogatilag összenyomható esetre felírt Mooney-Rivlin-féle hiperelasztikus modell részletes elemzését mutatja be a jelen tanulmány.



1. ábra. a) Az egytengelyű nyomás mechanikai modellje b) A keresztirányú alakváltozások változása a hosszirányú alakváltozás függvényében különböző kezdeti Poisson-tényezők esetén.

Az összenyomható, homogén, izotrop Mooney-Rivlin-féle anyagmodell a klasszikus Flory-típusú [2] térfogati taggal kiegészítve egytengelyű nyomás alatt két szokatlan jelenséget is mutat, amit az 1. ábra szemléltet. Az egyik a nem monoton keresztirányú alakváltozás válasza monoton összenyomás során, ahol az anyag a maximális kontrakció elérése után végtelenül kis térfogatra zsugorodik össze. A másik jelenség pedig, hogy több megoldás is adódhat a keresztirányú alakváltozásra adott hosszirányú alakváltozás esetén. Fontos megjegyezni, hogy zárt alakú feszültség-alakváltozás megoldás még az egytengelyű terhelés esetén sem állítható elő ehhez az anyagmodellhez. Numerikus eljárást dolgoztunk ki a konstitutív egyenlet megoldására és meghatároztuk a paramétertérben azon stabilitási tartományokat, ahol az előzőekben említett nemkívánatos jelenségek elkerülhetők. Az újonnan kapott eredmények egy a közelmúltban publikált cikk módszertanára épülnek [3]. Az újonnan kapott eredmények közvetlenül felhasználhatóak összetettebb hiperelasztikus anyagmodellek vizsgálatára is, ami későbbi kutatási terveink között szerepel.

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatási projekt a Kulturális és Innovációs Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával, az NKFIH FK 142457 azonosítójú pályázat finanszírozásában valósult meg. Szerző köszönetét fejezi ki a támogatásért.

## HIVATKOZÁSOK

- [1] X.F. Peng, L.X. Li, Material stability consideration for common compressible isotropic hyper-elastic models, *Int. J. Mech. Mater. Des.* 16: 801–815, 2020. <https://doi.org/10.1007/s10999-020-09504-y>  
[2] P.J. Flory, Thermodynamic relations for high elastic materials, *Transactions of the Faraday Society* 57: 829–838, 1961. <https://doi.org/10.1039/TF9615700829>  
[3] A. Kossa, M.T. Valentine, R.M. McMeeking, Analysis of the compressible, isotropic, neo-Hookean hyperelastic model, *Meccanica* 58: 217–232, 2023. <https://doi.org/10.1007/s11012-022-01633-2>



## A NEMLINEÁRIS MODELLILLESZTÉSI ELJÁRÁSOKNAK A PARAMÉTERTÉR DIREKT SZORZAT ALAKÚ FELBONTÁSÁN ALAPULÓ JAVÍTÁSA

Imre Emőke<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Óbudai Egyetem, Bánki Donát Gépész és Biztonságtechnikai Mérnöki Kar

<sup>2</sup>Óbudai Egyetem, EKIK HBM Kutatóközpont

1081 Budapest, Népszínház u. 8.

imre.emoke@uni-obuda.hu

A laboratóriumi és a helyszíni mérések nagy részét jelenleg közelítően értékelik a geotechnikai tervezési gyakorlatban. Egy ismert modelltörvény segítségével egy pontban illesztik a mért adatokat és a sok esetben erősen közelítő modellt. A kutatás során egy új, kapcsolt konszolidációs modellen és egy új, matematikailag pontos modell-illesztési eljárás alapján, számítógépes értékelő eljárás készült az időfüggő, konszolidációs mérések értékelésére, melyek esetén a mérési adatokat az idő függvényében rögzítik (pl. CPTu disszipációs kísérlet, vagy laboratóriumi ödométeres disszipációs kísérletek).

A hibafüggvény ezekben az esetekben majdnem konvex (zajmentes esetben, lineáris anyagtörvény esetén konvex, a zaj és nemlinearitás „kicsit” módosítja), mivel lineáris parciális differenciálegyenlet-rendszer analitikus megoldásához kapcsolódik. A kutatási célja ezen majdnem konvex hibafüggvények automatikus minimalizáló eljárásának kidolgozása ([1 - 7]), beleértve a paraméterek érzékenységének és hibájának becslését, valamint regularizációs ([10]) módszer megadását kvázi-degenerált hibafüggvény esetében.

Az alkalmazásra kerülő hierarchikus eljárást korábban széles körben használták lineáris egyenletrendszerek megoldása esetén, csökkentve a problémák méretét. A javasolt nemlineáris hierarchikus (két lépéses) paraméter identifikációs módszer egyrészt csatolható az ismert nemlineáris minimalizálási eljárásokhoz, a lineáris rész leválasztása révén. Ezzel a meglévő nemlineáris modellillesztési eljárások javíthatók, a kiegészítő eljárás ugyanis csökkentheti a nemlineáris probléma méretét.

Másrészt az eljárás használható a majdnem konvex hibafüggvények minimalizálására, akár többszörösen alkalmazva a hierarchikus elvet. Ennek révén olyan geometriai (implicit regularizációs) eszközöket is biztosít, amelyek révén a matematikailag pontos értékelésen kívül lehetőség van a paraméterek hibájának becslésére, és a mérés időtartamának rövidítésére is. A “hosszú”, pl.1 nap időtartamú mérések pár óra, vagy a pár óra időtartamú mérések pár perc után leállíthatók, mivel az adatok akkor is értékelhetők, ha a hibafüggvény a rövid időtartam miatt kvázi-degenerálttá válik, vagy alakja eltorzul.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] E. Imre, Q.P. Trang, I. Fityus, G. Telekes, A geometric parameter error estimation method, *ComGeo II*. 405-414, 2011.
- [2] E. Imre, T. Schanz, Cs. Hegedüs, Some thoughts in non-linear inverse problem solution, In: *EUROTUN 2013*, Bochum, Germany, 04. 17. 2013 - 04.19. 2013, pp. 357-365, 2013.
- [3] E. Imre, P. Rózsa, L. Bates, S. Fityus, Evaluation of monotonic and non-monotonic dissipation test results, *Computers and Geotechnics* 37(7-8): 885 - 904, 2010.
- [4] E. Imre, Cs. Hegedüs, S. Kovács, Some Comments on the Non-Linear Model Fitting, In: A. Szakál (ed.), *IEEE 18th International Symposium on Computational Intelligence and Informatics (CINTI 2018)*, IEEE Hungary Section, pp. 173-178, 2018.
- [5] E. Imre, Cs. Hegedüs, S. Kovacs, L. Kovacs, Reducing numerical work in non-linear parameter identification, doi.org/10.48550/arXiv.2102.08210, 2021.
- [6] E. Imre, A comment on the combination of the implicit function theorem and the Morse lemma, doi.org/10.48550/arXiv.2301.03427.
- [7] E. Imre, M. Hegedüs, L. Bates, S. Fityus, Evaluation of complex CPTu dissipation tests of B.E.S.T., *Cone Penetration Testing 2022*: 473- 479, ISBN 9781003308829, 2022.
- [8] Cs. Hegedüs, *Numerical analysis I-II*, ELTE 78 p, 56 p. <https://www.inf.elte.hu/dstore/document/360/CsabaJHegedus>, 2015, 2016.



## A TAPADÁS NUMERIKUS MODELLEZÉSÉNEK LEHETŐSÉGEI VASBETONSZERKEZETEK BEN

Szinvai Szabolcs<sup>1</sup> és Dr. Kovács Tamás<sup>2</sup>

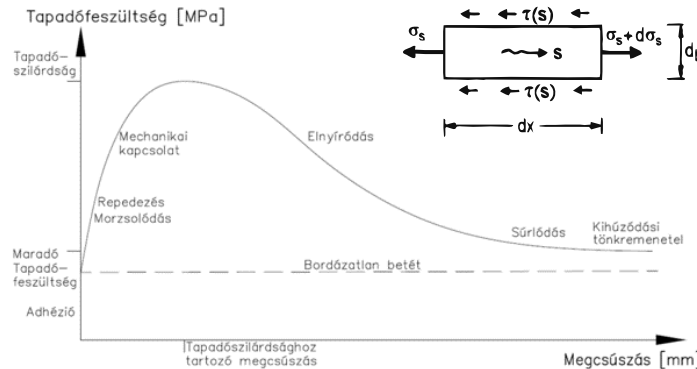
<sup>1,2</sup>BME, Hidak és Szerkezetek Tanszék

1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

szinvaiszab@edu.bme.hu, kovacs.tamas@emk.bme.hu

Vasbetonszerkezeteknél a beton és a betét közötti tapadáson keresztül történik az erőátadás. Ahogyan változik az igénybevétel a szerkezetben, úgy változik az erő a betonban és a betétben. Amikor egy pontban a betét és a beton alakváltozása nem egyezik meg, relatív megcsúszás keletkezik a két felület között.

Betétek tapadását kihúzó kísérletekkel lehet meghatározni, ezek végrehajtása szabványokban is le van írva [1]. A kísérletek eredménye az 1. ábrán látható úgynevezett tapadófeszültség-relatív megcsúszás diagram.



1. ábra. Általános tapadófeszültség-relatív megcsúszás diagram és egy  $dx$  hosszúságú betét egyensúlya [2]

Egy  $dx$  hosszúságú betét egyensúlya az

$$A_s d\sigma_s = - \int_0^s \tau(s) dx \quad (1)$$

egyenlettel írható le, ahol  $A_s$  a betét keresztmetszeti területe,  $\int_0^s$  a betét kerülete,  $\sigma_s$  a betétben lévő feszültség,  $\tau_s$  pedig a tapadófeszültség a relatív-megcsúszás ( $s$ ) függvényében [2]. Több analitikus tapadófeszültség-relatív megcsúszás modell is létezik, ezek közül a legjelentősebb Eligehausen BPE modelljén [3] alapuló *fib* Model Code 2010 [4]-ben leírt összefüggés. Ez az 1. ábra idealizált változata.

Ezeket a modelleket számos kísérlet alapján, bordázott betonacélokra alkották meg, szokványos esetekre. Más esetben a modell paramétereit módosítani kell. Felmerül az igény, hogy a bordázott betonacélokra jól használható analitikus modelleket alkalmazzon lehesen más betétekre is.

Erre példa a héteres pászmák vizsgálata, ahol a mechanikus tapadást a sodort geometria adja, vagy a viszonylag újkeletű szálerősítésű polimer (FRP) betétek, amiknek a felületi tulajdonságaik egészen eltérőek lehetnek egy bordázott betonacélettől.

Egy lehetséges megoldás a problémára numerikus modellek építése. Nemlineáris végesesemes analízissal lehetséges a betétek geometriai modellezése. Bordázott betonacélokkal összehasonlítva lehetséges a numerikus modellek segítségével az analitikus modellek módosítása a különböző anyagú és geometriájú betétek esetén. Ez a cikk a probléma első lépésével foglalkozik, körüljárja a bordázott betonacélok tapadásának numerikus modellezésének lehetőségeit.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] CEN, Steel for the reinforcement of concrete - Weldable reinforcing steel, *European Standard* EN 10080, 2005.
- [2] fib, Bond of reinforcement in concrete, *The International Federation for Structural Concrete Bulletin* 10, 2000.
- [3] Eligehausen, Rolf and Popov, Egor and Bertero, Vitelmo, Local Bond stress slip relationship of deformed bars under generalized excitations, *Report to the National Science Foundation* UCB/EERC-83/23, 1983.
- [4] fib, Fib Model Code For Concrete Structures 2010, *The International Federation for Structural Concrete Model Code* 2010, 2013.

## ADAPTÍV HAJLÍTÁSMENTES SZERKEZETEK

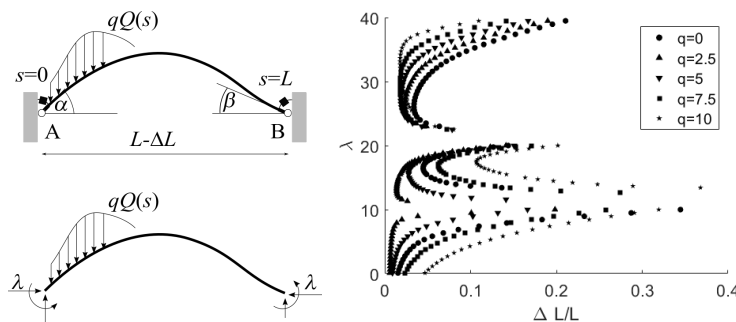
Várkonyi Péter László<sup>1</sup> és Andres Felipe Guerra Riaño<sup>1</sup>

<sup>1</sup>BME, Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.  
varkonyi.peter@epk.bme.hu, guerra.andres@edu.bme.hu

Sipos András Árpád<sup>2</sup>

<sup>2</sup>BME, Morfológia és Geometriai Modellezés Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.  
siposa@eik.bme.hu

Adaptívnek nevezzük azokat a szerkezeteket, melyek szabályozók és aktuátorok segítségével reagálnak az őket érő környezeti hatásokra. Az építészeti léptékű szerkezetek körében az adaptivitást felhasználják földrengésállóság javítására, rezgéscsillapításra [1], illetve statikus terheknek kitett szerkezetek optimalizálására is. Jelen munkában adaptív hajlításmentes, nyomásvonal alakú szerkezeteket vizsgálunk, melynek fő motivációja az, hogy a hagyományos hajlításmentes szerkezetek [2] hatékonyságát nagyban rontják az időben változó terhek.



1. ábra. Adaptív rugalmas ív szerkezeti modellje, szabad test ábrája és bifurkációs diagramja.

Egyik, illetve mindkét végén befogott, lineárisan rugalmas, nagy alakváltozásokra képes rúdszerkezeteket vizsgálunk. A szerkezet alakját vagy a kezdeti görbület, vagy a befogás(ok) szögének változtatásával szabályozzuk. Az előbbi esetben a cél a tökéletes hajlításmentesség fenntartása, utóbbi esetben pedig az attól való eltérés alacsony szinten tartása. Az 1. ábrán bemutatott példa esetén a két végén megtámasztott szerkezetet időben lassan változó, függőleges megoszló teher terheli, és a rúd  $L$  ívhossza nagyobb a két támasz  $L - \Delta L$  távolságánál. Fő kérdésünk az, hogy a rúd mentén megoszló  $qQ(s)$  teher  $Q(s)$  eloszlás-függvényétől (ahol  $\int_0^L Q(s) = 1$ ) függően az  $\alpha$  és  $\beta$  befogási szög megfelelő megválasztásával hogyan tudjuk megnövelni a szerkezet tönkremeneteléhez tartozó kritikus  $q$  teherintenzitást. Különböző tönkremeneteli kritériumokat vizsgálunk (pl. dinamikus stabilitásvesztés, határértéket meghaladó görbület vagy hajlítónyomaték). A szerkezet viselkedését a *MatLab Chebfun Toolbox* segítségével implementált peremérték feladat megoldó algoritmussal vizsgáljuk. A kutatás távlati célja olyan robusztus alakszabályozási algoritmusok létrehozása, amellyel a szerkezetek megbízhatóan megőrzik hajlításmentességüket a közvetlenül nem mérhető külső terhek ingadozása esetén.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatást az NKFIH az 143175 számú projekt keretében támogatja.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] W. Sobek, Ultra-lightweight construction, *International Journal of Space Structures* 31: 74–80, 2016.  
[2] D. Veenendaal, P. Block, An overview and comparison of structural form finding methods for general networks, *International Journal of Solids and Structures* 49: 3741–3753, 2012.

## ADAPTÍV PONTFELHŐSŰRÍTÉSEN ALAPULÓ RADIÁLIS BÁZISFÜGGVÉNY TECHNIKA RUGALMASSÁGTANI FELADATOK MEGOLDÁSÁRA

**Tóth Balázs**

Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet  
3515 Miskolc-Egyetemváros  
balazs.toth@uni-miskolc.hu

Az egyik leggyakrabban használt technika parciális differenciálegyenletek közvetlen numerikus megoldására a véges differencia módszer (VDM). Viszont a klasszikus VDM, illetve annak egyes, továbbfejlesztett változatai csak rács alapú hálóra, azaz strukturált vagy kvázিয়েgyenletes ponteloszlás esetén alkalmazhatók megfelelően. Van egy talán kevésbé elterjedt, de annál ígéretesebb verziója is, mely az ún. radiális bázisfüggvényeken (RBF) alapul. Ennek előnye az, hogy tetszőleges ponteloszlás esetén is jól használható [1].

A RBF-eknek két típusa van: (i) az egyik a  $C^\infty$  sima RBF-ek, melyek ugyan spektrális konvergenciát mutatnak, ha az ismert függvények és a bemeneti adathalmazok folytonosak, viszont stabilitásuk és pontosságuk csak az  $\epsilon$  alakparaméter segítségével szabályozhatók, (ii) a másik a szakaszonként folytonos RBF-ek, melyek a differenciáloperátor típusától függő algebrai konvergenciát mutatnak. Bár esetükben szükség lehet további polinomok bevezetésére a stabilizáláshoz, illetve a konvergencia biztosításához, azok kezelése valamivel egyszerűbb, mint az alakparaméter szabályozása a  $C^\infty$  sima RBF-ek esetén.

Főként a fent említett kedvező tulajdonságok motiválták az utóbbi három évben végzett kutatásaimat. Ennek eredményeként írtam egy saját fejlesztésű, RBF technikán alapuló kódot, mely alkalmas másodrendű differenciálegyenletek numerikus megoldására 1D-s és 2D-s pontfelhőkön. Az adaptív pontfelhősűritésen alapuló megoldó hatékonyan javítja a megoldás pontosságát és gyorsítja a konvergenciát [1]. A kód számítási hatékonyságát és konvergencia-viselkedését a numerikus szempontból legnagyobb kihívást jelentő benchmark feladatokra fogom tesztelni. Ezek a feladatok általában (i) erős szingularitást, (ii) nagy meredekségű és nagyságú ugrást, valamint (iii) anyagi határfelületet tartalmaznak [2, 3, 4].

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A bemutatott alapkutatást a DAAD kutatói csereprogram ösztöndíja és a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal (NKFIH) FK 134277 számú kutatási pályázata támogatta.

### HIVATKOZÁSOK

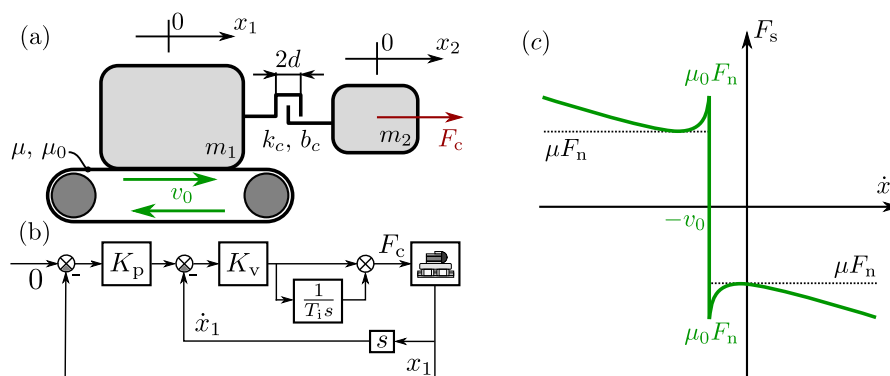
- [1] B. Tóth, A. Düster,  $h$ -adaptive radial basis function finite difference method for linear elasticity problems, *Computational Mechanics* 71:433-452, 2023.
- [2] M. Dauge, A. Düster, E. Rank, Theoretical and numerical investigation of the finite cell method, *Journal of Scientific Computing* 65:1039-1064, 2015.
- [3] L. Demkowicz, Computing with  $hp$ -adaptive finite elements. One- and two-dimensional elliptic and Maxwell problems. In: *Applied Mathematics and Nonlinear Science*, Vol. I., Chapman & Hall/CRC Press, Taylor & Francis Group, 2007.
- [4] B. Szabó, I. Babuška, *Introduction to Finite Element Analysis: Formulation, Verification and validation*, John Wiley & Sons, New York, 2011.

## AKADOZÓ CSÚSZÁS MODELLEZÉSE RENDKÍVÜL ALACSONY SEBESSÉGGEL MOZGÓ LINEÁRIS VEZETÉKEKBEN

Iklódi Zsolt<sup>1</sup> és Dombóvári Zoltán<sup>1</sup>

<sup>1</sup>MTA-BME Lendület Szerszámgéprezgések Kutatócsoport, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék, 1111 Budapest Műegyetem rkp. 5.  
zsolt.iklodi@mm.bme.hu, dombovari@mm.bme.hu

Befejező köszörülési folyamatok során, a maximális felületi minőség és megmunkálási pontosság érdekében, az előtolási sebességet sokszor rendkívül alacsonynak választják (akár 10-20  $\mu\text{m}/\text{perc}$ ). Az ehhez szükséges rendkívül lassú mozgások pontos és egyenes megvalósítása igen komoly kihívások elé állítja mind a köszörűfejet hordozó szerszámgépet mind annak a vezérlését. Köszörűgépben az előtolást sokszor egy golyósorsóból és lineáris vezetékekből álló konstrukció segítségével valósítják meg. Ezen összeállításokban két jelentős mechanikai probléma léphet fel. A golyósorsó mikronos nagyságrendű holtjátéka jelentős bizonytalanságokat és késéseket eredményezhet a gép mozgatásáért felelős szabályozó körben, a lineáris vezetékekben pedig a fellépő tapadási és súrlódási erők különbségének hatására kialakulhat az akadozó csúszás jelensége [1, 2, 3].



1. ábra. (a) Golyósorsós mozgatás mechanikai modellje, (b) egyenletes mozgást biztosító szabályozó kör, (c) súrlódási erőmodell.

Az 1.(a) ábrán egy egyszerűsített két szabadságfokú mechanikai modell látható, amely képes egyszerre modellezni mind a golyósorsó holtjátékát, mind a lineáris vezeték akadozó csúszását. Itt  $v_0$  az előírt előtolási sebesség,  $m_1$  és  $m_2$  a golyósorsó által összekötött mozgatott és mozgató testek tömegei,  $d$  a rendszer holtjátéka és  $F_c$  az egyenletes haladást ( $\dot{x}_1 \equiv 0$ ) biztosítani hivatott szabályozó erő. A golyósorsóban érintkezési kontakt dinamika a  $k_c$  merevség és  $b_c$  csillapítás segítségével jellemezhető. Ugyanitt a (b) panelen látható az  $F_c$  erő előállításáért felelős, egy köszörűgép pozíció kontrollere minájtára megvalósított, P-PI szabályozó kör. Végül a (c) panel a modellezés során feltételezett Stribeck-féle súrlódási erőkarakterisztikát mutatja be.

Az 1. ábrán látható szakaszosan-sima mechatronikai rendszer dinamikai viselkedését időbeli szimulációk és numerikus periodikus pálya követés segítségével elemeztük. Tapasztalataink alapján a modell jól visszaadja a valós köszörűgépben megfigyelhető akadozó-csúszó mozgásokat. Segítségével mélyebb belátást nyerhetünk az eredeti köszörülési probléma dinamikai viselkedésébe, és segíthetjük a 1.(b) ábrán látható controller paraméterek ( $K_p$ ,  $K_v$  és  $T_i$ ) optimális megválasztását.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A Kulturális és Innovációs Minisztérium **ÚNKP-22-3-I-BME-89** kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] M. Lőrinc, B. Lantos, Control of mechanical systems with Stribeck friction and backlash, *Systems & Control Letters* 58(2):141-147, 2009.
- [2] P. Eun-Chan, H. Lim, C. Choi, Position control of XY table at velocity reversal using presliding friction characteristics, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 11(1): 24-31, 2003.
- [3] P. Kowalczyk, P. T. Piironen, Two-parameter sliding bifurcations of periodic solutions in a dry-friction oscillator, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 237(8): 1053-1073, 2008.

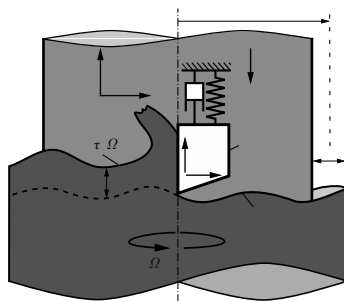
## ÁLLAPOTFÜGGŐ IDŐKÉSÉSRE VEZETŐ ESZTERGÁLÁSI MODELL STABILIZÁSVIZSGÁLATA

**Martinovich Kristóf és Bachrathy Dániel**

BME, Műszaki Mechanikai Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.  
martinovich@mm.bme.hu, bachrathy@mm.bme.hu

A gyártástechnológiában a megmunkálási folyamatok legfontosabb szempontjai a termelékenység és a hatékonyság. Ezek érdekében a technológiai paraméterek túlzott növelése azonban gyakran nemkívánt rezgésekhez vezet ("chatter"), ami hibás munkadarabot eredményezhet. Éppen ezért nagy jelentőséggel bír mind az iparban, mind a kutatásban, az egyes megmunkálási folyamatok stabilitásának vizsgálata.

Karsú (hosszú vékony) munkadarabok megmunkálása esetén megmutatták [1], hogy a fordulatszám megfelelő változtatásával elkerülhetőek a káros rezgések. Az iparban használatos az orsó fordulatszámának egy nominális érték körüli periodikus modulálása [2] a megmunkálási folyamatok stabilizálásának érdekében, amely periodikusan változó időkésést eredményez. A fordulatszám tetszőleges változtatására közvetve a hajtómotor nyomatékának szabályozásával van lehetőség. Az így felírható egyszerűsített modell az 1. ábrán látható, ahol a munkadarabot tökéletesen merevnek, a szerszámot egy szabadságfokú tömeg, rugó és csillapítással vesszük figyelembe. Jelen munkában a fordulatszám változást a megfelelő dinamikai egyenlettel írjuk le.



1. ábra. Időben változó fordulatszámú esztergálási modell

A regeneratív forgácsolási modellben az időkésés a munkadarab forgásából származik, mivel a forgácsvastagság a múltbeli és a pillanatnyi pozíciótól is függ, ahol az időkésést az alábbi implicit integrál egyenlet adja meg

$$\int_{t-\tau(t)}^t \Omega(t) = 2\pi, \quad (1)$$

ahol a  $\Omega(t) = \Omega_0 + \omega(t)$ . Amennyiben változik a megmunkálás során a főorsó fordulatszáma, úgy ez a modell a konstans időkésés helyett a következő elsőrendű állapotfüggő időkéseltetett differencialegyenlet-rendszerre vezet

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{y} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \omega(t) \\ -2\zeta\omega_n\dot{y}(t) - \omega_n^2 y(t) + \frac{wK_y}{m} (v\tau(\Omega_t) + y(t - \tau(\Omega_t)) - y(t))^q \\ \frac{M - wK_y R (v\tau(\Omega_t) + y(t - \tau(\Omega_t)) - y(t))^q}{\Theta} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Jelen tanulmányban az így felírt rendszernek végezzük el a lineáris stabilitásvizsgálatát a technológiai paraméterek terében, hasonlóan a [3] bemutatott módon.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A jelen kutatás az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok (OTKA FK-138500) támogatásával valósult meg.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] G. Stepan, A. K. Kiss, B. Ghalamchi, J. Sapanen, D. Bachrathy, Chatter avoidance in cutting highly flexible workpieces, *CIRP Annals* 66(1):377–380, 2017.
- [2] T. Insperger, G. Stepan, Stability analysis of turning with periodic spindle speed modulation via semidiscretization, *Journal of Vibration and Control* 10(12):1835–1855, 2004.
- [3] T. Insperger, G. Stépán, J. Turi, State-dependent delay in regenerative turning processes, *Nonlinear Dynamics* 47:275–283, 2007.

## ÁLTALÁNOSÍTOTT TERMODINAMIKAI MODELLEK KÍSÉRLETI HÁTTERE ÉS KIÉRTÉKELÉSI MÓDSZERTANA

Kovács Róbert<sup>1</sup> és Fehér Anna<sup>2</sup>

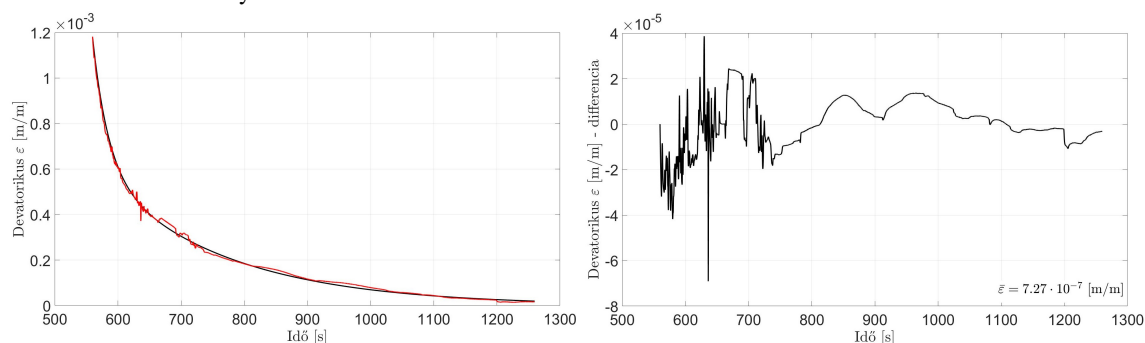
<sup>1,2</sup>BME, Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

<sup>1</sup>Wigner RMI, Elméleti Fizikai Osztály  
1121 Budapest Konkoly-Thege Miklós út 29-33.  
kovacs.robort@gpk.bme.hu

Számtalan modern mérnöki alkalmazás követeli meg a klasszikus, standardnak számító konstitúciós összefüggések általánosítását. Ilyenek például az egyre szélesebb körben elterjedő nanoanyagok, alacsony hőmérsékletű berendezések, és az összetett szerkezetű heterogén anyagok (kompozit fémhabok, kőzetek). Ez azt jelenti, hogy a standard konstitúciós összefüggések - Fourier, Hooke, Newton-törvények - nem feltétlenül képesek megfelelő leírást adni az ilyen, vagy ezekhez hasonló helyzetekben, vagyis azok általánosítására, kiegészítésére van szükség. Ez nem csak a hővezetési jelenségekre érvényes állítás, hanem a mechanikai viselkedés sem tökéletesen rugalmas, még homogén anyagokra vonatkozóan sem. Mechanikai oldalról az úgynevezett viszkoelasztikus (reológiai) jelenségek okozhatják a Hooke-törvénytől való eltérést, amelyek szintén a standard konstitúciós összefüggések általánosítását igénylik. A sor tovább folytatható a fluidumok Newton-törvényével, vagy az anyagdifúzióhoz kapcsolódó Fick-törvénnyel is.

Az előadás során röviden tárgyaljuk az előbb említett jelenségek kísérleti és termodinamikai hátterét, valamint a modellek felépítését [1, 2]. Az általánosított modellek megértésében nagy hasznunkra van a térbeli és időbeli skálák feltérképezése, ilyen például az 1. ábrán látható relaxációs folyamat modellezése is. Ezen túlmenően a kísérletek megtervezését, valamint a kísérletek során tett megfigyelések interpretációját is elősegíti [3]. A kérdés azonban felmerül: hogyan tudjuk az általánosított modelleket a megfigyelésekhez illeszteni? Több nehézség is felmerül, túlmutatva a modellek megértésén. Fel kell térképezni a lehetséges analitikus és numerikus megoldási módszereket, és ki kell dolgozni egy olyan általános illesztési eljárást, amely modelltől függetlenül használható, de mégis ad a modell paramétereire vonatkozóan információkat. Sok esetben a hagyományos, VEM alapú, vagy beépített numerikus integrátorok nem működnek hatékonyan, vagy akár rossz eredményt is adnak.

Az előadásban bemutatunk egy olyan iteratív, érzékenységi függvényeken alapuló illesztési eljárást [4], amely egyaránt alkalmazható mechanikai és hővezetési esetekre, az általánosított modellekre pedig - a megoldási módszerek ismeretében - könnyen alkalmazható.



1. ábra. Relaxációs folyamat illesztése a Poynting-Thomson-Zener-moddellel.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] T. Fülöp P. Ván. Universality In Heat Conduction Theory: Weakly Nonlocal Thermodynamics. *Ann. Phys.*, 8:470–478, 2012.
- [2] Cs. Asszonyi, T. Fülöp, P. Ván. Distinguished rheological models for solids in the framework of a thermodynamical internal variable theory. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 27:971-986, 2015.
- [3] A. Fehér R. Kovács. Heterogén anyagok hőimpulzus kísérletének kiértékelési eljárása. *Magyar Energetika*, 29:2-10, 2022.
- [4] P. Le Masson et al. Mettí 6 Advanced School: Thermal Measurements and Inverse Techniques. Lecture notes. Biarritz, Franciaország, 2015. március 1-6.

## ALULAKTUÁLT ROBOT SZABÁLYOZÁSÁNAK ELMÉLETI ÉS KÍSÉRLETI VIZSGÁLATA

Zana Roland Reginald<sup>1</sup> és Zelei Ambrus Miklós<sup>2</sup>

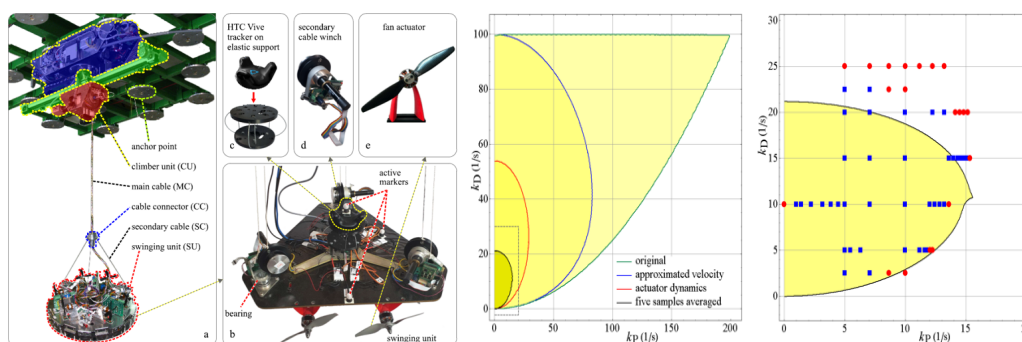
<sup>1</sup> Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.  
zana\_r@mm.bme.hu

<sup>2</sup> Széchenyi István Egyetem, Audi Hungaria Külső Tanszék  
9026 Győr, Egyetem tér 1.  
zelei.ambrus.miklos@sze.hu

Alulaktuált rendszerek [1], ahol a beavatkozók száma kisebb mint a rendszer szabadsági fokainak száma, gyakrabban előfordulnak a mindennapjainkban mint gondolnánk. Minden úszó és repülő jármű ebbe a kategóriába sorolható, ezen felül ide tartoznak még például a daruk és a flexibilis szerkezetek is. Gyakran szándékosan terveznek ilyen berendezéseket, annak költségei és össztömege csökkentése céljából.

Ha kevesebb az aktuátor mint a szabadsági fokok száma, a rendszer nem kezelhető teljesen aktuált rendszerként, tehát a szerkezet egy részének dinamikája nincs közvetlen befolyásolva. Így a pontos trajektória követés és a globális stabilitás eléréséhez, általában összetettebb szabályozási algoritmus alkalmazása szükséges. Ilyen rendszerekre számos nyílt és zárt hurkú szabályozási módszer létezik. Egy elterjedt hatékony szabályozási forma a teljes rendszer dinamikájának kezelésére: az inverz dinamika [2] más néven kiszámított nyomatók módosításának használata. A módszer alkalmazhatóságának vizsgálata a jelen munka tárgya, összevetve néhány, egyszerűbb visszacsatoláson alapuló szabályozással.

Jelen munka kísérleti berendezése az Acroboter robot [3], amely egy speciálisan előkészített mennyezetten közlekedő, daruk és drónok előnyeit összesítő alulaktuált berendezés. Ventilátorai agilissá teszik vízszintes mozgásokhoz, míg a függesztő kötelei segítségével szinte energiamentes lebegést képes megvalósítani nyugalmi helyzetben.



1. ábra. Az Acroboter új prototípusa és a stabilitás vizsgálat elméleti és mérési eredményei az “augmented Lagrangian” formalizmus esetében

Az inverz dinamikai szabályozási algoritmusok közül, az “augmented Lagrangian” formalizmus [4] esetén, elemzésre került a mintavételezés, azaz az időbeli diszkrétizálás hatása is, egy egyszerű alulaktuált, lineáris, két szabadságfokú minta rendszeren. A vizsgálat során figyelembe lett véve: az aktuátorok dinamikája, a sebességre visszacsatolás számításához használt véges differenciák módszerének hatása és a mérések zajának csökkentése céljából alkalmazott mozgó átlagolási technika hatása. Az elméleti eredmények levezetése után, a módszer a kísérleti berendezésen is kipróbálásra került. Az első, sárga tartományokat tartalmazó ábrán látható az említett tényezők stabil tartományt csökkentő hatása az elmélet szerint, tőle jobbra kinagyítva látható a digitális hatások által leszűkített legkisebb stabil tartomány, rajta a mérésekkel igazolt stabil és instabil erősítési tényező párosok, kék négyzettel, illetve piros pontokkal. A mérési eredmények jó fedésben voltak az elméleti számításokkal.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] M. W. Spong, Underactuated mechanical systems. Control Problems in Robotics and Automation, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 230, Springer, Berlin, Heidelberg, 1998. doi: /10.1007/BFb0015081
- [2] B. Siciliano, O. Khatib, *Handbook of Robotics*, Springer, 2008. ISBN: 978-3-540-38219-5
- [3] R. R. Zana, A. Zelei, Feedback motion control of a spatial double pendulum manipulator relying on swept laser based pose estimation *International Journal of Optomechatronics* 15(1): 32-60, 2021.
- [4] E. Bayo, J. G. de Jalón, M. A. Serna, A modified Lagrangian formulation for the dynamic analysis of constrained mechanical systems *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 71 (2):183-195, 1988.



## ANYAGHIBÁT TARTALMAZÓ KOMPOZIT RÚD STABILITÁSA PERIODIKUS RETARDÁLT TERHELÉS MELLETT

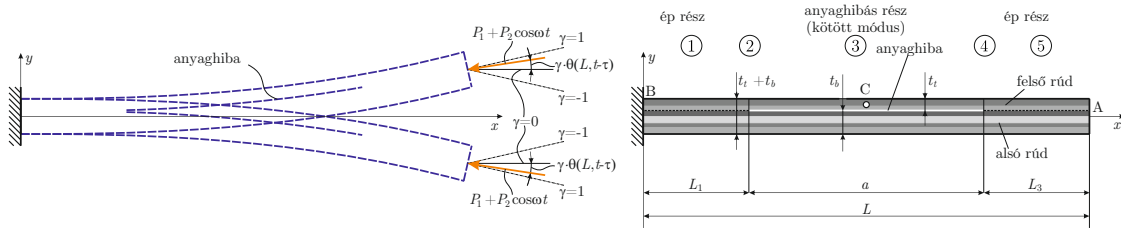
**Székrenyes András**

BME, Műszaki Mechanikai Tanszék

1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

szeki@mm.bme.hu

A mechanikai rendszerek késleltetett modelljeinek megoldására számos módszer létezik a szakirodalomban. Egy ezek közül az elsőfajú Chebyshev-féle polinomokon alapuló módszer [1, 2]. A módszert az egy és két szabadsági fokú inverz inga esetére többek között [3] mutatta be a Floquet elmélet alkalmazásával.

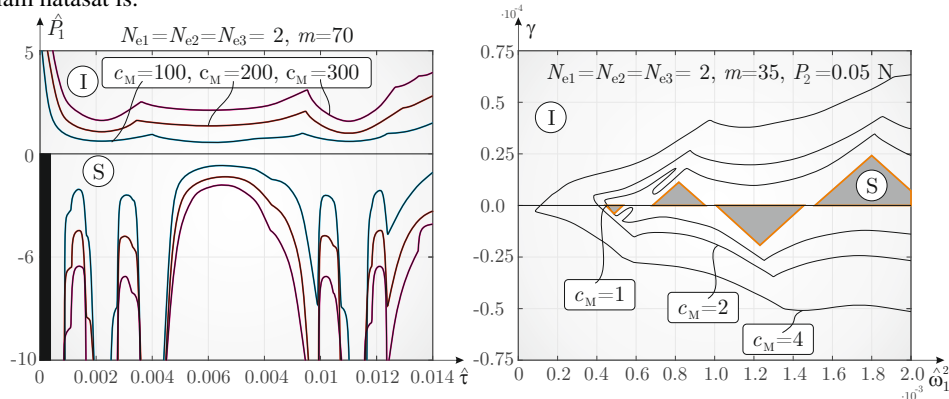


1. ábra. Anyaghibát tartalmazó kompozit rúd terhelése és modellje

Ennek a munkának a célja a módszer alkalmazása rugalmas kompozit rúdra, amiben anyaghiba (repedés) is van, ezt mutatja az 1. ábra. A rúd modelljének térbeli diszkrétizációját egy saját fejlesztésű Timoshenko-féle rúd végelem segítségével végezzük el, a szerkezeti modell egyenlete:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + (\mathbf{K} - P(t)\mathbf{K}_G)\mathbf{U}(t) + \gamma P(t)\mathbf{K}_L\mathbf{U}(t - \tau) = \mathbf{0}. \quad (1)$$

A fenti egyenletben a végelem háló felbontása és a Chebyshev-féle polinomok száma mellett számos paraméter befolyásolja a rendszer stabilitását. Mindemellett a modell képes figyelembe venni az anyaghiba miatti longitudinális hullám hatását is.



2. ábra. Anyaghibát tartalmazó kompozit rúd stabilitási diagramjai

A rendszer stabilitása az ún. egységkör kritérium alapján vizsgálható az adódó Floquet átviteli mátrix spektrális sugarának meghatározásával, erre mutat két példát a 2. ábra.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezt a kutató munkát az NKFIH támogatta a 134303 sz. pályázat keretein belül.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] Zs. Szabó, Adoption of the numerical method of Chebyshev polynomials to the stability analysis of delayed DEs, *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 2:102103, 2003.
- [2] E. A. Butcher, H. Ma, E. Bueler, V. Averina, Zs. Szabó, Stability of linear time-periodic delay-differential equations via Chebyshev polynomials, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59(7):895922, 2004.
- [3] H. Ma, E. A. Butcher, Stability of elastic columns with periodic retarded follower forces, *Journal of Sound and Vibration* 286(4-5):849-867, 2005.



## AZ ALAKVÁLTOZÁSI TENZOR ELŐÁLLÍTÁSA FELÜLETEN MÉRT ELMOZDULÁSJELBŐL

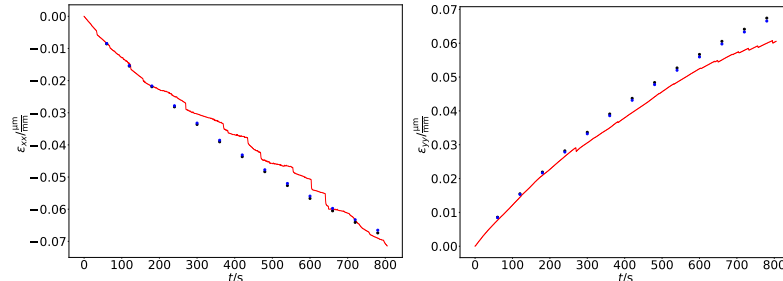
Szücs Mátyás<sup>1</sup> és Fülöp Tamás<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>BME, Gépészmérnöki Kar, Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék  
1111 Budapest, Bertalan Lajos utca 4-6.

<sup>1</sup>Wigner Fizikai Kutatóközpont, Részecske- és Magfizikai Intézet, Elméleti Fizikai Osztály  
1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.  
szucsmatyas@energia.bme.hu, fulop.tamas@gpk.bme.hu

A kőzetmechanikai gyakorlatban az *in situ* feszültségi állapot meghatározása elengedhetetlen feladat, ugyanakkor a feszültségi állapot közvetlenül nem mérhető, a kőzet anyagi paramétereinek ismeretében a mérhető elmozdulásokból vagy alakváltozásokból lehet a feszültségre következtetni. A kőzetfeszültség meghatározását általában (mély)fúrások során szokás végezni, melyre közvetlenül a fúrólukban történő mérés (pl. az overcoring módszer [1, 2]) vagy a felszínre hozott magminta vizsgálata is lehetőséget nyújt. Utóbbira tipikus példa az ASR (Anelastic Strain Recovery) technológia [3, 4], amikor is a felszínre hozott magminta viszkoelasztikus/reológiai viselkedéséből származó időben változó alakváltozásokat nyúlásmérő bélyegekkel követik le.

A nyúlásmérő bélyegekkel történő alakváltozás-mérést kiválthatjuk nagyobb pontosságú, optikai elven – pl. holografikus interferometriával – történő felületi elmozdulásméréssel, ekkor azonban a mért elmozdulásmezőből kell az alakváltozási tenzort előállítani. A pixelenként rögzített elmozdulásmezőből történő (numerikus) gradiensképzés zajos alakváltozási tenzorra vezethet. Előadásunkban egy hurokintegrálokra alapuló módszert [5] mutatunk be, mellyel a mért felületi elmozdulásmezőből robusztusabban meghatározhatók az alakváltozási tenzor megfelelő komponensei. Egy felületi pont „kis környezetében” az elmozdulásgradienst homogénnek tekintve, az elmozdulásmezőnek, valamint az elmozdulásmező hurokközéppontra vonatkoztatott vektor- és skalárnyomatékának hurokintegráljait kiértékelve az alakváltozási tenzor komponenseire vonatkozó egyenletrendszerrel kapunk, melyet megoldva az alakváltozási tenzor komponenseit nyerjük. Görbült felületek esetén az alakváltozási tenzor – sőt az elmozdulásgradiens – összes független eleme meghatározható. A módszert a „virtuális nyúlásmérő bélyegek módszerének” nevezzük. A módszert összenyomott hengeres PA6 polimer minta feszültségmentesítéséből származó kúszása közben holografikus interferometriával rögzített elmozdulásmezőjén teszteltük. Ugyanezen mérés során az alakváltozásokat mérőbélyeggel is követtük, mellyel összehasonlítva a virtuális nyúlásmérő bélyegek módszerével nyert alakváltozásokat, jó egyezést kaptunk.



1. ábra. PA6 polimer minta feszültségmentesítéséből származó kúszása közben rögzített hosszirányú és keresztirányú alakváltozások (piros: nyúlásmérő bélyegekből, pontok: felületi elmozdulásmezőből).

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatást az NKFIH FK 134277 és az NKFIH 2018-1.1.2-KFI-2018-00207 pályázatai tették lehetővé.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] D18 Committee, ASTM-D4623-08: Test Method for Determination of In Situ Stress in Rock Mass by Overcoring Method–USBM Borehole Deformation Gauge, tech. rep., ASTM International, 2022.
- [2] Y. Hiramatsu, Y. Oka, Determination of the stress in rock unaffected by boreholes or drifts, from measured strains or deformations, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 5:337–353, 1968. Issue: 4.
- [3] K. Matsuki, K. Takeuchi, Three-dimensional in situ stress determination by anelastic strain recovery of a rock core, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 30(7):1019–1022, 1993.
- [4] K. Matsuki, Anelastic strain recovery compliance of rocks and its application to in situ stress measurement, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 45(6):952–956, 2008.
- [5] Fülöp T., Szücs M., Az alakváltozási tenzor előállítása felületen mért elmozdulásjelből, in *Kőzetmechanika és termodinamika* (szerk. Takács D. M., Ván P., Vásárhelyi P.), 17–35, Egyesület a Tudomány és Technológia Egységéért, Budapest, 2023.

## AZ ANYAGI TESTEK BEN ÉBREDŐ BELSŐ ERŐK CSOPORTOSÍTÁSA AZ ANYAG VISELKEDÉSÉNEK KINEMATIKAI JELLEGE (RENDEZETLEN, KOLLEKTÍV, MINTÁZATOS) SZERINT

Lámer Géza

Debreceni Egyetem, Műszaki Menedzsment és Vállalkozási Tanszék  
4028 Debrecen, Ótmetető u. 2-4.  
glamer@eng.unideb.hu

Az erő „az anyagi testek egymásrahatásának mértéke. ... Az erő vektormennyiség.” [1] (p. 199). Az erőre vonatkozó „ismereteket” rendszerint axiómákban foglaljuk össze. Önálló axiómarendszer vonatkozik a pontrendszerek mechanikájában ébredő erőkre [2] (p. 403-417), illetve a merev (általánosabban deformálható szilárd) testek egyensúlyi állapotában fellépő erőkre [3] (p. 47-50). A két axiómarendszer nem független egymástól: az erőt mindkét axiómarendszer matematikai szempontból vektorként értelmezi, a testre gyakoroló „hatásukban” térnek el egymástól [4].

Az erő nem fizikai mennyiség, nem eredetével, hanem hatásával foglalkozunk; az erőt „az általa létesített *gyorsulás* (általánosabb szempontból *hatás*, Dr.L.G. megjegyzése) nagyságával arányosnak” tekintjük [5] (p. 38).

„Az erő két test egymásra hatásának mechanikai modellje” [4]. Az erő nem mérhető közvetlenül. Az erő hatása mérhető. Ehhez előre fel kell tételnie azt a módot, ahogyan az erő hat az adott testre. A modellben értelmezett, rendszerint kinematikai jellegű állapotváltozó változás mérhető.

Az erő értelmezéséhez szükséges annak az objektumnak az értelmezése, amelyre az erő a hatását kifejti: ez az objektum a(z anyagi) test [2] (p. 403).

Az anyagi testek széles skálája értelmezhető. Általánosságban a három halmazállapot szerinti szilárd, folyékony és gáznemű testet szokás megkülönböztetni (lásd pl. [5]). A szilárd, valamint folyékony test esetén anyagi tulajdonságokat (rugalmas, képlékeny, viszkózus, illetve sűrűlódásmentes és sűrűlódásos áramlás) szokás értelmezni.

A halmazállapot szerinti testek, valamint különböző alakváltozások és belső átrendeződések a topológia fogalmaival különíthetők el [6]. Az a megközelítés lehetővé teszi egyrészt a szilárd, a folyékony és légnemű test értelmezését a halmazállapot fogalmától függetlenül, másrészt a szilárd és a folyékony test „közé” illeszthető szemcsés test értelmezését [6].

A topológia segítséget ad a különböző anyagi testekben lezajló mozgások csoportosítására is: a mozgások elkülöníthetők rendezetlen, kollektív és mintázatos mozgások csoportjaira [7].

Jelen előadás célja, hogy a különböző testekben értelmezett különböző mozgásformákhoz különböző erőket rendeljünk. Az előadásban az alábbi anyagi testeket érintjük.

gáz: a részecskék időnkénti ütközése

folyadék: a részecskék folytonos érintkezése, de nincs rögzített rend

rácskontinuum: fennáll a részecskék rögzített rendje, bár a mozgás rendezetlen is lehet, a részecskék egymástól vett távolsága, illetve állása is tetszőlegesen változik

klasszikus kontinuum: a részecskék rögzített rendje mellett a mozgás kollektív, a test részecskéi közötti távolság változik, a változás folytonos (a részecskéket szétkentünk, pont forgásáról nem beszélünk)

merev test: a részecskék (értsd: az Euklideszi tér pontjai) rögzített rendje mellett a test pontjainak távolsága (is) állandó

anyagi pont: a test kiterjedésének nincs jelentősége (a modellezett test lehet szilárd test, de lehet „egyben tartott” folyadék(csepp)).

### HIVATKOZÁSOK

- [1] Fizikai kislexikon. Főszerk.: Dr. Szilágyi Miklós. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977.
- [2] Newton, I.: The Principia. Mathematical Principles of Natural Philosophy, University of California Press, Berkeley – Los Angeles – London, 1999. A new translation by B. Cohen and A. Whitman assisted by J. Budenz
- [3] Cholnoky, T.: Mechanika. I. kötet. Statika. Harmadik, átdolgozott kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.
- [4] Lámer, G.: A Set of Axioms on Forces in the Mechanics of Rigid Bodies. Journal of Materials Science & Nanotechnology. 7 (2), 1-14, 2019.
- [5] Budó, Á.: Mechanika. 5. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.
- [6] Lámer, G.: Solid and Soft Body with and without Structure = In: Quasi-Static Deformations of Particular Materials. Proceedings of QuaDMP'03 Workshop. 25-28 august 2003. Ed.: K. Bagi. P. Co. of BTU, Budapest, 2003. pp. 159-166.
- [7] Lámer, G.: On the Disordered, Collective and Patterned Movements of Media: Qualitative Analysis of Movements. Period. Polytech.-Civ. Eng. 63 (3), 726-741, 2019.

## BIOMECHANIKAI KÍSÉRLETI EREDMÉNYEK IGAZOLÁSA VÉGESELEM-MÓDSZERREL A LUMBÁLIS STABILIZÁLÁS EGYES MŰTÉTI TERÜLETEIN

Kurutz Márta<sup>1</sup> és Lakatos Éva<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

kurutz.marta@emk.bme.hu, lakatos.eva@emk.bme.hu

Csákány Tibor<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Országos Gerincgyógyászati Központ, H-1126 Budapest, Királyhágó u. 1.  
tibor.csakany@bhc.hu

Varga Péter<sup>4</sup>

<sup>4</sup> AO Research Institute Davos, Clavadelstrasse 8, 7270 Davos Platz, Switzerland  
peter.varga@aofoundation.org

A biomechanikai vizsgálatok ismert módszere a mechanikai kísérlet, amelynek során a vizsgálandó mintadarabot a fiziológiai körülményekhez hasonló mechanikai igénybevételeknek vetik alá, és a kísérlet során nyert mechanikai jellemzők elemzése alapján vonják le a következtetéseket a mintadarabban lezajló mechanikai változásokra vonatkozóan. A legtöbb esetben azonban ezek a következtetések mérnöki feltételezések, mert a mintadarab belsejében a mechanikai állapotváltozók bármely metszetben és irányban lezajló változásai kívülről nem láthatók. Ezt az igényt, a belső állapotváltozók folyamatos látható és számszerű követését elégíti ki a CT-specifikus végeelem-módszer alkalmazása.

A degenerált porckorongot kiváltó hagyományos előregyártott távtartók behelyezése a csigolyák deformálódott véglemezei közé nagyon körülményes, a távtartó jelentősen besüllyed a meggyengült véglemezbe és a szivacsos csontba, további károsodást okozva. Ezt elkerülendő, az Országos Gerincgyógyászati Központban évek óta PMMA csontcementet injektálnak a lumbális porckorong helyére távtartóként, jó klinikai tapasztalattal [1,2].

A módszer biomechanikai igazolását először mechanikai nyomásvizsgálat alapján végeztük el [3,4]. A cement távtartó azonos törőerőt, és szignifikánsan kisebb besüllyedést és nagyobb merevséget adott. Ezt azzal a feltételezéssel magyaráztuk, hogy a PMMA távtartónál a cement kitölti a deformálódott véglemez egyenetlenségeit, egyenletes teherátadást biztosítva, és mivel a cement-véglemez kapcsolat nyilván erősebb, mint a csigolyák leggyengébb középső ritkult szivacsos rétege, így a szegmentum tönkremenetele a csigolyák középső régiójában alakul ki, nyomás-jellegű globális károsodási zónát képezve. Viszont a PEEK távtartó fogainál a kis érintkező felület mentén a távtartó besüllyed a véglemezbe, át is törheti, így itt nyírás-jellegű lokális károsodási zóna alakul ki. Mindez azonban csak mérnöki feltételezés, mert nem tudni, mi zajlik pontosan a szegmentum belsejében.

Ezért a módszer igazolását CT-specifikus végeelem-módszerrel is elvégeztük [5]. Ehhez a nyomótesztnél használt szegmentumokról készült CT-rétegfelvételeket használtuk. A műtét utáni felvételek alapján készítettük el a szegmentumok geometriai modelljét. Az anyagállandókat és a peremfeltételeket a kísérleti teher-elmozdulás görbékkel való egyezés alapján validáltuk. A végeelemes szimuláció alapján megállapítottuk, hogy a cement valóban kitölti a véglemez egyenetlenségeit, ezáltal erős cement-véglemez kapcsolat alakul ki, amely feszültségcsúcsok nélküli egyenletes teherátadást biztosít, és a szegmentum tönkremenetele valóban a csigolyák középső, leggyengébb régiójában alakul ki, nyomás-jellegű diffúz károsodási zóna formájában. Viszont a PEEK távtartó kis érintkező fogazata mentén feszültségcsúcsok keletkeznek, a távtartó jelentősen besüllyed a véglemezbe, néha át is töri, és a távtartóval való érintkezés kis környezetében a szivacsos csont is károsodik, így itt valóban nyírás-jellegű lokális tönkremeneteli zóna alakul ki. Igazoltuk tehát a mérnöki feltételezéseket.

A végeelemes animációk során részletesen tanulmányozhattuk az egyes mechanikai állapotváltozók terhelési folyamat közbeni változását is, számszerű értékeit, a tönkremeneteli területek alakulását is. A műtétek szempontjából még olyan jelenségeket is vizsgálni tudtunk, mint a PEEK távtartók változó merevségű véglemezen való pontos elhelyezkedésének a perdöntő fontossága. Ugyanakkor azt is megállapítottuk, hogy a biomechanikai vizsgálatoknál a mérnöki gondolkodásnak nagyon fontos szerepe van, és már az egyszerűbb vizsgálatoknál is alapvető, lényeges megállapításokra és eredményekre vezet.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] T. Csákány, M. Rónai, Z. M. György, P. P. Varga, Bone cement as intervertebral spacer in thoracolumbar stabilization of aging spine - radiological and clinical results, *Global Spine Congress*, Barcelona, Spain, March 23-26, 2011.
- [2] P.P. Varga, G. Jakab, I. B. Bors, A. Lazary, Z. Szövérfi, Experiences with PMMA cement as a stand-alone intervertebral spacer. *Der Orthopäde* 44(1):1-8, 2015.
- [3] M. Kurutz, T. Csákány, P. Varga, P. P. Varga, Biomechanical evaluation of interbody devices by using mechanical compressive test: PEEK spacers versus PMMA cement spacers, *Biomechanica Hungarica* 6(1): 259-271, 2013.
- [4] T. Csákány, M. Kurutz, P. Varga, Biomechanical Evaluation of interbody devices by using mechanical compressive test: PEEK spacers versus PMMA cement spacers, *Global Spine Journal*, 05, Paper: S01, 2015.
- [5] P. Varga, P. Nédlí, T. Csákány, M. Kurutz, P. P. Varga, Biomechanical evaluation of two different vertebral interbody devices by using QCT-based case-specific nonlinear finite element models: a preliminary report, *Biomechanica Hungarica* 6(1):175-184, 2013.

## CSILLAPÍTÁS KARAKTERISZTIKA PONTOS DEFINIÁLÁSA ÜTKÖZÉSI FELADATOKHOZ

Serfőző Dániel<sup>1</sup> és Pere Balázs<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Széchenyi István Egyetem, Alkalmazott Mechanika Tanszék

9026 Győr, Egyetem tér 1.

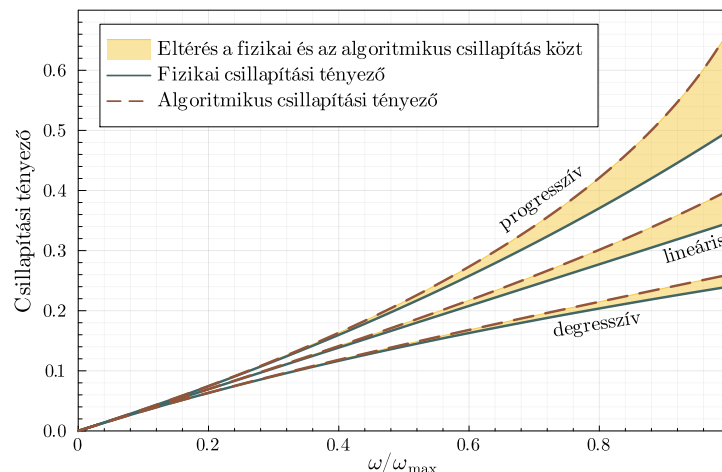
serfozo.daniel@sze.hu, pere.balazs@sze.hu

Az ütközés jellegű feladatok [1] kezelése a gyorsulás és a sebesség hirtelen változása, illetve az ütközés következtében az elmozdulás mezőben fellépő nagymértékű nemlinearitás miatt igencsak nehézkes. A véges elem módszer alkalmazásával megvalósított numerikus megoldásban a térbeli diszkretizáció következtében jelentős oszcillációk jelennek meg [2]. Ezek ütközési feladatok esetén komoly problémát jelentenek, mivel a kontakt algoritmusban könnyen divergenciát okozhatnak. Ennélfogva lényeges szempont ezen oszcillációk kiküszöbölése, illetve jelentős mértékű csökkentése.

Az általunk alkalmazott módszerben a nemkívánatos oszcillációk csökkentéséhez szükséges csillapító hatást viszkozus csillapítással [3] értjük el. A kidolgozott eljárás alapja a Centrális Differencia Módszer, mely egyáltalán nem tartalmaz numerikus csillapítást, így a csillapító hatás közvetlenül az alábbi mozgásegyenletben szereplő  $C$  csillapítási mátrix által fejthető ki.

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = f(t) \quad \xrightarrow{\text{modal transformation}} \quad \ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2q_i(t) = \varphi_i(t) \quad (1)$$

Ehhez a modális térben kell meghatározni az egyes sajátfrekvenciákhoz tartozó  $\xi$  fizikai csillapítási tényezőket. A számítás során ténylegesen érvényesülő csillapítás viszont az algoritmikus csillapítási tényezővel ( $\bar{\xi}$ ) jellemezhető. Ezen két mennyiség közt az alábbi ábra szerint jelentős eltérés mutatkozik.



1. ábra. Az algoritmikus és a fizikai csillapítás közti eltérés  $\Delta t = 0.4 \Delta t_{\max}$  esetén

Belátható, hogy tetszőleges csillapítás karakterisztika nagy pontosságú előállítását kizárólag az algoritmikus csillapítás definiálása által lehetséges. Kutatásunk során arra a következtetésre jutottunk, hogy a csillapítási görbe pontos alakjának nagy jelentősége van az ütközési feladatban megjelenő nemkívánatos oszcillációk csökkentésében, ezért az itt bemutatott módszer különösen alkalmas az ilyen típusú feladatok kezelésére.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A Kulturális és Innovációs Minisztérium ÚNKP-22-II-SZE-75 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] Peter Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. John Wiley Sons Ltd, 2002.
- [2] Nicholas J Carpenter, Robert L Taylor, and Michael G Katona. Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *International journal for numerical methods in engineering*, 32(1):103–128, 1991.
- [3] John VonNeumann and Robert D Richtmyer. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. *Journal of applied physics*, 21(3):232–237, 1950.

## DINAMIKAI RENDSZEREK ROBUSZTUS STABILITÁS TÉRKÉPE TÖBB-DIMENZIÓS FELEZŐ MÓDSZERREL ÉS STABILIZÁLHATÓSÁG

**Bachrathy Dániel**

BME, Műszaki Mechanikai Tanszék

1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.

bachrathy@mm.bme.hu

Dinamikai egyenletek stabilitási térképeinek számítása során felmerül az igény, hogy egy-egy bizonytalan paraméter hatását is figyelembe vegyük és robusztus stabilitási határokat határozzunk meg. Ezek tipikusan nagy számítású igényű feladatok és több-dimenziós stabilitási térképekre vezetnek, amelyek ábrázolásai is nehézkes. Általában nincs is szükségünk ezekre a magas dimenziós objektumokra, hanem csak ezek burkolójára, azaz csak arra a tartományra, amely garantáltan, tetszőleges paraméter perturbáció esetén is stabil marad. A rendszer stabilizálhatóságának vizsgálata egy ehhez szorosan kapcsolódó feladat, ahol a paraméter tartomány szélsőséges értékeit keressük, ahol még a rendszer stabil lehet.

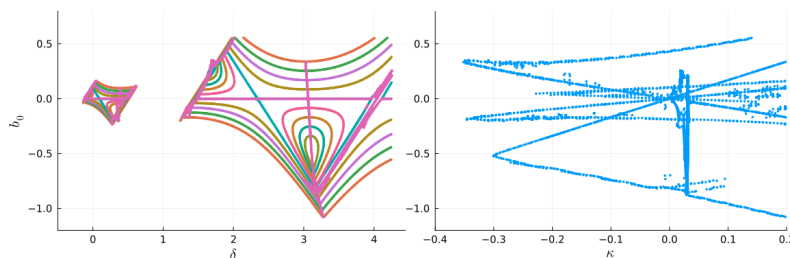
A robusztus stabilitási tartományokat a késleltetett Mathieu egyenlet alapján vizsgálom [1], amely egy periódikus késleltetett differenciálegyenlet. A kapcsolódó mozgásegyenlet szokásos alakja:

$$\ddot{x}(t) + \kappa \dot{x}(t) + (\delta + \epsilon \cos(2\pi t/T))x(t) = b_0 x(t - \tau). \quad (1)$$

A Floquet elmélet alapján az ilyen rendszerek stabilitási vizsgálata a karakterisztikus gyökök ( $\mu_i$ ) alapján elvégezhető, amelyekre számos módszer létezik. Jelen esetben a szemi-diszkrétizációt alkalmaztuk [2]. A rendszer stabilitási határát a spektrálsugar alapján határozzuk meg:  $|\mu_{\max}| = 1$ . A stabilitási határokat különböző csillapítási paraméterek ( $\kappa$ ) esetén az 1. ábrán mutatjuk be.

Egy adott  $p$  paraméter függetlenségére lehet használni a robusztus határ feltételeit,  $d|\mu_{\max}|/dp = 0$ , amely szerint a paraméter változása esetén is a stabilitási határon maradunk [3]. Ezzel meghatározhatjuk a söpört paraméter burkolóját, azonban ez a dupla Hopf-pontok által söpört tartományon degenerált egyenletrendszert ad a domináns karakterisztikus gyökök váltása miatt.

Jelen munkában megmutatjuk, hogy a megfelelően leválogatott karakterisztikus multiplikátorokkal számított  $H = \prod_i (1 - |\mu_i|)$ , ahol  $\text{Re}(\mu_i) \geq 0$ , segítségével az összes bifurkációs vonal megtalálható. Ezen megfelelően sima fület vizsgálatával már a dupla-Hopf-pontok által söpört terület is jól számítható. Ehhez a kombinált egyenlet:  $[|\mu_{\max}| - 1, dH/dp] = [0, 0]$  oldottuk meg a több-dimenziós felező módszer segítségével [4]. Az 1. ábra jobboldali részén látható a  $b_0$  paraméter szirint stabilizálható tartomány.



1. ábra. bal: Matieu egyenlet stabilitási diagramja, különböző időkésségek esetén  
jobb: a  $\delta$  paraméter alapján stabilizálható tartomány.  $T = \pi$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $\tau = 2\pi$

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A jelen kutatás az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok (OTKA FK-138500) támogatásával valamint a BME Bolyai+ ösztöndíj segítségével valósult meg.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] T. Inesperger, G. Stépán, Stability chart for the delayed Mathieu equation, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 458(2024): 1989–1998, 2002.
- [2] T. Inesperger, G. Stépán, Semi-discretization method for delayed systems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 55(5): 503–518, 2002.
- [3] D. Bachrathy, Robust stability limit of delayed dynamical systems, *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering* 59(2): 74–80, 2015.
- [4] D. Bachrathy, G. Stépán, Bisection method in higher dimensions and the efficiency number, *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering* 56(2): 81–86, 2012.

## DINAMIKUS ÉRINTKEZÉSI FELADATOK VIZSGÁLATA VÉGESELEM MÓDSZER SEGÍTSÉGÉVEL

Pere Balázs<sup>1</sup> és Serfőző Dániel<sup>2</sup>

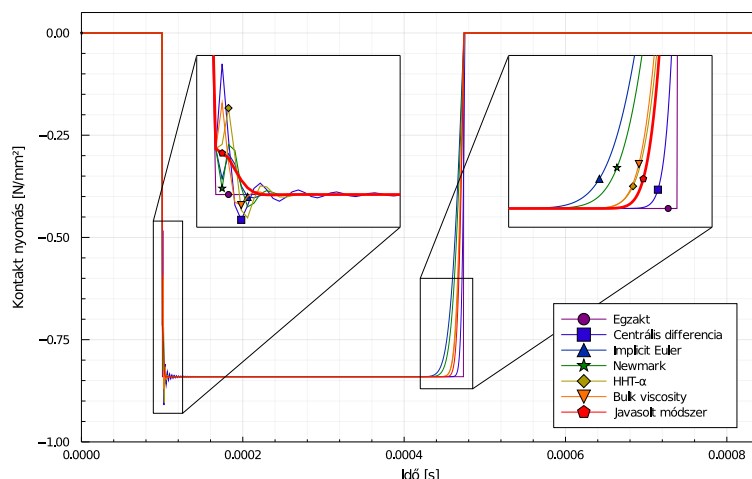
<sup>1,2</sup>Széchenyi István Egyetem, Alkalmazott Mechanika Tanszék

9026 Győr, Egyetem tér 1.

pere.balazs@sze.hu, serfozo.daniel@sze.hu

Dinamikus érintkezési feladatoknál az érintkező felületeken, majd onnan rugalmas hullámként továbbterjedve a sebességmezőben ugrásszerű változások jönnek létre, ami ugyanitt a gyorsulásokban szingularitásként jelentkezik. Ez komoly problémát jelent a probléma numerikus megoldásánál. Végelem módszer alkalmazása mellett a kontinuum végtelen szabadságfoka véges számúra csökken, ezért a szinguláris helyek közelében erős oszcillációk lépnek fel [1]. Ezen oszcillációk csökkentésére számos módszert dolgoztak ki. A legelterjedtebb módszer a már meglévő időlépéses algoritmusok numerikus csillapításának kihasználása [2, 3], de a szakirodalomban a mai napig jelennek meg újabb és újabb eljárások a nemkívánatos oszcillációk csökkentésére [4, 5]. Mindegyik módszer azon alapul, hogy az oszcillációk energiáját gyakorlatilag eldisszipálják, de ezzel egyidőben rontják a megoldás pontosságát is.

Jelen tanulmány egy viszkozus csillapításon alapuló újfajta megközelítést mutat be, amely segítségével a mostanáig elterjedt módszerekhez képest az oszcillációk jelentősen, szinte teljes mértékben megszüntethetők amellet, hogy a megoldás pontossága a többi módszerhez képes kisebb mértékben romlik. A 1. ábra egy egydimenziós (merev fallal ütköző rugalmas rúd) feladat érintkezési nyomásának időbeli változásán szemlélteti az általunk kidolgozott módszer hatékonyságát.



1. ábra. Rugalmas rúd merev fallal történő ütközésénél fellépő érintkezési nyomás az idő függvényében

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A Kulturális és Innovációs Minisztérium ÚNKP-22-II-SZE-75 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] N. J. Carpenter; R. L. Taylor ; M. G. Katona. Lagrange constraints for transient finite element surface contact. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 32.1: 103-128, 1991.
- [2] N. M. Newmark. A method of computation for structural dynamics. Journal of the Engineering Mechanics Division, 85.3: 67-94, 1959.
- [3] H. M. Hilber, T. JR. Hughes, R. L. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 5.3: 283-292, 1977.
- [4] L. Maheo ; V. Grolleau ; G. Rio. Numerical damping of spurious oscillations: a comparison between the bulk viscosity method and the explicit dissipative Tchamwa–Wielgosz scheme. Computational Mechanics, 51(1), 109-128, 2013.
- [5] W. Kim. A new family of two-stage explicit time integration methods with dissipation control capability for structural dynamics. Engineering Structures, 195: 358-372, 2019.



## EGY SZABADSÁGI FOKÚ MINTAVÉTELES MECHANIKAI RENDSZEREK REZGÉSEI

Haba Tamás<sup>1</sup> és Budai Csaba<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar,  
Mechatronika, Optika és Gépészeti Informatika Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.  
haba@mogi.bme.hu, budai@mogi.bme.hu

A mechatronika egyik alapvető feladata a mozgásszabályozás, ahol az alkalmazott szabályozók célja, hogy a vizsgált mechanikai alrendszer kinematikai jellemzőit a kívánt értékeknek megfelelően módosítsák. A szabályozók tervezésének kritériumait az ún. minőségi jellemzők határozzák meg. Az előírt viselkedés az egy szabadsági fokú csillapított lengőrendszer modelljén keresztül írható le konstans gerjesztést feltételezve. A vizsgált rendszer mozgásegyenlete az alábbi alakban adható meg

$$m\ddot{q}(t) + b\dot{q}(t) + kq(t) = f(t), \quad (1)$$

ahol  $q(t)$  az általánosított koordinátát,  $f(t)$  pedig az általánosított erőt jelöli a  $t$  idő függvényében. Az (1) egyenletben  $m$  az anyagi pont tömegét,  $b$  a viszkózus csillapítási tényezőt,  $k$  pedig a merevséget jelöli.

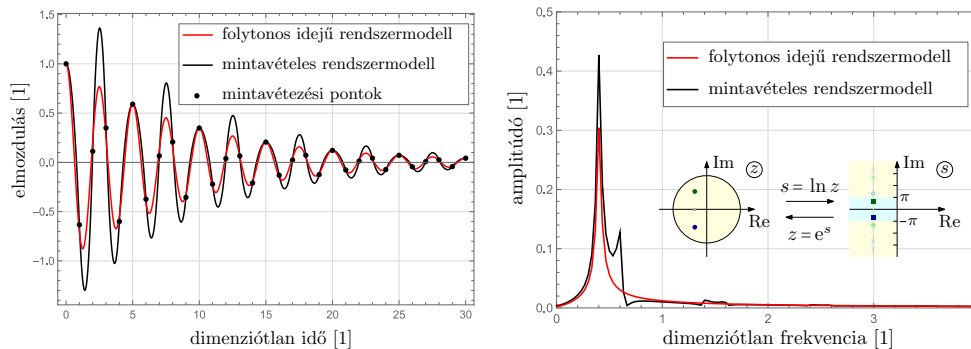
A digitálisan megvalósított szabályozási törvény [1] alkalmazásának következményei a csillapított virtuális lengőrendszer modelljén keresztül vizsgálhatók, amely megadható az alábbi alakban

$$m\ddot{q}(t) = -b_v\dot{q}(j\tau) - k_v q(j\tau), \quad t \in [j\tau, (j+1)\tau), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

ahol  $\tau$  a mintavételezési időt,  $k_v$  és  $b_v$  a virtuális merevség és csillapítás értékét jelöli. Ebben az esetben azonban a mintavételezésből eredő időkésés miatt a fizikai és a virtuális paraméterek már nem minden esetben feleltethetők meg egymásnak, sőt a domináns viselkedés egyértelmű leírásához több szabadsági fokú mechanikai modell figyelembevételére is szükség lehet [2, 3].

Ahogy azt az 1. ábra is szemlélteti, egy szabadsági fokú mechanikai alrendszer szabályozása esetén – a mintavételezési törvény betartása mellett is – megjelenhetnek olyan többfrekvenciás rezgések, amelyek a mintavételezés okozta felharmonikusokkal nem magyarázhatók.

Jelen tanulmány fókuszában az egy szabadsági fokú lengőrendszerek mintavételes szabályozásának olyan speciális esetei állnak, amikor a dinamikai viselkedés nem írható le egyetlen domináns rezgési frekvenciával. Bemutásra kerülnek a szabályozási rendszer pontosabb leírásra alkalmazható magasabb rendű dinamikai modellek és az azokhoz tartozó több szabadsági fokú mechanikai analógiák. Az alkalmazott modellek analitikus úton vezethetők le és az így kapott eredményeket numerikus szimulációk is igazolják.



1. ábra. A mintavételes rendszer elmozdulás diagramja (bal), és amplitúdó spektruma (jobb)

### HIVATKOZÁSOK

- [1] F. Golnaraghi, B.C. Kuo, *Automatic Control Systems*, McGraw-Hill Education, New York, 2017.
- [2] C. Budai, L.L. Kovács, J. Kövecses, G. Stépán, Combined effects of sampling and dry friction on position control, *Nonlinear Dyn.* 98(4):3001–3007, 2019.
- [3] C. Budai, Vibrations in Single-Degrees-of-Freedom Sampled-Data Linear Mechanical Systems, *Period. Polytech. Mech. Eng.* 66(1):90–98, 2022.

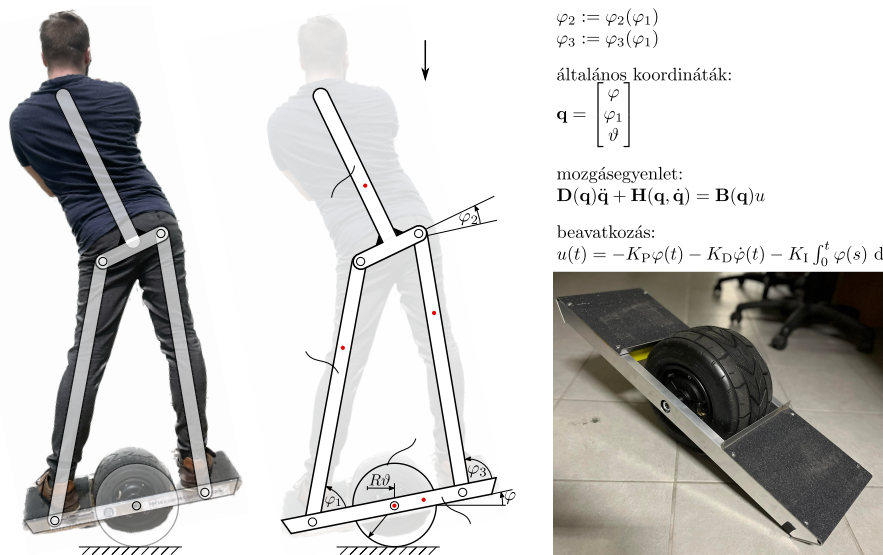
## EGYKEREKŰ ÖNEGYENSÚLYOZÓ KÖZLEKEDÉSI ESZKÖZ VIZSGÁLATA

**Kiss K. Ádám**

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék  
 MTA-BME Lendület Szerszámgéprezgécek Kutatócsoport  
 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.  
 kiss\_a@mm.bme.hu

Manapság az alternatív közlekedési megoldások egyre elterjedtebbé válnak, amelyek közé tartoznak az önegyensúlyozó elektromos járművek is. A piacon egyre szélesebb körben érhetőek el ilyen megoldások (úgy mint unickli, hoverboard vagy segway). Jelen tanulmány az 1. ábrán látható egykerekes önegyensúlyozó gördeszka vizsgálatát célozza meg, amely jellemzően abban tér el a hagyományos megoldásoktól, hogy itt a felhasználó lába (és teste) jellemzően a kerékre és a haladási irányra merőleges szögben áll. A kerékben egy agymotor található, amely egyben felel a mozgatásért és a folyamatos egyensúlyozásért. Mivel az egyensúlyozás során az ember szerepe is jelentős, ezáltal ez egy kiváló példája az ember-gép kollaboráció vizsgálatának. A cél a robot szabályozásának és az emberi egyensúlyozásnak a megfelelő kombinálása.

Ebben a vizsgálatban síkbeli mechanikai modellt használunk a jármű és az ember figyelembevételével. A járművet egy kerékként és egy rúdként modellezzük, míg az emberi testet egy négycsuklós mechanizmusként ábrázoljuk a frontális síkon [1]. Az egyensúlyozás során külön kezeljük az emberi egyensúly fenntartását, amelyet a csípőízületben kifejtett nyomaték irányít, miközben az eszközben egy kefe nélküli egyenáramú motor (BLDC) avatkozik be. Az emberi agy szabályozási mechanizmusát egy PD visszacsatolással vesszük figyelembe, ahol az ember idegrendszerének viselkedését konstans időkésséssel modellezzük [2]. Eközben az egykerekes egyensúlyozására egy PID (Proporcionális Integráló Deriváló) szabályozó került implementálásra. A felépített mechanikai modell segítségével lehetőség nyílik a PID erősítési tényezők hatásának vizsgálatára és megfelelő hangolására, ezáltal megteremtve az ember-gép kollaborációjának ideális megvalósítását.



1. ábra. A vizsgált egykerekes elektromos jármű, és a kapcsolódó mechanikai modell.

$$\varphi_2 := \varphi_2(\varphi_1)$$

$$\varphi_3 := \varphi_3(\varphi_1)$$

általános koordináták:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi_1 \\ \vartheta \end{bmatrix}$$

mozgásegyenlet:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{B}(\mathbf{q})u$$

beavatkozás:

$$u(t) = -K_P\varphi(t) - K_D\dot{\varphi}(t) - K_I \int_0^t \varphi(s) ds$$

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Az eszköz megépítésére egy projektfeladat keretében került sor. Szeretném megköszönni Csató Ádám, Csizmadia János, Olexó Gergely, Radványi Ákos, Sárdi Ferenc hallgatók részvételét az építésben, valamint Wohlfart Richárd, Zana Roland, Miklós Ákos és Bachrathy Dániel szakmai konzultációját.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] C.A. Molnar, A. Zelei, T. Insuperger, Human balancing on rolling balance board in the frontal plane, *IFAC-PapersOnLine* 51:300-5, 2018.  
 [2] G. Stepan, Delay effects in the human sensory system during balancing, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 367(1891):1195–1212, 2009.



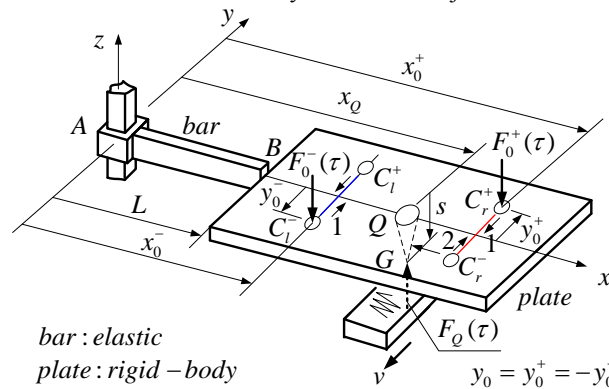
## ELMOZDULÁS ÉS SZÖGELFORDULÁS SZABÁLYOZÁSA A RUGALMAS TARTÓ-MEREV LEMEZ ALKOTTA MECHANIKAI SZERKEZETNÉL

Páczelt István

Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet  
 3515 Miskolc-Egyetemváros  
 istvan.paczelt@uni-miskolc.hu

Gépészmérnöki gyakorlatban sokszor találkozunk olyan technológia feladattal, amikor egy adott helyre, adott erővel, adott mértékű elmozdulást kell biztosítani a szerelés során. Ez a probléma egy új típusú optimalizációs feladatot jelöl ki. Ezzel kapcsolatosan két munka jelent meg [1,2]. Ezekben a cikkekben a mechanikai modell egy olyan rugalmas szerkezet, amit egy prizmatikus tartó és a hozzá csatlakozó merev csap alkot. A csap végén kívánjuk elérni az adott elmozdulást ill. a szögelfordulást. A tartóra ható erők támadáspontja lerögzített, időbeli változtatásával periodikus mozgás is elérhető. A kívánt elmozdulás és szögelfordulás a tartóra ható két erő helyzetét egyértelműen meghatározza. Az érintkezési erőt a két erő eredője szolgáltatja.

A jelen tanulmányban egy módosított szerkezetet fogunk vizsgálni. Nevezetesen a rugalmas, prizmatikus tartóhoz egy merev lap csatlakozik, amiből kiálló merev csap vége fog kölcsönhatásba kerülni a síkfelületű testtel (1. ábra). Vizsgálni fogjuk a merev lapra ható fix helyen lévő, ill. az általunk megadott törvény szerint mozgó erők hatását. Az erők nagysága időben megadott törvény szerint változhat. Az időbeli változások periódus ideje  $T_*$ . Az érintkezésnél fellépő súrlódás hatásának figyelembevétele is kiemelt szerepet tölt be a vizsgálatok folyamán. A változó erők miatt a csap és az alatta lévő rugalmas test közötti kölcsönhatás miatt kopás is fellép, aminek numerikus számításal az időbeli lefutását is nyomon követhetjük.



1. Ábra A vizsgált szerkezet /5. terhelési eset/,  $F_Q(\tau) = F_0^-(\tau) + F_0^+(\tau) = F_{0,\max} = \text{adott}$

A terhelés alábbi eseteit vizsgáljuk:

1.  $F_0^-(\tau), F_0^+(\tau)$  erők nem mozognak
2.  $F_0^-(\tau)$  a  $C_l^-$  pontban hat, az  $F_0^+(\tau)$  a  $C_r^+, C_l^+$  pontok között vándorol oda- vissza,
3.  $F_0^-(\tau)$  a  $C_l^-$  pontban hat, az  $F_0^+(\tau)$  a  $C_r^+, C_l^-$  pontok között vándorol oda- vissza,
4.  $F_0^-(\tau)$  a  $C_l^-, C_r^-$  pontok, az  $F_0^+(\tau)$  a  $C_r^+, C_l^+$  pontok között vándorol oda- vissza,
5.  $F_0^-(\tau)$  a  $C_l^-, C_l^+$  pontok, az  $F_0^+(\tau)$  a  $C_r^+, C_r^-$  pontok között vándorol oda- vissza
6. Megvizsgálásra kerül, az hogy az  $F_0^+(\tau)$  erőnek milyen pályát kell leírni ahhoz, hogy a G pont körpályán mozogjon.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatást a Magyar Tudományos Akadémia és az Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal – NKFIH, K115701 projektje támogatta.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] PÁCZELT I, MRÓZ Z, Optimized punch contact action related to control of local structure displacement, Structural and Multidisciplinary Optimization (2019) 60:1921–1936, <https://doi.org/10.1007/s00158-019-02300-z>
- [2] PÁCZELT I, MRÓZ Z, A New Class of Optimization Problems Related to Structural Control by Contact Interaction, In: Krivtsov A.M.; Indeitsev D.A. (eds.), Advanced Problems in Mechanics, Springer International Publishing, pp 163-178, Paper Chapter 16. (2020) (Lecture Notes in Mechanical Engineering 2195-4356)

## **ELSŐ-, ILLETVE MÁSODRENDŰ GRADIENS ANYAGOK**

### **Béda Gyula**

BME, Műszaki Mechanikai Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.  
beda.gyula@gmail.com

### **Béda Péter**

BME, Vasúti Járművek és Járműrendszer-analízis Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.  
beda.peter@kjk.bme.hu

Azok az anyagokat, amelyek konstitutív relációja, a szokásos változókon felül, az alakváltozási tenzor első, illetve második kovariáns deriváltját is tartalmazza, a gradiens anyagok.

A lehetséges gradiens anyagok a hullámdinamikai elmélet szerint kereshetők. Eszerint az anyag, ha valamilyen állapotban van, és ezt valahol zavarás éri, akkor ez a zavarás minden irányban terjed. A terjedési sebesség a különböző anyagok esetében, az anyagra jellemzően más és más. A terjedés kísérleti megfigyelhetősége érdekében érdemes szinguláris hullámokat használni. Az előadás másod-, illetve harmadrendű hullámok elméleti vizsgálatával, az egytengelyű feszültségállapot esetében bemutatja a lehetséges gradiens anyagok konstitutív egyenleteit.

A tényleges konstitutív egyenlet, az egyes anyagok esetében, további kísérletek elvégzése után lehetséges.

## EMBERI EGYENSÚLYOZÁS LINEÁRISAN MEGVEZETETT INGÁVAL

Nagy Dalma J.<sup>1</sup> és Insperger Tamás<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Gépészmérnöki Kar  
Műszaki Mechanikai Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.  
dalma.nagy@mm.bme.hu

<sup>2</sup>ELKH-BME Gépek Dinamikája Kutatócsoport  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.  
insperger@mm.bme.hu

Neurológiai kutatások azt valószínűsítik, hogy az emberi mozgásszabályozás során a központi idegrendszer úgynevezett belső modelleket használ a mozgás tervezéséhez és végrehajtásához. Ezeket a belső modelleket vagy inverz dinamikán alapuló és nyitott szabályozási körrel megvalósított mozgások tervezéséhez használjuk a kívánt mozgás létrehozásának érdekében [1], vagy pedig állapotvisszacsatoló szabályozásban a hiba korrigálására [3]. Jelen tanulmányban lineárisan megvezetett inga emberi egyensúlyozását vizsgáltuk és a feladat végrehajtásához szükséges szabályozó mechanizmust azonosítottuk. Kétféle szabályozót vizsgáltunk: 1) időkéseletett állapotvisszacsatolás és 2) prediktor visszacsatolás amely során az időkésést belső modell segítségével kompenzáljuk. Mindkét modell figyelembe veszi az emberi érzékelési holtávót, így a szabályozást egy állapotfüggő megszakítottság jellemzi, ami az időjelenben töréspontokat ad.

Az egyensúlyozási feladatot 6 gyakorlott és 25 kezdő egyensúlyozó személy hajtott végre, ahol egy  $l = 0.9$  m-es inga mozgását egy sínen megvezetett kiskocsival tudták szabályozni [5]. Feltételezéseink szerint a gyakorlott személyek képesek voltak elengedő tapasztalatra szert tenni ahhoz, hogy belső modellt építsenek fel és a megvezetett ingát prediktor szabályozással egyensúlyozzák. A szabályozás azonosítását egy célfüggvény minimalizálással végeztük, ahol a célfüggvényben a mért és szimulált időjelek stabilometriai paraméterek alapján kerültek összehasonlításra. A stabilometriai vizsgálatot a szakirodalomban eredetileg egyhelyben állásra alkalmazták [2], ám többféle egyensúlyozási feladat elemzésére is használható [4]. A célfüggvényben szereplő stabilometriai paraméterek azok, amelyek szignifikánsan ( $p < 0.05$ ) eltértek kezdő és gyakorlott személyekre: az inga szögidőjelének és a kiskocsi elmozdulás-időjelének szórásai; az inga szögének és kiskocsi elmozdulásának frekvenciasávra vett teljesítményei; a kiskocsi elmozdulásának közepes frekvenciája és frekvenciaszóródása.

A paraméter azonosítás alapján elmondható, hogy mind a kezdő, mind a gyakorlott személyek egyensúlyozását az időkéseletett állapotvisszacsatoló szabályozó írja le jobban. Az az eredmény arra enged következtetni, hogy sem a gyakorlott, sem a kezdő személyek nem építettek fel prediktor visszacsatolásra használható belső modellt az egyensúlyozási feladat végrehajtása során. Az eredmények azt mutatják, hogy egy lineárisan megvezetett, kellően hosszú rúd ( $l = 0.9$  m) esetén az érzékelési pontatlanságból adódó bizonytalanságok nem jelentősek, nincs szükség belső modellel és predikcióra, a rúd szabályozható időkéseletett állapotvisszacsatolással [5].

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatás a Kulturális és Innovációs Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával, a TKP-9-8/PALY-2021 számú projekt TKP2021-EGA pályázati program finanszírozásában valósult meg.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] M. Kawato, Internal models for motor control and trajectory planning, *Current Opinion in Neurobiology* 9(6):718-727, 1999.
- [2] T. S. Kapteyn, W. Bles, C. J. Njikijtjen, L. Kodde, C. H. Massen, J. M. Mol, Standardization in platform stabilometry being a part of posturography, *Agressologie Revue Internationale de physio-biologie et de pharmacologie Appliquées aux Effets de l'agression* 24(7):321-326, 1983.
- [3] B. Mehta, S. Schaal, Forward models in visuomotor control, *Journal of Neurophysiology* 88:942-953, 2002.
- [4] Cs. A. Molnar, T. Insperger, Parametric Study of Changes in Human Balancing Skill by Repeated Balancing Trials on Rolling Balance Board, *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering* 64(4):317-327, 2020.
- [5] D.J. Nagy, J.G. Milton, T. Insperger, Controlling stick balancing on a linear track: delayed state feedback or delay-compensating predictor feedback?, *Biological Cybernetics* 117:113-127 (2023).

## EMBERI EGYENSÚLYOZÁS: SZTOCHASZTIKUS TULAJDONSÁGOK VIZSGÁLATA MOBIL APPLIKÁCIÓVAL VÉGZETT MÉRÉSEK SEGÍTSÉGÉVEL

Fodor Gergő<sup>1</sup> és Bachrathy Dániel<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

<sup>1</sup>gergo.fodor@mm.bme.hu, <sup>2</sup>bachrathy@mm.bme.hu

Az emberi egyensúlyozás modellezése és vizsgálata rendkívül fontos a neurális mozgásszabályozás megismeréséhez. A mechanikai modellek gyakran késleltetett differenciálegyenletekre vezetnek, ahol a késleltetett tagok az emberi reakcióidőből származnak [1, 2]. Ezek a modellek jó alapot biztosítanak a megértéshez, azonban a szabályozás bizonytalanságát nem veszik figyelembe. Az ember nem determinisztikus, a viselkedése folyamatosan változik és nem reagál kétszer ugyanúgy még azonos helyzetekben sem. Ez a kutatásunk motivációja.

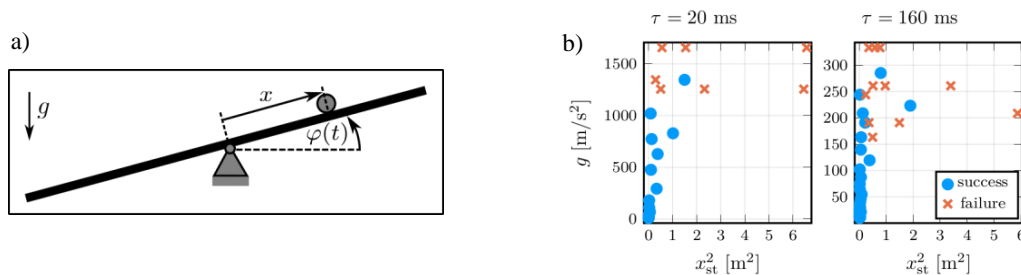
A jelen tanulmányban az egyensúlyozási folyamat sztochasztikus jellegét mutatjuk meg mérések alapján. Készítettünk egy mobil applikációt, amely szimulálja az 1a) ábrán látható egyensúlyozási feladatot. A mérésben résztvevő alanyoknak egy golyót kell a mobil eszközük képernyőjének közepén tartani. Az applikáció a mobil eszköz szenzorai segítségével érzékeli a felhasználó beavatkozását és annak megfelelően az (1) egyenletet használja a golyó mozgásának számítására, ahol  $x(t)$  a golyó pozíciója,  $g$  a gravitációs gyorsulás és  $\varphi(t)$  a mobil eszköz billentéséből adódó beavatkozó jel

$$\ddot{x}(t) + g \sin(\varphi(t)) = 0. \quad (1)$$

Az applikációval történő mérésre azért is van szükség, mert a sztochasztikus folyamatok vizsgálata nagy mennyiségű adatot igényel. A felhasználók motiválására folyamatosan pontoszok a teljesítményt attól függően, hogy milyen közel van a golyó a képernyő közepén lévő célterülethez. A mérés során 15 s áll rendelkezésre, hogy az alany összegyűjtse a sikeres méréshez szükséges pontokat, különben a mérés sikertelennek minősül. A mérések során mesterséges  $\tau$  késést adunk a bemenő  $\varphi(t)$  jelhez, hogy vizsgáljuk a késés hatását is az egyensúlyozási folyamatra. A teljes adatgyűjtési folyamat automatizált: az applikáció folyamatosan menti a golyó pozícióját és a beavatkozó jelet, illetve a mérési paramétereket. A mérési adatokat azonnal adatbázisba mentjük, és további statisztikai kiértékelésekre innen tudjuk fölhasználni.

A 1b) ábra alapján elmondhatjuk, hogy a gravitációs gyorsulás növelésével egyre nehezebbé válik a feladat, több a sikertelen mérés (piros x-ek az ábrán), amely jelzi, hogy kevesebb ideig tudják az alanyok a képernyő közepén tartani a golyót. Ennek megfelelően a golyó pozíciójának  $x_{st}^2$  szórása (második momentum) is növekszik: ez a sztochasztikus rezonancia jelensége [3], amit determinisztikus modellekkel nem tudunk megmutatni.

A kutatás folytatásaként sztochasztikus késleltetett differenciálegyenletek segítségével fogjuk modellezni az egyensúlyozási folyamatokat, így figyelembe tudjuk venni az emberi érzékelés és beavatkozás bizonytalanságából adódó sztochasztikus hatásokat.



1. ábra: a) A mérési feladat mechanikai modellje és b) sztochasztikus rezonancia növekvő gravitációs gyorsulás mellett

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A jelen kutatás az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok (OTKA FK-138500) támogatásával valósult meg.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] T. Insperger, G. Stépán, J. Milton, Dynamics of Human Balancing. In: D. Breda (ed.), Controlling Delayed Dynamics, CISM International Centre for Mechanical Sciences, Vol. 604, Springer Cham, 2023.
- [2] B. Kovács, T. Insperger, Parametric study of virtual stick balancing based on a delayed PD model, IFAC-PapersOnLine 51:271-276, 2018. 10.1016/j.ifacol.2018.07.235.
- [3] R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani, The mechanism of stochastic resonance, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 14(11): L453-L457, 1981.

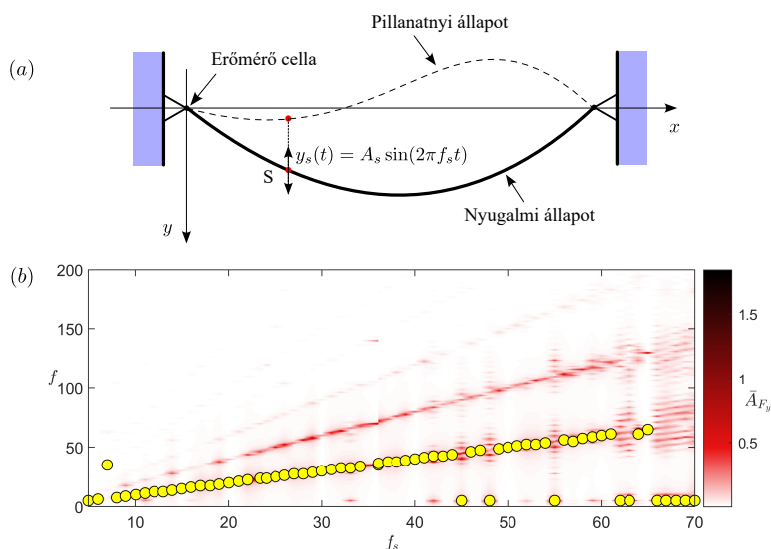
## ERŐMÉRÉSEK PERIODIKUSAN GERJESZTETT RUGALMAS KÁBEL ESETÉN

Dorogi Dániel<sup>1</sup> és Kollár László E.<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Eötvös Loránd Tudományegyetem, Savaria Műszaki Intézet  
 9700 Szombathely, Károlyi Gáspár tér 4.  
 dorogi@inf.elte.hu, kl@inf.elte.hu

A villamos távvezetékek gyakran szélterhelés hatásának vannak kitéve. A kábeltől leváló örvények periodikus terhelést jelentenek a testre nézve, amely a test rezgését okozhatja. Ahhoz, hogy ezt elkerüljük elengedhetetlen a jelenség modellezése. Irvine és Caughey [1] egy lineáris modellt fejlesztett rugalmas kábel szabadrezgésének számítására. A kábel mozgását leíró matematikai modell validálásához laboratóriumi mérések szükségesek. Koh és Rong [2] a vezeték felfüggesztési pontját periodikusan gerjesztette, miközben mérte a szerkezet mozgásjellemzőit. Lee és Perkins [3] ugyancsak periodikus gerjesztést alkalmazott, azonban a kábel egy pontjának rezgésjellemzőit írta elő.

A jelen tanulmányban egy rugalmas kábelen végzünk laboratóriumi méréseket, amely elrendezést az 1a ábra mutatja. A felfüggesztési pontok között mérhető távolság (feszítáv) 16,62 m, a belógás mértéke 0,6 m, a kábel külső átmérője 4 mm, valamint a húzóerő vízszintes irányú komponense 31,25 N. A felfüggesztési pontban ébredő erő három komponensét egy erőmérőcella segítségével az  $x = 0$  m pontban mérjük, miközben a kábelt az  $x = 4,155$  m helyen (a feszítáv negyede) állandó  $A_s = 1$  mm amplitúdóval és különböző  $f_s$  frekvenciával (az 5 – 70 Hz tartományban) gerjesztjük. Az 1b ábrán az  $y$  irányú erőkomponens frekvenciaspektruma látható a gerjesztési frekvencia függvényében. Megfigyelhető, hogy  $f_s = 50$  Hz alatt az erő legnagyobb intenzitású frekvenciacsúcsa (sárga kör) többnyire egybeesik a gerjesztési frekvenciával. Az  $f_s > 50$  Hz tartományban sok esetben a legdominánsabb frekvenciacsúcs 5 Hz körüli, amelyre nagyfrekvenciájú összetevők szuperponálódnak.



1. ábra. Mérési elrendezés (a) és az  $y$  irányú erőkomponens frekvenciaspektruma a gerjesztési frekvencia függvényében (b). A színek az erőkomponens amplitúdóját szemléltetik

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A TKP2021-NVA-29 számú projekt a Kulturális és Innovációs Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával, a TKP2021-NVA pályázati program finanszírozásában valósult meg.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] H.M. Irvine, T.K. Caughey, The linear theory of free vibrations of a suspended cable, *Proceedings of the Royal Society of London A* 341:299-315, 1974.
- [2] C. Koh, Y. Rong, Dynamic analysis of large displacement cable motion with experimental verification, *Journal of Vibration and Acoustics* 117:385-391, 1995.
- [3] C.L. Lee, N.C. Perkins, Experimental investigation of isolated and simultaneous internal resonances in suspended cables, *Journal of Sound and Vibration* 272:187-206, 1995.

## FELFÜGGESZTETT VEZETÉK LENGÉSÉNEK CSILLAPÍTÁSA DIGITÁLIS SZABÁLYOZÁSSAL

**Kollár László E.**

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar, Savaria Műszaki Intézet  
9700 Szombathely, Károlyi G. tér 4.  
kl@inf.elte.hu

Felfüggesztett kábel alkalmazásának alapvető példái a távvezetékek vagy a kábelhidak. A kábel vagy vezeték ki van téve külső hatásoknak mint amilyen a szél, a jég lehullása vagy tárgyak ütközése. Ezek következtében olyan lengések alakulhatnak ki, amelyek károsítják a kábelt, vezetéket, vagy azok felfüggesztését [1, 2]. A fellépő problémák indokolják olyan módszerek fejlesztését és alkalmazását, amelyek csillapítják a lengést, és ennek eredményeképpen hozzájárulnak a berendezés védelméhez.

Távvezetékek kis amplitúdójú lengésének csökkentésére alkalmas csillapítókat már hosszú ideje használnak, ld. pl. [3]. Ezek passzív szabályozóként működnek, amelyek egy lehetséges továbbfejlesztése az aktív szabályozás. Jelen tanulmány ennek egy egyszerűsített modelljét mutatja be. A vezeték adott pontjában szabályozható rezgéscsillapító van rögzítve, és a modell a vezeték viselkedését ebben a pontban veszi figyelembe. A vezeték rugalmasságát egy lineáris rugó modellezi, ami kis kitérésű lengések esetén elfogadható közelítést ad, de nagy kitérésű lengések esetén nemlineáris rugó alkalmazása szükséges. Az egyszerűsített mechanikai modell két szabadságfokú, aminek mozgásegyenlet-rendszere az alábbi alakban írható:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{c}F(t) \quad (1)$$

A koordinátákat, vagyis a vezeték és a csillapító elmozdulását, a  $\mathbf{z}$  vektor tartalmazza. A jobb oldal három tagja a rendszer jellemző paramétereit, a szabályozást, ill. a gerjesztést fejezi ki. A szabályozási paraméterek megválasztása stabilitásvizsgálaton alapul. A modell figyelembe veszi a digitális szabályozásban a mintavételezés miatt mindig jelenlévő időkést, valamint a hajtásnál jelentkező kotyogást. A szabályozó erő így az alábbi formában kapható:

$$u(t) = \begin{cases} \mathbf{D}\mathbf{z}(t - \tau) & \text{kotyogáson kívül} \\ 0 & \text{kotyogás tartománya} \end{cases} \quad (2)$$

ahol a  $\mathbf{D}$  mátrix tartalmazza a szabályozási paramétereket,  $\tau$  pedig az időkést. A modell diszkrét idejű alakítva alkalmazható a digitálisan szabályozott rendszer tanulmányozására.

Az eredmények kimutatják, hogy a szabályozás jelentősen csökkenti a lengés amplitúdóját, viszont növekvő időkéstés esetén a szabályozás eredménytelenné válik. A szabályozás különösen érzékeny az időkéstésre nagy gerjesztési frekvencia esetén [4]. Az időkéstés és a kotyogás együttes jelenléte irreguláris mozgáshoz vezet. Ez indokolja a rendszer dinamikájának részletes vizsgálatát, ami kimutatja, hogy kaotikus mozgás nem várható, a kapott irreguláris mozgás periodikus [5].

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A TKP2021-NVA-29 számú projekt a Kulturális és Innovációs Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával, a TKP2021-NVA pályázati program finanszírozásában valósult meg.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] EPRI, *Transmission Line Reference Book: Wind-Induced Conductor Motion*, Electric Power Research Institute, Palo Alto, CA, 2005.
- [2] M. Farzaneh, *Atmospheric icing of power networks*, Springer, Berlin, Germany, 2008.
- [3] H. Wagner, V. Ramamurti, R. Sastry, K. Hartmann, Dynamics of stockbridge dampers, *Journal of Sound and Vibration* 30(2):207-220, 1973.
- [4] L.E. Kollár, Digital Control of Cable Vibration with Time Delay, *International Journal of Dynamics and Control* 9:1223-1235, 2021.
- [5] L.E. Kollár, Dynamics of digitally controlled forced vibration of suspended cables, *Meccanica* 58:25-42, 2023.

## FÉM HABOK VÉGESELEMES SZIMULÁCIÓINAK MEMÓRIA OPTIMALIZÁLT KIDOLGOZÁSA

Kovács Mórió<sup>1</sup>

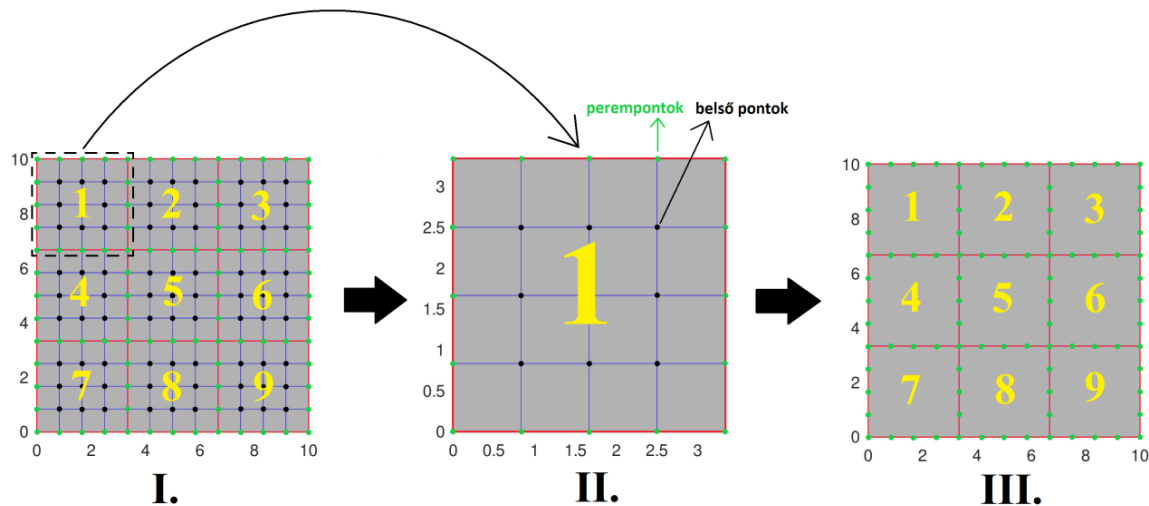
<sup>1</sup>Széchenyi István Egyetem, Alkalmazott Mechanika Tanszék  
 9026 Győr, Egyetem tér 1.  
 kovacs.mario@sze.hu

Az inhomogén belső szerkezetű kompozitok mechanikai modelljeinek megalkotása sok esetben problémás, ugyanis a homogenizált anyagjellemzőkkel történő megközelítés sok esetben nem ad vissza pontos eredményt, vagy a túl részletes lekövetése a belső struktúrának elbonyolítja a metódust [1]. Ezen hátrányok kiküszöbölése a célja a jelen tanulmánynak, az alszerkezet technika segítségével [2, 3].

Egy olyan új megközelítés a cél, amellyel számítás hatékonyan mégis pontosan lehet inhomogén, akár többszörösen összetett kompozitok mechanikai modelljét megalkotni. A módszer egy merevégi mátrix méretcsökkenést fog eredményezni, amelyet a lentiekben feltüntetett egyenlet (1) segítségével lehet végrehajtani.

$$\mathbf{u}_b = \left( \sum_{k=1}^n \mathbf{K}_{bb}^k - \mathbf{K}_{bi}^k (\mathbf{K}_{ii}^k)^{-1} \mathbf{K}_{ib}^k \right)^{-1} \left( \sum_{r=1}^4 \mathbf{f}_b^r \right) \quad (1)$$

Ez a módszer egy lényegesen kisebb szabadságfokú modellt fog eredményezni, amely az eredeti összetett belső szerkezet tulajdonságait hordozza magában. Az 1-es számú ábra szemlélteti az eljárás lépéseit.



1. ábra. Az alszerkezet technika segítségével redukált szerkezet létrehozása

### HIVATKOZÁSOK

- [1] L. Bardella, An extension of the Secant Method for the homogenization of the nonlinear behavior of composite materials, *International Journal of Engineering Science* 41(7):741-768, 2003.
- [2] J. Przemieniecki, Matrix structural analysis of substructures. *AIAA Journal* 1(1):138-147, 1963.
- [3] E. Balmès, Parametric families of reduced finite element models. Theory and applications. *Mechanical Systems and Signal Processing* 10(4):381-394, 1996.



## FOLD BIFURKÁCIÓK ÉS BISTABILITÁS MECHANIKAI RENDSZEREKBEN

Kádár Fanni<sup>1</sup>, Stépán Gábor<sup>2</sup> és Habib Giuseppe<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék  
1111 Budapest Műegyetem rkp. 5.

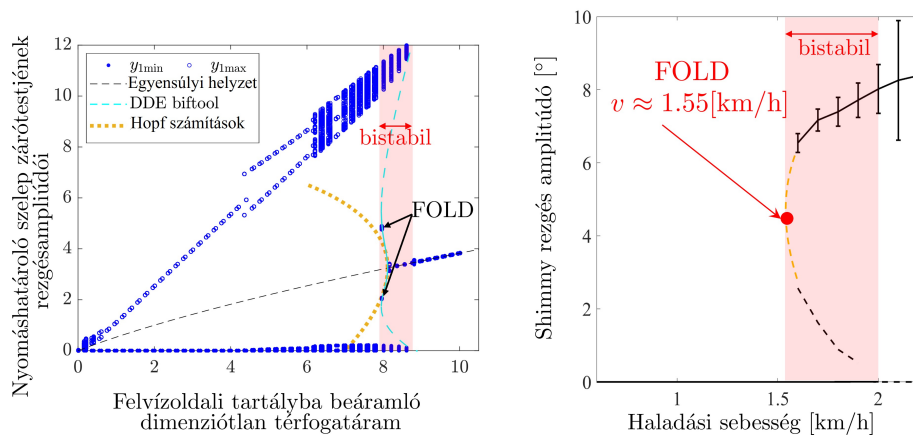
fanni.kadar@mm.bme.hu, stepan@mm.bme.hu, habib@mm.bme.hu

<sup>1,3</sup> MTA-BME Lendület "Momentum" Global Dynamics Research Group

Dinamikai rendszerek elvárt működése gyakran a rendszer egy egyensúlyi helyzetéhez tartozik, amelynek stabilitása alapvetően szükséges az üzemeltetéshez. Ez azonban még nem garantálja a biztonságos működést, hiszen a stabil egyensúlyi helyzet mellett egyéb stabil megoldások létezhetnek a rendszer egy adott paraméter kombinációjához tartozóan, amelyek közül a kezdeti feltételek függvényében állandósul valamelyik. A további stabil megoldások feltérképezése és elkerülése garantálja a biztonságot. Azokat a paramétertartományokat, amelyekben kezdeti zavarástól függően két stabil állapot valósulhat meg, bistabil tartományoknak nevezzük. Globálisan stabilnak nevezzük azt a paramétertartományt, ahol a stabil egyensúlyi helyzet az egyetlen megoldás.

Jelen tanulmányban két olyan mechanikai rendszer ismertetése történik meg, amelyekben stabil egyensúlyi helyzetek és stabil periodikus pályák alkotnak bistabil zónákat. Ebben az esetben az egyensúlyi helyzet bizonyos mértéket elérő zavarása esetén hirtelen nagy amplitúdójú rezgések jelentkeznek. Az első példa a kerék „shimmy” problémája, amelynek matematikai modellje, annak analitikus, numerikus és kísérleti vizsgálata nagy múltú szakirodalommal rendelkezik (lásd [1, 2]). A létrejövő kerékszítálás jelensége súlyos közúti balesetekhez vezethet. Kísérleti eredményeinket az 1. ábra jobb oldalán bemutatott bifurkációs diagram foglalja össze. A fold bifurkáció előrejelzésére fejlesztés alatt áll egy modellfüggetlen kísérleti predikációs módszer.

A második példa a nyomáshatároló szelep dinamikája; ennek modellje és vizsgálata [3, 4] forrásokban érhető el részletesen. A szeleprezgések nyomáslengéseket okoznak a védett rendszerben, illetve a szelep töréséhez vezethetnek. A biztonságos leeresztési folyamat kizárólag a szelep rezgésmentes üzemében valósulhat meg, azaz csak a globálisan stabil egyensúlyi helyzet paramétertartományában engedhető meg a szelepműködés. Az 1. ábra bal oldali panelje szemlélteti a veszélyes bistabil tartományt.



1. ábra. Bifurkációs diagram a tartály-szelep modell esetére (bal) és a shimmy esetére kísérleti eredményként (jobb)

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatás a Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs hivatal NKFI K 132477 and NKFI KKP 133846 számú pályázata támogatása.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] G. Stepan, Chaotic Motion of Wheels, *Vehicle System Dynamics* 20(6): 341-351, 1991.
- [2] S. Beregi, D. Takacs, G. Stepan, Bifurcation analysis of wheel shimmy with non-smooth effects and time delay in the tyre-ground contact, *Nonlinear Dynamics* 98:841-858, 2019. DOI: 10.1007/s11071-019-05123-1
- [3] F. Kadar, G. Stepan, Nonlinear dynamics and safety aspects of pressure relief valves, *Nonlinear Dynamics*, 2023. DOI: doi.org/10.1007/s11071-023-08484-w
- [4] F. Kadar, C. Hős, G. Stepan, Delayed oscillator model of pressure relief valves with outlet piping, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 534, 117016, 2022. DOI: 10.1016/j.jsv.2022.117016



## FOLYTONOS ÉS DISZKRÉT GEOMETRIKUS FESZÜLTSEGFÜGGVÉNYEK

**Baranyai Tamás**

BME, Morfológia és Geometriai Modellezés Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.  
baranyai.tamas@epk.bme.hu

Az előadás dimenziófüggetlen, differenciálforma alakú feszültségfüggvényt mutat a szilárdságtan kontinuum problémáihoz; illetve ebből származtatott diszkrét feszültség függvényt keretszerkezetekhez. A leírás apropóját a Maxwell által síkbeli rácsos tartókra adott [1] diszkrét feszültségfüggvény adta, amit az Airy feszültségfüggvényből [2] származtatott. A diszkrét feszültségfüggvény síkbeli keretekre való általánosítása [3] ismert és az ugyanolyan erős, mint Airy eredeti függvénye; azonban a háromdimenziós esetre adott korábbi általánosítási kísérlet [4] nem képes leírni térbeli keretek összes lehetséges statikai egyensúlyát. A geometrikus (differenciálforma alakú) feszültségfüggvények ezzel szemben dimenziófüggetlenül ugyanolyan erőt leadást adnak. A diszkrét függvény teljes és minimális paraméterezése a keretszerkezetek összes statikai egyensúlyának, a kontinuum függvény pedig egyszeresen összefüggő geometria esetén teljes és minimális. A kontinuum leírás 2 és 3 dimenziós esetben visszaadja az Airy és Maxwell féle feszültségfüggvényeket.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] J. C. Maxwell, On reciprocal figures, frames, and diagrams of forces, *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 26(1):1-40, 1870.
- [2] G. B. Airy, On the strains in the interior of beams, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 153:49, 1863.
- [3] C.J.K. Williams, F.A. McRobie, Graphic statics using discontinuous Airy stress functions, *International Journal of Space Structures* 31(2-4):121-134, 2016.
- [4] F.A. McRobie, C.J.K. Williams, A stress function for 3D frames, *International Journal of Solids and Structures* 117:104-110, 2017.

## FORGALOMSZABÁLYOZÁS ÖNVEZETŐ FELVEZETŐ JÁRMŰVEL

**Szaksz Bence<sup>1</sup> és Stépán Gábor<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup>BME, Műszaki Mechanikai Tanszék

1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

szaksz@mm.bme.hu, stepan@mm.bme.hu

**Orosz Gábor<sup>3</sup>**

<sup>3</sup>University of Michigan, Ann Arbor, MI 48109, USA

orosz@umich.edu

Az önvezető járművek elterjedése nem csupán az adott jármű vezetőjét tudja kiváltani, hanem segíteni tud forgalmi dugók megelőzésében és feloldásában is.

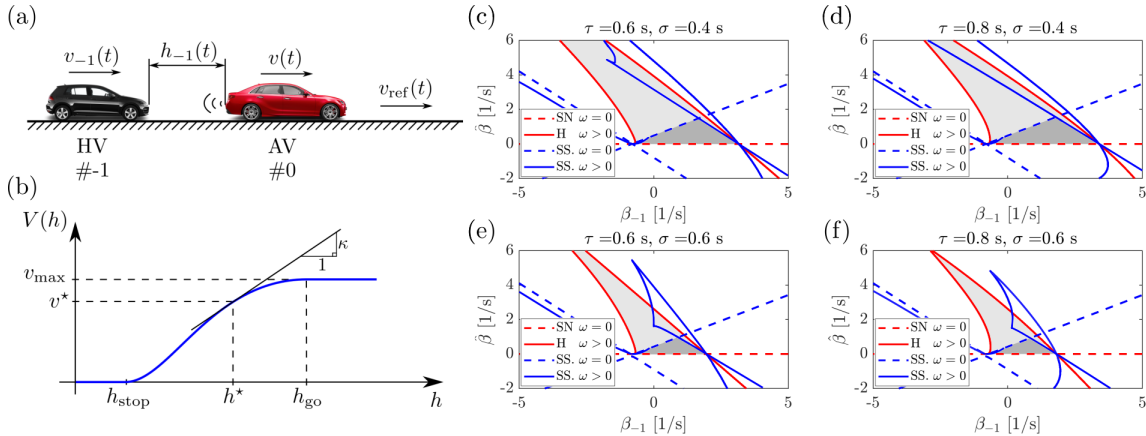
A jelen tanulmány egy leegyszerűsített jármű követési modellt vizsgál, amelyben egy önvezető jármű (AV) halad egy ember vezette jármű (HV) előtt (lásd 1(a) ábra) [1, 2]. A járműkövetési modellben jelölje  $v$  és  $v_{-1}$  rendre az önvezető és az ember vezette jármű sebességét, míg a követési távolság  $h_{-1}$ . Az önvezető jármű egyrészt egy adott  $v_{\text{ref}}$  referencia sebességre szabályoz  $\beta$  erősítési tényezővel, másrészt a saját és a mögötte haladó jármű sebességének különbségére is szabályoz  $\alpha$  erősítési tényezővel. Az emberi vezető dinamikáját az általánosított Bando modellel írjuk le, amely szerint a vezető figyelembe veszi a követési távolságot (1(b) ábra) és a sebességkülönbséget [3, 4]. Az önvezető jármű és az ember vezette jármű szabályozásában egyaránt megjelenik az időkéésés, melyeket rendre  $\sigma$ -val és  $\tau$ -val jelölünk. A mozgásegyenletek az alábbi formában adhatóak meg:

$$\dot{h}_{-1}(t) = v(t) - v_{-1}(t), \quad (1)$$

$$\dot{v}_{-1}(t) = \alpha(V(h_{-1}(t - \tau)) - v_{-1}(t - \tau)) + \beta(v(t - \tau) - v_{-1}(t - \tau)), \quad (2)$$

$$\dot{v}(t) = \hat{\beta}(v_{\text{ref}} - v(t - \sigma)) + \beta_{-1}(v_{-1}(t - \sigma) - v(t - \sigma)), \quad (3)$$

A referencia sebesség időfüggő lehet, ezért két különböző stabilitási megközelítést is vizsgálhatunk. Rendszer stabilitásról beszélünk, ha konstans  $v_{\text{ref}}$  esetén a megzavart rendszer visszaáll erre a sebességre. Húr stabilitásról akkor beszélünk, ha időfüggő  $v_{\text{ref}}(t)$  esetén a követő járművek sebességfluktuációja elhal. Az 1. ábra (c)-(f) stabilitási diagramjaiban piros szaggatott vonal jelölni a statikus, míg piros folytonos vonal a dinamikus stabilitásvesztést konstans  $v_{\text{ref}}$  esetén; a kék szaggatott és folytonos vonal a húr stabilitás határait jelölik ki.



1. ábra. Az (a) és (b) panel mutatja a követési modellt, illetve a követési távolság függvényét. A (c)-(f) panelek stabilitási térképeket ábrázolnak különböző időkéésés kombinációk esetén. ( $\alpha = 0.15$  1/s,  $\beta = 0.6$  1/s,  $\kappa = 0.8$  1/s). A világosszürke és a sötétszürke terület egyaránt rendszer stabil, míg a sötétszürke terület húr stabil.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] J. Wang, Y. Zheng, C. Chen, Q. Xu, K. Li, Leading cruise control in mixed traffic flow: System modeling, controllability, and string stability, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 99: 1–16, 2021.
- [2] T. G. Molnár, M. Hopka, D. Upadhyay, M. Van Nieuwstadt, G. Orosz, Virtual ringon highways: Traffic control by connected automated vehicles. In: *AI-enabled Technologies for Autonomous and Connected Vehicles*, 441–479, Springer, 2023.
- [3] M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, A. Nakayama, Analysis of optimal velocity model with explicit delay, *Physical Review E* 58(5): 5429, 1998.
- [4] J. I. Ge, S. S. Avedisov, C. R. He, W. B. Qin, M. Sadeghpour, G. Orosz, Experimental validation of connected automated vehicle design among human-driven vehicles, *Transportation Research Part C* 91: 335–352, 2018.

## GAUSS-FOLYAMAT ALAPÚ LÁTENS ERŐ MODELL ALKALMAZÁSA MECHANIKAI RENDSZEREK IDENTIFIKÁCIÓJÁRA

Dobák Dávid<sup>1</sup> és Csernák Gábor<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék

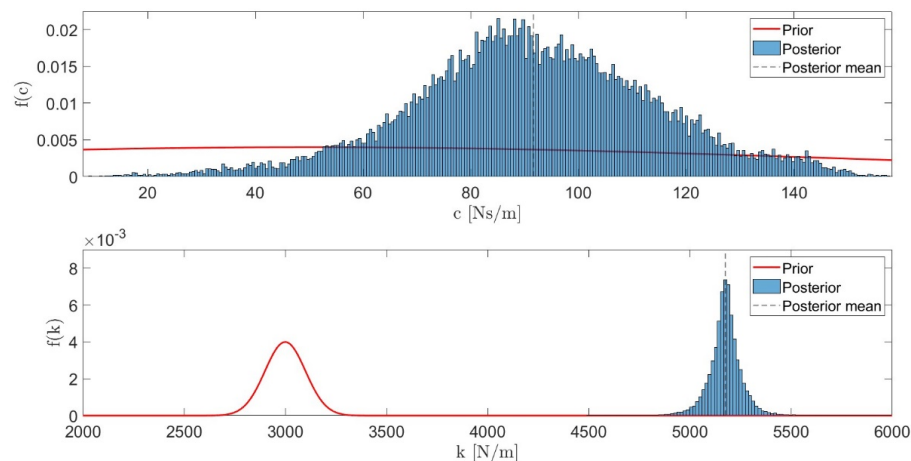
1111 Budapest Műegyetem rkp. 3-5.

dobakdavid@gmail.com, csernak@mm.bme.hu

Napjainkban egyre inkább előtérbe kerül a gépi tanulás a legkülönbözőbb műszaki feladatok megoldása során [1, 2]. A módszer számos előnye mellett gyakran felmerül az a kritika, hogy nem tartalmaz közvetlen modell-szintű információt a megismerni kívánt rendszerről. Megfelelő működéséhez sok adatra van szükség a betanítás során, és egyes esetekben olyan kirívó hibákat is vét a betanított algoritmus, melyek modellalapú megközelítésben fel sem merülhetnének. A felvetett problémák egyik lehetséges megoldása az ún. szürkedoboz algoritmusok alkalmazása, melyek kihasználják a modellalapú (fehérdoboz) és adatalapú (feketedoboz) megközelítések előnyeit. Jelen tanulmányban a Gauss-folyamat alapú látens erő modell (GP-LFM) alkalmazását mutatjuk be, mechanikai rendszerek identifikációjára. A módszer alapjait a [3] cikkben fektették le lineáris rendszerekre, de nemlineáris esetekre történő kiterjesztése is megtörtént [4]. Mechanikai rendszerek esetében

$$M\ddot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} + K\mathbf{q} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{U}(t) \quad (1)$$

alakban írhatjuk fel a mozgásegyenletet, ahol az  $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  sztochasztikus Gauss-folyamattal vesszük figyelembe a nem modellezett hatásokat (zaj, nemlinearitás). A betanítás során meg kell adni az ismeretlen paraméterek előzetesen feltételezett (*a priori*) eloszlásait. Az ismert adatok alapján ezeket az – akár nagy szórású vagy a valóstól nagyon eltérő átlagú – eloszlásokat korrigálja az algoritmus, ily módon eljutva az ún. *a posteriori* eloszlásokhoz (1 ábra). Az előadás során az algoritmus alkalmazását mutatjuk be különféle mechanikai rendszerek esetében.



1. ábra. Példa merevség és csillapítás meghatározására hibás kiindulási eloszlások alapján. A valós értékek  $c = 91,5$  Ns/m,  $k = 5170$  N/m.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezt a kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alap támogatta, az NKFI-128422 számú projekt keretében.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] S. Russell, P. Norvig, *Mesterséges intelligencia modern megközelítésben*, Panem Könyvkiadó, Budapest, <https://mialmanach.mit.bme.hu/aima/index>, 2005.
- [2] K.P. Murphy, *Machine learning: a probabilistic perspective*, MIT press, 2012.
- [3] M. Álvarez, D. Luengo, N.D. Lawrence, Latent Force Models, Proceedings of the Twelfth International Conference on Artificial Intelligence and Statistics, Proceedings of Machine Learning Research, 5:9-16, 2009.
- [4] T.J. Rogers, T. Friis, A latent restoring force approach to nonlinear system identification, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 180, 109426, 2020.

## GRADIENSFÜGGŐ, AZAZ GYENGÉN NEMLOKÁLIS KONTINUUM-MECHANIKA ÉS A HOLOGRAFIKUS ELV

Ván Péter<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Wigner Fizikai Kutatóközpont

<sup>2</sup>BME, Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék

<sup>3</sup>Montavid Termodinamikai Kutatócsoport

van.peter@wigner.hu

A klasszikus rugalmasságtan és folyadékmechanika kiterjesztése az állapothatározók térbeli deriváltjaitól magasabb rendben függő anyagtulajdonságok figyelembevételével a kontinuummechanika egyik legrégebbi kutatási programja. A rugalmasságtanban ezeket magasabb rendű (higher order) a folyadékmechanikában magasabb fokú (higher grade) elméleteknek nevezik. Az első esetben a deformáció- vagy alakváltozásmező a második esetben a sebességmező magasabb rendű deriváltjairól van szó. Különleges eset az általánosított kontinuumok, ahol duális belső változók és deriváltjaik is szerepet játszanak az anyagi tulajdonságokat leíró függvényekben és differenciálegyenletekben.

Számos jelenség modellezése kapcsolódik a gradiens elméletekhez akármelyik változóban. Fontos közös tulajdonságuk a méret- és alakfüggés: a kapcsolódó jelenségek, és anyagnak tekintett paraméterek, például a rugalmassági modulusok az ilyen anyagokban méret- és alakfüggők lesznek. Ez természetes módon következik az állapothatározók gradiensétől való függésükből: már nem a lokális Hook-törvény, hanem valami általánosabb változata jellemzi az anyagot: maguk a rugalmassági paraméterek ilyen anyagokban nem tekinthetők anyagjellemzőnek.

Az előadásban a termodinamika szerepéről lesz szó. Megmutatom, hogy a termodinamika második főtétele már a nem disszipatív, ideális anyagtörvényekre is erős feltételeket jelent. Többek között olyan általános tulajdonságokra vezet, hogy a termodinamikailag levezetett térfogati erőssűrűséghez tartozik egy olyan feszültségtenzor, amelynek divergenciája pontosan az adott erőssűrűség lesz. Azaz a térfogati erőhatások ideális anyagokban felületi erőkkel reprezentálhatók. Ez a gravitáció esetén jól ismert, holografikus tulajdonságnak nevezik, mert háromdimenziós, térfogati hatás egyel kevesebb, azaz kétdimenziós, felületi hatásként is értelmezhető, [3]. A holografikus tulajdonság az Euler- és a Korteweg-folyadékokat egyaránt jellemzi, [2], illetve a rugalmasságtanban is van szerepe, [1]. Ez utóbbit, a magasabbrendű és fokú gradiens kontinuumokban történő megjelenését is tárgyalom.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] P. Ván, Thermodynamically consistent gradient elasticity with an internal variable, *Theoretical and Applied Mechanics*, 47(1):1-17, 2020, (arXiv:2005.13662).
- [2] P. Ván, Holographic fluids: a thermodynamic road to quantum physics, *Physics of Fluids*, 35(5):057105, 2023, (arXiv:2301.07177v1).
- [3] P. Ván and S. Abe, Emergence of modified Newtonian gravity from thermodynamics, *Physica A*, 588:126505, 2022, (arXiv:1912.00252).

## GREEN-FÜGGVÉNYEK NÉGYPONTOS PEREMÉRTÉK FELADATOKRA ALKALMAZÁSOKKAL

Szeidl György<sup>1</sup> és Messaoudi Abderrazek<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet

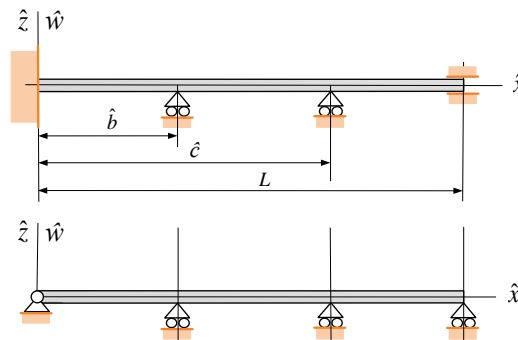
3515 Miskolc-Egyetemváros

gyorgy.szeidl@uni-miskolc.hu, abderrazek.messaoudi@uni-miskolc.hu

A kétpontos peremérték feladatokat tekintve Collatz könyve [1] adja meg a Green-függvények értelmezését közös differenciál-egyenletekre. Részletezi továbbá ezek tulajdonságait és bemutatja alkalmazásai lehetőségeit is. Hárompontos peremérték feladatok esetén a [2] tanulmány érdemel kiemelés. Nem elfajuló közös differenciálegyenlet-rendszerek és hárompontos peremérték feladatok esetén a Green-függvény mátrixok értelmezését – ezek a Green-függvények általánosításának tekinthetők – a [3] tanulmány adja meg.

A jelen munka fő célja kettős: közös differenciál-egyenleteket és négy pontos peremérték feladatokat véve alapul (a) a Green-függvény értelmezése és ezen értelmezés konstruktív voltának felhasználásával számítási módjának megadása, valamint (b) a főbb tulajdonságainak áttekintése és összegezése.

Példaként keresztmetszeti inhomogenitással rendelkező [4] – ez esetben az  $E$  rugalmassági modulus csak a keresztmetszeti koordináták függvénye, azaz független a rúd hossz tengelye mentén mért koordinátától – és négy



1. ábra. Megtámasztási esetek

pontban megtámasztott, továbbá az 1. ábrán szemléltetett két rúd esetén (az  $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$  koordináta rendszerben  $L$  a rúd hossza, míg a  $0 < \hat{b} < \hat{c} < L$  paraméterek a támaszok helyeit adják meg, továbbá  $\hat{x}$  a rúd hossz tengelye és  $\hat{w}$  a hossz tengelyen mért függőleges elmozdulás) kiszámításra kerülnek a vonatkozó  $G(\hat{x}, \xi)$  Green-függvények.

A Green-függvények ismeretében a fenti rudak szabadrezgéseinek meghatározása a

$$W(\hat{x}) = \lambda \int_{\xi=0}^L G(\hat{x}, \xi) W(\xi) d\xi, \quad \lambda = \frac{\rho_a A \omega^2}{I_{ey}} \quad (1)$$

homogén integrálegyenlettel meghatározott sajátértékfeladatra vezet. Itt  $W$  a középvonalon mért elmozdulások amplitúdója,  $\lambda$  a keresett sajátérték,  $\omega$  a sajátrezgések körfrekvenciája,  $\rho_a$  az átlagos sűrűség az  $A$  keresztmetszet felett, míg  $I_{ey}$  keresztmetszet ún.  $E$ -vel súlyozott másodrendű nyomatéka. Az (1) sajátérték feladat numerikus megoldásának eredményeit is közöljük paraméternek tekintve adott  $L$  mellett a  $\hat{b}$ -t és  $\hat{c}$ -t.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] L. Collatz, *Eigenwertaufgaben mit Technischen Anwendungen* Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.G., 1967; Russian Edition, 1968.
- [2] G. Szeidl, L.P. Kiss, Green Functions for Three Point Boundary Value Problems with Applications to Beams. In: A.R. Raswell (ed), *Advances in Mathematics Research*, pp. 121-161, Nova Science Publisher, New York, 2020.
- [3] L.P. Kiss, G. Szeidl, Green Functions for Three-point Boundary Value Problems Governed by Differential Equation Systems with Applications to Timoshenko Beams, *Acta Mechanica*, 234:2413-2444, 2023, DOI: [10.1007/s00707-023-03502-9](https://doi.org/10.1007/s00707-023-03502-9)
- [4] A. Baksa, I. Ecsedi, A Note on the Pure Bending of Nonhomogeneous Prismatic Bars, *International Journal of Mechanical Engineering Education*, 37(2):118-129, 2009, DOI:[10.7227/IJMEE.37.2.4](https://doi.org/10.7227/IJMEE.37.2.4)

## HARMONIKUSAN GERJESZTETT RENDSZEREK ROBUSZTUSSÁGÁNAK BECSLÉSE A DINAMIKAI INTEGRITÁS MÉRŐSZÁMÁVAL

Patkó Dóra<sup>1,2</sup> és Giuseppe Habib<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>BME, Műszaki Mechanikai Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

<sup>2</sup>MTA-BME Lendület Globális Dinamika Kutatócsoport,  
BME, Műegyetem rkp. 3., H-1111 Budapest, Magyarország  
dora.patko@mm.bme.hu, habib@mm.bme.hu

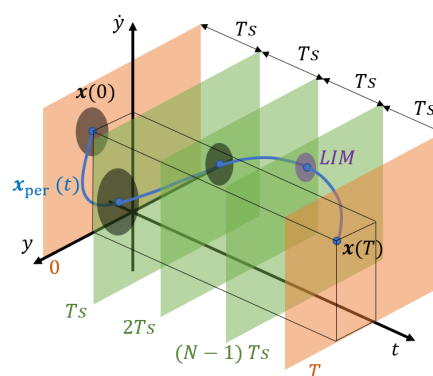
Zelei Ambrus<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Széchenyi István Egyetem, Audi Hungaria Járműfejlesztési Tanszék,  
9026 Győr, Egyetem tér 1.  
zelei.ambrus.miklos@ga.sze.hu

Egy dinamikai rendszer stabil megoldásának minél nagyobb a vonzási tartománya, annál robusztusabb a zavarásokkal szemben. Legyen az adott megoldás stabil egyensúlyi helyzet vagy periodikus megoldás, a vonzási tartományának meghatározása általában számításigényes feladat. Sok esetben, például szerkezetek, gépek tervezésénél, ráadásul a megfelelő rendszerparaméterek megtalálása a fontos, melynél minél robusztusabb végeredményt kapunk. Egy megoldás robusztussága becsülhető az úgynevezett helyi dinamikai integritás mérőszámával (local integrity measure, LIM), amely a stabil egyensúlyi helyzet körüli hipergömb sugarát írja le, melyen belül bárholnan indítva a rendszert, konvergálni fog [1, 2, 3]. Az elméletet alapul véve egy, a közeljövőben mindenki számára elérhető algoritmus lett kifejlesztve MatLabban, amely gyorsan ki tudja számítani a LIM értékét stabil egyensúlyi helyzet esetére [4].

A jelen tanulmány célja, hogy bemutassuk az algoritmus harmonikusan gerjesztett rendszerek stabil periodikus megoldásainak vizsgálatára kiterjesztett változatának működését. A módosításra egy kézenfekvő megoldás, ha a periódusidőnél vesszük a rendszer Poincaré metszetét, és a megoldás fix pontjának vizsgáljuk a LIM értékét. Mivel nem-lineáris rendszerek esetében érdemes egy megoldás robusztusságát vizsgálni, könnyen fennállhat, hogy a LIM értéke más lehet a különböző fázisokban. Hogy pontosabb képet kapjunk, az algoritmust úgy módosítottuk, hogy  $N$  darab, egymástól egyenközű távolságra elhelyezkedő Poincaré metszeten vizsgáljuk a LIM értékét, lásd 1. ábra, majd a legkisebb értéket fogadjuk el, mint a robusztusságot közelítő változó.

Ennek a több metszetet együttesen vizsgáló megközelítésnek az előnyeikhez tartozik, hogy felhasználjuk az információtartalmát a különböző kezdeti értékkel elindított szimulációknak, melyeket az osztályozásukhoz (konvergens vagy divergens) mindenképp ki kell számítanunk. Az algoritmus azonkívül, hogy gyors képet ad egy megoldás robusztusságáról, képes beazonosítani egyensúlyi helyzeteket vagy más periodikus megoldásokat, amennyiben szimuláció során találkozunk velük. A módszer korlátaihoz tartozik, hogy a vonzási tartomány nagyságát alulról becsli, annak tényleges területéről nem ad információt. Mérnöki szempontból ennek ellenére is hasznos, hiszen sok esetben hiába nagy a területe a vonzási tartománynak, mivel az alakja elvékonyodik, esetleg fraktálszerűvé válik. A tartomány ezen ágaival azonban gépek, szerkezetek tervezése során sokszor nem érdemes számolni, mivel a valóságos rendszerek minden esetben hibával terheltek; minél szűkebbé válik az adott tartomány, annál kevesebb eséllyel használható ki azon része a pontatlanságokból eredően. Tehát a módszer a biztonság felé tér el.



1. ábra. LIM meghatározása harmonikusan gerjesztett rendszer periodikus megoldására

### HIVATKOZÁSOK

- [1] J.M.T. Thompson, Chaotic Phenomena Triggering the Escape from a Potential Well. In: W. Szemplinska-Stupnicka, H. Troger (eds), *Engineering Applications of Dynamics of Chaos. International Centre for Mechanical Sciences*, Vol. 319, Springer, Vienna, 1991.
- [2] S. Lenci, G. Rega, *Global Nonlinear Dynamics for Engineering Design and System Safety*, Springer, Berlin 2019.
- [3] G. Rega, V. Settimi, Global dynamics perspective on macro- to nano-mechanics, *Nonlinear Dynamics* 103:1259?1303, 2021.
- [4] G. Habib, Dynamical integrity assessment of stable equilibria: a new rapid iterative procedure. *Nonlinear Dynamics* 106(3):2073?2096, 2021.

## HÁROMSZÖG KERESZTMETSZETŰ ÁLLANDÓ GÖRBÜLETŰ BIMODULUSÚ GÖRBERŰD HAJLÍTÁSA

Ecsedi István<sup>1</sup>, Baksa Attila<sup>2</sup>, Habbachi Marwen<sup>3</sup>

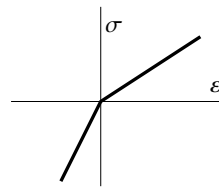
<sup>1,2,3</sup>Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet

3515 Miskolc-Egyetemváros

istvan.ecsed@uni-miskolc.hu, attila.baksa@uni-miskolc.hu

marwen.habbachi@uni-miskolc.hu

Kísérleti eredmények megerősítik, hogy az alakváltozásra képes szilárd anyagok bizonyos csoportja eltérően viselkedik húzásra és nyomásra. Ilyen típusú anyagok például a beton, vagy bizonyos típusú kerámiák illetve egyes biológiai anyagok. Már Saint-Venant is felismerte [1], hogy nem-lineáris összefüggés van néhány esetben az egy-tengelyű feszültség-állapotban a normál feszültség és a fajlagos nyúlás között, noha mind húzásra, mind nyomásra lineáris függvényt írhat le a közöttük lévő viszony (1. ábra), vagyis  $\sigma = E_t \varepsilon$  ha  $\varepsilon \geq 0$ , illetve  $\sigma = E_c \varepsilon$  ha  $\varepsilon \leq 0$ .

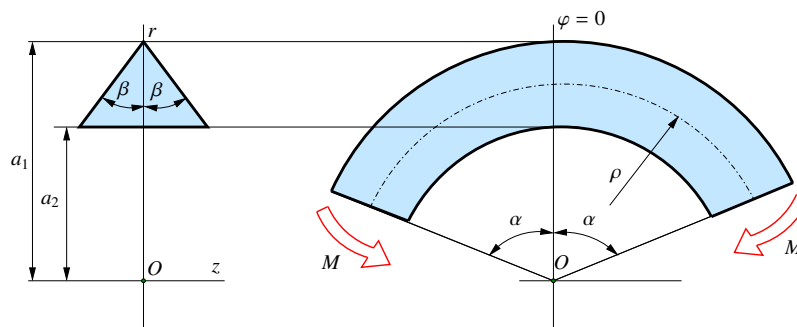


1. ábra. Nem-lineáris anyagtörvény

Timoshenko tankönyve ezt az esetet részletesen elemzi téglalap keresztmetszetű egyenes tengelyű rúd hajlítása kapcsán [2]. Ambartsumyan könyve [3] számos feladat részletes megoldását tartalmazza, rudak, tárcsák, lemezek és a héjak vonatkozásában [1]. Az idézett könyvben az anyagtörvény egy szimmetria feltételnek tesz eleget

$$\frac{\nu_t}{E_t} = \frac{\nu_c}{E_c}. \quad (1)$$

Állandó görbületű téglalap keresztmetszetű bimodulusú anyagú rúdra Ambartsumyan pontos analitikus megoldást ad meg a normál feszültségekre és az elmozdulásokra [3]. Ezen előadás tárgyát egyenlőszárú háromszög keresztmetszetű állandó görbületű szimmetria síkjában hajlított bimodulusú rúd tiszta hajlítási feladatának a megoldása alkotja (2. ábra). A tanulmány meghatározza a semleges réteg pozícióját, a keresztmetszet síkján ébredő normál feszültséget, és a radiális, tangenciális elmozdulásokat, valamint a keresztmetszetek szögelfordulását. A kidolgozott szilárdságtani módszert egy példa szemlélteti.



2. ábra. Háromszög keresztmetszetű görberűd hajlítása.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] de Saint-Venant B., *Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*. 3<sup>rd</sup> ed., Dunod Paris, France, 1864.
- [2] Timoshenko S.P., *Strength of Materials*, Part II., 3<sup>rd</sup> edition, McMillan Co.: London, UK, Chapter IX. p. 336. 1956.
- [3] Ambartsumyan S.A. *Elastic theory of different moduli*. Moscow, Nauka, Fizika-Matematicheskoy Literaturi, 1982.



## HENGERES RUGALMAS HASÁB KONTAKTFELÜLETI GÖRBÜLETÉNEK HATÁSA AZ ADHÉZIÓRA

Horváth András Levente<sup>1</sup>, Kossa Attila<sup>2</sup>

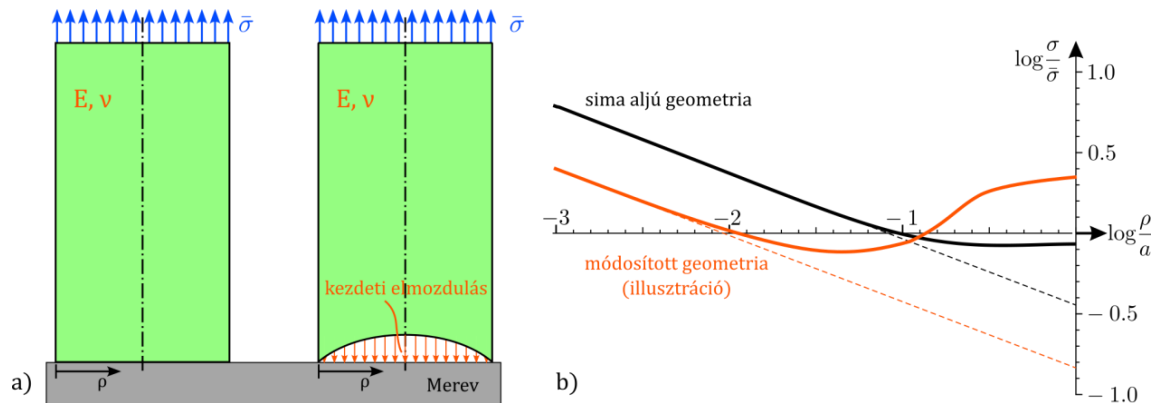
<sup>1,2</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.  
levente.horvath@mm.bme.hu, kossa@mm.bme.hu

Hétköznapi és ipari problémák megoldására is használunk különböző ragasztóanyagokat. A hagyományos ragasztóanyagok egy harmadik anyag felhasználásával hoznak létre adhéziós kapcsolatot két felület között. Velük szemben a „száraz” ragasztók harmadik anyag nélkül, az egyik felület mikroszerkezeti kialakításának segítségével hoznak létre adhéziót. Ezeknek számos olyan tulajdonsága van, melyek előnyösek több alkalmazás számára is. Kiemelendő ezek közül, hogy kevésbé függ az általuk kialakított kötés erőssége a felületi minőségtől, valamint erős, de gyorsan és reverzibilisen oldható kötésekkel képesek létrehozni. A kialakuló kapcsolat feltétele, hogy a felületek kiterjedt területen szorosan érintkezzenek.

A természetben számos állatfajnál megfigyelhető ennek a jelenségnek a felhasználása, elsősorban rovarok és hüllők között. Ezeknek a fajoknak a lábain hierarchikus fibrilláris (rostszerkezetű) struktúrák találhatók, melyek a szoros érintkezést biztosítják. Megfigyelhető, hogy ezen struktúrák komplexitása az állat testtömegével együtt növekszik [1]. A rostok végén érintkező felületek mentén kialakuló feszültségeloszlás fontos hatással van az adhézió erősségére. Korábbi tanulmányok alapján ebben meghatározó szerepe lehet a geometriai kialakításnak, illetve más tanulmányok szerint az anyagparaméterek megfelelő megválasztása is pozitív hatással lehet a kialakuló feszültségeloszlásokra [2].

Jelen tanulmány a kontaktfelület kialakításának hatását vizsgálja a feszültségeloszlásra. Szabályos tömör hengeres geometriát használunk az analízishez. Fontos megjegyezni, hogy a perem mentén szingularitás lép fel (lásd: 1. ábra). Általános esetben a szingularitás mértékének vizsgálatát csak numerikus módszerekkel végezhetjük el. A két felület szétválása várhatóan a feszültségcsúcson környezetében, a perem mentén indul el. Emiatt a geometria módosításának célja a szingularitásnál fellépő feszültségcsúcson csökkentése, ami kedvező hatással van az energiafelszabadulási rátára is, ezzel erősebb adhéziós tulajdonsághoz juthatunk.

A mesterségesen létrehozott struktúrák gyárthatósága miatt fontos, hogy a módosított geometria egyszerű kialakítású maradjon. Az előadásban néhány kiválasztott módosított geometriához tartozó feszültségeloszlás ezek paramétervizsgálata kerül bemutatásra végelelemes számítások alapján.



1. ábra. a) Sima és módosított geometriájú hengeres hasáb. b) Feszültségeloszlások a kontaktfelület mentén

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Jelen kutatás a Kulturális és Innovációs Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával valósult meg. Pályázati azonosító: FK 142457.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] M. Varenberg, N. M. Pugno, S. Gorb, Spatulate structures in biological fibrillar adhesion, *Soft Matter* 6, 3269-3272, 2010.
- [2] A. Kossa, R. Hensel, R. M. McMeeking, Adhesion of a cylindrical punch with elastic properties that vary radially, *Mechanics Research Communications* 130, 104123, 2023.

## HIBRID ZÁRT SZELVÉNYEK VIZSGÁLATA HEGESZTÉSSZIMULÁCIÓVAL ÉS LABORATÓRIUMI MÉRÉSEKKEL

**Horváth András<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

[horvath.andras@edu.bme.hu](mailto:horvath.andras@edu.bme.hu)

**Dr. Kollár Dénes<sup>2</sup>**

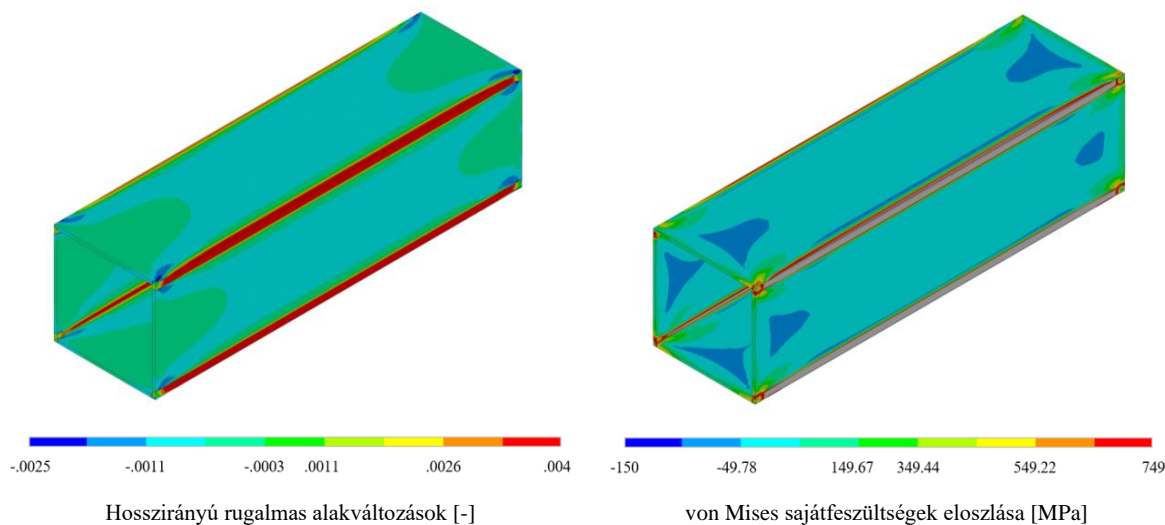
<sup>2</sup>BME, Hidak és Szerkezetek Tanszék

1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

[kollar.denes@emk.bme.hu](mailto:kollar.denes@emk.bme.hu)

A szerkezetépítésben napjainkban nagy igény mutatkozik a gyártási folyamatok felgyorsítására a megfelelő minőség megőrzése mellett. A gyártási folyamatok – melyek közül kiemelt fontosságú a hegesztés – maradó feszültségeket és deformációkat okoznak a munkadarabban, ezek végső soron a termék élettartamát és ellenállását is befolyásolják. Fontos megemlíteni, hogy az így kialakult maradó feszültségeket és deformációkat a tervezés, a gyártás és a kivitelezés során kezelni kell, melyre a szabványok csak közelítéseket adnak. Továbbá az egyszerűsített sajátfeszültség modellek csupán tipikus keresztmetszeti kialakításokra, szilárdsági osztályokra és geometriai méretekre korlátozódnak, a gyártási sajátosságokat közvetlenül nem veszik figyelembe. Mindezek a közelítések és sajátfeszültség modellek kísérleti úton és numerikus szimulációkkal pontosíthatók lennének.

A fent említett céloknak megfelelően kísérleti vizsgálatokat végeztünk kilenc darab hegesztett zárt szelvény próbatesten, mely mérések fókuszában a maradó alakváltozások és sajátfeszültség mérési eljárások álltak. A kísérleti eredményeket – azok önálló értékelése mellett – a hegesztés szimulációjának vizsgálatára kidolgozott végeelemes modell validálására is felhasználtuk, melyen később paraméteres vizsgálatot végeztünk. A paraméteres vizsgálat célja a szilárdsági jellemzők maradó feszültségekre gyakorolt hatásának, illetve a hegesztett hibrid (normál és nagyszilárdságú szerkezeti acélok kombinálását takarja) zárt szelvények sajátfeszültség eloszlásának vizsgálata volt.



1. ábra. Numerikus modell hosszirányú rugalmas alakváltozásai és von Mises sajátfeszültségek eloszlása

### HIVATKOZÁSOK

- [1] J. A. Goldak and Mehdi. Akhlaghi, Computational welding mechanics. Springer, 2005.
- [2] C. K. Lee, S. P. Chiew, and J. Jiang, “3D residual stress modelling of welded high strength steel plate-to-plate joints,” J Constr Steel Res, vol. 84, pp. 94–104, 2013, doi: 10.1016/j.jcsr.2013.02.007.
- [3] C. K. Lee, S. P. Chiew, and J. Jiang, “Residual stress study of welded high strength steel thin-walled plate-to-plate joints part 2: Numerical modeling,” Thin-Walled Structures, vol. 59, pp. 120–131, Oct. 2012, doi: 10.1016/j.tws.2012.04.001.
- [4] D. Kollár, B. Kövesdi, I. Völgyi, and I. Biró, “Assessment of deformation in bridge bearing areas using measurements and welding simulation,” J Constr Steel Res, vol. 194, Jul. 2022, doi: 10.1016/j.jcsr.2022.107305.
- [5] B. Somodi and B. Kövesdi, “Flexural buckling resistance of high strength steel welded and cold-formed square closed section columns Theses of dissertation,” 2017.

## HÍD REZGÉSEINEK VIZSGÁLATA ÁTHALADÓ JÁRMŰ ESETÉN

Horváth Péter<sup>1</sup>, Brinissat Maramé<sup>2</sup>, Hajdu Flóra<sup>2</sup>, Papp Csenge<sup>2</sup>, Szalai Péter<sup>2</sup>, Apagyi Antal<sup>2</sup>, Major Zoltán<sup>3</sup>, Kuti Rajmund<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Széchenyi István Egyetem, Alkalmazott Mechanika Tanszék, 9026 Győr, Egyetem tér 1.  
horvpe@sze.hu

<sup>2</sup>Széchenyi István Egyetem, Gépek Tervezése Tanszék, 9026 Győr, Egyetem tér 1.  
brinissat.maramé@sze.hu, hajdufl@sze.hu, papp.csenge@sze.hu, szalai@sze.hu, apagyi.antal@ga.sze.hu, kuti.rajmund@sze.hu

<sup>3</sup>Széchenyi István Egyetem, Közlekedésépítési és Vízmérnöki Tanszék, 9026 Győr, Egyetem tér 1.  
majorz@sze.hu

A hidakon áthaladó járművek rezgéseket okoznak a híd szerkezeti elemeiben, amelyek idővel károsíthatják ezeket a szerkezeti elemeket. Amikor egy jármű áthalad egy hídon, dinamikus gerjesztést gyakorol a hídra, ami a híd deformációját és rezgését okozza. Ez a rezgőmozgás az áthaladó járműre is hatással lesz, dinamikus gerjesztésként hat rá, és rezgést okoz, ami viszont további dinamikus terhelést jelent a hídra. Így jön létre az úgynevezett jármű-híd kölcsönhatás. Az elmúlt évtizedekben számos analitikus és numerikus módszert dolgoztak ki ezen probléma megoldására [1,2,3,4].

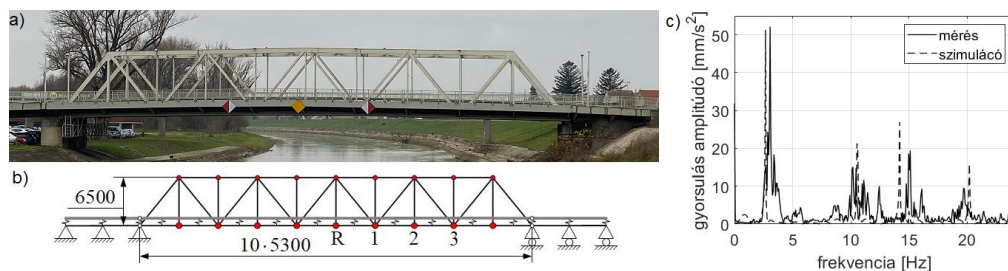
Kutatásunkban a győri Petőfi híd (1/a). ábra) dinamikus rezgését vizsgáltuk mind méréssel, mind számítógépes szimuláció segítségével. Gerjesztésként egy 9500 kg tömegű Ikarus 55 típusú autóbust alkalmaztunk, mely állandó 20 km/h-ás sebességgel haladt keresztül a hídon.

Három mérést végeztünk, mindhármat 2 gyorsulásérzékelővel: az egyik érzékelő a híd közepén került elhelyezésre, és helye változatlan maradt a mérések során (1/b) ábrán R betűvel jelölve), a másik érzékelő helye mérésről-mérésre változott, az 1/b) ábrán 1-3 számaokkal jelölt helyeken került felszerelésre.

A szimulációhoz egy végeelemes programot írtunk MATLAB környezetben, amely a híd és a jármű mozgásegyenletét egyetlen kapcsolt egyenletben kezeli. Mivel a domináns lengések a hajlító lengések, a hídhöz egy síkbeli mechanikai modellt készítettünk (1/b) ábra). A diskretizáláshoz 2 csomópontú Bernoulli-típusú gerenda elemekt alkalmaztunk. Síkbeli modell révén a hídpálya szintén gerenda elemmel lett modellezve, mely nagy merevségű rugókkal kapcsolódik a híd hossztartóihoz. A keresztartók tömegpontokként lettek definiálva.

A busz egy 5 csomópontú féljárműmodellként lett modellezve, 2 csomópontoz a kerekek/felfüggesztés tömege lett hozzárendelve, míg a felépítmény 3 csomópontja közül a két szélsőhöz a felfüggesztés rugó/csillapító elemei kapcsolódnak, a középsőhöz pedig a felépítmény tömege lett hozzárendelve. A kerekek csomópontjai 2-2 rugó/csillapító elemen keresztül kapcsolódnak az aktuálisan alattuk elhelyezkedő elemhez.

A végeelem programban 2 típusú vizsgálatot végeztünk: a híd modálanalízisét, valamint egy tranziens analízist, mely során a busz csomópontjaira 20km/h-nak megfelelő kinematikai terhelést definiáltunk. Mind a mérés, mind a szimuláció gyorsulás-idő értékeiből gyors Fourier-transzformáció segítségével előállítottuk a gyorsulás amplitúdó spektrumot és összevetettük a mérésből és számításból kapott eredményeket (1/c) ábra).



1. ábra. a) A győri Petőfi híd, b) a híd mechanikai mopedllje, c) a mérésből és számításból kapott gyorsulás amplitúdó spektrum

### HIVATKOZÁSOK

- [1] M. Olsson, Finite element, modal co-ordinate analysis of structures subjected to moving loads, *Journal of Sound and Vibration* 99(1): 1-12, 1985.
- [2] Y.B. Yang, J.D. Yau, Vehicle-bridge interaction element for dynamic analysis, *Journal of Structural Engineering* 123(11): 1512-1518, 1997.
- [3] Y.B. Yang, Y.S. Wu, A versatile element for analyzing vehicle-bridge interaction response, *Engineering Structures* 23(5): 452-469, 2001.
- [4] C.S. Cai, X.M. Shi, M. Araujo, S.R. Chen, Effect of approach span condition on vehicle-induced dynamic response of slab-on-girder road bridges, *Engineering Structures* 29(12): 3210-3226, 2007.

## HOGYAN TELJESÍT A MECHANIKA ALAPTÁRGYAKON EGY CHATBOT?

**Berezvai Szabolcs**<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5  
berezvai@mm.bme.hu

Az információs technológia fejlődése mindig is nagy kihívás elé állította az oktatásban résztvevő tanárokat és egyetemi oktatókat. Ez a kihívás ugyanakkor kettős természetű: veszély és lehetőség is egyszerre. Veszély, hiszen egy új technológia vagy eszköz megjelenése mindig is magával hordozta a csalás és a visszaélések lehetőségét, azaz, hogy egy számonkérés vagy házi feladat során az adott eszköz nem megengedett segédeszközként is szolgálhat a hallgató számára és így nem kaphatunk reális képet arról, milyen a valós tudása. Ugyanakkor egy új technológia megjelenése lehetőség is, amelyet beépítve az oktatásba javítani tudjuk képzéseinket és a hallgatóink kompetenciáit. Emiatt rendkívül fontos, hogy egy-egy új technológia esetében megismerjük annak működését, feltárjuk a veszélyeket és a lehetőségeket amit kínál.

Napjaink slágertémája a mesterséges intelligencia és a chatbot alkalmazások. Mindenki biztosan hallott arról, hogy milyen lenyűgöző vagy épp neveléses válaszokat tud adni egy-egy jól (vagy éppen rosszul) feltett kérdésre a ChatGPT [1], amely jelenleg a legelterjedtebb chatbot alkalmazás. A témában rengeteg olyan bulvárcikk és komoly tudományos közlemény is megjelent amely azt tárgyalta, hogy mennyire megkönnyíti a csalást és a plagizálást a chatbotok megjelenése. Bár egy nemzetközi tudományos cikkről például kiderült, hogy egy chatbot írta, és a kiadó engedélyével és felügyeletével átjutott a bírálati folyamaton [2].

A ChatGPT-t fejlesztő OpenAI cég saját weblapján rendszeresen méri a saját szoftverének teljesítményét a különféle nemzetközi egyetemi és középiskolai vizsgasorokon is. A legújabb, GPT-4-es változat esetében számos vizsgatípus esetén tesztelték az új verzió sikerességét, ami jelentős javulást mutatott az előző verzióhoz képest [3]. Láthattuk azt is, hogy a magyarországi érettségik esetében is már egy közepes szintet el tudtak érni ezek a szoftverek.

Előadásom során az alap mechanika tárgyak mintafeladatain teszteltem a ChatGPT problémamegoldó képességét magyar és angol nyelven egyaránt. Elsősorban a Statika-Szilárdságtan-Dinamika és Rezgéstan tárgy alapfeladataival próbálkoztam. A célom annak bemutatása, hogy az különféle feladattípusokkal hogyan birkózik meg a mesterséges intelligencia alapú kereső.

### HIVATKOZÁSOK

[1] OpenAI, GPT-4, 2023, <https://openai.com>

[2] D. Cotton, P. Cotton és J. R. Shipway, Chatting and Cheating. Ensuring academic integrity in the era of ChatGPT, megjelenés előtt, *Innovations in Education and Teaching International*, <https://doi.org/10.1080/14703297.2023.2190148>

[3] OpenAI, GPT-4, 2023, <https://openai.com/research/gpt-4>

## IDŐBEN VÁLTOZÓ PARAMÉTERŰ ESZTERGÁLÁS VÉGES IDEJŰ STABILITÁS VIZSGÁLATÁNAK NUMERIKUS SZIMULÁCIÓS PROBLÉMÁJA

Bárfai András<sup>1,2</sup> és Dombóvári Zoltán<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki kar, Műszaki Mechanikai Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

<sup>2</sup>MTA-BME Lendület Szerszámgéprezgések Kutatócsoport, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

andras.bartfai@mm.bme.hu, dombovari@mm.bme.hu

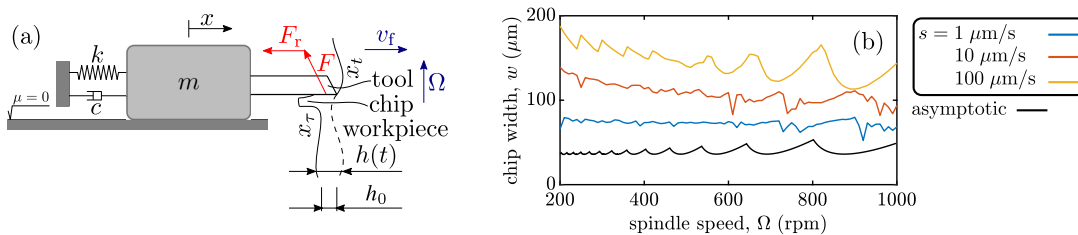
Időben változó paraméterű dinamikai rendszerek mérnöki gyakorlatban is gyakran előfordulnak. Ennek a folytonos - tipikusan lassú változásnak - hatása jelentős lehet a rendszer véges idejű stabilitási tulajdonságaira [1].

Jelen tanulmányban egy egyszerű késleltetett differenciálegyenletet vizsgálunk időben folytonosan változó paraméterekkel. Az egyszabadságfokú ortogonális esztergálás tömeggel normalizált mozgásegyenlete, egyszerű lineáris vágási erő karakterisztikát feltételezve az alábbi alakban írható fel

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) &= \tilde{K}_c w(t)(x(t - \tau) - x(t)), \\ \omega_n &= k/m, \quad \zeta = c/(2m\omega_n), \quad \tilde{K}_c = K_c/m, \quad w(t) = st. \end{aligned} \quad (1)$$

ahol  $\omega_n$ ,  $\zeta$  és  $m$  az egyszabadságfokú lengőrendszer sajátkörfrekvenciája, arányos csillapítása és tömege. Az (1) egyenlet jobb oldala adja meg a megmunkálásból származó vágási erőt, ahol  $K_c$  és  $w(t)$  a munkadarab anyagától függő megmunkálási paraméter és a lineárisan folytonosan változtatott forgácsvastagság.

A rendszer aszimptotikus stabilitása  $w(t) \equiv w$  mellett a D-szeparáció [2] segítségével vizsgálható, míg a változó paraméterű rendszer véges idejű stabilitását a MATLAB dde23 numerikus késleltetett differenciálegyenlet megoldóval számoljuk (tolerancia beállítások:  $RelTol = 10^{-7}$ ,  $AbsTol = 10^{-10}$ ). A véges idejű stabilitási határt az elmozdulásra vett kezdeti feltétel  $x_0$  nagyságának definiáljuk, míg feltételezzük, hogy  $\dot{x}_0 = 0$ . Ez azt jelenti, hogy véges időben instabilitásba lépünk, ha az elmozdulás amplitúdójának nagysága eléri a kezdeti feltételt.



1. ábra. (a) Egyszabadságfokú esztergálási modell. (b) Aszimptotikus és véges idejű stabilitási diagramok a fordulatszám  $\Omega$  és elért forgácsvastagság  $w$  függvényében az alábbi adatokkal  $\omega_n = 50$  Hz,  $\zeta = 0.1$ ,  $m = 1$  kg,  $K_c = 600$  MPa

Az 1(b) ábra azt mutatja, hogy gyorsabb forgácsvastagság változás mellett a stabilitási (lobe) diagramok feljebb csúsznak. Azonban látható, hogy viszonylag alacsony változás, illetve alacsony fordulatszámok mellett is az aszimptotikus stabilitás által megadott lobe struktúra szétesik. Gyorsabb forgácsvastagság és nagyobb fordulatszámok esetében a stabilitási diagram stuktúrája közelítőleg visszanyeri alakját az aszimptotikus stabilitáshoz viszonyítva. Ez arra enged következtetni, hogy a hagyományos megoldók általánosan nem alkalmasak időben változó paraméterű rendszerek véges idejű stabilitás vizsgálatára. Az 1(b) ábrán a legnagyobb áthaladási sebesség alacsony fordulatszám esetén az önhasonló mintázat újratagozódását követhetjük nyomon, ami a használt numerikus algoritmus lenyomata. Hasonló jelenség tapasztalható változó paraméterű közönséges differenciálegyenletek esetén is [3]. A változó paraméterek hatását későbbiekben mérések segítségével is vizsgálni fogjuk.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A Kulturális és Innovációs Minisztérium ÚNKP-22-3-I-BME-83 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] S.M. Baer, T. Erneux, The slow passage through a Hopf bifurcation: delay, memory effects, and resonance *SIAM Journal on Applied mathematics*, 49(1):55-71, 1989.
- [2] T. Insperger, G. Stepan, *Semi-Discretization for Time-Delay Systems*, Springer New York, New York.
- [3] A. Bartfai, R. Kuske, Z. Dombovari, On the finite-time stability of dynamic stability loss in a single degree of freedom system, *Proceedings of ISMA 2022 International Conference on Noise and Vibration Engineering* 2565-2576, 2022.



## IDŐKÉSÉS ADATALAPÚ IDENTIFIKÁCIÓJA SINDy ALGORITMUS SEGÍTSÉGÉVEL

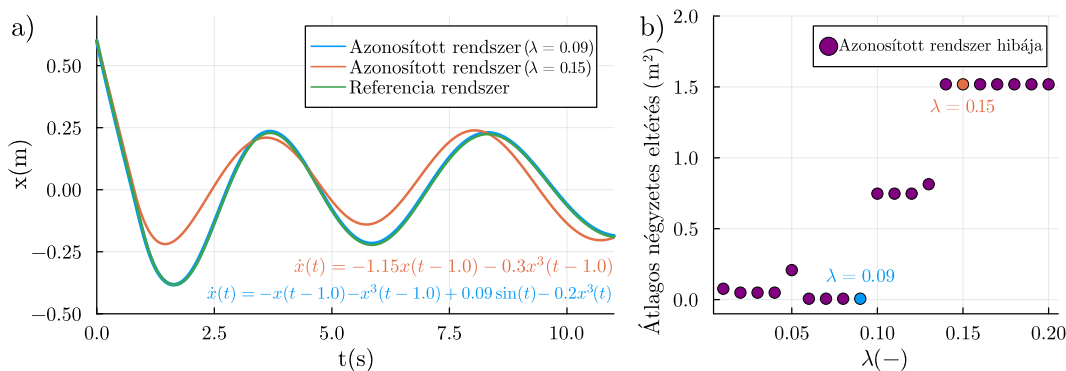
Köpeczi-Bócz Ákos Tamás<sup>1</sup>, Sykora Henrik<sup>2</sup> és Takács Dénes<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki kar, Műszaki Mechanikai Tanszék  
kopeczi@mm.bme.hu

<sup>2</sup>University of Southampton, Institute of Sound and Vibration Research, UK  
h.t.sykora@soton.ac.uk

<sup>3</sup>ELKH-BME Gépek Dinamikája Kutatócsoport  
takacs@mm.bme.hu

Az utóbbi években a mérési eszköztárunk bővülésének (pl. képfeldolgozás, okostelefonok szenzorjai, stb.) köszönhető az adatalapú modellalkotás jelentős teret nyert. A számítógépek, illetve statisztikai és gépi tanulási módszerek fejlődése lehetővé teszi a hatékonyabb adatfeldolgozást és modell feltárást. A dinamikai rendszerek által leírt jelenségek feltárása során a tudományos gépi tanulás [1] kifinomultabbá tette a modellalkotást a fizikai ismeretek által megtámogatott keretrendszerek segítségével. A munkánk során időkésés jelenlétében vizsgálunk egy ilyen módszert, amelyet *Nemlineáris dinamika ritka tagú azonosításának* (angolul röviden SINDy) nevezhetünk. A módszer alapötletét Brunton és társai [2] dolgozták ki 2016-ban. Jelen kutatásban ezt a módszert módosítottunk, hogy időkésleltetett rendszerek mögött rejlő dinamikát is feltárhassunk. Ismert paraméterű késleltetett dinamikai rendszerek szimulációinak segítségével numerikusan megvizsgáljuk a módszer használhatóságának előfeltételeit és korlátait. A módszer robusztusságának vizsgálatához sztochasztikus hatást is figyelembe veszünk. Az algoritmust a szakaszosan vizsgált legkisebb négyzetek módszerével [3] (angolul STLSQ) alkalmaztuk.



1. ábra. (a) Az azonosított rendszer különböző  $\lambda$  küszöbértékek esetén az STLSQ algoritmussal. Referencia rendszer:  $\dot{x}(t) = -x^3(t - \tau) - x(t - \tau) + 0.09 \sin(t)$ ,  $\tau = 1.0$  s. A  $\lambda$  értékének növelésével nagyobb eltérést engedünk meg az időjelek között annak érdekében, hogy a azonosított modell kevesebb tagból álljon. (b) Az átlagos négyzetes eltérés látható a  $\lambda$  értékek függvényében. A  $\lambda = 0.09$  és  $\lambda = 0.15$  értékekhez tartozó rendszereket (a) panel mutatja megfelelő színezéssel.

Az 1. ábrán bemutatott eredményeink alapján a felvázolt módszerrel az algoritmus jól működik szimulált nemlineáris rendszerek esetén. Ahogyan az 1(b). ábrán látható, a legjobb illeszkedés elérésének érdekében végig haladtunk egy  $\lambda$  küszöbérték tartományon és megkerestük a legalacsonyabb eltérést mutató rendszert. Az azonosított időkésés helyes minden esetben és pár esetben látható a hibásan azonosított többlet tag is. A vizsgálatunk során szükséges a fizikailag értelmezhető időkésés tartomány meghatározása és a lehetséges tagokat ritka időkésés eloszlással kell megadni. A módszer akkor hatékony, amikor a rendszer viselkedését befolyásoló tagokat valamilyen sejtés alapján meg tudjuk jelölni. A módszer alkalmas több különböző időkésés azonosítására is, ami szintén részét képezi vizsgálatainknak.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs hivatal NKFI-128422 számú pályázata támogatta.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] C. Rackauckas, Y. Ma, J. Martensen, C. Warner, K. Zubov, R. Supekar, D. Skinner, A. Ramadhan, A. Edelman, Universal Differential Equations for Scientific Machine Learning, 2020. DOI: 10.48550/ARXIV.2001.04385
- [2] S. L. Brunton, J. L. Proctor, J. N. Kutz, Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 113(15): 3932–3937, 2016.
- [3] S. L. Brunton, J. N. Kutz, *Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*, Cambridge University Press, 2019. ISBN:9781108422093

## INFLUENCE OF BENDING ON THE CRACKING PATTERN OF A CIRCULAR BRITTLE RING UNDER HYDROSTATIC PRESSURE

Sébastien Michel<sup>1</sup>, András A. Sipos<sup>1</sup>

<sup>1</sup>BME Department of Morphology and Geometric Modeling

1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

sebastien.michel@edu.bme.hu, siposa@eik.bme.hu

The emergence of the cracking pattern in axisymmetrical domes has a long track record dating back to Poleni [3]. Suppose the theory of linear elasticity predicts that the cracks will develop from the bottom of the dome cap. In that case, it is yet unclear how the mechanics of the shell produces the famous pattern of regularly located cracks along the circumference [2]. The formulation of Griffith's theory of fracture [1] into a modern variational framework [4] offers new perspectives to study the fracture problem [5,6].

We aim to study the influence of bending on the cracking pattern formation in a dimension-reduced model of the edge of the dome. That is, we model the edge of the shell as a 1D ring of radius  $R$ , cross-sectional area  $A$ , second moment of area  $I$  made of a brittle material with a Young modulus  $E$  and fracture toughness  $G$ . The ring is allowed to deform in its plane with tangential displacement  $v$  and radial displacement  $w$ , and constrained by tangential and radial springs of respective stiffnesses  $k_v, k_w$ . The ring is loaded with a uniform constant internal pressure  $p$ . The problem is studied in the framework of Griffith brittle fracture, assuming non-interaction of the separated crack faces. The global energy minimization criterion is chosen as a fracture criterion, and the whole problem reduces to the minimization of the functional  $E$  depending on the unknown fields  $v, w$  and the cardinal of the cracked set  $|\Gamma|$ :

$$E(\Gamma, v, w) = \int_{[0, 2\pi] \setminus \Gamma} \left\{ EI \left( \frac{w + w_{,zz}}{R^2} \right)^2 + EA \left( \frac{w + v_{,z}}{R} \right)^2 - pw + \frac{k_v}{2} v^2 + \frac{k_w}{2} w^2 \right\} dz + GA|\Gamma|.$$

The integral term accounts for the strain and potential energy densities, whereas the last term is the sum of the energy spent for opening cracks. Regularization is performed by specifying the boundary conditions on the displacement components at the cracked points. The pattern is retrieved as the solution of a sequence of boundary-value problems as the load parameter  $p$  is increased.

We find that bending influences the emergence of the cracking pattern. In particular, bending perturbs the position of the global minima of the energy, at least at some range of the parameters. The resulting energy landscape results in cracks evolutions, in which cracks appear close to the existing cracked set or bisect fragments. We find that even complex evolutions result in a quasi-equidistant spacing of the cracks – see Fig 1.

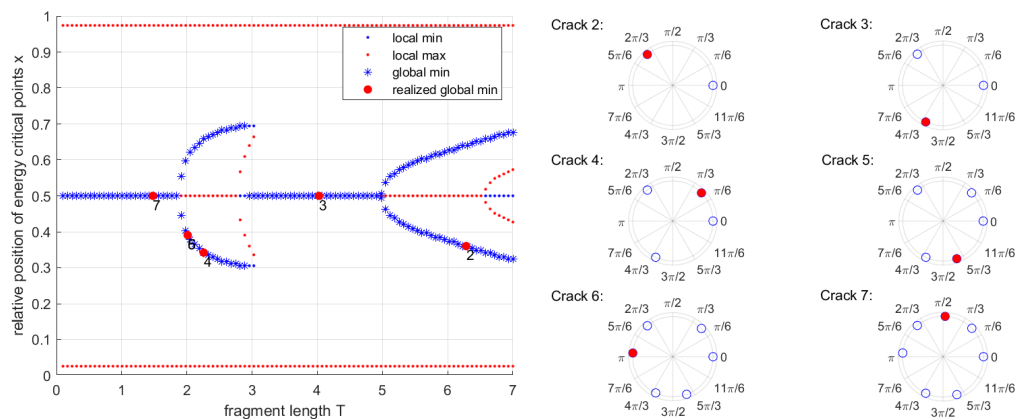


Fig 1. The relative position of a new crack  $x$  against the length of the fragment undergoing fracture  $T$ . The realized global minima are denoted by red dots. On the right, the crack map shows the position of the emerging cracks along the ring.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] A. A. Griffith, VI. The phenomena of rupture and flow in solids, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A* 221: (582-593), 163-198, 1921.
- [2] J. Heyman, The stone skeleton, *International Journal of Solids and Structures* 2(2): 249-279, 1966.
- [3] J. Heyman, G. Poleni, Poleni's problem, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 84(4): 737-759, 1988.
- [4] B. Bourdin, G. A. Francfort, J. J. Marigo, The variational approach to fracture, *Journal of Elasticity* 91: 5-148, 2008.
- [5] G. Lancioni, G. Royer-Carfagni, The variational approach to fracture mechanics. A practical application to the French Panthéon in Paris, *Journal of Elasticity* 95: 1-30, 2009.
- [6] S. Michel, A. A. Sipos, On the cracking patterns of brittle rings with elastic radial support under hydrostatic pressure, *Meccanica* 57(7): 1639-1656, 2022.



## INHOMOGÉN POLITÓPOK MECHANIKAI KOMPLEXITÁSA – AVAGY VAN-E EGY TETRAÉDERNEK LELKE?

Almádi Gergő<sup>1</sup>

Domokos Gábor<sup>1,2</sup>, Regös Krisztina<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>ELKH-BME Morfodinamika Kutatócsoport

<sup>2</sup>BME, Morfológiai és Geometriai Modellezés Tanszék

1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

gergo.almadi14@gmail.com, domokos@iit.bme.hu, regos.kriszti@gmail.com

Politópnek nevezzük a  $d$ -dimenziós Euklideszi térben  $(d - k)$  dimenziós alterek  $(k = 0, 1, \dots, (d - 1))$  által határolt alakzatokat. Poligonnak, vagy másnéven sokszögnek nevezzük a  $d = 2$  dimenziós politópokat és poliédernek nevezzük a  $d = 3$  dimenziós politópokat. Ebben a dolgozatban az utóbb felsorolt két esettel foglalkozunk. A politóp geometriája és statikai egyensúlyi helyzetei közötti összefüggést homogén tömegeloszlás esetében részletesen vizsgálták [1]. Jelen munkában az inhomogén esettel foglalkozunk.

Egy politóp konvex, ha két tetszőleges pontját összekötő szakasz a politóp belsejében marad. Inhomogén tömegeloszlást feltételezve egy politóp súlypontja annak belsejében bárhol lehet.

Poligonok statikai viselkedésének jellemzésére bevezetjük az *egyensúlyi osztályozó vektor* fogalmát mely egy  $N$ -szög esetén egy  $N$  dimenziós, bináris vektor, melynek  $k$ -adik eleme 1, ha létezik pontosan  $k$  darab stabil helyzettel rendelkező  $N$ -szög, egyébként az elem 0. Háromszögek és négyszögek esetében bebizonyítjuk, hogy a kombinatorikailag lehetséges  $2^3$  illetve  $2^4$  vektor közül geometriailag csak 2 illetve 5 darab realizálódhat és fel is soroljuk ezeket a vektorokat.

Poliéderek esetében bevezetjük az *egyensúlyi osztályozó mátrix* fogalmát, mely egy  $F$  lapú,  $V$  csúcús poliéder esetén egy  $F \times V$  méretű, bináris elemekből álló mátrix, melynek  $(i, j)$  eleme 1, ha létezik pontosan  $S = i$ ,  $U = j$  stabil illetve instabil egyensúlyi helyzettel rendelkező  $F$  lapú,  $V$  csúcús konvex poliéder, egyébként az elem 0.

MATLAB programban számított eredmények alapján sejtéseket fogalmazunk meg tetraéderek egyensúlyi osztályozó mátrixaira vonatkozóan. A tetraéderek 5 dimenziós konfigurációs terére illesztett ortogonális háló csúcsaiban elhelyezkedő 760000 darab tetraéder numerikus vizsgálata alapján kevesebb, mint 200 egyensúlyi mátrixot sikerült azonosítani a kombinatorikailag lehetséges  $2^{16} = 65536$  közül. Jelen dolgozatban ugyan nem igazoljuk, hogy több mátrix nem létezhet, de megfogalmazunk olyan elveket, melyekkel egyes mátrixok létezését ki lehet zárni. Külön hangsúlyt fektetünk a monostabil és monoinstabil tetraéderek egyensúlyi osztályozó mátrixaira, és párhuzamot vonunk a homogén tetraéderek egyensúlyi osztályozó mátrixaival is.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] G. Domokos, F. Kovács, Z. Lángi, K. Regös, P.T. Varga, Balancing polyhedra, *Ars Mathematica Contemporanea* 19(1):95-124, 2020.

## INVERZ ANYAGEGYENLETEK NEMLINEÁRISAN RUGALMAS, IZOTROP ÉS INKOMPRESSIBILIS ANYAGOKRA

**Bertóti Edgár**

Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet

3515 Miskolc-Egyetemváros

edgar.bertoti@uni-miskolc.hu

Rugalmas, szilárd testek klasszikus anyagegyenleteinek származtatásánál az egyik alapfeltételezés, hogy a testben kialakuló feszültségmezőt az alakváltozásmező minden pontban egyértelműen meghatározza. Hiperelasztikus anyagok esetében a fajlagos alakváltozási energia – mint Helmholtz-féle potenciálfüggvény – az alakváltozási tenzor nemlineáris függvénye, amelyből az alakváltozási tenzorhoz energia értelemben tartozó feszültségi tenzor deriválással származtatható. Az így előállítható nemlineáris anyagegyenleteket széles körben alkalmazzák rugalmas testek nagy alakváltozásának elmozdulásmezőn alapuló végeselemes modellezésénél.

Inverz anyagegyenletek esetében az alakváltozási tenzor van kifejezve a feszültségi tenzor függvényeként. Lineárisan rugalmas anyagmodellnél a (lineáris) feszültség-alakváltozás kapcsolat invertálása nem jelent nehézséget. Nemlineárisan rugalmas esetben azonban a feszültségek és az alakváltozások nemlineáris függvénykapcsolata néhány speciális esettől eltekintve nehezen, vagy egyáltalán nem invertálható, amely azt is jelenti, hogy az alakváltozási energiából, mint potenciálfüggvényből nem képezhető – Legendre-féle transzformációval – a feszültségi tenzortól kizárólagosan függő kiegészítő alakváltozási energia, vagyis a Gibbs-féle potenciálfüggvény.

Inverz anyagegyenletekre elsősorban a feszültségmező közvetlen approximációján alapuló, ún. dual-mixed végeselemes modellek felépítésénél és alkalmazásánál van szükség. Lineáris esetben ezeknek a modelleknek számos kedvező tulajdonsága van az elmozdulásmezőn alapuló modellekéhez képest, elterjedésük egyik akadályaként a nemlineáris inverz anyagegyenletek hiánya említhető.

Kihhasználva azt a tényt, hogy feszültségmezőtől függő fajlagos kiegészítő alakváltozási energia – mint potenciálfüggvény – az alakváltozási energia-függvény ismerete nélkül, közvetlenül is felépíthető kísérleti adatok felhasználásával [1], inverz nemlineáris anyagegyenletek származtathatóak energia értelemben konjugált feszültségi és alakváltozási tenzorok között.

Izotrop, összenyomhatatlan anyagok esetében a térbeli Hencky-féle alakváltozási tenzor (az alakváltozási gradiens poláris felbontásból származó bal oldali nyúlás-tenzor logaritmus) és a Cauchy-féle feszültségi tenzor alkotnak olyan összetartozó alakváltozási és feszültségi tenzor-párt, amelyek előnyösen alkalmazhatók nemlineáris inverz anyagegyenletek felépítéséhez. Ilyen típusú modelleket mutatnak be és vizsgálnak, többek között, a [2], [3] és [4] tanulmányok.

Az előadás izotrop, összenyomhatatlan anyagok viselkedésének leírására alkalmas, új típusú inverz anyagegyenleteket mutat be, amelyeknél a Hencky-féle alakváltozási tenzor a Cauchy-féle feszültségi tenzor explicit függvénye. Bevezet egy olyan, hatványfüggvény szerint változó fajlagos kiegészítő alakváltozási energia-függvényt, amely a Cauchy-féle feszültségi tenzor deviátoros részének két skaláris invariánsától függ, és amely a Treloar-féle kísérleti adatokhoz [5] jól illeszkedő nyúlás-feszültség kapcsolatot eredményez nagy alakváltozások esetén is [6]. A modell egyik fontos jellemzője, hogy lehetővé teszi az anyagi paraméterek szeparált illesztését és meghatározását az egytengelyű húzásra és a kéttengelyű húzásra (vagy egytengelyű nyomásra) vonatkozó kísérleti adatok külön-külön történő figyelembevételével.

A kísérleti adatokkal való egyezés mellett a javasolt inverz anyagmodell alkalmazhatóságát egy szakirodalomból jól ismert hiperelasztikus permértékfeladat analitikus megoldásán keresztül is bemutatja az előadás. Ennek során, egy gumyszerű anyagból készült gömbhéj felfújását modellezve, összevetjük a kapott eredményeket az Ogden-féle hatparaméteres, nemlineáris anyagmodellel számított eredményekkel, vastag falú és vékony falú (membrán) héj esetében is.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] R.W. Ogden, *Non-Linear Elastic Deformations*, Ellis Horwood, Chichester, 1984. (2nd ed., Dover, Mineola, 1997.)
- [2] A.R. Srinivasa, On a class of Gibbs potential-based nonlinear elastic models with small strains, *Acta Mechanica* 226:571–583, 2015.
- [3] R. Bustamante, K.R. Rajagopal, A new type of constitutive equation for nonlinear elastic bodies. Fitting with experimental data for rubber-like materials, *Proceedings of the Royal Society A* 477:20210330, 2021.
- [4] R. Bustamante, A note on a new constitutive model for rubber-like solids, *Mechanics Research Communications* 117:103775, 2021.
- [5] L.R.G. Treloar, Stress-strain data for vulcanized rubber under various types of deformation, *Transactions of the Faraday Society* 40(4): 59–70, 1944.
- [6] E. Bertóti, A non-linear complementary energy-based constitutive model for incompressible isotropic materials, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 148:104262, 2023.

## KÉTMEZŐS $hp$ -VERZIÓS VÉGESELEMMÓDSZER ERŐSÍTETT TERMODINAMIKAI MODELLEK MEGOLDÁSÁRA

Molnár Zsombor<sup>1</sup> és Tóth Balázs<sup>2</sup>

Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet  
3515 Miskolc-Egyetemváros

<sup>1</sup>molnar.zsombor@student.uni-miskolc.hu, <sup>2</sup>balazs.toth@uni-miskolc.hu

A mérnöki gyakorlatban leggyakrabban a Fourier-féle anyagmodellen alapuló hővezetési egyenletet alkalmazzák mint matematikai modellt az anyagok, szerkezetek termikus viselkedésének leírására. Ez a modell csak stacionárius folyamatokra ad elfogadható eredményeket. Azonban az időtől függő hővezetési feladatok megoldása során bizonyos esetekben a nagyon gyorsan lejátszódó hőfolyamatok tranzienz szakaszában a kapott megoldás nem egyezik a mért értékekkel.

Kirívóan nagy eltérés figyelhető meg az egészen alacsony (például 10 K körüli) hőmérsékleteken folyékony Héliumban, tiszta kristályokban és szilárd habokban lezajló termikus folyamatok vizsgálata során. Ezért a klasszikus – Fourier-féle anyagmodellre épülő – matematikai modell módosításra szorul. Megfigyelték, hogy a mérési eredmények jó egyezést mutatnak a Guyer–Krumhansl modell anyagegyenletére épülő hővezetési egyenlet megoldásával.

Sikeresen tesztelték a Guyer–Krumhansl modell alkalmazhatóságát közetekre és habokra is [1, 2, 3]. Mivel ez a kutatási irány ígéretesnek tűnik a Fourier-féle anyagmodell javítására, véges differencia módszert dolgoztak ki a Guyer–Krumhansl- és egyben a Maxwell–Cattaneo–Vernotte modell numerikus megoldására is azért, hogy minél összetettebb kezdeti-peremértékfeladatokat is meg tudjanak oldani [4, 5]. Az eredményt a COMSOL végeeselem szoftver által nyújtott megoldásokkal is összevetették, és észrevették, hogy a megoldás nem konvergál megfelelően, illetve ami még rosszabb, hogy nem a kívánt megoldáshoz, hanem rossz megoldáshoz tart a szoftver által nyújtott eredmény [4].

Az a következtetés vonható le, hogy a széles körben alkalmazott alacsonyabb rendű, azaz az elemsűrítésre épülő ún.  $h$ -verziós klasszikus végeeselemmódszerek alkalmazása konvergencia-problémákhoz vezet a fent említett erősített termodinamikai modellek instacionárius hővezetési feladatainak megoldása esetén.

A problémák egyik lehetséges megoldása olyan kétmezős „mixed”  $hp$ -verziós végeeselem-módszer kifejlesztése, melyben mind a hőmérséklet mind a hőáram független, approximálандó változóként jelenik meg. Erre építve egy  $hp$ -verziós végeeselemmódszert fogunk bemutatni, mely alkalmas a termodinamika erősített elméleteire épülő matematikai modellek nagy pontosságú megoldására. A bemutatásra kerülő módszer numerikus problémáktól mentes eredményeket biztosít mind  $h$ -, mind  $p$ -típusú approximáció esetén [6].

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A bemutatott alapkutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal NKFIH FK 134277 számú kutatási pályázata támogatta.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] S. Both, B. Czél, T. Fülöp, G. Gróf, Á. Gyenis, R. Kovács, P. Ván, J. Verhás, Deviation from the Fourier law in room-temperature heat pulse experiments, *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics* 41(1):41-48, 2016.
- [2] A. Fehér, R. Kovács, On the evaluation of non-Fourier effects in heat pulse experiments, *International Journal of Engineering Science* 169:103577, 2021.
- [3] A. Lunev, A. Lauerer, V. Zborovskii, F. Léonard, Digital twin of a laser flash experiment helps to assess the thermal performance of metal foams, *International Journal of Thermal Sciences* 181:107743, 2022.
- [4] Á. Rieth, R. Kovács, T. Fülöp, Implicit numerical schemes for generalized heat conduction equations, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 126:1177-1182, 2018.
- [5] A. Pozsar, M. Szücs, R. Kovács, T. Fülöp, Four spacetime dimensional simulation of rheological waves in solids and the merits of thermodynamics, *Entropy* 22(12):1376, 2020.
- [6] B. Tóth, Zs. Molnár, R. Kovács, Two-field  $hp$ -finite elements for time-dependent problems in the refined theories of thermodynamics, publikálásra benyújtva, arXiv:2209.08525, 2023.

## KÍSÉRLETI MÓDSZER FEJLESZTÉSE RUDAK TISZTA HAJLÍTÁSÁRA A NEMLINEÁRIS TARTOMÁNYBAN

**Máté Péter<sup>1</sup> és Szekrényes András<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup>BME, Műszaki Mechanikai Tanszék

1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.

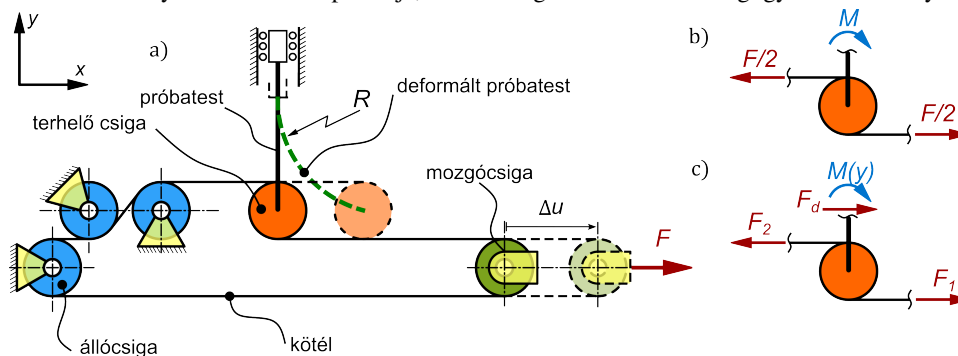
peter.mate@bme.hu, szeki@mm.bme.hu

A jelen tanulmány azt vizsgálja, hogy előállítható-e, illetve hogyan közelíthető a rudak tiszta hajlítása laboratóriumi körülmények között, tisztán mechanikus megoldással. A szakirodalomban több tiszta hajlításra alkalmas készülék ismeretes, a legelterjedtebb a négypontos hajlítás, amely moderáltan nagy elmozdulások kezelésére is alkalmassá tehető [1]. Emellett léteznek olyan mechanizmusok amelyek a tiszta hajlítás peremfeltételeit alkalmazzák kényszerként a próbatestre, kochleoid görbén vezetve a rúdvéget [2].

A vizsgálat során egy olyan készülék került megtervezésre amely képes elméletben a tökéletes hajlításra egyik végén mereven befogott, másik végén koncentrált nyomattal terhelt rúd esetében. A készülék szakítógépre szerelhető, a terhelést a szakítógép adja rá a szerkezetre.

A készülék elvi ábrája az 1 ábrán látható. A jelen megoldáshoz hasonló elven működő megoldást javasolt Perduijn [3], lemezek hajlítására. A végtelenített kötélpálya hossza terhelés hatására megnő ( $2\Delta u$ -val), ezt ideális esetben kizárólag a terhelő csiga elfordulása tudja kompenzálni. Emellett amennyiben a csapágyak súrlódásmentesek, nem lép fel kötélterő veszteség és a terhelő csigára egy erőpár adódik át, tehát megvalósul a tiszta hajlítás. A terhelő csiga elméletben ellenállás nélkül mozgatható, így a próbatest végének az  $x$  irányú mozgását nem gátolja.

A valós megoldásban két kötélpálya fut párhuzamosan, két próbatesttel, oly módon, hogy a próbatestek ellenkező irányú hajlítást szenvedjenek el. A próbatestek ugyabba a csúszkába vannak befogva, így elméletben nem keletkezik terhelő nyomaték a csúszkán, az minimális ellenállás mellett tudja kompenzálni a rúdvégek elmozdulását. A csúszka a súlyerő hatását kompenzálja, a valós megoldásban a nehézségi gyorsulás  $x$  irányú.



1. ábra. A kísérleti eszköz elvi vázlata (a). A terhelésbevezetés a mozgócsigán keresztül történik. Ennek hatására a terhelő csiga koncentrált nyomatékot visz át a próbatestre. Ideális, súrlódásmentes esetben ez egy valódi erőpár, ahogy az a b) szabadtest-ábrán látható, valós esetben viszont, amikor súrlódás van a rendszerben a c) szabadtest-ábra valósul meg

A mérési módszer kalibrációja acél próbatestekkel történt. A próbatestekről egy terhelés során fényképek készülnek több terhelési pontban. A fényképek alapján körív illeszthető, amely által becsülhetővé válik a próbatest görbülete. A görbület visszaszámolható a mozgócsiga  $\Delta u$  elmozdulásából is, amennyiben azt a kötélnyúlással korrigáljuk. Úgy a próbatest görbületével, mint a mozgócsiga elmozdulásából számított hajlítómerevség kiváló egyezést mutatott a hárompontos hajlítóvizsgálat eredményeivel. A képlékeny tartományban végzett kísérleteknél jól megfigyelhető a képlékeny csukló kialakulása, illetve a Lüders-Hartmann vonalak keletkezése az oxidrétegen.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezt a kutató munkát az NKFIH támogatta a 134303 sz. pályázat keretein belül.

### HIVATKOZÁSOK

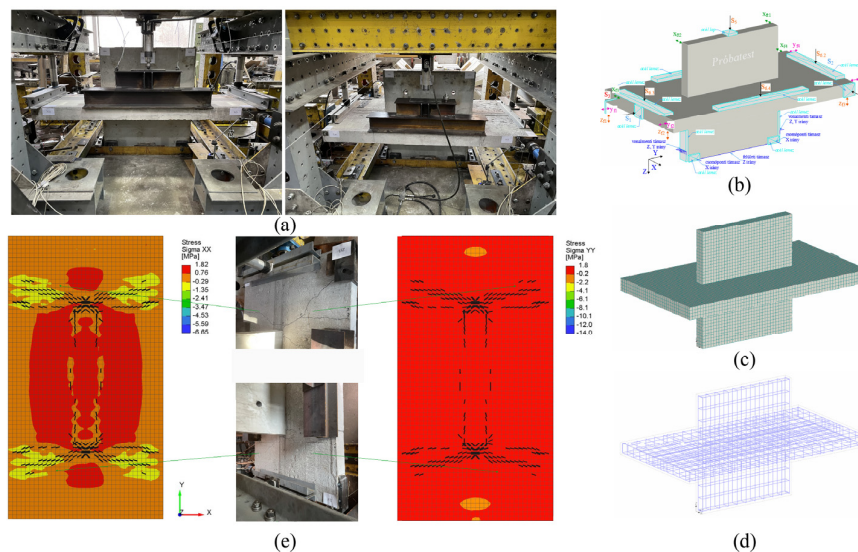
- [1] T.B. Zineb, A. Sedrakian, J.L. Billoet, An original pure bending device with large displacements and rotations for static and fatigue tests of composite structures, *Composites: Part B* 34:447-458, 2003.
- [2] T. Yu, J.A. Hanna, Exact and approximate mechanisms for pure bending of sheets, *Mechanism and Machine Theory* 149:103805, 2020.
- [3] A.B. Perduijn, S.M. Hoogenboom, The pure bending of sheet", *Journal of Materials Processing Technology* 51:274-295, 1995.

## KÜLÖNBÖZŐ MONOLIT VASBETON SZERKEZETI CSOMÓPONTOK NUMERIKUS ÉS LABORATÓRIUMI VIZSGÁLATA TÉRBELI CIKLIKUS TERHELÉSEL

Roszevák Zsolt<sup>1</sup> és Haris István<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>BME, Építőmérnöki Kar, Hidak és Szerkezetek Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3-9. Kmf. 85.  
roszevak.zsolt@emk.bme.hu, haris.istvan@emk.bme.hu

A vasbeton szerkezetek numerikus modellezésére napjainkban számos számítógépes szoftver áll rendelkezésünkre, azonban a programokkal előállított numerikus modellek pontossága csak megfelelően kidolgozott és verifikált modellezési eljárással lehet elfogadható. Kutatási programjaink során egy általunk felépített modellezési eljárással készített [1] numerikus modelleken keresztül mutatjuk be a vasbeton szerkezeti elemek és azok csomópontjainak numerikus modellezési lehetőségeit.



1. ábra. Monolit vasbeton fal-födém kapcsolatok laboratóriumi és numerikus vizsgálata térbeli ciklikus terheléssel (a) Laboratóriumi kísérlet, (b) Kísérleti elrendezés, (c) Végeselemes modell, (d) VEM modell betonacél kiosztás, (e) Numerikus vizsgálatok eredményei

A vizsgálataink során foglalkoztunk a kvázi-statisz egyirányú (függőleges és vízszintes), illetve a ciklikusan változó irányú és nagyságú terheléssel is. A numerikus modelleket kifejezetten a beton, illetve vasbeton szerkezetek vizsgálatához fejlesztett ATENA 3D háromdimenziós nemlineáris végeselemes szoftverrel készítettük el. A numerikus kísérletekkel kapott eredményeket számos esetben nemzetközi laboratóriumi kísérletek eredményeivel [2], [3], valamint saját laboratóriumi (1. ábra (a és b)) kísérlet sorozatunk eredményeivel hasonlítottuk össze. A kutatási programjaink során a vasbeton fal-födém kapcsolatok viselkedésének vizsgálatával is foglalkoztunk, melyeknél a ciklikusan változó irányú és nagyságú vízszintes hatások esetében a szerkezeti viselkedés leírása még inkább előtérbe kell kerüljön a monolit vasbeton fal-födém merevségi viszonyainak és viselkedésének részletes megismerése érdekében. Célunk egy általános, arányos és elcsavarodó merevítőrendszer egyedi elemének vizsgálata volt, egy fal-födém kapcsolat szerkezeti viselkedésének pontos leírása mind numerikus modellezéssel (1. ábra (c és d)), mind kiragadott szerkezeti kapcsolatok célzott laboratóriumi vizsgálatának elvégzésével. A laboratóriumi és numerikus kísérletek célja fal-födém kapcsolatok tényleges kialakításának és a kapcsolatokban elhelyezett betonacélok különböző vasvezetési módjának a teherbírásra, merevségre, repedésképre és alakváltozásokra (1. ábra (e)) gyakorolt hatásának újszerű tanulmányozása. Jelen cikk keretein belül átfogó képet szeretnénk adni az általunk elvégzett numerikus vizsgálatokról és az azokkal kapott eredményekről.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] Roszevák Zs., Haris I. (2019), „Finite element analysis of cast-in-situ RC frame corner joints under quasi static and cyclic loading”, *Revista de la Construcción*, 18: (3) pp. 579-594. (2019)
- [2] Pampanin S., Calvi G. M., Moratti M., Seismic Behaviour of R.C. Beam-Column Joints Designed for Gravity Loads, *12th European Conference on Earthquake Engineering*, 2002. Paper Reference 726
- [3] Giuseppe S., Angelo M., Finite Element Analysis of Experimental RC Wide Beam-Column Joints Provided with Different Detailing Solutions, *COMPDYN 2017, 6th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, M. Papadrakakis, M. Fragiakadis (eds.), Rhodes Island, Greece, 15-17 June 2017.



## KVÁZI-SEBESSÉGEK HATÉKONY MEGVÁLASZTÁSA NEMSIMA ÉS NEMLINEÁRIS DINAMIKAI RENDSZEREKBE

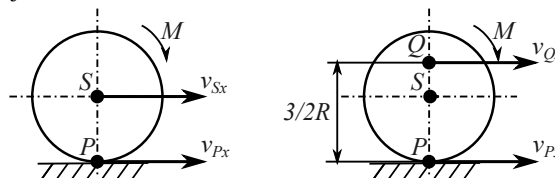
**Antali Máté**

Széchenyi István Egyetem, Alkalmazott Mechanika Tanszék  
9026 Győr, Egyetem tér 1.  
antali.mate@sze.hu

Merev testekből álló mechanikai rendszerek vizsgálatok fontos szempont a mozgást leíró változók hatékony megválasztása. Tegyük fel, hogy a rendszer geometriai állapotát (konfigurációját) a  $\mathbf{q} = (q_1 \dots q_n)$  általános koordinátákkal, a sebesség-állapotát pedig az  $\mathbf{u} = (u_1 \dots u_m)$  kvázi-sebességekkel írhatjuk le. A különféle analitikus módszerekkel a mozgásegyenletek rendszerint az

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{q}), \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}(\mathbf{q}) \mathbf{u} \quad (1)$$

alakba hozhatók, ahol  $\mathbf{M}$  a tömegmátrix,  $\mathbf{Q}$  az általános erők vektora,  $\mathbf{B}$  pedig a kinematikai összefüggéseket tartalmazza. Ha a rendszer viselkedését az általános erők egyes komponensei dominálják - például nemlineáris vagy nemsima hatások - akkor a kvázi-sebességek megválasztásakor egy fontos szempont lehet, hogy az (1) összefüggésben a tömegmátrix minél kevésbé „keverje szét” ezen tagokat az egyes sebesség-komponenseken. Ez az igény gyakran felmerül gördülő testeket tartalmazó problémáknál, mint például a kerékszitalás [1, 2] vagy a kosárlabda dinamikai modellje [3].



1. ábra. Kvázi-sebességek megválasztása csúszó korong esetén

Szemléltetésképpen tekintsük az 1 ábrán látható egyszerű síkbeli példát: Egy korong mozog egy rögzített egyenes felületen, száraz súrlódás jelenlétében. A korongot  $m$  tömeg és  $R$  sugár jellemzi. A  $g$  nehézségi erőter mellett a  $P$  pontban  $\mu$  tényezővel jellemzett Coulomb-súrlódás és egy  $M$  gyorsító nyomaték hat a testre. Ha csúszást feltételezünk, első próbálkozásra legyenek a kvázi-sebességek  $\mathbf{u} = (v_{Sx}, v_{Px})$  alakban az  $S$  súlypont és a  $P$  érintkezési pont sebességei. Ekkor a rendszer dinamikáját a

$$\dot{v}_{Sx} = -\mu g v_{Px} / |v_{Px}|, \quad \dot{v}_{Px} = -2M / (mR) - 3\mu g v_{Px} / |v_{Px}|, \quad (2)$$

differentiálegyenletek írják le. Egy másik, nem-triviális választás esetén legyen  $\mathbf{u} = (v_{Qx}, v_{Px})$ , ahol a  $Q$  pont a súlypont felett  $R/2$  magasságban elhelyezkedő pont. Ekkor a rendszer dinamikája

$$\dot{v}_{Qx} = M / (mR), \quad \dot{v}_{Px} = -2M / (mR) - 3\mu g v_{Px} / |v_{Px}| \quad (3)$$

alakú lesz. Fontos egyszerűsítésként jelentkezik, hogy a nem-folytonosságot tartalmazó tag csupán az egyik egyenletben jelenik meg. Valamint megmutatható, hogy a (3) egyenlet  $v_{Qx}$ -re levezett összefüggése *gördülési esetben* is érvényes marad.

Jelen előadásban arra keresünk választ, hogy a (1) általános esetben hogyan függ össze a kvázi-sebességek megválasztása a tömegmátrix szerkezetével, és hogyan eredményez a fenti példához hasonló tulajdonságokat. Az eredményeket példákon demonstráljuk. A probléma kapcsolódik a merevtest-rendszerek moduláris felépítéséhez is.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezt a kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alap támogatta, az NKFI-128422 számú projekt keretében.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] D. Takacs, G. Stepan, S.J. Hogan, Isolated large amplitude periodic motions of towed rigid wheels, *Nonlinear Dynamics* 52:27-34, 2008.
- [2] M. Antali, G. Stepan, On the nonsmooth dynamics of towed wheels, *Meccanica* 55:2523-2540, 2020
- [3] M. Antali, V. Havas, S.J. Hogan, G. Stepan, Nonlinear dynamics of a basketball rolling around the rim, *Nonlinear Dynamics* 104:3013-3037, 2021
- [4] R.M.M. Orsino, T.A. Hess-Coelho, A contribution on the modular modelling of multibody systems, *Proceedins of the Royal Society A* 471: 20150080, 2015

## MARÁSI FOLYAMATOK STABILITÁSVIZSGÁLATA A SZERSZÁM RADIÁLIS ÜTÉSÉNEK FIGYELEMBEVÉTELÉVEL

Hajdu Dávid<sup>1,2</sup> és Dombóvári Zoltán<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék

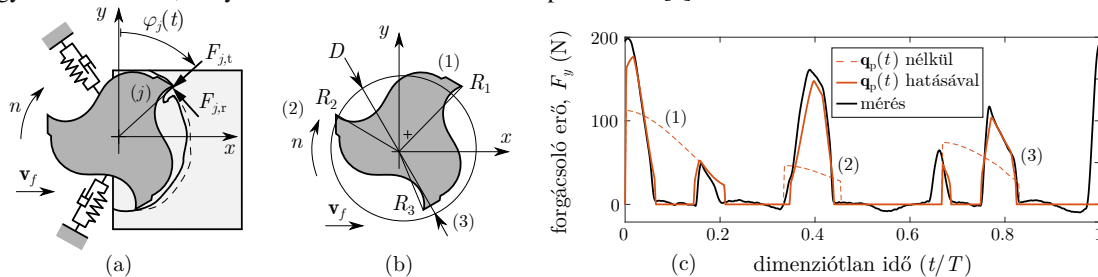
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

hajdu@mm.bme.hu, dombovari@mm.bme.hu

<sup>2</sup>MTA-BME Lendület Szerszámgéprezgések Kutatócsoport

1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

A szerszámgéprezgések jelensége egy olyan ismert ipari probléma, mely jelentősen befolyásolja a megmunkált felület minőségét, a szerszám élettartamát és a megmunkálási folyamat termelékenységét. Az erő- és öngerjesztett rezgések olyan nagy-amplitúdójú oszcillációkat eredményeznek, melynek hatására a szerszám idő előtt kiléphet a munkadarabból a megmunkálás során, megzavarva ezzel az ideális forgácsoló erő kialakulását. A szerszám (és szerszámtartó) pontatlan gyártásának és összeszerelésének következményeként a szerszáméleken kialakuló erő egyenetlenné válik, mely tovább erősíti az idő előtti kilépés hatását [1].



1. ábra. Marási folyamat modellje: (a) dinamikai modell; (b) radiális ütés figyelembevétele a szerszáméleken ( $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ); (c) számított és mért erőjelek (alumínium munkadarab, 37.5%-os egyenirányú marás)

Marási folyamatok mechanikai modelljét mutatja az 1a. ábra, ahol  $n$  (rpm) a fordulatszám,  $\varphi_j(t)$  a  $j$ -edik szerszámél szögpozíciója,  $v_f$  az előtolás, valamint  $F_{j,t}$ ,  $F_{j,r}$  a radiális és tangenciális forgácsoló erő komponensek. Az általános dinamikai modell mozgásegyenlete

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + [2\zeta_k \omega_{n,k}] \dot{\mathbf{q}}(t) + [\omega_{n,k}^2] \mathbf{q}(t) = \mathbf{U}^T \mathbf{F}(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t - \tau_{j,l})), \quad (1)$$

ahol  $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^d$  a modális koordináták vektora,  $\mathbf{U} = \text{col}(\mathbf{U}_k)$  a modális transzformációs mátrix ( $k = 1, \dots, d$ ),  $\zeta_k$  a relatív csillapítási tényező,  $\omega_{n,k}$  a csillapítatlan sajtkörfrekvencia,  $[\cdot]$  jelöli a diagonális mátrixokat, és  $\tau_{j,l}$  a szerszámélek közötti ún. regeneratív időkéésés [3]. Az  $\mathbf{F}$  forgácsolóerő a forgácsvastagságon keresztül függ a szerszám aktuális  $\mathbf{q}(t)$  és múltbeli  $\mathbf{q}(t - \tau_{j,l})$  állapotaitól (rezgéseitől) is, ami egy időkéésletetett rendszert eredményez. A mozgásegyenlet stabilitását a  $\mathbf{q}_p(t) = \mathbf{q}_p(t + T)$  periodikus megoldás ( $T = 60/n$ ) körül linearizált egyenlet Floquet-multiplikátorai (főmátrix sajátértékei) határozzák meg [2]. Stabil esetben a kis zavarások ellenére is a megoldás  $\mathbf{q}_p(t)$ -hez tart ( $T$ -periodikus marad), míg instabil esetben kialakul egy nagy-amplitúdójú kváziperiodikus rezgés. Utóbbi közvetlen következménye a rosszabb megmunkált felületi minőség.

A kutatás témája a radiális ütés állandósult állapotra gyakorolt hatásának vizsgálata és a stabilitási tulajdonságok előrejelzésének pontosítása. Az 1c. ábra szemlélteti a stabil periodikus megoldás megváltozásának hatását a forgácsoló erőre ( $F_y$ ). A klasszikus modellekkel ellentétben ( $\mathbf{q}_p(t)$  hatásának figyelmen kívül hagyásával) a pontosabb modellel ( $\mathbf{q}_p(t)$  pontos figyelembevételével) jelentős javulás érhető el az előrejelzésben.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A munkát a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal (NKFIH) PD-137673 valamint KKP-133846 pályázata támogatta.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] G. Totis, T. Insperger, M. Sortino, G. Stépán, Symmetry breaking in milling dynamics, *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 139:37-59, 2019.
- [2] T. Insperger, G. Stepan, *Semi-Discretization for Time-Delay Systems: Stability and Engineering Applications*, Springer, New York 2011.
- [3] Z. Dombóvári, A. Iglesias, T.G. Molnar, G. Habib, J. Munoa, R. Kuske, Experimental observations on unsafe zones in milling processes, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 377(2153): 20180125, 2019.



## MECHANIKA OKTATÁS A BME GPK NÉMET NYELVŰ KÉPZÉSÉBEN 1992-2023

Kovács Ádám<sup>1</sup> és Bende Margit<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> BME Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék  
1521 Budapest, Pf. 91.  
adamo@mm.bme.hu, margit.bende@gmail.com

A BME Gépészmérnöki Karán 1992 óta folyik a magyar hallgatók számára német nyelvű képzés, ami az 1-4. féléves mintatanterv szerinti kötelező tárgyakat érinti. A képzés a Karlsruher Institut für Technologie (KIT, 2009-ig Universität Karlsruhe) szakmai és – a kezdeti években – a német akadémiai csereszolgálat (DAAD) anyagi támogatásával valósult meg. Az első négy félév sikeres teljesítése után a hallgatók a képzés társegyletemén hallgatják az 5. féléves tárgyaikat.

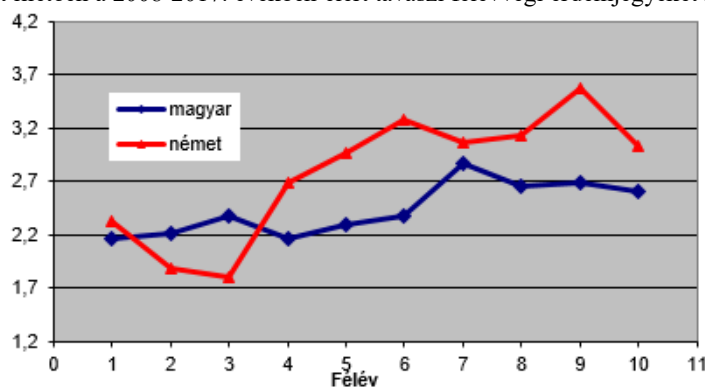
Tekintve, hogy az alapképzés mechanika tárgyai az 1-4. félévben kerülnek elő, a képzés kezdete óta eltelt idő alatt jelentős szakmai tapasztalatra tettünk szert a mechanika tárgyak súlyát, a hallgatói összetételét, a németországi félév hatását, és sok más, az oktatással szorosan összefüggő szempontot illetően.

A kétszintű mérnökképzés 2005-ös bevezetése előtt a tanrend a német rendszerhez illeszkedően, a magyar nyelvű képzéshez képest nagyobb óraszámú mechanika oktatást tett lehetővé. Ez különösen az első félévben volt jelentős, ahol a Technische Mechanik I. c. tárgyat heti 3 óra előadás és 2 óra gyakorlat kiméretben oktathattuk, szemben a magyar nyelvű képzésben előírt heti 1+1 órával. A négy félévben összesen heti 18 óra volt a mechanika, ami a kétszintű képzés bevezetését, egyúttal a német és magyar nyelvű kurzusok óra- és kredit számának összehangba hozása után heti 13 órára csökkent.

Noha jelenleg a magyar, az angol és a német nyelvű képzésben szereplő tantárgyak ugyanannak a tárgynak más nyelvű kurzusai, az oktatás módszertana, az órák hangulata és a hallgatói motiváció eltér a magyar ill. az angol nyelvű kurzusoktól. Ennek oka kettős: egyfelől ez jelenleg az egyetlen olyan képzés karunkon, amelyben a hallgatók az 1. félév elejétől kezdve együtt, ugyanabban a hallgatói csoportban vannak – hasonlóan egy középiskolai osztályhoz. A hallgatók így hamar összeismerkednek, közösséggé válnak, ami az oktató munkáját is megkönnyíti. A másik ok az 5. féléves Karlsruhe-i tanulás lehetősége. Kiutazni csak az tud, aki a mintatanterv szerint az összes kötelező tárgyat teljesíti, s tanulmányi átlaga is eléri a 3,5-es minimumot. Ez a 2010-es évekig a jobb teljesítmény eléréséhez jelentős hajtóerő volt.

További sajátosság, hogy a németországi, ezen belül különösen a KIT-en folyó mechanika oktatási minta részbeni átvétele. Az 1990-es években a DAAD jelentős pénzügyi támogatása nemcsak a magyar hallgatók kinti tanulását segítette, hanem német tankönyvek beszerzését, valamint a magyar oktatók számára 1-1 hónapos németországi tanulmányutakat is. A tankönyvek értelem szerűen a német oktatási rendszerhez igazodtak, a tanulmányi utak során pedig lehetőség volt megismerni a kinti tematikákat és oktatási technikákat is.

A mechanika tárgyakból elért félévi és a 4. félév végi Mechanika szigorlat átlageredménye jobb, mint a magyar nyelvű kurzusokon lévőké, noha a felvételi pontszámok átlaga nem haladja meg a többiekét. A Szilárdságtan c. tárgyat illetően a 2008-2017. években elért tavaszi félévvégi érdemjegyeket mutatja az 1. ábra.



1. ábra. Szilárdságtan félévi eredmények 2008-2017 közötti tavaszi félévekben

A sok pozitív körülmény ellenére a képzés nem tekinthető feltétlen sikertörténetnek. Ennek okai lehetnek a német (szakmai) nyelv angol melletti eljelentéktelenedése, egy németországi tanulmányi félév vonzó erejének csökkenése, a hallgatói minőség csökkenése, a megfelelő oktatói kar biztosításának nehézsége, és végül a pénzügyi támogatás megcsappanása.

Mindent egybevetve fontosnak tartjuk a képzés fenntartását, amely hozzájárul a BME GPK széles képzési palettájának fenntartásához, valamint a kiscsoportos oktatásban rejlő ismeretátadási lehetőségek megtartásához.

## MECHANIKAI ÉS TERMÉSZETI FORMÁK EREDETE ÉS FEJLŐDÉSE

Sipos András Árpád<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>BME Morfológia és Geometriai Modellezés Tanszék

<sup>2</sup>MTA-BME Morfodinamika Kutatócsoport

1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3. K220

siposa@eik.bme.hu

Az írott történelem előtti művészeti alkotások, például barlangrajzok, használati eszközökbe vésett ábrák és népművészeti emlékek tanúsítják, hogy a természetben megfigyelhető geometriai formák és mintázatok kezdetektől fogva mély érdeklődésre tartottak számot az emberek körében. A modern tudomány születése *matematikai eszköztárát* adott a formák tanulmányozásához és kiemelkedő írásokat inspirált a témában [1,2,3].

Az előadásban egyedi formákat létrehozó *mechanikai rendszereket* és *élettelen természeti folyamatokat* vizsgálók. Minden bemutatásra kerülő példában a matematikai modell egy *nemlineáris* közönséges, vagy parciális differenciálegyenlet rendszer alakjában adható meg. A természetben vagy kísérletekben megfigyelhető formák ezen egyenletrendszer adott kezdeti- és/vagy peremfeltételek mellett számított, *stabil* megoldásaival állnak kapcsolatban, ezért hangsúlyt kap a megoldás stabilitásának vizsgálata.

A *mérnöki mechanika* területén rámutatok arra, hogy egy vékony, befogott konzolként leírható puha robotkar maximális kinyúlását a kifordulás ugyan érdemi mértékben korlátozza, de a rúd kezdeti görbületének megfelelő szabályozásával a karral végével elérhető távolság érdemben növelhető [4]. A vékony filmek ráncosodásával foglalkozó rész egyszerű mechanikai rendszerben mutat példát a geometriai mintázat megjelenésére és eltűnésére. Az előfeszített filmek kísérleti viselkedését Kármán Tódor *nagy lehajlású, vékony lemezek elméletének* véges nyúlásokra kiterjesztett modelljének ortotrop általánosításával magyarázza. A teljes ráncosodási folyamatot egy új, *pszeudoelasztikus* modell írja le [5]. Ezután az anyagi nemlinearitás formát meghatározó szerepére mutatok rá. A mérnöki mechanika klasszikus problémáját, a félgömbkupolák repedési mintázatának kialakulását egyszerű, determinisztikus megközelítéssel vizsgálom [6], továbbá igazolom, hogy állandó vastagságú, önsúlyával terhelt, szimmetrikus csúcsívben legfeljebb hét darab csukló alakulhat ki [7].

A mechanika területén jól ismert, hogy egyes jelenségek a fizikai folyamat részletes beépítése nélkül, fenomenológiai magyarázattal is prediktív módon modellezhetőek. A formák és mintázatok kialakulásának és fejlődésének vizsgálatában természetes módon adódik, hogy geometriai megközelítéssel éljünk. A *természeti morfológia* vizsgálatát a görbület-vezérelt kopásnak kitett síma, konvex görbék görbületi szélsőértékeinek monoton csökkenését kimondó tétel vezeti be. Ezt követően egy, a növekedést, az ütközéses kopást és a súrlódást tartalmazó modell magyarázza a telített tengervízben képződő, ún. *oidid részecskék* alakfejlődését és szimmetriáját [8]. A kollektív alakfejlődés területén jól ismert, hogy a kavicspopulációk méret és alak szerint elkülönültek, azonban a kopás szerepe az elkülönülésben prediktív elmélet hiányában nem tisztázott. Az előadás utolsó vizsgálata rámutat arra, hogy az egy részecske szintjén determinisztikus modellek szükségszerűen részlegesek, a kollektív alakfejlődés megértéséhez valószínűségi alapvetés szükséges [9]. A tömegeloszlás időfejlődését leíró, determinisztikus *Fokker-Planck egyenlet* megoldása után igazolom, hogy a modell környezeti paraméterének létezik kritikus értéke, amely a kollektív fejlődés fókuszáló és szétszóró tartományait választja el.

A bemutatott mechanikai modellek a karcsú szerkezetek gazdag ipari alkalmazása miatt gyakorlati jelentőségűek, akár a posztkritikus tartomány elkerülése (pl.: ráncosodás kizárása úrkutatási alkalmazásokban), vagy ellenkezőleg, a posztkritikus stabil megoldások elérése a cél (pl.: robotkarok alakja). A természeti formák elemzése rámutat arra, hogy megfelelő matematikai modell alkalmazása esetén a forma pusztá megfigyelésével következtetni lehet az azt létrehozó fizikai folyamatra.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatást az NKFIH 128584, 134199 és 143175 pályázatai támogatták.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] D.W. Thompson, *On Growth and Form*, The Complete Revised Edition, Dover Publications, NY, 1942.
- [2] R. Hoyle, *Pattern Formation*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [3] P. Ball, *Patterns in Nature: Why the Natural World Looks the Way It Does*, University of Chicago Press, IL, 2016.
- [4] A.A. Sipos, P.L. Várkonyi, The longest soft robotic arm, *Int. J. Nonlin. Mech.* 119: 103354, 2020.
- [5] E. Fehér, T.J. Healey, A.A. Sipos, The Mullins effect in the wrinkling behaviour of highly stretched thin films, *J. Mech. Phys. Solids* 119:417- 427, 2018.
- [6] S. Michel, A. A. Sipos, Fragmentation of inflated elastic brittle rings: emergence of the quasi equidistant spacing of cracks, submitted to the *J. Mech. Phys. Solids*.
- [7] A.A. Sipos, About the number of hinges at failure of semicircular and pointed masonry arches, submitted to the *Math. & Mech. Solids*.
- [8] A.A. Sipos, G. Domokos, D.J. Jerolmack, Shape evolution of ooids: a geometric model, *Sci. Rep.* 8:1758, 2018.
- [9] A.A. Sipos, G. Domokos, J. Török, Particle size dynamics in abrading pebble populations, *Earth Surf. Dyn.* 9:935-251, 2021.

## MECHANIKAI RENDSZEREK TRAJEKTÓRIAKÖVETŐ SZABÁLYOZÁSA VARIÁCIÓSZÁMÍTÁSI MÓDSZEREKKEL

**Bodor Bálint<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>BME, Műszaki Mechanikai Tanszék  
ELKH-BME Gépek Dinamikája Kutatócsoport  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.  
bodor@mm.bme.hu

**Bencsik László<sup>2</sup>**

<sup>2</sup>BME, Műszaki Mechanikai Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.  
bencsik@mm.bme.hu

Ebben a tanulmányban alulaktuált mechanikai rendszerek trajektóriakövető szabályozásával foglalkozunk. Ilyen rendszereknél az inverz dinamikai szabályozási módszerek gyakran okozhatnak instabilitási problémákat [1], emiatt egy korábbi munkánk során [2] már javasoltunk egy lineáris optimális irányításon alapuló módszert. Jelen munkában egy variációszámításra épülő, iteratív megoldást adunk a problémára, amellyel lehetséges nagyobb pontosságú szabályozó megvalósítása.

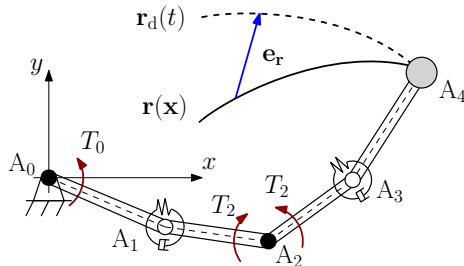
A vizsgált flexibilis manipulátor mechanikai modellje az 1. ábrán látható. A bemenetek az  $A_0$ ,  $A_2$  csuklókban lévő aktuátorok által kifejtett  $T_0$  és  $T_2$  nyomatékok. Az  $A_1$  és  $A_3$  csuklók passzívák. A végberendezés az  $A_4$  pontban található, ennek előírt trajektóriája  $\mathbf{r}_d(t)$ . A célunk az  $\mathbf{x}(t)$  állapotváltozók és az  $\mathbf{u}(t)$  bemenetek megválasztása olyan módon, hogy a

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_s}^{t_f} (\mathbf{e}^\top \mathbf{W}_e \mathbf{e} + \mathbf{u}^\top \mathbf{W}_u \mathbf{u}) dt \quad (1)$$

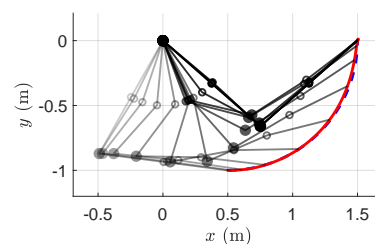
hatásfüggvény minimális legyen. Itt a hiba  $\mathbf{e}^\top = [\mathbf{e}_r^\top \ \dot{\mathbf{e}}_r^\top]$  vektora a pozíciók és a sebességek szintjén van definiálva, a  $\mathbf{W}_e$  és  $\mathbf{W}_u$  mátrixok pedig a tagok súlyozására szolgálnak. A  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \mathbf{H}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$  egyenlet definiálja az állapotteret modellt. Az  $\mathbf{y}^\top = [\mathbf{x}^\top \ \mathbf{u}^\top]$  változó bevezetésével egy iteráció állítható fel, ami a  $J(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  funkcionál másodrendű közelítésének minimalizálásán alapul. A  $k$ -adik közelítésben ez a

$$J(\mathbf{y}_k + \Delta \mathbf{y}_k) \approx J(\mathbf{y}_k) + \delta J|_{\mathbf{y}_k} \langle \Delta \mathbf{y}_k \rangle + \delta^2 J|_{\mathbf{y}_k} \langle \Delta \mathbf{y}_k \rangle, \quad (2)$$

alakot ölti, ahol  $\delta J|_{\mathbf{y}_k} \langle \Delta \mathbf{y}_k \rangle$  az első-, míg  $\delta^2 J|_{\mathbf{y}_k} \langle \Delta \mathbf{y}_k \rangle$  a második variáció. Ennek minimalizálása egy általánosított, véges időhorizontú, időfüggő LQR probléma megoldását igényli. Egy megfelelő  $\mathbf{x}_0(t)$ ,  $\mathbf{u}_0(t)$  kezdeti feltétel választásával, az  $\mathbf{y}_{k+1}(t) = \mathbf{y}_k(t) + \Delta \mathbf{y}_k(t)$  iteráció konvergál a rendszer optimális mozgásához.



1. ábra. Flexibilis manipulátor modellje



2. ábra. A mozgás stroboszkópikus nézete

A javasolt algoritmust sikeresen alkalmaztuk a flexibilis manipulátorra. A kiadódó trajektóriát, illetve a mozgás stroboszkópikus megjelenítését 2. ábra mutatja. A módszer előnyös, mivel más optimális irányítási módszerekhez képest a számítási igénye kisebb. Ez annak köszönhető, hogy az iteráció a funkcionál alapján közvetlenül van definiálva, a numerikus megoldáshoz szükséges diskretizációt pedig csak ezután végezzük el, ami egyszerű, kis számítási igényű feladatokra vezet.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] W. Blajer., K. Kołodziejczyk.: *A case study of inverse dynamics control of manipulators with passive joints*. Journal Of Theoretical And Applied Mechanics, 52(3), pages 793-801, 2014.
- [2] B. Bodor., A. Zelei., L. Bencsik.: *Predictive trajectory tracking algorithm of underactuated systems based on the calculus of variations*. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, August 2021; 16(8): 081002., 2021.
- [3] G. Bastos., O. Brüls.: *Analysis of Open-Loop Control Design and Parallel Computation for Underactuated Manipulators*. Acta Mech., 231(6), pages 2439-2456, 2020.

## MENETES KÖTÉS ELŐFESZÍTÉSÉNEK HATÁSA A MODÁLIS CSILLAPÍTÁSRA

Magyar Bálint<sup>1</sup>, Csernák Gábor<sup>2</sup>, Zana Roland<sup>3</sup>,

Wohlfart Richárd<sup>4</sup>, Miklós Ákos<sup>5</sup>, Hénapp Gábor<sup>6</sup> és Stépán Gábor<sup>7</sup>

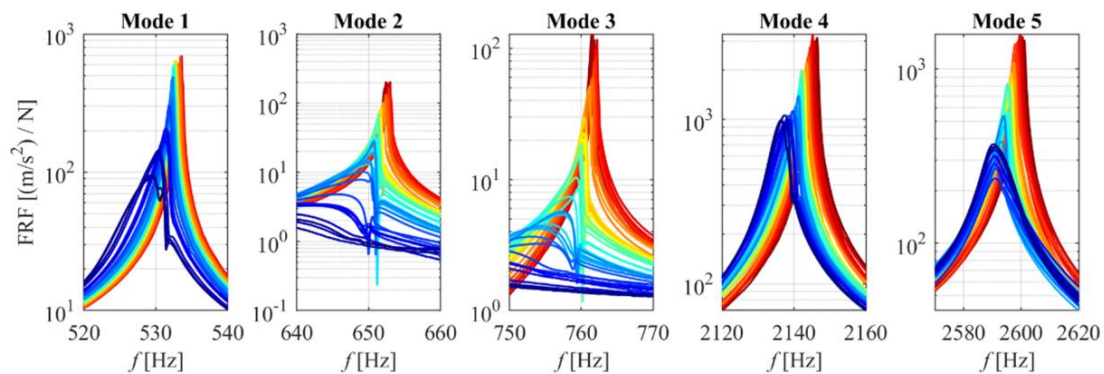
<sup>1,2,3,4,5,6,7</sup> Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.

magyar@mm.bme.hu, csernak@mm.bme.hu, zana\_r@mm.bme.hu,

wohl@mm.bme.hu, miklosa@mm.bme.hu, henapp@mm.bme.hu, stepan@mm.bme.hu

A rezgések végelesemes modellezésének területén óriási szükség van a kontaktmerek és kontaktcsillapítások előrejelzésére, mivel ezek a paraméterek alapvetően befolyásolják a több alkatrészből összeszerelt mechanikai rendszerek modális tulajdonságait. Ezért a pontos kontaktmodellek hiánya komoly problémát okoz azoknál a végelesemes modelleknél, amelyeket nem validáltak mérésekkel.

Jelen tanulmány a menetes kötés előfeszítésének hatását vizsgálja egy egyszerű, két rozsdamentes acél alkatrészből álló, nagyon alacsony anyagi csillapítású mechanikai szerkezet frekvenciaátviteli függvényeire, ahol a mechanikai kapcsolatot az előfeszített menetes kötés biztosítja. Impulzusgerjesztéses méréseket végeztünk a szerkezeten számos meghúzási nyomaték mellett. A szétszedést és összeszerelést minden szabadrezgési mérés előtt elvégeztük, és a meghúzási nyomatékot egy nyúlásmérő bélyegekkel felszerelt nyomatékulccsal mértük, amely egy adatgyűjtő rendszerhez volt csatlakoztatva. Az egyes előfeszített állapotokhoz tartozó sajátfrekvenciákat és relatív csillapításokat többféle kiértékelési módszerrel is meghatároztuk. A mérési eredmények szerint a csavar előfeszítése más mértékű hatást gyakorolt az egyes lengésképekre. A szerkezet végelesemes modális analízise és a kísérleti eredmények összevetése azt mutatta, hogy jól azonosítható összefüggés van a kontaktfelületen kialakuló alakváltozási energiasűrűség és az eredményezett csillapítás növekedése között.



1. ábra. A frekvenciaátviteli függvény grafikonja az első öt sajátfrekvencia közelében; az egyes színek más és más meghúzási nyomatékhoz tartoznak.

Azokban az esetekben, amikor a semleges felület – azaz azon pontok halmaza, amelyeken nem történik mechanikai deformáció – a kontaktfelületen vagy annak közelében helyezkedik el, a modális csillapítás csak kis mértékben változik. Ezen túlmenően kvantitatív kapcsolatokat állapítottunk meg a kontaktcsillapítás, az alakváltozási energiasűrűség, és a kontaktfelület előfeszítése között.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezt a kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alap támogatta, az NKFI-KKP-133846 számú projekt keretében.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] B. J. Lazan, Damping of materials and members in structural mechanics, Oxford: Pergamon Press, 1968.
- [2] C. W. de Silva, Vibration damping, control and design, CRC Press, 2007.
- [3] D. Takacs, R. Wohlfart, A. Miklos, G. Krajnyak, A. Tóth, G. Stepan, Measurement of the modal parameters of rotating spindles by ball shooting impact excitation, 8th CIRP Conference on High Performance Cutting, 2018.
- [4] S. Berezhvá, A. Kossa, D. Bachrathy, G. Stepan, Numerical and experimental investigation of the applicability of pellet impacts for impulse excitation, International journal of impact engineering 115: 19-31, 2018.
- [5] B. Magyar, R. Zana, R. Wohlfahrt, G. Csernak, G. Stepan, Measuring modal damping of a multibody system with dry friction, 24th International Congress on Sound and Vibration, 2017.
- [6] B. Magyar, B. Pere, G. Csernak, R. Zana, R. Wohlfahrt, G. Stepan, Quantitative characterization of the effect of bolt pretension on modal properties, Journal of Sound and Vibration 484:115544, 2020.

## MIÉRT JÓ A REDUKÁLT VEKTORKETTŐS FOGALMÁT BEVEZETNI A MECHANIKA OKTATÁSBAN?

**Bende Margit**

BME Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék  
1521 Budapest, Pf. 91.  
margit@mm.bme.hu

Az előadás a két évvel ezelőtti MOHR szekcióban elhangzott, *Indokolt-e bevezetni az alapmechanika oktatásában a redukált vektorkettős fogalmát?* címen bemutatott téma folytatása. Akkor áttekintettük, hogy mire használható az alapmechanikában (Statika, Dinamika) a redukált vektorkettősnek nevezett geometriai-algebrai struktúra. Megállapítottuk, hogy a mechanika alaptárgyainak oktatása megoldható a redukált vektorkettős fogalmának teljes mellőzésével is.

Igaz azonban az, hogy minden didaktikai elem, ami szemléletes, strukturált és rendszerező látásmódú, ami egy-egy konkrét ismeretet tágabb összefüggésbe helyez, az szilárdabb tudást, nagyobb rálátást ad, és végül növelheti az alkalmazási képességet.

Nemcsak az alapmechanikai fogalmak esetében lehet hasznos a redukált vektorkettős bevezetése, hanem a robotok, robotmechanizmusok elméletében és gyakorlatában is használják.

Jelen előadás célja kettős: egyrészt a redukált vektorkettős robotok, robotmechanizmusok területén való felhasználására mutat példákat. Másrészt visszatérünk az alapmechanikai alkalmazásokra is, mert éppen a redukált vektorkettős érintőleges tárgyalása miatt alapfogalmi pontatlanságok tapasztalhatók a hallgatók szóhasználatában.

## NYERGES VONTATÓ PÁLYAKÖVETŐ TOLATÁSA KÖRÍV MENTÉN

Mihályi Levente<sup>1</sup> és Takács Dénes<sup>1,2</sup>

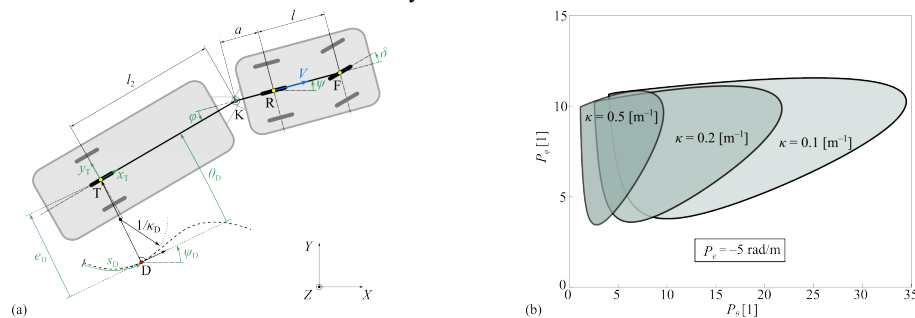
<sup>1</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék

<sup>2</sup>ELKH-BME Gépek Dinamikája Kutatócsoport, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

mihalyi@mm.bme.hu, takacs@mm.bme.hu

A járműiparban a legtöbb gyártó nagy hangsúlyt fektet vezetéstámogató és önvezető funkciók fejlesztésére. Ezek a funkciók a személygépjárművekben lassan teljesen szokványossá válnak, és már a teherszállítmányozás területén is megjelentek különböző vezetéstámogató rendszerek [1]. Az önvezetés magasabb szinten történő alkalmazása jelentős előnyökkel járna mind biztonsági-, mind gazdasági szempontból, ez különösen igaz a tehergépjárművekre. Egy tehergépjárműű sofőrje munkaidejét leginkább autópályán való haladással, illetve telephelyen belüli manőverezéssel – és várakozással – tölti. Így tehát elengedhetetlen az olykor rendkívül bonyolultnak számító rakodórampára történő tolatás [2]. Viszont ha a telephelyeken megoldható ezen műveletek elvégzése önvezető módon, akkor ezzel gyorsítható a rakodás és csökkenthető a rakodás közbeni balesetek száma. Munkánk során egy szabályozási algoritmus tervezése és tesztelése a cél, amely alkalmas nyerges vontatók körív mentén való tolatásának stabilizálására. A vizsgálat során a görbület stabilitásra gyakorolt hatásán kívül hangsúlyt fektetünk a szabályozási körben fellépő időkézésre is.

A járműszerelvény kinematikai, merev kerekes modelljét az 1(a). ábra mutatja. Fekete szaggatott vonal jelöli a kívánt pályát, amin a vontatmány tengelyét szeretnénk végigküzdeni egy általános pályakövető feladat során. Azonban egyelőre feltételezzük, hogy a pálya görbülete állandó, azaz a követendő ív körív. A mozgásegyenletek az anholonom kényszerekből származtathatók, melyek aztán a pálya kísérő triéderébe transzformálhatók annak érdekében, hogy a pályakövetés leírható legyen. A szabályozási feladat két részfeladatra osztható: az egyik felelős az előírt pályáiv követéséért, a másik pedig a tolatás stabilizálásáért. Utóbbit egy arányos tagokat tartalmazó állapotviszacsatolásos szabályozóval valósítjuk meg, mely esetén vizsgáljuk a szabályozási körben fellépő  $\tau$  időkézés hatását is. A modellben figyelembevételre kerül a kormány szerkezet dinamikája is a hozzá tartozó alacsony szintű szabályozással együtt. Az 1(b). ábrán egy stabilitástérkép látható a szöghibához ( $P_\Theta$ ) és a vontató–vontatmány közti relatív szöghöz tartozó erősítési tényezők ( $P_\psi$ ) síkjában, miközben az oldallirányú eltéréshez tartozó erősítési tényező ( $P_e$ ) értéke rögzített. A grafikonon az előírt pálya  $\kappa_D$  görbületének hatása látható, ahol a színes területek jelölik a stabil tartományt három különböző görbület esetén. Ezek alapján a görbületnek igen nagy szerepe van a szabályozóparaméterek megválasztásakor, emiatt valószínűsíthető, hogy egy általános pályakövető manőver végrehajtása során (amikor a görbület értéke nem állandó) adaptív erősítési tényezőket kell alkalmaznunk ahelyett, hogy univerzális értékekkel üzemeltetnénk a szabályozót.



1. ábra. (a) A járműszerelvény mechanikai modellje. (b) A pályagörbület stabilitásra vett hatását bemutató stabilitástérkép ( $V = -3$  m/s,  $a = -0.8$  m,  $l = 3.5$  m,  $l_2 = 10$  m,  $\tau = 0.1$  s)

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs hivatal NKFI-128422 számú pályázata támogatta.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] J. I. Roh, H. Lee, W. Chung, Control of a car with a trailer using the Driver Assistance System, *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics* pp. 2890-2895, 2011, <https://doi.org/10.1109/ROBIO.2011.6181744>
- [2] M. Werling, P. Reinisch, M. Heidingsfeld, K. Gresser, Reversing the General One-Trailer System: Asymptotic Curvature Stabilization and Path Tracking, *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions* 15:627-636, 2014, <https://doi.org/10.1109/TITS.2013.2285602>
- [3] W. Qin, Y. Zhang, D. Takács, G. Stépán, G. Orosz, Nonholonomic dynamics and control of road vehicles: moving toward automation *Nonlinear Dynamics* 110:1959–2004, 2022, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2108.02230>.



## ÖNGYÓGYÍTÓ SZUPERRUGALMAS BIOANYAGOK MECHANIKAI MODELLEZÉSE

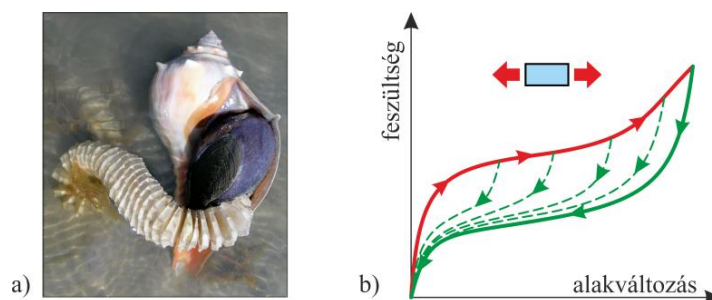
Kossa Attila

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.  
kossa@mm.bme.hu

Az evolúció során a természet különböző rendszerei lenyűgöző tulajdonságokkal rendelkező anyagokat fejlesztettek ki, amelyek inspirációt nyújtanak az olyan újszerű szintetikus anyagok fejlesztéséhez, amiket az emberi technológia sikeresen felhasználhat különböző alkalmazásokban. Az ilyen természetes anyagok tanulmányozása és az ezekből nyert ismeretek alkalmazása lehetővé teszi az új anyagok tervezését és előállítását. A biológiai rendszerek, például növények és állatok, kiváló példák olyan anyagokra, amelyek különleges tulajdonságokkal rendelkeznek. A természetben megfigyelhető megoldások utánzásával olyan szerkezeti kialakítású anyagokat tervezhetünk, amelyek a természetben már sikeresen bizonyították alkalmasságukat. Ezen célokhoz elengedhetetlen, hogy a megfigyelt jelenségeket pontosan le is tudjuk írni. A mechanikai viselkedés modellezésében ezt azt jelenti, hogy pontos konstitutív modellt kell alkotnunk, amivel kapcsolatot teremthetünk a deformáció és az alpanyagban ébredő feszültségi állapot között.

Jelen tanulmány elsősorban a kúrtcsigák (*whelk*) tojástartó kapszuláinak (*egg capsule*) mechanikai viselkedésének leírásával foglalkozik. Példaképpen az 1.a ábra mutat egy kúrtcsigát a tojástartó kapszulákkal együtt. Ezen kapszulák egyik feladata, hogy védelmet biztosítsanak a környezeti hatásokkal szemben [1]. A kutatók megfigyelték, hogy ennek a fehérje alapú bioanyagnak az egytengelyű húzása majd tehermentesítése során az alakemlékező fémeknél megfigyelhető hiszterézis jellegű jelenség tapasztalható az anyagban kialakuló fázisátalakulásoknak köszönhetően [2,3]. Ezt a jelenséget az 1.b ábra szemlélteti, ahol a piros görbe mutatja a feszültség-alakváltozás kapcsolatot a felterhelés során, míg zöld görbével jelöltük a tehermentesítési szakaszt. A szaggatott zöld görbék azon eseteket jelentik, amikor a tehermentesítést kisebb alakváltozás értéknél alkalmazzuk. Fontos kihangsúlyozni, hogy kapszula anyaga egyben öngyógyító viselkedéssel is rendelkezik, hiszen egy tehermentesítési fázist követően a mechanikai tulajdonságok egy újbóli terhelés során megegyeznek az előző ciklusban érvényes mechanikai tulajdonságokkal. Az 1.b ábrát felhasználva ez azt jelenti, hogy a felterhelés során mindig a piros görbe szerinti mechanikai viselkedést kapjuk.

Ezen természetes bioanyagok mechanikai viselkedésében megfigyelhető összetett jelenségek leírására alkalmas általános konstitutív egyenletet még nem javasolt a szakirodalom. Jelen kutatási projekt egyik célja olyan konstitutív modellek fejlesztése, amikkel az itt megfigyelhető nemlineáris jelenségeket képesek vagyunk leírni. Az előadás ehhez a célhoz kapcsolódó új tudományos eredményeket mutat be.



1. ábra. a) Fénykép egy kúrtcsigáról a tojástartó kapszulával együtt. b) Egytengelyű húzás és tehermentesítés során megfigyelhető mechanikai viselkedés illusztrálása.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Jelen kutatás a Kulturális és Innovációs Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával valósult meg. Pályázati azonosító: FK 142457.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] H. Ehrlich, *Marine Biological Materials of Invertebrate Origin*, Springer, 2019.
- [2] H.S. Rapoport, R.E. Shadwick, *Mechanical Characterization of an Unusual Elastic Biomaterial from the Egg Capsules of Marine Snails (Busycon spp.)*, *Biomacromolecules* 3, 42-50, 2002.
- [3] A. Miserez, S.S. Wasiko, C.F. Carpenter, J.H. Waite, *Non-entropic and reversible long-range deformation of an encapsulating bioelastomer*, *Nature Materials* 8, 910-916, 2009.



## ÖNVEZETÉS JÁRMŰVEK KÖZÖTTI KOMMUNIKÁCIÓS ADATOKON TANÍTOTT NEURÁLIS HÁLÓZAT SEGÍTSÉGÉVEL

Takács Dénes<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék, Budapest

<sup>2</sup>ELKH-BME Gépek Dinamikája Kutatócsoport

takacs@mm.bme.hu

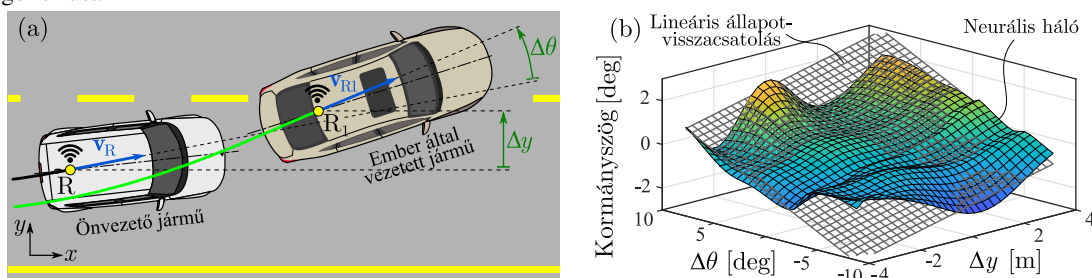
Avedisov Sergei S.<sup>3</sup>, He Chaozhe R.<sup>3</sup>, Orosz Gábor<sup>3</sup>

<sup>3</sup>University of Michigan, Department of Mechanical Engineering, Ann Arbor, Michigan, USA

avediska@umich.edu, hchaozhe@umich.edu, orosz@umich.edu

Az önvezetés megvalósítása az autóiipar egyik legbonyolultabb kihívása. A mérnökök komplex problémákkal néznek szembe [1], melyek biztonság szempontjából mind kritikus feladatok. A jármű lokalizációjában és a környezetben jelenlévő akadályok detektálásában a különböző szenzorok jeleinek fúziója jelenti a problémát, amely rossz látási viszonyok között méginkább kiélezett feladat. A rendelkezésre álló információk alapján a jármű mozgásának tervezésénél, az optimális pálya generálásánál, az emberi intelligenciát és intuíciót utánzó döntéshozatali algoritmusok megteremtése nehéz. Végezetül pedig a jármű mozgásszabályozása során a szabályozási hurokban megjelenő jelentős (0.2–0.8 sec) időkéscés okozta stabilitási problémák leküzdése jelent komoly mérnöki kihívást [2].

Ebben a cikkben olyan vezetői situációkra összpontosítunk, ahol az előttünk haladó jármű követése megoldást kínálhat a fent említett összes problémára [3]. Kihhasználva járművek közötti (V2V) kommunikációt, az önvezető jármű számára létrehozunk egy időkéscéssel szemben toleráns, az emberi vezetést utánzó pályakövető szabályozó algoritmust.



1. ábra. (a) Jármű-jármű kommunikáción alapuló önvezetés. (b) A gépi tanulással identifikált szabályozási törvényt összehasonlítása lineáris állapotvisszacsatolással.

Kutatásunkban, kettő ember által vezetett személygépjármű kommunikációs adatait (GPS pozíció és sebesség) gyűjtöttük össze, miközben a hátul haladó jármű az előtte haladó pályáját követte (ld. 1(a). ábra). Ezzel szinkronizálva rögzítettük a követő jármű kormányzószögét, azaz az emberi vezető beavatkozását a jármű oldalirányú irányításában. Az így kapott adathalmazon, egy neurális hálózatot tanítottunk, hogy a járművek közötti kommunikáció által rendelkezésre álló oldalirányú eltérés ( $\Delta y$ ) és legyezési szög különbség ( $\Delta \theta$ ) alapján meghatározza a követő jármű megkívánt kormányzószögét.

Az eredményül kapott szabályozási törvényt (ld. 1(b). ábra) összehasonlítottuk a tradicionális lineáris állapotvisszacsatolással. Utóbbi analitikus vizsgálatával igazoltuk a neurális hálózat lineáris stabilitását. Szimulációk segítségével elemeztük a szabályozási hurokban megjelenő időkéscéssel szembeni toleranciát.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs hivatal NKFI-128422 számú pályázata támogatta.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] J. Guanetti, Y. Kim, F. Borrelli, Control of connected and automated vehicles: State of the art and future challenges, *Annu. Rev. Control*, 45:18-40, 2018.
- [2] S. Beregi, S. S. Avedisov, C. R. He, D. Takács, G. Orosz, Connectivity-Based Delay-Tolerant Control of Automated Vehicles: Theory and Experiments, *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles* 8(1):275-289, 2023.
- [3] S. S. Avedisov, C. R. He, D. Takács, G. Orosz, Machine learning-based steering control for automated vehicles utilizing V2X communication, *IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*, pp. 253-258, 2021.

# ÖNVEZETŐ ELEKTROMOS KÉTKERESKŰ JÁRMŰ EGYENSÚLYOZÁSA

Horváth Hanna Zsófia<sup>1</sup>

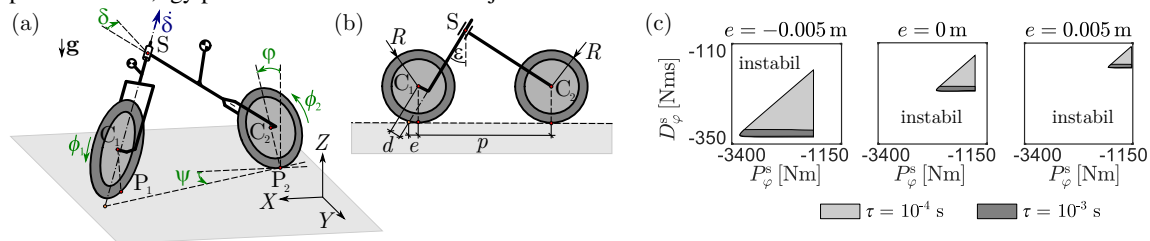
<sup>1</sup> Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.  
hanna.horvath@mm.bme.hu

Takács Dénes<sup>2</sup>

<sup>2</sup>ELKH-BME Gépek Dinamikája Kutatócsoport  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.  
takacs@mm.bme.hu

A járműdinamika területén számos jelenség a járművek oldalirányú stabilitásával áll kapcsolatban. A téma régóta kutatott terület, azonban a vontatott kerekek szitálása (az ún. „shimmy” jelensége), a motorbiciklik imbolygó mozgása, a vontatmányok kigyózása és a bőröndök pattogása a mai napig érdeklődés tárgyát képezik tudományos körökben. Az önvezető járművek fejlesztése pedig olyan új kutatási irányokat jelöl ki, melyek szorosan kapcsolódnak ezekhez a területekhez.

Jelen kutatásban önvezető kétkereskű járművek, pl. motorbiciklik álló helyzetben való egyensúlyozásának lehetőségeit, a stabilitás szempontjából kritikus paramétertartományokat vizsgáljuk. A szakirodalomban megtalálható Whipple-modellt [Whipple, 1899] alapul véve alkottuk meg a kétkereskű jármű térbeli mechanikai modelljét (ld. az 1(a). ábrát), majd a geometriai és kinematikai kényszereket figyelembevéve levezettük a nem-lineáris mozgásegyenleteket a Kane-egyenletek [Kane, 1985] segítségével. Az 1(b). ábra a fontosabb geometriai paramétereket, így például az  $e$  utánfutást mutatja.



1. ábra. (a) Motorbicikli mechanikai modellje, (b) fontosabb geometriai paraméterek oldalnézetben, (c) stabilitási térképek negatív, nulla és pozitív utánfutás esetén.

A linearizált mozgásegyenletek az  $M\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{Q}$  alakban írhatóak fel, ahol  $M$  a tömegmátrix,  $\mathbf{K}$  a merevségi mátrix,  $\mathbf{x} = [\varphi \ \delta]^T$  az állapotváltozók vektora,  $\varphi$  az ún. oldaldőlési szög,  $\delta$  a kormányaszög,  $\mathbf{Q} = [0 \ M^s]^T$  és  $M^s$  a belső kormánynyomaték. A függőleges helyzetben való egyensúlyozás biztosításához egy lineáris, teljes állapotvisszacsatolást tartalmazó kormány szabályozó algoritmust alkalmazhatunk, figyelembevéve a szabályozó körben fellépő  $\tau$  időkést:

$$M^s = -P_\varphi^s \varphi(t - \tau) - P_\delta^s \delta(t - \tau) - D_\varphi^s \dot{\varphi}(t - \tau) - D_\delta^s \dot{\delta}(t - \tau), \quad (1)$$

ahol  $P_\varphi^s$ ,  $P_\delta^s$ ,  $D_\varphi^s$  és  $D_\delta^s$  az erősítési tényezők. Az időkést figyelembevéve ( $\tau > 0$ ), a lineáris stabilitási térképek pl. a szemi-diszkretizáció [Insperger, 2011] módszerével rajzolhatóak fel, amennyiben két erősítési tényező ( $P_\delta^s$ ,  $D_\delta^s$ ) és a geometriai paraméterek értékét rögzítjük [Szabo, 2021]. Az 1(c). ábrán szürkével a lineárisan stabil területek láthatóak negatív, nulla és pozitív utánfutás esetén. A vizsgálat alapján elmondható, hogy az egyensúlyozási feladat szempontjából a negatív utánfutás előnyös, azzal a lineárisan stabil tartomány jelentősen nagyobb.

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs hivatal NKFI-128422 számú pályázata támogatta. A Kulturális és Innovációs Minisztérium ÚNKP-22-3-II-BME-101 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

## HIVATKOZÁSOK

- T. R. Kane, D. A. Levinson, *Dynamics: Theory and Applications*, McGraw-Hill, 1985.  
T. Insperger, G. Stepan, *Semi-discretization for Time-Delay Systems*, Springer, New York, 2011.  
A. Szabo, H.Z. Horvath, D. Takacs, Simplified mechanical model for balancing a motorbike with steering at zero speed, *ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics*, Budapest, Hungary, December 12-15, 2021.  
F.J.W. Whipple, The Stability of the Motion of a Bicycle, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 312–348, 1899.

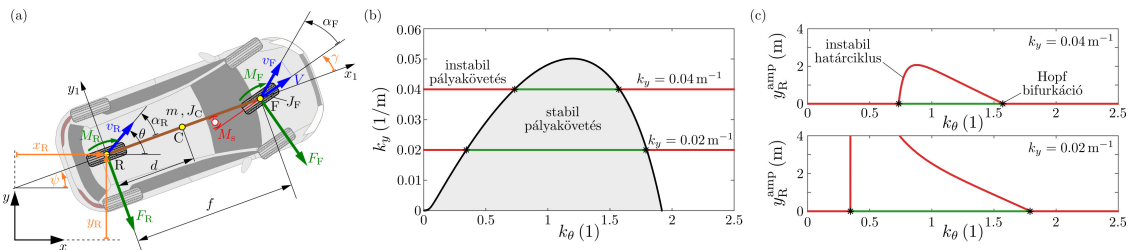
# ÖNVEZETŐ JÁRMŰ PÁLYAKÖVETŐ SZABÁLYOZÁSÁNAK NEMLINEÁRIS VIZSGÁLATA

Vörös Illés<sup>1</sup> és Takács Dénes<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék és  
ELKH-BME Gépek Dinamikája Kutatócsoport  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.  
illes.voros@mm.bme.hu, takacs@mm.bme.hu

A fejlett vezetőtámogató rendszerek, mint például a sávtartó és sávvaltó asszisztensek, jelentősen csökkenthetik a figyelmetlen sávelhagyásból eredő közúti balesetek számát. Számos különböző megközelítés létezik a kapcsolódó pályakövető szabályozás megtervezésére, az egyszerű geometriai megfontolásoktól a gépi tanuláson alapuló módszerekig [1]. A kapcsolódó szabályozási körök azonban jelentős mennyiségű időkésséssel terheltek, ami csökkenti a szabályozás teljesítményét és stabilitási problémákhoz is vezethet. Másrészt a különböző nemlineáris jelenségeket, mint például a rendszer kezdeti feltételekre való érzékenységet és a periodikus pályák (határciklusok) jelenlétét jellemzően nem veszik figyelembe a hagyományos lineáris szabályozó tervezési módszerek.

Jelen tanulmány egy késleltetett állapot visszacsatoláson alapuló sávtartó szabályozás részletes nemlineáris vizsgálatát mutatja be, különös tekintettel a stabil pályakövetés egyensúlyi helyzete körül megjelenő instabil határciklusokra.



1. ábra. (a) Egynyomú járműmodell. (b) Szabályozóparaméterek stabil tartománya. (c) Szubkritikus Hopf bifurkáció és instabil határciklus megjelenése a stabil tartomány felett.

A számításokhoz az egynyomon haladó járműmodell (biciklimodell, lásd 1(a) ábra) vesszük alapul, a kormányoszerv tehetetlenségének figyelembevételével [2]. A szabályozás célja az  $x$ -tengely mentén történő egyenesvonalú mozgás biztosítása a kormányoszervön keresztül beavatkozva. A kapcsolódó szabályozási törvény a jármű oldalirányú pozícióját ( $y_R$ ) és a GPS szenzor által mérhető haladási szögét ( $\theta$ ) veszi alapul a megkívánt kormányoszög előállításához:

$$\gamma_{des}(t) = -k_y y_R(t - \tau) - k_\theta \theta(t - \tau), \quad (1)$$

ahol  $k_y$  és  $k_\theta$  a szabályozó erősítési tényezői,  $\tau$  pedig a szabályozási körben jelenlévő időkésség.

A linearizált rendszer stabilitásvizsgálatát elvégezve meghatározható a szabályozóparaméterek stabil tartománya (lásd 1(b) ábra). A dinamikus stabilitásvesztés határán azonban a nemlineáris rendszerben szubkritikus Hopf bifurkáció lép fel, és a stabil egyensúlyi helyzet körül instabil határciklus jelenik meg (1(c) ábra). A stabil pályakövetés vonzási tartományát ezen határciklus szabja meg. Numerikus követési eljárással feltérképezhető az instabil határciklus amplitúdója a szabályozóparaméterek stabil tartománya mentén, ezáltal meghatározva, hogy a szabályozó milyen hangolása esetén lesz a jármű kellően robusztus a nagyobb mértékű perturbációkkal és kezdeti feltételekkel szemben.

Összességében az elért eredmények részletes áttekintést nyújtanak a szabályozott jármű lokális és globális dinamikájáról a szabályozóparaméterek függvényében. Ezt iránymutatásként felhasználva a szabályozó behangolásakor biztosítható a jármű megbízható és robusztus pályakövetése.

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A szerzők köszönetüket fejezik ki az NKFI-128422 keretében kapott támogatásért.

## HIVATKOZÁSOK

- [1] B. Paden, M. Čáp, Y. Sze Zheng, D. Yershov, E. Frazzoli, A survey of motion planning and control techniques for self-driving urban vehicles, *IEEE Transactions on intelligent vehicles* 1(1):33–55, 2016.  
[2] I. Vörös, G. Orosz, D. Takács, On the global dynamics of path-following control of automated passenger vehicles, *Nonlinear Dynamics* 111(9):8235–8252, 2023.

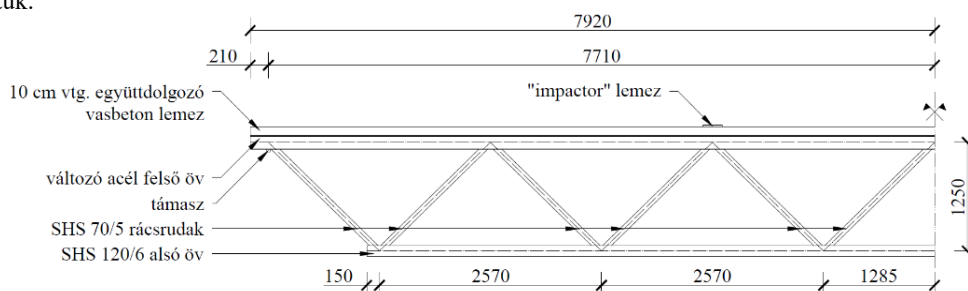
## ÖSZVÉR RÁCSOS TARTÓK VISELKEDESÉNEK NUMERIKUS VIZSGÁLATA

Rozgonyi Dániel<sup>1</sup> és Dr. Kovács Nauzika<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Hidak és Szerkezetek Tanszék  
Műegyetem rkp. 3-9. H-1111 Budapest,  
09crozgonyid@gmail.com, kovacs.nauzika@emk.bme.hu

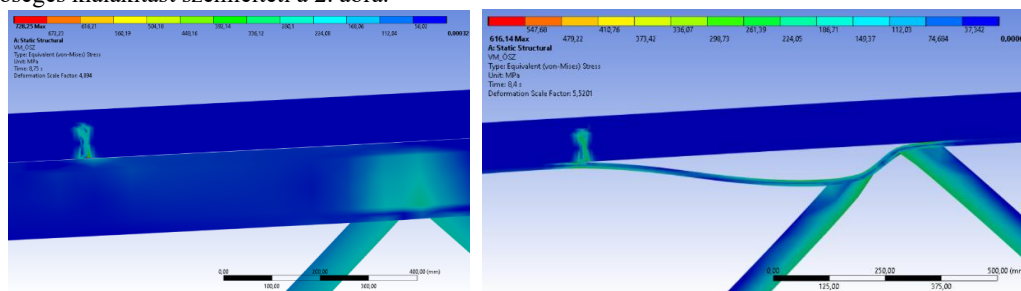
Az öszvérszerkezetek egyaránt kiváló hatékonysággal ötvözik az épületszerkezetek és hidak esetében a szerkezeti acél és a vasbeton előnyös tulajdonságait. Az elmúlt két évtized kutatásai az általánosan alkalmazott konstrukciók választékának szélesítésére fókuszáltak: újfajta, hatékonyabb kapcsolati elemek méretezési eljárásainak kidolgozása mellett a rácsos tartó alapú megoldások vizsgálata került a középpontba. Kutatásunk témája ez utóbbi kialakítások viselkedésének alaposabb megismerését szolgálja.

A vizsgálatot az ANSYS végeelemes szoftverrel végeztük, az 1. ábrán szereplő szerkezeti kialakítás segítségével. Célunk a vasbeton lemez és az acél felső öv együttműködésének a teljes szerkezet viselkedésére gyakorolt hatását különböző kialakítású felső övek és eltérő fókuszú nyírt kapcsolatok esetén tanulmányozni. A fejes csapok és a vasbeton lemez közti kapcsolati modellt [1] szerinti kinyomó kísérletek eredményei alapján verifikáltuk.



1. ábra. Vizsgált öszvér rácsos tartó kialakítás

A vizsgálatokat többféle felső öv kialakítással, a kapcsolóelemek kiosztását  $0,2 \leq \eta \leq 1$  kapcsolati fókuszértékek között változtatva végeztük el. Első lépésként erős felső övkeresztmetszet (HEB 160) alkalmaztunk és a [2] cikk eredményeivel összhangban azt tapasztaltuk, hogy a részlegesen nyírt kapcsolatok ( $\eta < 1$ ) tervezésekor valóban szignifikánsabb a kapcsolóelemek száma növelésének hatása, mint  $\eta \geq 1$  értékek esetében. A hivatkozott kutatáshoz hasonlóan az  $\eta \in [0,2; 1]$  fókuszok alkalmazása a mértékadó teher mindössze 8–12%-os változást eredményezett. Azt a következtetést vontuk le, hogy a határnyomaték relatíve kis változását az acél rácsos tartó önmagában is nagy teherbírása és merevsége magyarázza. Ebből a felismerésből kiindulva fokozatosan csökkentettük a felső acélszelvény méretét: egy önmagában gyenge laposacél keresztmetszet alkalmazásakor a korábban vizsgált fókusz-tartományon értelmezett többletterherbírás megközelítette a 40%-os értéket. A két szélsőséges kialakítást szemlélteti a 2. ábra.



2. ábra. Végeelemes modell HEB 160 és laposacél felső öv esetén – HMH-feszültség és deformációk.

Kutatásunk és eredményeink a jövőben gazdaságosabb szerkezeti kialakítások tervezésének lehetőségét hivatottak elősegíteni. A kezdeti szelvényhez képest harmadannyi anyagfelhasználással rendelkező felső acél keresztmetszet esetén azonos csapszám mellett akár az eredeti teherbírás 80 százaléka is elérhető. A nyírt kapcsolat hangsúlyosabb tétele tehát ideálisabb megoldásokhoz vezethet.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] Peter Michálek, Ján Bujňák, Experimental and theoretical study of composite trusses, 13th International Scientific Conference on Sustainable, Modern and Safe Transport (TRANSCOM 2019), High Tatras, Nový Smokovec – Grand Hotel Bellevue, Slovak Republic, May 29-31, 2019
- [2] Lisheng Luo and Xiaofeng Zhang, Flexural Response of Steel-Concrete Composite Truss Beams, Advances in Civil Engineering, Volume 2019, Article ID 1502707, <https://doi.org/10.1155/2019/1502707>

## PRONY-SOR ALAPÚ NUMERIKUS INVERZIÓS MÓDSZER VISZKOELASZTIKUS ANYAGOK LEÍRÁSÁHOZ

**Berezvai Szabolcs**<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5  
berezvai@mm.bme.hu

**Robert M. McMeeking**<sup>2,3,4,5</sup>

<sup>2</sup>Department of Mechanical Engineering, University of California, Santa Barbara CA 93106

<sup>3</sup>Materials Department, University of California, Santa Barbara CA 93106

<sup>4</sup>School of Engineering, University of Aberdeen, King's College, Aberdeen AB24 3UE, UK

<sup>5</sup>INM-Leibniz Institute for New Materials, Campus D2 2, 66123 Saarbrücken, Germany  
rmcm@engineering.ucsb.edu

Az időfüggő, viszkoelasztikus anyagok mechanikai viselkedését a relaxációs és kúszási tulajdonságaik alapján írhatjuk le. A tisztán rugalmas anyagokkal ellentétben, ahol a rugalmasság és az engedékenység közötti áttérés egyszerű lineáris mátrix-inverzszel számítható, a viszkoelasztikus anyagok esetén az átváltás az időfüggő viselkedés miatt speciális inverziós módszert igényel. A relaxációs és kúszási viselkedés kísérleti vizsgálata gyakran nehéz és időigényes, azonban egy megfelelően megválasztott, pontos és robusztus inverziós módszer segítségével elegendő csupán az egyik mechanikai teszt (relaxációs vagy kúszás) elvégzése.

A szakirodalomban rendelkezésre álló viszkoelasztikus inverziós módszerek mindegyike az időtartománybeli Prony-sor alakú leírásról alapul, amelyet Schapery alapozott meg [1, 2]. Ebben a megközelítésben az  $E(t)$  relaxációs és  $C(t)$  kúszási moduluszokat Prony-sorok formájában közelítjük, mint

$$E(t) = E_e + \sum_{i=1}^n E_i e^{-\alpha_i t} \quad \text{és} \quad C(t) = C_e - \sum_{j=1}^n C_j e^{-\beta_j t}, \quad (1)$$

ahol  $\alpha_i$  és  $\beta_j$  a Prony-sorok időállandói,  $E_i$  és  $C_i$  a relaxációs és kúszási együtthatók, míg  $E_e$  és  $C_e$  az állandósult állapotbeli moduluszok. A Schapery-féle inverziós eljárás során a relaxációs és kúszási paraméterek átszámítását az inverz Laplace-transzformáción és a legkisebb négyzetek módszerén alapuló közelítéssel számíthatjuk, azzal a jelentős egyszerűsítéssel, hogy a Prony-időállandók egyenlők. Ez az inverziós módszer, ugyanakkor olyan megoldásokat is eredményezhet, amelyekben negatív  $E_i$  és  $C_i$  moduluszok adódnak, ezzel megsértve az energiaelvetet [3]. A Gutierrez-Lemini-féle módszer egytengelyű terhelések esetén, a viszkoelasztikus feszültség-alakváltozás között felírt konvolúciós integrál alapján analitikus úton vezeti le a relaxációs és a kúszási moduluszok közötti kapcsolatot. A módszer hátránya, hogy csak 1D terhelés esetén alkalmazható, mivel többtengelyű esetben többváltozós nemlineáris egyenletrendszerre vezet, amely analitikusan nem megoldható [3,4].

Kutatásunk célja, a Schapery-féle Laplace-transzformáción alapuló inverziós eljárás alapötletén kiindulva egy új, numerikus Laplace-transzformáción alapuló közelítő eljárás kidolgozása. Az általunk javasolt inverziós módszer kielégíti az energiaelvetet és megengedi az eltérő Prony-időállandók használatát a relaxációs és kúszási moduluszokban, valamint többdimenziós (anizotrop) viszkoelasztikus anyagok esetén is alkalmazható. Az új numerikus módszer hatékonyságát numerikus mintapélda alapján illusztráltuk, ahol az új módszert összevetettük a Schapery-féle közelítő és a Gutierrez-Lemini-féle pontos inverziós módszerekkel egy epoxy-gyantán elvégzett kúszási teszt adatsorán. Az inverzió tökéletes egyezést mutatott az analitikus inverzió eredményével, míg a Schapery-féle numerikus közelítés hibája lényegesen nagyobb volt.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal (NKFIH) PD-137806 számú pályázata támogatta.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] R. A. Schapery, Approximate Methods of Transform Inversion for Viscoelastic Stress Analysis, in *Proceedings of the Fourth U.S. National Congress of Applied Mechanics* 2:1075-1085, 1962.
- [2] R. A. Schapery, Approximate Methods of Transform Inversion for Viscoelastic Stress Analysis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, 1961.
- [3] D. Gutierrez-Lemini, *Engineering Viscoelasticity*, Springer, 2014.
- [4] R. A. Schapery and S. W. Park, Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part II—an approximate analytical method, *International Journal of Solids and Structures*, 36(11):1677-1699, 1999.

## REDUCED ORDER MODELLING OF PORPOISING IN RACE CARS

Balázs Bauer<sup>1</sup> and Giuseppe Habib<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Dept. Applied Mechanics, MTA-BME Lendület "Momentum" Global Dynamics Research Group  
Faculty of Mechanical Engineering, Budapest University of Technology and Economics  
Műegyetem rkp. 3., H-1111 Budapest, Hungary  
bauer.balazsaszlo@gmail.com, habib@mm.bme.hu

Porpoising is a dynamical phenomenon experienced mainly by high-speed boats and racing cars, consisting of a coupled pitch-heave vehicle motion, which resembles the characteristic dolphin porpoising. Although it is always related to an instability of the steady-state motion of the vehicle, various mechanical phenomena may trigger it. In the mildest cases, porpoising causes significant discomfort; in other cases, it can also lead to fatal accidents.

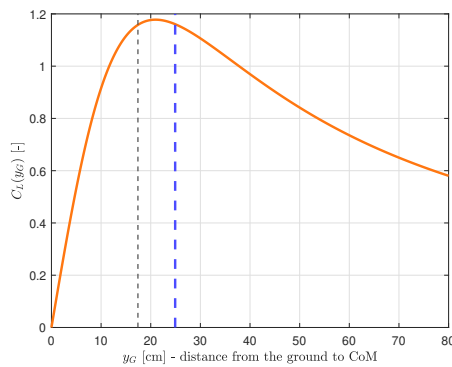
Recently, porpoising became very popular as it significantly affected the 2022 race season in Formula 1. The appearance of porpoising in Formula 1 cars is related to the ground effect, which increases downforce at high speeds. Until 2021, exploiting the ground effect was banned by regulations. Because of the ground effect, downforce has a strong nonlinear dependence on the car heave position, as illustrated in Fig. 1a; which can lead to instabilities. In particular, porpoising happens when the heave motion oscillates around the peak of the curve.

Typically, porpoising is investigated by exploiting computationally expensive CFD models [2]. This study aims to define a reduced-order model of a racing car that describes the main features of porpoising vibrations. Exploiting this model, we then investigate the possibility of mitigation through a tuned mass damper. The mechanical model considered is represented in Fig. 1b, whose dynamics is described by the following equations of motion

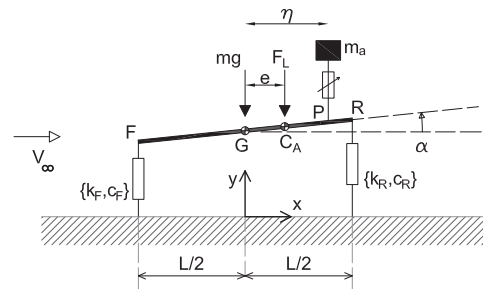
$$\begin{cases} \tilde{y}_G'' + 2\zeta(\tilde{y}_F' + \tilde{y}_R') + \tilde{k}_F\Delta\tilde{y}_F + \tilde{k}_R\Delta\tilde{y}_R = -\tilde{F}_L - \tilde{F}_g - \tilde{F}_a \\ \alpha'' + 12\zeta\alpha' - 6\tilde{k}_F\Delta\tilde{y}_F + 6\tilde{k}_R\Delta\tilde{y}_R = -12\tilde{F}_L\tilde{e} - 12\tilde{F}_a\tilde{\eta} \\ \varepsilon\tilde{y}_a'' = \tilde{F}_a - \varepsilon\tilde{F}_g \end{cases} \quad (1)$$

The parameter values were tuned through available data of racing cars that experience porpoising. Particularly challenging is the modeling of the lift force. In fact, a hysteresis cycle plays a significant role in generating porpoising [3]. Additionally, the distribution of the downforce also has a non-negligible role. Accordingly, various models for the downforce were tested.

In a second phase, a tuned mass damper is introduced into the system, and its stabilizing properties are analytically investigated. A numerical optimization illustrated that the tuned mass damper is indeed an effective tool to suppress porpoising; however, it requires an excessively large additional mass, impractical for racing cars.



(A) Nonlinear Ground effect function [1]



(B) Simplified mechanical model

FIGURE 1

### REFERENCES

- [1] J. Zerihan, X. Zhan, Aerodynamics of a single element wing in ground effect, *Journal of aircraft* 37(6):1058–1064, 2000.
- [2] M. Gadola, D. Chindamo, P. Magri, G. Sandrini, Analyzing porpoising on high downforce race cars: Causes and possible step adjustments to avoid it, *Energies* 15(18):6677, 2022.
- [3] N. Suarez, T. Briet, E. Scalabroni, Simulating porpoising on a quarter-car suspension model, 2022. [zenodo.org](https://zenodo.org)



## RÉTEGELT KOMPOZIT LEMEZEK NUMERIKUS MODELLEZÉSE KIEGÉSZÍTŐ DINAMIKAI FELTÉTELEKKEL

Hauck Bence<sup>1</sup> és Szekrényes András<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.  
bence.hauck@mm.bme.hu, szeki@mm.bme.hu

Rétegelt kompozit lemezek szilárdsági és rezgéstani vizsgálatával már régóta foglalkozik a tudomány, így számos elmélet és alkalmas modellezési eljárás született a múltban [1, 2]. Azonban a legtöbb modell nem teljesíti az összes perem- és folytonossági feltételt, amelyek a valóságban feltehetően teljesülnek. A két legfontosabb ilyen feltétel: a szabad, terheletlen felületeken zérus a nyírófeszültség, illetve Newton II. törvénye miatt a rétegek között a nyírófeszültségeknek legalább  $C^0$ -folytonosnak kell lennie. A leggyakrabban alkalmazott polinom-alapú lemez-elméleteken és az egyenértékű rétegek elvén alapuló modellek ezeknek nem tesznek eleget. Bár az ún. Reddy-féle elmélettel lehetséges a terheletlen peremeken zérus nyírófeszültséget előírni [1]. Illetve, speciális peremfeltételek mellett létezik minden feltételt kielégítő modell [3].

Mivel a feszültségeloszlásra szeretnénk feltételeket előírni, így az egyenértékű rétegek elmélete csak olyan értelemben alkalmazható, hogy minden fizikai réteg egy külön egyenértékű rétegnek felel meg ("layerwise analysis"). Emiatt a modell főként sandwich szerkezetű lemezekre alkalmazható hatékonyan. A kiegészítő feltételeket a Lagrange-féle multiplikatós módszerrel vezetjük be [4]:

$$\Pi = \mathcal{T} - \mathcal{U} + \mathcal{W} + \sum_{\alpha} \int_{(A)} \lambda_{\alpha} f_{\alpha} dA, \quad (1)$$

ahol  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{U}$  és  $\mathcal{W}$  a kinetikus, illetve alakváltozási energia és a külső erők munkája. Továbbá,  $f_{\alpha}$  jelöli a kiegészítő feltételeket,  $\lambda_{\alpha}$  pedig a hozzájuk tartozó multiplikatort. Az  $A$  az a felület, amelyre a feltételt előírjuk. A felületi integrálás nem feltétlenül szükséges, de a leíró egyenletek levezetése és a numerikus megoldás szempontjából fontos.

A numerikus megoldás végeselem módszerrel történik, mégpedig az elmozdulásmezőn felül a multiplikatorkat is diszkrétizáljuk, még hozzá ugyanolyan interpolációs sémával, amely a kiegészítő feltételekben is szerepel. A csomóponti elmozdulásvektorok kiegészülnek a csomóponti multiplikatorkkal. Mivel a plusz feltételekben nem szerepelnek idő szerinti deriváltak, ezért a tömegmátrix előállításában a multiplikatorknak nincs érdemi szerepe. Az elemi végeselemes mozgásegyenlet a következő lesz:

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{U}}_e + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_{e\lambda}) \mathbf{U}_e = \mathbf{F}_e, \quad (2)$$

amelyben  $\mathbf{U}_e$  a kibővített csomóponti elmozdulásvektor,  $\mathbf{K}_{e\lambda}$  pedig a kiegészítő feltételekből származó merevségi mátrix. Az  $\mathbf{M}_e$  és a  $\mathbf{K}_e$  az elemi csomóponti elmozdulásvektornak megfelelő méretű konzisztens tömegmátrix és anyagi merevségi mátrix. Az így előállított végeselem modelleket korábbi modellekkel hasonlítjuk össze szilárdsági és rezgéstani szempontból egyaránt.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A Kulturális és Innovációs Minisztérium ÚNKP-22-3-I-BME-88 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

Ezt a kutató munkát az NKFIH támogatta a 134303 sz. pályázat keretein belül.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, Second Edition, CRC Press, 2003
- [2] László P. Kollár, *Mechanics of Composite Structures*, Cambridge University Press, 2003.
- [3] Goswami S, Becker W., *Analysis of sandwich plates with compressible core using layerwise refined plate theory and interface stress continuity*, Journal of Composite Materials. 2016;50(2):201-217.
- [4] Langtangen, H.P. and Mardal, K.A., *Introduction to Numerical Methods for Variational Problems*, Texts in Computational Science and Engineering, Springer International Publishing, 2019.



## SAJÁTFREKVENCIA OPTIMÁLÁS IPARI ROBOTOKNÁL

Bodnár Dávid<sup>1</sup> és Jármai Károly<sup>2</sup>

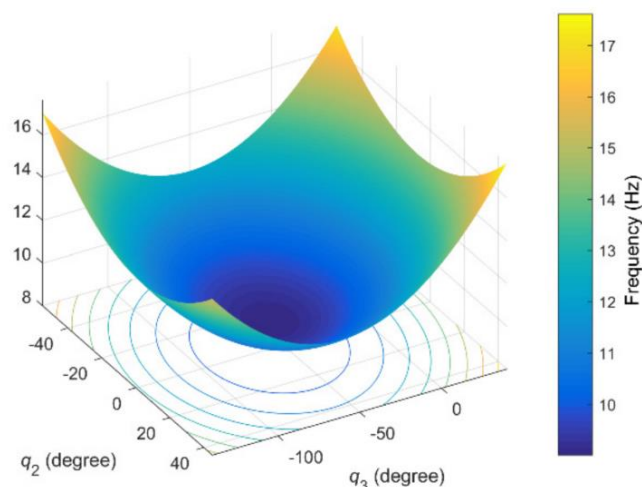
<sup>1,2</sup>Miskolci Egyetem, Energetikai és Vegyipari Gépészeti Intézet  
3515 Miskolc-Egyetemváros

david.bodnar@student.uni-miskolc.hu, karoly.jarmai@uni-miskolc.hu

A robotok alkalmazása különböző feladatokra folyamatosan növekszik [1]. A robotok szerkezetének innovatív tervezésének eszköze az optimalítás. Az innovatív tervezés lényege, hogy egy adott feladatot a meglévő megoldásoknál hatékonyabban, azokat tovább fejlesztve oldjuk meg. Ennek egyik része a sajátfrekvencia tervezése.

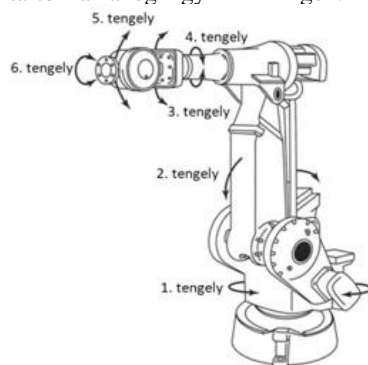
A jelen tanulmány célja egy robot szerkezetének optimalítása, ha a választott célfüggvény az sajátfrekvencia. Ehhez egy meglévő robot szerkezetére kiszámításra kerül a saját frekvencia. A számításokat a szerzők mérési eredménnyel tervezik igazolni.

A tanulmány része egy optimalítási feladat elvégzése és bemutatása, kiszámítva milyen eredmények érhetőek el a sajátfrekvencia célfüggvényre.



1. ábra. Sajátfrekvencia változása egy ABB IRB6400 ipari robotnál a csukló pozíciók függvényében [2]

Az 1. ábra egy ipari robot sajátfrekvencia változását mutatja be különböző konfigurációkban. Ebben a tanulmányban ehhez hasonló, alacsony frekvenciás rezgések kerülnek vizsgálatra. Az ábrán található jelölések:  $q_2$  és  $q_3$  – a robot második és harmadik csuklójának szögelfordulása. A csuklók számozása a robot alapjától kezdődik, ezért a  $q_2$  és  $q_3$  csuklókhöz tartoznak a legnagyobb tömegek.



2. ábra. Ipari robot struktúrája [3]

### HIVATKOZÁSOK

- [1] International Federation of Robotics. <https://www.ifr.org/> (felkeresve 2023.05.24)
- [2] J. Sun, W. Zhang, X. Dong, Natural Frequency Prediction Method for 6R Machining Industrial Robot, *Applied Sciences* 10(22):8138, 2020. <https://doi.org/10.3390/app10228138>
- [3] Robotsruktúrák. <https://gyires.inf.unideb.hu/KMITT/c01/ch02s04.html> (felkeresve 2023.05.24)

## SZÁRÍTÓBERENDEZÉSEK OPTIMÁLIS ANYAGÁRAMLÁSI CSATORNÁINAK KIALAKÍTÁSA DISZKRÉT ELEMELÉVEL

Babléna Adrienn<sup>1</sup> és Keppler István<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Magyar Agrár- és Élettudományi Egyetem, Műszaki Intézet  
2100 Gödöllő

bablena.adrienn@uni-mate.hu, kepler.istvan@uni-mate.hu

A mezőgazdasági termelés hatékonyságának növelése, valamint a megtermelt élelmiszer minőségének javítása fontos nemzetgazdasági érdek. A szárítás a mezőgazdaságban egyike a legfontosabb és legalapvetőbb műveleteknek. Rendkívül energiaigényes folyamat, ráadásul a hőenergia-szükségletet a legtöbb esetben fosszilis tüzelőanyagok elégetésével biztosítják [1]. Hatékonyságának javítása emiatt környezetvédelmi szempontból is fontos.

A szárítást sok helyen gravitációs rendszerű keresztáramú berendezés segítségével oldják meg. Az ilyen típusú berendezések jellemzően szakaszos működésűek. Szárítás közben a termény függőleges irányban lefelé halad, a haladás során terelő lamellák biztosítják, hogy megfelelő mennyiségű levegő jusson a berendezésbe, illetve a szemek megfelelő ideig tartózkodjanak a szárítóban.



1. ábra. HSZ-15 típusú, gravitációs rendszerű keresztáramú szárítóberendezés

A probléma mechanikai háttere a lefelé mozgó szemek sebességviszonyaiból eredő alul- és túlszárítás [2,3]. A légbevezetést szolgáló lamellák optimális kialakításával számos kutatás foglalkozott [2,3,4]. Vizsgálataink azt mutatták, hogy az egyenes lamellák dőlésszögének változtatásával további hatékonyságnövelés csak nagy nehézségek árán érhető el, ezért a lamellák geometriájának módosítása mellett döntöttünk.

A klasszikus brachisztocron-probléma [5] megoldása alapján azt feltételeztük, hogy a ciklois alakú lamella geometria lehetőséget ad az áramlás egyenletességének javítására. Hipotézisünk helyességét diszkrét elemes módszerrel [6] alapuló numerikus szimulációk, illetve kísérleti vizsgálatok segítségével is bizonyítottuk.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] A.S. Mujumdar, J. Beke, *Gyakorlati szárítás*, Szaktudás Kiadóház, Budapest, 2002.
- [2] I. Keppler, L. Kocsis, I. Oldal, I. Farkas, A. Csátár, Grain velocity distribution in a mixed flow dryer, *Advanced Powder Technology* 23:824-832, 2012.
- [3] J. Mellmann, K.L. Iroba, T. Metzger, E. Tsotsas, Cs. Mészáros, I. Farkas, Moisture content and residence time distributions in mixed-flow grain dryers, *Biosystems Engineering* 109:297-307, 2011.
- [4] J. Mellmann, T. Teodorov, Solids transport in mixed-flow dryers, *Powder Technology* 205:117-125, 2011.
- [5] J. Bernoulli, *Acta Eruditorum*, 1696.
- [6] P.A. Cundall, O.D.L. Strack, A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique* 29(1):47-65, 1979.

## SZILIKON GUMILAP MECHANIKAI VISELKEDÉSÉNEK RÉSZLETES LEÍRÁSA TÖBBTENGELYŰ FESZÜLTSGÉGI ÁLLAPOT ESETÉN

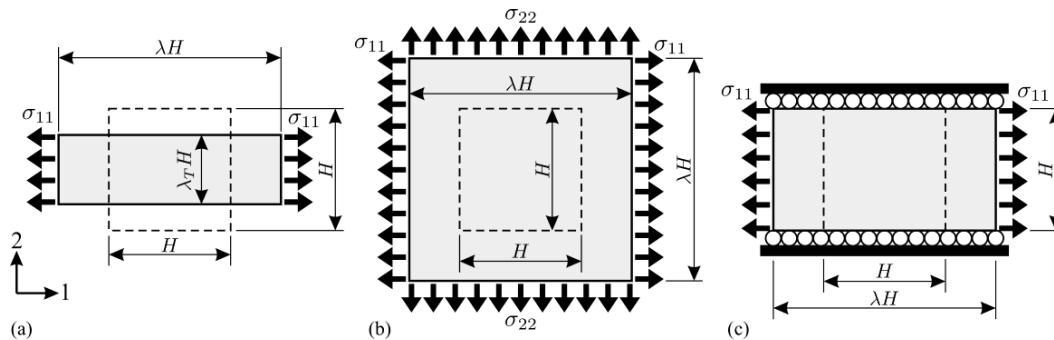
Havasi Kristóf<sup>1</sup> és Kossa Attila<sup>2</sup>

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

<sup>1</sup>havasi@mm.bme.hu, <sup>2</sup>kossa@mm.bme.hu

Gumiszerű anyagok pontos mechanikai modellezéséhez szükséges ismernünk az alapanyag viselkedését többtengelyű feszültségi állapot esetén is. Az ehhez szükséges kísérletek megtervezése és kivitelezése során fontos figyelembe venni a viszkoelasztikus viselkedést és a Mullins-féle hatást is. Az anyag mechanikai tulajdonságai függenek mind az anyag pillanatnyi feszültségi és alakváltozási állapotától, mind pedig ezek időbeli változásától. A tisztán rugalmas viselkedés leírásához elterjedt a hiperelasztikus modellezés használata [2], amely véges alakváltozások esetén is alkalmazható. Ezen terület manapság is gyorsan fejlődik, számos új modellt javasolnak a minél kifinomultabb leírás elérése érdekében. A kutatások sok esetben egy régi folyóiratcikkre hivatkoznak [1], amelyben közölt mérési adatsort veszik alapul a modellek teszteléséhez az anyagmodellek illesztése során. Az említett cikk három különböző adatsort közöl: egytengelyű, kéttengelyű, valamint gátolt egytengelyű mérés során a mérnöki alakváltozásokat és feszültségeket. Ezek azok a homogén feszültségi állapotok (lásd 1. ábra), melyekre a hiperelasztikus anyagmodelleket rendszerint együttesen illeszteni szokás. Azonban a cikk egy nagy hiányossága, hogy sem a viszkozus, sem pedig a Mullins-féle hatásról nem ad mérési eredményeket, így tisztán az elasztikus változást veszi csak figyelembe. Márpedig az anyagmodellek fejlesztéséhez szükséges lenne ezen hatások ismerete is.

Célunk új referencia mérési adatsor készítése, amely a korábbi eredményekhez képest az említett, komplex viselkedési formákat (viszkoelasztikus hatás, Mullins-féle jelenség) is figyelembe veszi, ezáltal egy összetettebb viselkedési forma leírására alkalmas kísérleti adatokhoz jutunk. Ezen mérések kivitelezéséhez a tanszékben található, saját fejlesztésű kéttengelyű anyagvizsgáló gépet használtuk. Egyedileg tervezett próbatestek viselkedését elemeztük a mérések során, figyelembe véve a rugalmas viselkedést, az időfüggő viszkozus hatásokat, illetve az anyag előéletét magába foglaló Mullins-féle hatást is. A mérések során optikai eszközök segítségével rögzítettük a kísérletek folyamatát, amihez egy nagyfelbontású 8K kamerával készítettünk videófelvételeket. Ezen médiatartalom elemzésével végeztük el a mérések adott pillanatban tapasztalt alakváltozását, mely nem triviális a kísérletek során, hiszen a valóságban nem tisztán homogén állapotok valósulnak meg az anyag mechanikai viselkedését tekintve. Az így generált adatsorok alkalmasak későbbi modellezési eljárásokhoz, viszkoelasztikus modellek felépítéséhez, valamint ezek Mullins-féle hatást is figyelembe vevő tényezőkkel való kiegészítéséhez referencia adatként.



1. ábra. Idealizált homogén terhelési esetek. a) Egytengelyű húzás. b) Kéttengelyű húzás azonos mértékben c) Gátolt egytengelyű húzás.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Jelen kutatás a Kulturális és Innovációs Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával valósult meg. Pályázati azonosító: FK 142457. Az Innovációs és Technológiai Minisztérium UNKP-22-2-I-BME-65 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] L.R.G Treloar, Stress-strain data for vulcanized rubber under various types of deformation, *Transactions of the Faraday Society* 40: 59-70, 1944.  
[2] J. Bergström, *Mechanics of Solid Polymers: Theory and Computational Modeling*, William Andrew, 2015.

## SZIMMETRIKUS TARTÓSZERKEZETEK ASZIMMETRIKUS TÖNKREMETELI LEHETŐSÉGE

Sajtos István<sup>1</sup> és Ther Péter Pál<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>BME, Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

sajtos.istvan@epk.bme.hu, ther.pal@epk.bme.hu

A vasbeton és falazott tartószerkezetek tönkremenetelét elsősorban a kicsi húzószilárdságuk miatt kialakuló repedések instabil terjedése okozza. Kísérleti tapasztalat, és épületek tartószerkezetin is megfigyelhető, hogy a szimmetrikus kialakítású és szimmetrikus terhelésű vasbeton és falazott tartószerkezetek tönkremenetele aszimmetrikus repedéskép mellett, aszimmetrikus deformált állapotban következik be. Előfordul, hogy a terhelési folyamat során a repedéskép ugyan szimmetrikusan fejlődik, de a teherbírást meghatározó végállapotban aszimmetrikussá válik. Más esetben pedig a már a terhelési folyamat alatt is aszimmetrikus a repedésrendszer geometriája. Az első eset a hajlított-nyírt vasbeton gerendák viselkedésére, míg a második a falazott gömbkupolákra jellemző.

Az előadás az említett két szerkezet esetében vizsgálja a jelenség okait és következményeit, eltekintve mind valóságos geometriának, mind az anyagjellemzőknek a véletlenszerű változásától.

A nyírási vasalás nélküli vasbetongerendák repedésfejlődése a terhelési folyamat alatt szimmetrikus, de a teherbírást meghatározó végső állapotban aszimmetrikussá válik [1]. Kialakul egy, a teherbírást meghatározó ún. kritikus repedés. A terhelési úton bekövetkező, a szimmetrikus – aszimmetrikus repedésgeometria között „választó” egyensúlyelágazás, bifurkáció lehetősége függ a gerenda méretétől, a betonacél mennyiségétől és a beton törési energiájától. A terhelési út elágazásának lehetőségét a repedés miatti energiadisszipáció okozza [2, 3]. A terhelési út elágazása korlátozhatja a gerenda teherbírását és/vagy a gerenda alakváltozó képességét. Numerikus szimuláció esetében a szimmetria miatti egyszerűsített modell vizsgálata hamis eredményt adhat.

A falazott gömbkupolák repedésfejlődése nem szimmetrikus, amint az megfigyelhető pl. a római Pantheon (i.sz.126) és az indiai Gol Gumbaz (Bijapur) (1656) kupolákon is. Az előbbin a repedéskép „majdnem” diszkrét forgásszimmetriát mutat, utóbbin a két-három meridián irányú repedés egyáltalán nem ilyen. A repedések diszkrét forgásszimmetriáját feltételező modell szerint vagy nincs repedés a kupolán vagy végtelen sok van, ami nem felel meg a megfigyelhető állapotnak. A végtelen sok meridiánirányú repedés feltételezése azonban lehetőséget ad a kupola egyensúlyi állapotának egyszerű vizsgálatára [4]. A kupola meridiánirányú repedésfejlődést, viselkedését jól modellező, egyszerű gyűrűmodell szerint, a forgásszimmetrikus geometria, megtámasztás és terhelés ellenére a repedésfejlődés nem szimmetrikus repedésrendszert eredményez, függetlenül attól, hogy a gyűrű anyaga ridegen [5] vagy a kohéziós repedésmodell szerint viselkedik. A kupolán megjelenő meridiánirányú repedések száma a gyűrűmodell, és a laboratóriumi kísérletek [6] szerint is korlátos. A tönkremenetelt mindig gyűrűirányú repedések miatt kialakuló mechanizmus megjelenése eredményezi.

Az előadás két, a gyakorlat, ipari alkalmazás, szempontjából is fontos tartószerkezet esetében vizsgálja, hogy a repedések miatti energiadisszipáció és/vagy szerkezetgeometria hogyan vezet aszimmetrikus repedésrendszerhez, tönkremeneteli formához, és ennek milyen következményei vannak a szerkezet viselkedésére és teherbírására.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A szerző (S.I.) köszönetét fejezi ki Sipos Andrásnak az előadás témájában folytatott beszélgetésekért és tanácsaiért.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] P.P. Ther, I. Sajtos, Effect of load path bifurcation on the behavior of reinforced concrete beams, In: M. di Prisco, A. Meda, L.Gy. Balázs (eds.), *Proceedings of the 14th fib International PhD Symposium in Civil Engineering*, fib. The International Federation for Structural Concrete, pp. 97-104, 2022.
- [2] G. Maier, A. Zavelani, J.C. Dotrepe, Equilibrium branching due to flexural softening, *Journal of the Engineering Mechanics Division* 99: 897-901, 1973.
- [3] Z.P. Bazant, L. Cedolin, *Stability of structures. Elastic, inelastic, fracture and damage theories* New York, Oxford, Oxford University Press, 1991.
- [4] I. Sajtos, A.A. Sipos, O. Gáspár, General thrust surface of masonry domes, In: P. Roca, L. Pelà, C. Molins (eds.), *12th International Conference on Structural Analysis of Historical Constructions*, International Centre for Numerical Methods in Engineering, Barcelona, pp. 1984-1995, 2021.
- [5] S. Michel, A. A. Sipos, On the cracking patterns of brittle rings with elastic radial support under hydrostatic pressure, *Meccanica* 57: 1639-1656, 2022.
- [6] S. Cao, A. A. Sipos, Cracking patterns of brittle hemispherical domes: an experimental study, *Frattura ed Integrità Strutturale* 16: 265-310, 2022.

## TERMODINAMIKAILAG KITERJESZTETT, SZIMPLEKTIKUS NUMERIKUS MÓDSZER VISZKOELASZTIKUS MECHANIKÁJÚ, HŐTÁGULÁSSAL ÉS HŐVEZETÉSSSEL JÁRÓ SZILÁRDTEST-VISELKEDÉS SZIMULÁCIÓJÁRA

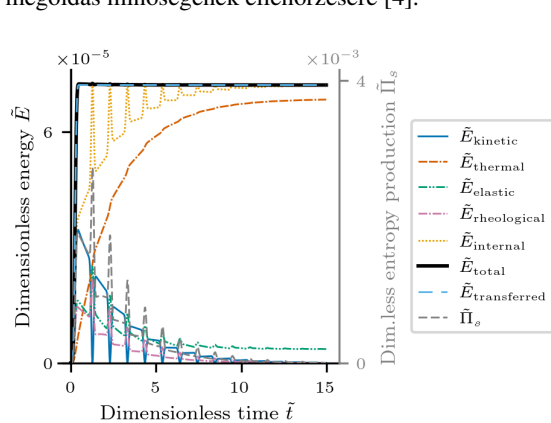
Takács Donát M.<sup>1</sup> és Fülöp Tamás<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.  
takacs@energia.bme.hu, fulop.tamas@gpk.bme.hu

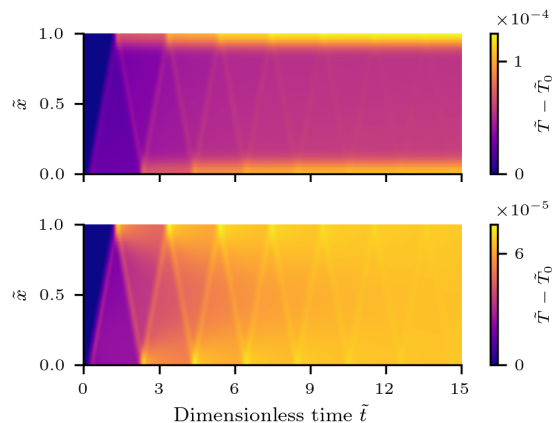
Számos gyakorlati mechanikai, termodinamikai probléma modellezésénél a numerikus megoldások használata alapvető fontosságú. Egyes esetekben azonban a kereskedelmi szoftverek nyújtotta eredmény nem kielégítő; sőt, általában nem is létezik beépített eljárás arra, hogy ellenőrizzük a numerikus eredmények helyességét. Ilyen esetekben kifizetődő egy saját fejlesztésű numerikus módszer használata. A reverzibilis dinamikai rendszerekhez használt szimplektikus numerikus sémák nagyobb időtartamokra is megbízható előrejelzéseket adnak, így jó kiindulópontot nyújtanak olyan numerikus módszerek létrehozására, melyek irreverzibilis esetekben is használhatók.

A numerikus megoldás disszipációs hibáját (mely értelmezhető az energiaőrzés hiányaként is) a lehető legkisebbre kell csökkenteni annak érdekében, hogy ne fedje el az irreverzibilitásból származó valódi disszipációs folyamatok hatását. Ehhez hasonlóan, a hirtelen változásoknál esetként fellépő diszperziós hiba minimalizálása szintén szükséges, hogy a valódi hullámok és a numerikus műtermékként jelentkező valótlan oszcillációk ne keveredjenek össze. Egy szimplektikus séma megfelelő kiterjesztése teljesíti ezeket a követelményeket [1, 2, 3]. Az olyan kontinuum-termodinamikai szempontok, mint a mérlegegyenletek kitüntetett kezelése vagy a termodinamika második főtétele által biztosított pozitív definit entrópiatermelődés, igen értékesnek bizonyulnak ilyen kiterjesztett sémák létrehozásánál és a megoldások monitorozásában. Ezen követelményeknek megfelelő szimulációk igen hasznosak pl. hullámterjedésen alapuló mérések kiértékelésénél és közetek, polimerek stb. terhelési kísérleteinél, ahol a viszkoelasztikuság és a hőtágulás is jelentősen befolyásolja az elmozdulásokat és alakváltozásokat.

Ilyen irányú korábbi kutatásokat általánosítva, bemutatunk egy saját fejlesztésű numerikus módszert, viszkoelasztikus hullámterjedés esetére, hőtágulással csatolt hővezetés jelenlétében. Ezáltal demonstráljuk a séma hosszú távú megbízhatóságát, valamint a termodinamikailag megalapozott mennyiségek használhatóságát a numerikus megoldás minőségének ellenőrzésére [4].



1. ábra. Összenergia, teljes entrópiatermelődési ráta és különféle energiafajták az idő függvényében, egy egydimenziós minta teljesen csatolt, termomechanikai szimulációjából. (Impulzusgerjesztés; szabad, adiabatikus végek.) A numerikus módszer közel állandó értéken tartja az összenergiát.



2. ábra. A hőmérsékleteloszlás időbeli változása egy egydimenziós mintán, egy viszkoelasztikus hullám haladásának hatására, hővezetés nélkül (fent) és hővezetés mellett (lent), az 1. ábra leírásában foglaltakkal analóg módon szimulálva.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] Á. Pozsár, M. Szücs, R. Kovács, and T. Fülöp, Four spacetime dimensional simulation of rheological waves in solids and the merits of thermodynamics, *Entropy*, 22(12):1376, 2020.
- [2] T. Fülöp, R. Kovács, M. Szücs, and M. Fawaier, Thermodynamical extension of a symplectic numerical scheme with half space and time shifts demonstrated on rheological waves in solids, *Entropy*, 22(2):155, 2020.
- [3] T. Fülöp, Wave propagation in rocks – investigating the effect of rheology, *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 65(1):26–36, 2021.
- [4] D. M. Takács, Á. Pozsár, and T. Fülöp, Thermodynamically extended symplectic numerical simulation of viscoelastic, thermal expansion and heat conduction phenomena in solids, *arXiv:2211.12120*, 2022.



## TERMOELASZTIKUS HATÁS MÉRÉSE FERROMÁGNESES RÚDBAN TERJEDŐ LONGITUDINÁLIS LÖKÉSHULLÁM ESETÉN

**Miklós Ákos, Wohlfart Richárd, Hénap Gábor, Magyar Bálint, Zana Roland, Csernák Gábor, Stépán Gábor**

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.  
miklosa@mm.bme.hu

A kutatás előzménye egy olyan módszernek a kidolgozása volt, ahol két acél test közötti kontakterő-eloszlást a testek közti átmeneti ellenállás alapján határoztuk meg [1]. A mérések során az elektromos potenciálmezőben olyan zavarokat tapasztaltunk, amelyek egyrészt monolit acél test esetén is mérhetőek voltak, másrészt egyértelműen mechanikai terhelésre lehetett visszavezetni. Megvizsgáltuk a jelenség lehetséges okait, többek között az alakváltozás- és a hőmérsékletmező közötti kétirányú kapcsolást [2]. A feltételezés szerint a termoelasztikus hatás az acél testre hegesztett különböző anyagú elektródák által képzett hőelemekkel kombinálva okozhat potenciálkülönbséget főként dinamikus mechanikai terhelés hatására.

A termoelasztikus hatás kimutatására méréseket végeztünk. A vizsgált test egy 3,2 m hosszú, 20 mm átmérőjű, vízszintes elhelyezkedésű acél rúd volt, melyet lineáris csapágyakkal támasztottunk meg. A rúd felületére különböző anyagú elektródákat hegesztettünk, így azok hőelemet alkottak. A két elektróda közti potenciálkülönbséget műszererősítéssel, 1000-szeres erősítéssel tudtuk vizsgálni. A rúd mechanikai terhelésére különböző kiterjedésű mechanikai hullámokat keltettünk. Kalapács segítségével kb. 1,5 m hosszúságú hullámokat, illetve egy általunk fejlesztett automatikus impulzusgerjesztővel [3] rövid, kb. 10 cm hosszúságú hullámokat gerjesztettünk. Tekintve, hogy az alakváltozási mező a hőmérsékletmezővel az alakváltozási sebességen keresztül van kapcsolatban, végeztünk kisebb sebességű hajlítókísérleteket is Kumazawa és társai [4] kutatásaihoz hasonlóan.

A termoelasztikus hatást végelelemes szimulációkkal vizsgáltuk, hogy a különböző gerjesztésekhez ismert legyen a létrejövő hőmérsékletmező. Ezek alapján az eredmények alapján tudtuk a mérésekben a termoelasztikus hatást azonosítani.

A termoelasztikus hatást a kvázistatikus hajlítókísérletek, illetve impulzusgerjesztés esetén egymáshoz közel (kb. 10 mm) elhelyezett, különböző anyagú elektródák esetén volt kimutatható. Azokban az esetekben, amikor az alakváltozási sebesség, vagy az elektródák távolsága nagyobb volt, egy másik, feltehetően az anyag mágnesezettségével összefüggő hatás egy-két nagyságrenddel nagyobb volt.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatást a Magyar Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal (NKFI-KKP-133846, NKFI- K-128422 és NKFI- K-132477) támogatta.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] B. Magyar, R. Wohlfart, R. Zana et al. Evaluation of contact force distribution along a curve, based on measured electric potentials, *Acta Mech.* 232:853–879, 2021.
- [2] M. Biot, Thermoelasticity and irreversible thermodynamics, *J. Appl. Phys.* 27:240–253, 1956.
- [3] D. Takács, R. Wohlfart, Á. Miklós, G. Krajnyák, A. Tóth, G. Stépán, Ball shooting tests for identification of modal parameter variation in rotating main spindles *Procedia CIRP* 77:481–484, 2018.
- [4] T. Kumazawa, N. Nakayama, Dynamic Deformation Evaluation by Electro Motive Force, In: *Gdoutos, E.E. (eds) Experimental Analysis of Nano and Engineering Materials and Structures. Springer, Dordrecht.* [https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6239-1\\_184](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6239-1_184), 2007.



## TÖRT-RENDŰ DERIVÁLTAK ALKALMAZÁSA NEM-LOKÁLIS ANYAGOK INSTABILITÁSI FELADATAIBAN

Béda Péter

BME Vasúti Járművek és Járműrendszer-analízis Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.  
beda.peter@kjk.bme.hu

A tört-rendű kalkulus anyagi instabilitási problémákban alkalmazzuk. Az időben és térben nem lokális konstitutív egyenlet használata fontos a poszt-kritikus viselkedés vizsgálatában, a térbeli nem lokális jelleget gyenge és erős típusba osztályozzák [1]. Hagyományosan az anyagi instabilitás tanulmányozásában sebesség- és gradiensfüggő tagokat adnak hozzá a konstitutív egyenlethez (gyenge nem lokális tulajdonság). Az erős nem lokális esetén tört-derivált jelenik meg a Riemann-Liouville tört-rendű integrál, majd Riemann-Liouville és Caputo-féle tört-rendű deriváltak formájában [2].

A tört-rendű kalkulus természetes összefüggésben áll a „hereditary” (emlékező) konstitutív modellezéssel. Ha konvolúciós típusú integrál-operátorokat használunk a konstitutív egyenletekben, és a kúszást és a relaxációt „fordított” jelenségeknek tekintik, Rabotnov [3] bevezeti az úgynevezett tört-rendű exponenciális függvényt az integrál operátor magjaként. Motivációja az volt, hogy a számítást összhangba hozza az kísérleti eredményekkel, és invertálható operátort definiáljon.

Nyilvánvaló analógiaként, a tört-rendű deriváltakat a térbeli nem lokális tulajdonságok modellezésében is bevezethetjük. Konvolúciós típusú operátorokat lehet alkalmazni a térbeli nem lokális hatások kezelésére is. Ez, térbeli változók esetében, az úgynevezett erős nem lokális anyagmodellhez vezet. Az operátor magjának kiválasztása kulcsfontosságú lépés. Altan és Aifantis azonban kimutatta [4], hogy a megfelelő kiválasztása gyenge nem lokális anyagot is eredményezhet. Ez egy furcsa eredmény, ezért a nem-lokalitások osztályozásában inkább a fizikai háttérre kell összpontosítani, mint a deriváltak vagy integrálok formális jelenlétére. Az egyiknek a feszültségpár hatásokra koncentrálni poláris anyagi testekben kell vonatkozni, a másoknak pedig a véges, vagy hosszú távú, elhaló emlékezet (fading memory) hatáshoz kell kapcsolódni.

A stabilitásvizsgálatban sajátérték problémákat kell megoldani, és azok regularitását - különálló statikus és dinamikus bifurkációkat és véges dimenziós kritikus saját-átér létezését - kell teljesíteni. Amikor a konstitutív egyenletek tört-rendű deriváltakat tartalmaznak, bizonyos követelményeknek kell megfelelniük. A térbeli nem lokális jellegnél az Ortigueira-féle kétoldalú tört-rendű derivált [5] megfelelő választás. A nem lokális idő esetén pedig a derivált Riemann-Liouville típusú. Ekkor Radwan módszerét [6] könnyen alkalmazhatjuk a stabilitásvizsgálatban.

Az előadás különböző tört-rendű derivált típusokat mutat be anyagi instabilitási problémák vizsgálatában, nem-lokális szilárd testeknél, a dinamikus rendszerek elméletének felhasználásával.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] G.A. Maugin, A.V. Metrikine, *Mechanics of generalized continua*, Springer, New York, 2010.
- [2] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives*. Gordon and Breach, Amsterdam, 1993.
- [3] Yu.N. Rabotnov, Equilibrium of an elastic medium with after-effect (in Russian). *Prikladnaya Matematika i Mekhanika* 12:53-62. 1948.
- [4] B.S. Altan, E.C. Aifantis, On some aspects in the special theory of gradient elasticity, *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, 8:231-282. 1997.
- [5] M.D. Ortigueira, Two-sided and regularised Riesz-Feller derivatives. *Math Meth Appl Sci*, <https://doi.org/10.1002/mma.5720> 2019.
- [6] A.G. Radwan, A.M. Soliman, A.S. Elwakil, A. Sedeek, On the stability of linear systems with fractional-order elements, *Chaos, Solitons and Fractals* 40:2317-2328. 2009.

## ÚJRAFELHASZNÁLHATÓ SZEIZMIKUS KERETSZERKEZET A KÖRKÖRÖS GAZDASÁG TERVEZÉSI KONCEPCIÓJÁHOZ

Jármai Károly<sup>1</sup>, Kaveh Andisheh<sup>2</sup>, Hafez Taheri<sup>2</sup>, Michail Karpenko<sup>2</sup>, Gregory MacRae<sup>3</sup>,  
Charles Clifton<sup>4</sup>, Pingsha Dong<sup>5</sup> és Nandor Mago<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Miskolci Egyetem, Energetikai és Vegyipari Gépészeti Intézet, 3515 Miskolc-Egyetemváros

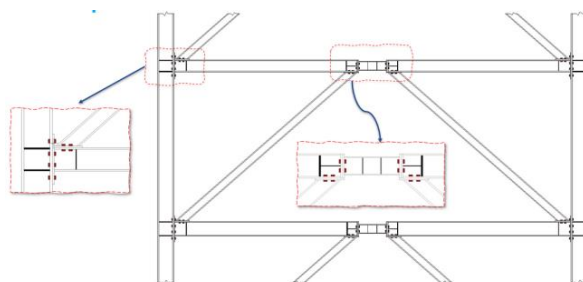
karoly.jarmai@uni-miskolc.hu

<sup>2</sup> HERA, New Zealand Heavy Engineering Research Association, 17-19 Gladding Place, Manukau City, Auckland  
2104, Új-Zéland

<sup>3</sup> University of Canterbury, Christchurch 8140, Új-Zéland, <sup>4</sup> University of Auckland, Auckland 1142, Új-Zéland

<sup>5</sup> University of Michigan, 500 S. State Street, Ann Arbor, MI 48109 USA

A Construction 4.0 egy fejlődő koncepció, amely a komplexitás tudományán, valamint a digitális és kapcsolódó technológiák fejlődésén alapul. Lehetősége van arra, hogy az építőipar számos területét pozitív módon átalakítsa, többek között időt és pénzt takarít meg, emeli a termelékenységi normákat, javítja a fenntarthatóságot, valamint csökkenti a kockázatokat és a környezeti hatásokat. Az Construction 4.0 sikeres megvalósításához több területen is kutatásra van szükség, például az épületinformációs modellezés (BIM), a dolgok internete (IoT), a mesterséges intelligencia (AI) és az automatizálási rendszerek területén. Az építőipari gyártás egyre inkább az érzékelőkre, robotokra és drónokra támaszkodik a munkák befejezéséig, valamint a körkörös gazdaság tervezési elveihez kapcsolódó termékéletciklus-menedzsmentet integráló digitális partneri kapcsolatokra és nyomon követésre. Az Construction 4.0 kritikus pillére a körkörös gazdasági tervezés, melynek célja a hulladék csökkentése, az erőforrások megőrzése és a fenntarthatóság előmozdítása a rugalmas, alkalmazkodó és rugalmas épületek és infrastruktúrák tervezésével. A körkörös gazdasági tervezés olyan innovatív építési technikák alkalmazását foglalja magában, amelyek élettartamuk végén könnyen szétszerelhetők, újra felhasználhatók vagy újrahasznosíthatók. Ez a tanulmány az újra felhasználható tervezés esettanulmány-koncepciójának kidolgozására összpontosít a szeizmikus keretszerkezetek tervezésére, ahogyan azt jellemzően az új-zélandi acélvázás szerkezeteknél alkalmazzák a szabványoknak megfelelően [1,2]. A kutatás a teljes szeizmikus vázszerkezet újra felhasználható, optimált tervezésére tesz javaslatot (1. ábra). A hegesztett szerkezeti méretek optimalálásakor - akár a tömeg, akár a költségek szempontjából - a felhasznált acél tömegének csökkentése az eredmény. Ez a súlycsökkentés közvetlenül korrelál a környezeti terhelés csökkentésével, mivel a környezeti terhelés közvetlenül összefügg a szerkezet tömegével. A hegesztési technológia környezeti hatása a hegesztési varrat méretétől is függ, ami közvetve befolyásolja a szerkezet tömegét. Mivel a tömegtől való függés mindhárom területen jelen van, de különböző módon, ezért ebben a tanulmányban egy többcélú függvényoptimalási megközelítést alkalmaztunk, amely ezt a három területet együttesen veszi figyelembe, miközben részben egymástól függetlenül is kezeli őket.



1. ábra. Az újra felhasználhatóság koncepciója alapján kifejlesztett, teljesen csavarozott kapcsolatokkal ellátott EBF-keretek.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatást az Új-Zélandi Üzleti Innovációs és Foglalkoztatási Minisztérium támogatja az Endeavour Funding projekt keretében az Új-Zélandi Nehézipari Kutatási Egyesület (HERA) által koordinált, Aotearoa Új-Zéland építőiparának Construction 4.0 átalakítása című projekt keretében.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] Standards New Zealand (1997/2001/2007). Steel structures standard (NZS 3404:Part 1 and 2:1997), Approved by the Steel Structures Committee (P 3404) for the Standards Council.
- [2] Steel Construction New Zealand (SCNZ) (2007). Steel Connections Guide - Part 1 & 2- Steel Connect (SCNZ 14.1:2007; SCNZ 14.2:2007), Manukau City, New Zealand.

## VÁLTOZTATHATÓ KÖZEL LINEÁRIS ÖRVÉNYÁRAMÚ CSILLAPÍTÓELEM FEJLESZTÉSE EGY GEOMETRIAI NEMLINEARITÁSSAL RENDELKEZŐ, KÉT VÉGÉN BEFOGOTT HOMOGEN RÚD REZGÉSÉNEK CSILLAPÍTÁSÁRA

Gábos Zoltán<sup>1,2</sup>, Gazdagh Zoltán<sup>3</sup> és Dombóvári Zoltán<sup>1,2</sup>

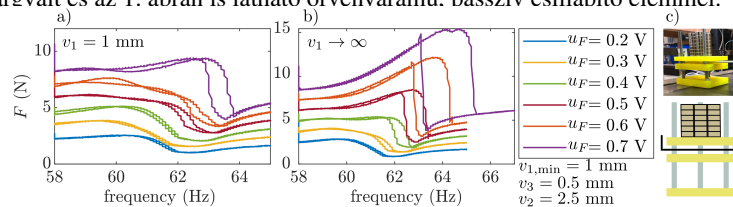
<sup>1</sup>Műszaki Mechanikai Tanszék, Gépészmérnöki Kar, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műegyetem rkp. 3 H-1111 Budapest, Magyarország

<sup>2</sup>MTA-BME Lendület Szerszámgéprezgések Kutatócsoport, Műszaki Mechanikai Tanszék, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Budapest H-1521  
e-mail: zoltan.gabos@mm.bme.hu

<sup>3</sup>Robert Bosch Kft, Kísérleti Akusztika, Budapest, Gyömrői út 104. H-1103, Magyarország

Egyre inkább elterjedt jelenség a karcsú alkatrészek használata mechanikai rendszerekben, köszönhetően a termékek kis tömege mellett elvárt magas követelményeknek. Ennek eredményeként rezgések kialakulásakor egyre gyakrabban előforduló probléma a szerkezet nemlineáris tartományában való terhelése és működése. Ilyen jelenség fordulhat elő például MEMS eszközökben [1], golyós orsós pozicionálásnál [2], vagy mágneses aktuátorok alkalmazása esetén [3], hogy néhányat említsünk.

A jelen tanulmány célja, hogy a lehető legegyszerűbb, egy szabadságfokú (DoF) nemlineáris gerjesztett rezgőrendszer hiszterézisének tulajdonságait szabályozni tudjuk örvényáramú csillapítással. Ennek bemutatására készült berendezés, a már korábban is használt két végén befogott geometriai nemlinearitással rendelkező rúd [4], kiegészítve az itt tárcsával és az 1. ábrán is látható örvényáramú, passzív csillapító elemmel.



1. ábra. Az örvényáramú csillapító elem c) és annak hatását demonstráló mérések diagramjai. a) és b) diagram a két szélső helyzete (kisebb, nagyobb, sorrendben) a mágnesek távolságának. Az  $u_F$  jelöli a rázóasztalra adott feszültség amplitúdó nagyságát, a szinuszos sörpésekhez.

A már említett rúdszerkezet leírható a jól ismert harmonikusan gerjesztett 1 DoF Duffing rendszerrel [4], melynek tömeggel normalizált alakja

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) + \mu x^3(t) = f_0\omega_n^2 \cos(\omega t),$$

$$\zeta = \frac{c}{2\omega_n m}, \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m}, \quad f_0 = \frac{F_0}{m\omega_n^2},$$
(1)

ahol  $\omega_n$  a rendszer sajátkörfrekvenciája,  $f_0$  a statikus deformáció és  $\zeta$  az általunk állítható arányos csillapítás. Továbbá  $m$ ,  $c$ ,  $k$  és  $F_0$  a szokásos rendszerre jellemző tömeg, csillapítási tényező, merevségi tényező és erő amplitúdó.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A Kulturális és Innovációs és Minisztérium ÚNKP-22-3-I-BME-86 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

This research was supported by the Hungarian Government in the framework of the NKFI FK 124361 research project.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] Y. Wei, Y. Dong, X. Huang, Z. Zhang, Nonlinearity measurement for low-pressure encapsulated mems gyroscopes by transient response, *Mechanical Systems and Signal processing* 100:534-549, 2018.
- [2] C. Li, M. Xu, W. Song, H. Zhang, A review of static and dynamic analysis of ball screw feed drivers, recirculating linear guideway, and ball screw, *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 188:104021, 2023.
- [3] B. Beri, A. Miklos, D. Takacs, G. Stepan, Nonlinearities of hardware-in-the-loop environment affecting turning process emulation, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 157:103611, 2020.
- [4] Z. Gabos, Z. Dombóvári, Z. Gazdagh, Case study on experimental identification of a single degree of freedom nonlinear mechanical system, *Proceedings of International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA2022)*, Editors: W. Desmet, B. Pluyms, D. Moens, S. Neeckx, Leuven, Belgium, 12-14 Sept. 2022.

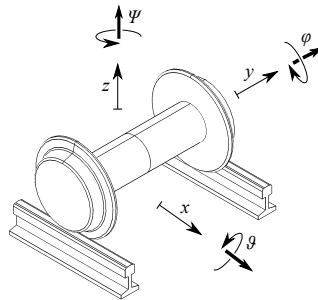
## VASÚTI KERÉK REZGÉSEINEK DINAMIKAI JELLEMZŐI ÉS STABILITÁSA

Finta Ervin<sup>1</sup> és Antali Máté<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Széchenyi István Egyetem, Alkalmazott Mechanika Tanszék  
 9026 Győr, Egyetem tér 1.  
 finta.ervin.peter@sze.hu, antali.mate@sze.hu

A vasúti kerekek rezgéseit a szakirodalomban két szabadságfokú modellel írják le, és ennek segítségével vizsgálják a stabilitási kritériumokat, lásd az [1], [2], [3] közleményeket.

A témával foglalkozó irodalom viszont nem szolgál kellő magyarázattal arra vonatkozóan, hogy miért elegendő a – merev test modellből vártnál kevesebb – két szabadságfokú rendszer vizsgálata. A tanulmányban először kimondjuk a merev testnek tekinthető vasúti kerékpár általános koordinátái közötti összefüggéseket, valamint rámutatunk arra, hogy mely egyenletek nem szükségesek a további dinamikai vizsgálatokhoz. Az 1. ábra a vasúti kerék modelljén felvett általános koordinátáit szemlélteti.



1. ábra. A vasúti kerék modellje és az általános koordináták

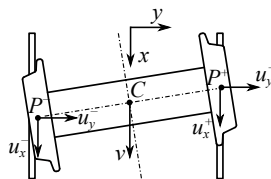
A kinematikai és a dinamikai összefüggések felírása után arra jutunk, hogy a feladat az

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

formális alakra hozható, ahol

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \psi \\ y \\ u_l \\ u_a \\ u_s \end{bmatrix} \quad (2)$$

a rendszer állapotvektora. A laterális kúszási sebességek átlagát  $u_l$ , a sín irányával megegyező irányú, aszimmetrikus, valamint szimmetrikus kúszási sebességet  $u_a$ , illetve  $u_s$  jelöli. A 2. ábrán az eredetileg felvett kúszási sebességek szerepelnek.



2. ábra. A vasúti kerék felülnézetben és a kúszási sebességek

Az (1) összefüggésből adódó differenciálegyenlet-rendszer sajátérték problémára vezet. Ennek megoldásából vizsgáljuk a paraméterek hatását a stabilitásvesztés kritikus sebességére.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] Zs. Szabó, G. Lóránt, Parametric Excitation of a Single Railway Wheelset, *Vehicle System Dynamics* 33(1):49-55, 2000.
- [2] T. Zhang, H. True, H. Dai, The Lateral Dynamics of a Nonsmooth Railway Wheelset Model, *International Journal of Bifurcations and Chaos* 28(8):1850095, 2018.
- [3] J. Guo, H. Shi, R. Luo, J. Zeng, Bifurcation analysis of a railway wheelset with nonlinear wheel-rail contact, *Nonlinear Dynamics* 104:989-1005, 2021.

## VIRTUÁLIS RÚDEGYENSÚLYOZÁS TÖRTRENDŰ DINAMIKÁVAL

Balogh Tamás<sup>1</sup> és Insperger Tamás<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>ELKH-BME Gépek Dinamikája Kutatócsoport

<sup>2</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék

tamas.balogh@mm.bme.hu, insperger@mm.bme.hu

Emberi egyensúlyozási feladatok kísérleti vizsgálata alapján következtetni tudunk a központi idegrendszer működésére. Ujjhegyen való rúdegyensúlyozás esetén egy közvetlenül mérhető paraméter az a legrövidebb rúdhossz, amit a mérési alanyok még éppen tudnak egyensúlyozni. A legrövidebb rúdhossz mért értékeit összevethetjük a központi idegrendszer különböző szabályozási modelljeihez tartozó elméleti értékekkel.

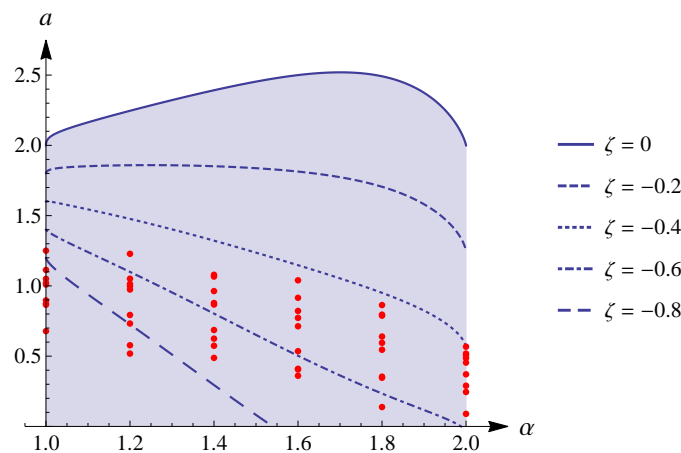
Az [1] tanulmányban a szerzők egy olyan virtuális egyensúlyozó környezetet dolgoztak ki, ami lehetővé teszi a rúdhossz változtatását és a reakcióidő mesterséges növelését  $\Delta\tau$  hozzáadott időkésséssel. Ezenkívül lehetőség van az emberi reakcióidő becslésére is közvetlen reakcióidő-mérés és ún. blank-out tesztek segítségével is. A jelen kutatás célja az [1] virtuális egyensúlyozó környezet vizsgálata abban az esetben, amikor a rúd mozgását egy törtrendű differenciálegyenlet írja le a tényleges másodrendű dinamika helyett. Ekkor a rúd (inverz inga) mozgását a következő egyenletek adják meg:

$${}^t_0D_*^\alpha \varphi(t) - \frac{3gk}{2l} \sin \varphi(t) = -\frac{3}{2l} \cos \varphi(t) {}^t_0D_*^\alpha x(t), \quad (1)$$

$${}^t_0D_*^\alpha x(t) = \frac{k}{m_c} F(t), \quad (2)$$

ahol  ${}^t_0D_*^\alpha$  a Caputo-féle tört derivált 0 alsó határral és  $\alpha$  derivált renddel [2],  $\varphi(t)$  a rúd és a függőleges instabil egyensúlyi helyzet által bezárt szög,  $x(t)$  a rúd alsó pontjához csatlakozó kiskocsi pozíciója,  $F(t)$  a kocsira ható vízszintes irányú külső erő,  $g$  a nehézségi gyorsulás,  $l$  a rúd hossza,  $m_c$  a kiskocsi tömege és  $k = 1 \text{ s}^{2-\alpha}$ . A tört derivált rendje a mérések során  $1 \leq \alpha \leq 2$  valós számnak választható.

Ha az  $F(t)$  külső erőre a rúd szögpozíciójával és szögsebességével arányos beavatkozást (arányos-differenciáló szabályozót) és  $\tau$  időkésséget feltételezünk, akkor a legrövidebb egyensúlyozható rúd hossza az 1. ábra szerint határozható meg  $\alpha$  függvényében. Az ábrán a rúd hosszától függő  $a = 3gk\tau^\alpha/(2l)$  paraméter mért értékei is láthatók. Az egyes pontok a mérési alanyok  $\alpha = 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8$  és 2 értékekkel elvégzett méréseinek felelnek meg (és 7 különböző hozzáadott időkésség mellett elvégzett mérés átlagát mutatják). Látható, hogy  $\alpha$  növelésével a kritikus  $a$  paraméter mért értékei kis mértékben csökkennek, ami arra utal, hogy egyfajta robusztus stabilizálhatóságnak ( $\zeta$ -stabilizálhatóságnak) van szerepe az egyensúlyozás során.



1. ábra. Az (1)–(2) egyenletek instabil egyensúlyi helyzet körüli stabilizálhatósági tartománya az idő dimenziótlanítása után az  $(\alpha, a)$ -síkon, ahol  $a = 3gk\tau^\alpha/(2l)$ . A  $\zeta$  paraméter kisebb értékei a dimenziótlan megoldások gyorsabb csillapodásának felelnek meg.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] B.A. Kovacs, T. Insperger, Virtual stick balancing: skill development in Newtonian and Aristotelian dynamics, *Journal of the Royal Society Interface* 19(188):20210854, 2022.  
 [2] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, Academic Press, San Diego, 1999.

## VISZKOELASZTIKUS-HŐTÁGULÁSI-HŐVEZETÉSI EGYENLETRENDSZER MOTIVÁCIÓJA, HÁTTERE ÉS NUMERIKUS MEGOLDÁSA

Fülöp Tamás

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Energetikai Gépek és Rendszerek  
Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.  
fulop.tamas@gpk.bme.hu

Összetettebb szerkezetű szilárd közegek (pl. kőzetek, polimerek) gyakran mutatnak viszkoelasztikus reológiai viselkedést, mely a prompt és reverzibilis rugalmas válasz helyett késleltetett-elnyúló és csillapított, irreverzibilis jellegű. A gyakorlat számára sokszor – így például a kőzetmechanika Anelastic Strain Recovery *in situ* feszültség-meghatározó eljárása [1] során – a Kluitenberg–Verhás reológiai modell használata elégséges, de szükséges is; ez a modellsalád a feszültség első és az alakváltozás második időderiváltjáig bezárólag vesz figyelembe járulékokat, így a Hooke-, a Kelvin–Voigt-, a Maxwell- és a Jeffreys-modell legszűkebb közös általánosítása. A Kluitenberg–Verhás modellsalád irreverzibilis termodinamikai szemszögből is egy univerzalitási osztály: az egyetlen szimmetrikus tenzori belső változóval onsageri úton nyerhető modellek osztálya [2].

A [2] közleményben található, entrópialapú megközelítés továbbfejlesztése mellett szóló egyik motiváció a gyakorlat számára fontos, konstans modellegyűthetős speciális esetcsalád közvetlenebb támogatása; egy másik, szintén alkalmazások igényelte továbblépés pedig a hőtágulás beépítése. A hőmérséklet-eloszlás ugyanis a hőtáguláson keresztül kinematikai és mechanikai hatású; a hőfeszültség és az irreverzibilis feszültségjárulék között keresztkapcsolatok tárgyalandó. Egy harmadik motiváció pedig a Poynting–Thomson–Zener viszkoelasztikus modell numerikus megoldásai jóságának monitorozásához bevált [3, 4], az egyes energiatípusok időbeli alakulását követő módszertan Kluitenberg–Verhás-szintre kiterjesztésének elvi megalapozása, a reológiai energijárulék explicit feltárása.

Az előadás bemutatja az ezeket a célokat megvalósító, energiaalapú megközelítést, és az adódó kontinuum-egyenletrendszerhez megalkotott, feladatmegoldás-orientált, másodrendben pontos, explicit, kiterjesztett szimplektikus végesdifferencia-sémát. A szimplektikus integrátorok reverzibilis – pl. csillapítatlan hullámterjedést leíró – rendszerekre használható, megbízható, nagy szimulációs időkre is jól teljesítő megoldók; irreverzibilis esetekre való alkalmas kiterjesztéseik pedig sokat megőriznek ezekből az előnyökből, így a disszipációs és diszperziós numerikus műtermékek szempontjából is kiemelkedően teljesítenek.

Kapcsolódó eredményeket [5] részletez jelen konferencia Takács–Fülöp előadása, egy gyakorlati alkalmazást [6] pedig a Szücs–Fülöp előadás.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A munka támogatója az NKFIH (szerződésszámok: FK 134277 és 2018-1.1.2-KFI-2018-00207).

### HIVATKOZÁSOK

- [1] K. Matsuki, Anelastic strain recovery compliance of rocks and its application to in situ stress measurement, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 45:952–965, 2008.
- [2] Cs. Asszonyi, T. Fülöp, P. Ván, Distinguished rheological models for solids in the framework of a thermodynamical internal variable theory, *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 27:971–986, 2015.
- [3] T. Fülöp, R. Kovács, M. Szücs, M. Fawiaer, Thermodynamical extension of a symplectic numerical scheme with half space and time shifts demonstrated on rheological waves in solids, *Entropy*, 22(2):155, 24 p., 2020.
- [4] Á. Pozsár, M. Szücs, R. Kovács, T. Fülöp, Four spacetime dimensional simulation of rheological waves in solids and the merits of thermodynamics, *Entropy* 22(12):1376, 24 p., 2020.
- [5] D. M. Takács, Á. Pozsár, T. Fülöp, Thermodynamically extended symplectic numerical simulation of viscoelastic, thermal expansion and heat conduction phenomena in solids, *arXiv:2211.12120*, 11 p., 2022.
- [6] T. Fülöp, M. Szücs, Az alakváltozási tenzor előállítása felületen mért elmozdulásjelből. In: D.M. Takács, P. Ván, B. Vásárhelyi (ed.), *Kőzetmechanika és termodinamika*, pp. 17–35, Egyesület a Tudomány és Technológia Egységéért, Budapest, 2023.



**Szerzők szerinti index**

Almádi Gergő	43	He Chaozhe R.	57
Andisheh Kaveh	71	Hénap Gábor	53, 69
Antali Máté	48, 73	Horváth András	37
Apagyai Antal	38	Horváth András	
Avedisov Sergei S.	57	Levente	36
Bablana Adrienn	65	Horváth Hanna Zsófia	58
Bachrathy Dániel	9, 17, 24	Horváth Péter	38
Baksa Attila	35	Iklódi Zsolt	8
Balogh Tamás	74	Imre Emőke	4
Baranyai Tamás	29	Insperger Tamás	23, 74
Bártfai András	40	Jármai Károly	64, 71
Bauer Balázs	62	Kádár Fanni	28
Béda Gyula	22	Karpenko Michail	71
Béda Péter	22, 70	Keppler István	65
Bencsik László	52	Kiss K. Ádám	20
Bende Margit	50, 54	Kollár Dénes	37
Berezvai Szabolcs	39, 61	Kollár László E.	25, 26
Bertóti Edgár	44	Kossa Attila	3, 36, 56, 66
Bodnár Dávid	64	Kovács Ádám	50
Bodor Bálint	52	Kovács Flórián	2
Bozóki Sándor	2	Kovács Márió	27
Brinissat Marame	38	Kovács Nauzika	60
Budai Csaba	19	Kovács Róbert	10
Clifton Charles	71	Kovács Tamás	5
Csákány Tibor	15	Köpeczi-Bócz Ákos	
Csernák Gábor	31, 53, 69	Tamás	41
Dobák Dávid	31	Kurutz Márta	15
Dombóvári Zoltán	8, 40, 49, 72	Kuti Rajmund	38
Domokos Gábor	2, 43	Lakatos Éva	15
Dong Pingsha	71	Lámer Géza	14
Dorogi Dániel	25	MacRae Gregory	71
Ecsedi István	35	Mago Nandor	71
Fehér Anna	10	Magyar Bálint	53, 69
Finta Ervin	73	Major Zoltán	38
Fodor Balázs	3	Martinovich Kristóf	9
Fodor Gergő	24	Máté Péter	46
Fülöp Tamás	13, 68, 75	McMeeking Robert M.	61
Gábos Zoltán	72	Messaoudi Abderrazek	33
Gazdagh Zoltán	72	Michel Sébastien	42
Guerra Riano Andres		Mihályi Levente	55
Felipe	6	Miklós Ákos	53, 69
Haba Tamás	19	Molnár Zsombor	45
Habbachi Marwen	35	Nagy Dalma J.	23
Habib Giuseppe	28, 34, 62	Orosz Gábor	1, 30, 57
Hajdu Dávid	49	Páczelt István	21
Hajdu Flóra	38	Papp Csenge	38
Haris István	47	Papp Dávid	2
Hauck Bence	63	Patkó Dóra	34
Havasi Kristóf	66	Pere Balázs	16, 18

Regős Krisztina	2, 43
Roszevák Zsolt	47
Rozgonyi Dániel	60
Sajtos István	67
Serfőző Dániel	16, 18
Sipos András Árpád	6, 42, 51
Stépan Gábor	1, 28, 30, 53, 69
Sykora Henrik	41
Szaksz Bence	30
Szalai Péter	38
Szeidl György	33
Székrenyes András	12, 46, 63
Szinvai Szabolcs	5
Szücs Mátyás	13
Taheri Hafez	71
Takács Dénes	1, 41, 55, 57, 58, 59
Takács Donát M.	68
Ther Péter Pál	67
Tóth Balázs	7, 45
Ván Péter	32
Varga Péter	15
Várkonyi Péter László	6
Vizi Máté Benjámin	1
Vörös Illés	59
Wohlfart Richárd	53, 69
Zana Roland Reginald	11, 53, 69
Zelei Ambrus Miklós	11, 34