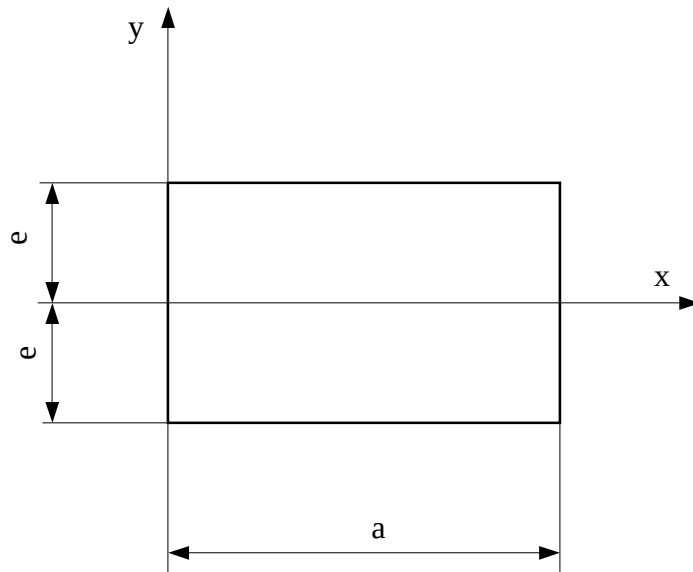


A rugalmasságtan síkbeli feladatai:

A rugalmasságtan síkbeli feladatai közül a síkalakváltozási (SA) és az általánosított síkfeszültségi állapotra (ÁSF) vonatkozó gyakorló feladatok.

SIK1. Adott az $U(x, y) = Ax^5 + Bx^3y^2$ függvény. A feladat megoldása során a térfogaton megoszló teheléstől tekintsen el!



1. Határozza meg az A és B állandók kapcsolatát, ha a függvény biharmónikus!
2. Feltételezve, hogy a megadott függvény valamely rugalmas test síkalakváltozására vonatkozó Airy-féle feszültségfüggvény, határozza meg a $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\sigma_z(x, y)$ és $\tau_{xy}(x, y)$ feszültségkoordinátákat!
3. Vázolja a $z = 0$, $y = -e$ él mentén a σ_y és τ_{xy} , illetve a $z = 0$, $x = a$ él mentén a σ_x és τ_{yx} feszültségek eloszlását, ha $A > 0$!
4. Határozza meg a $Q_1(a/2, -e, 0)$ és a $Q_2(a, e/2, 0)$ pontokban a felületi terhelés sűrűségvektorát!

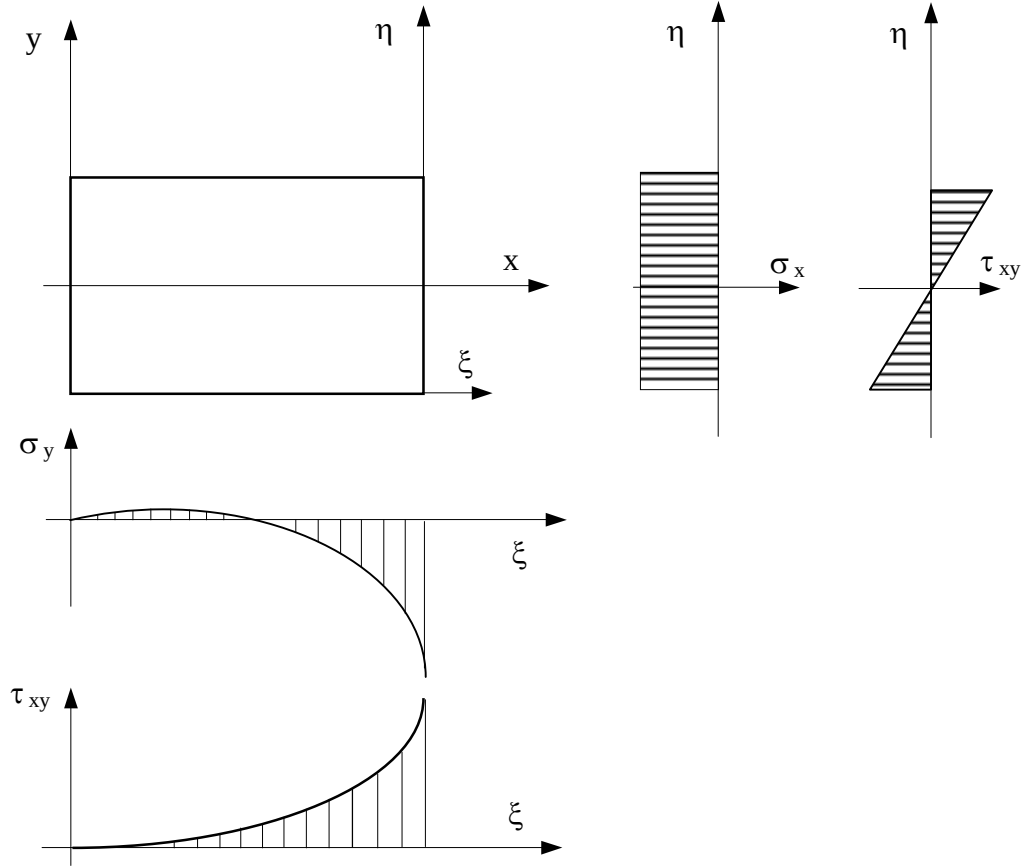
Megoldás:

1. $B = -5A$

2.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2Bx^3 = -10Ax^3 \\ \sigma_y &= 20Ax^3 + 6Bxy^2 = 10A(2x^3 - 3xy^2) \\ \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 10A\nu(x^3 - 3xy^2) \\ \tau_{xy} &= -6Bx^2y = 30Ax^2y\end{aligned}$$

3.



$$\tau_{xy}(\xi) = 30 A e \xi^2; \quad \sigma_y(\xi) = -A(20 \xi^3 - 30 e^2 \xi)$$

$$\tau_{xy}(\eta) = 30 A a^2 \eta; \quad \sigma_x(\eta) = -10 A a^2$$

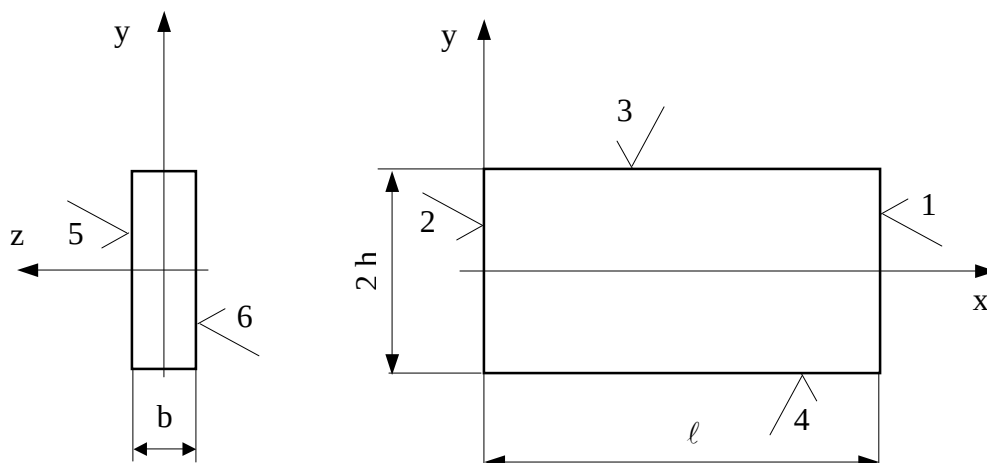
4. $\vec{p}_1(Q_1) = 7.5 A a^2 e \vec{e}_x - A(3.5 a^3 - 15 a e^2) \vec{e}_y$

$\vec{p}_2(Q_2) = -10 A a^3 \vec{e}_x + 15 A a^2 e \vec{e}_y$

SIK2. A síkalakváltozási állapotban lévő b vastagságú test ábrán vázolt négyszögtartományának Airy-féle feszültségfüggvénye az alábbiakban adott. A feladat megoldása során tekintsen el a térfogaton megoszló terheléstől!

$$U(x, y) = \frac{1}{2} A x^2 + B x y + \frac{1}{2} C y^2$$

1. Határozza meg a tartomány tetszőleges $P(x, y)$ pontjában a $\underline{T}$ feszültségi tenzort!
2. Állapítsa meg a tartomány hat oldallapján a peremterheléseket!



Megoldás:

$$1. \quad [\underline{T}] = \begin{bmatrix} C & -B & 0 \\ -B & A & 0 \\ 0 & 0 & \nu (A + C) \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_1 = \underline{T} \cdot \vec{e}_x = (C; -B; 0)$$

$$\vec{p}_2 = \underline{T} \cdot (-\vec{e}_x) = (-C; B; 0)$$

$$\vec{p}_3 = \underline{T} \cdot \vec{e}_y = (-B; A; 0)$$

$$2. \quad \vec{p}_4 = \underline{T} \cdot (-\vec{e}_y) = (B; -A; 0)$$

$$\vec{p}_5 = \underline{T} \cdot \vec{e}_z = (0; 0; \nu (A + C))$$

$$\vec{p}_6 = \underline{T} \cdot (-\vec{e}_z) = (0; 0; -\nu (A + C))$$

SIK3. Oldja meg az előző feladatot abban az esetben, ha az Airy-féle feszültségfüggvénye az alábbi:

$$U(x, y) = \frac{1}{6} A x^3 + \frac{1}{2} B x^2 y + \frac{1}{2} C x y^2 + \frac{1}{6} D y^3$$

Megoldás:

$$1. \quad \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} Cx + Dy & -(Bx + Cy) & 0 \\ -(Bx + Cy) & Ax + By & 0 \\ 0 & 0 & \nu[(A+C)x + (B+D)y] \end{bmatrix}$$

$$\bar{p}_1 = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{e}_x = (Cx + Dy)\vec{e}_x - (Bx + Cy)\vec{e}_y$$

$$\bar{p}_2 = \underline{\underline{T}} \cdot (-\vec{e}_x) = -Dy\vec{e}_x + Cy\vec{e}_y$$

$$2. \quad \bar{p}_3 = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{e}_y = -(Bx + Cy)\vec{e}_x + (Ax + By)\vec{e}_y$$

$$\bar{p}_4 = \underline{\underline{T}} \cdot (-\vec{e}_y) = (Bx + Cy)\vec{e}_x - (Ax + By)\vec{e}_y$$

$$\bar{p}_5 = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{e}_z = \sigma_z \vec{e}_z$$

$$\bar{p}_6 = \underline{\underline{T}} \cdot (-\vec{e}_z) = -\sigma_z \vec{e}_z$$

SIK4. Valamely síkbeli rugalmasságtani probléma Airy-féle feszültségfüggvénye adott:

$$U(x, y) = Ax^5 + Bx^4y + Cx^3y^2 + Dx^2y^3 + Exy^4 + Fy^5$$

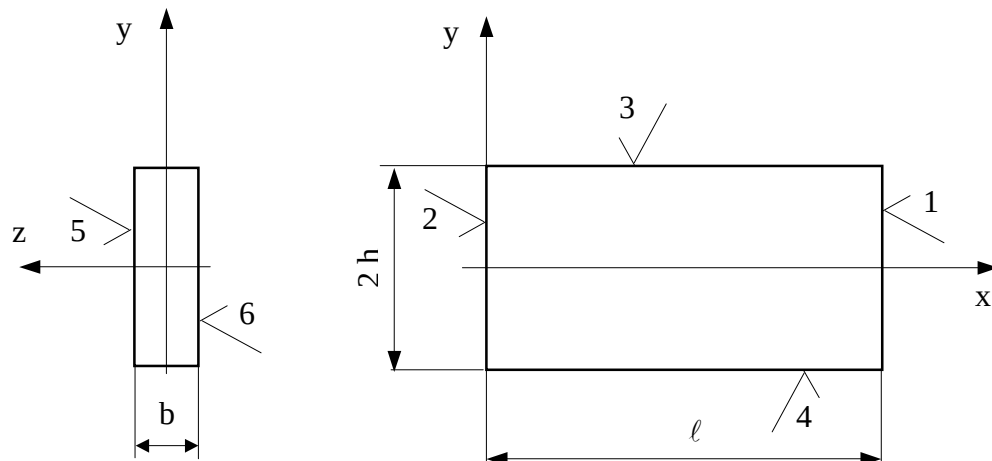
1. Állapítsa meg az együtthatók közötti függvénykapcsolatot!
2. A hat állandó együtthatóból hány vehető fel tetszőlegesen?

Megoldás:

$$1. \quad E = -(5A + C); \quad F = -(B + D)/5.$$

2. A hatból négy állandó vehető fel tetszőlegesen.

SIK5. Legyen az $U(x, y) = Dx^2y^3 + Fy^5$ függvény a síkalakváltozási állapotban lévő test négyszögtartományának Airy-féle feszültségfüggvénye. A térfogaton megoszló terhelést elhanyagoljuk.



Határozza meg a vázolt tartomány peremterhelését!

Megoldás:

$$\vec{p}_1 = \underline{T} \cdot \vec{e}_x = (6 D \ell^2 y + 20 F y^3) \vec{e}_x - (6 D \ell y^2) \vec{e}_y$$

$$\vec{p}_2 = \underline{T} \cdot (-\vec{e}_x) = -20 F y^2 \vec{e}_x$$

$$\vec{p}_3 = \underline{T} \cdot \vec{e}_y = -6 D h^2 x \vec{e}_x + 2 D h^3 \vec{e}_y$$

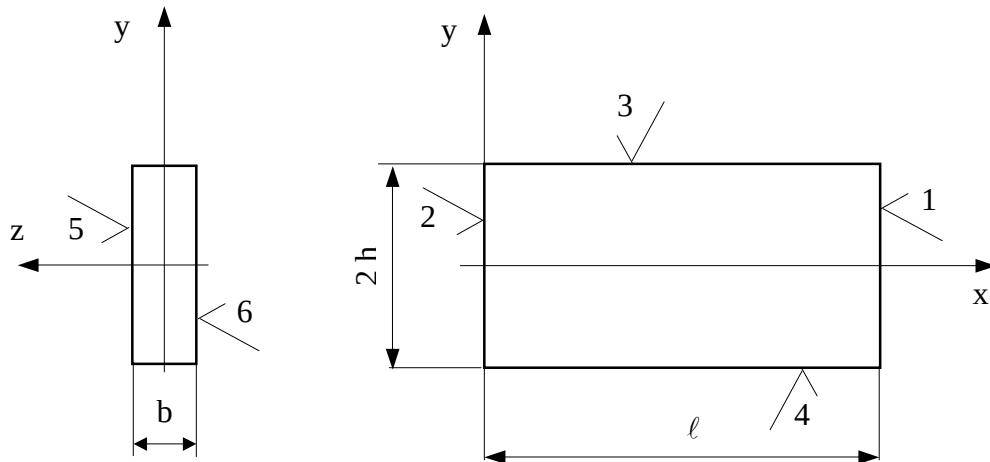
$$\vec{p}_4 = \underline{T} \cdot (-\vec{e}_y) = 6 D h^2 x \vec{e}_x - 2 D h^3 \vec{e}_y$$

$$\vec{p}_5 = \underline{T} \cdot \vec{e}_z = [6 D x^2 y + (20 F + 2 D) y^3] \vec{e}_z$$

$$\vec{p}_6 = \underline{T} \cdot (-\vec{e}_z) = -\sigma_z \vec{e}_z$$

SIK6. A vázolt b vastagságú test négyszögtartományának Airy-féle feszültségfüggvénye adott. A feladat megoldása során a térfogaton megoszló terhelés elhanyagolható.

$$U(x, y) = A x^4 + B x^3 y + C x^2 y^2 + D x y^3 + E y^4$$



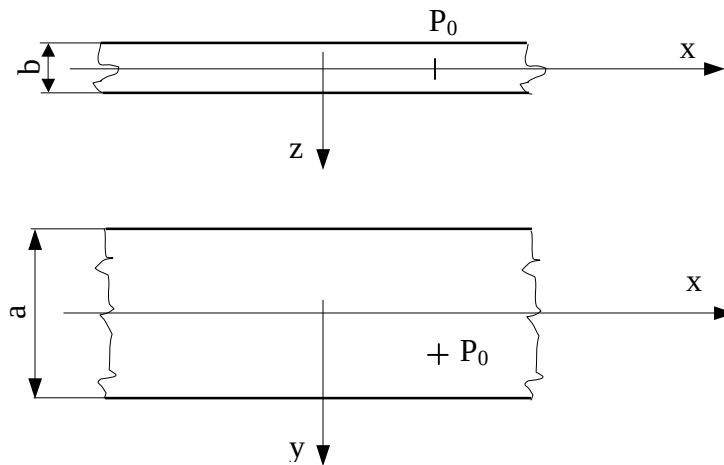
1. Állapítsa meg a feszültségfüggvény együtthatói közötti függvénykapcsolatot!
2. Síkalakváltozás feltételezésével határozza meg a tartomány peremterhelését, ha $A = B = C = E = 0$, $D \neq 0$!

Megoldás:

$$1. E = -(A + C/3)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_1 &= \underline{T} \cdot \bar{e}_x = 6 D \ell y \bar{e}_x - 3 D y^2 \bar{e}_y \\
 \bar{p}_2 &= \underline{T} \cdot (-\bar{e}_x) = 3 D y^2 \bar{e}_y \\
 2. \quad \bar{p}_3 &= \underline{T} \cdot \bar{e}_y = -3 D h^2 \bar{e}_x \\
 \bar{p}_4 &= \underline{T} \cdot (-\bar{e}_y) = 3 D h^2 \bar{e}_x \\
 \bar{p}_5 &= \underline{T} \cdot \bar{e}_z = \nu 6 D x y \bar{e}_z \\
 \bar{p}_6 &= \underline{T} \cdot (-\bar{e}_z) = -\nu 6 D x y \bar{e}_z
 \end{aligned}$$

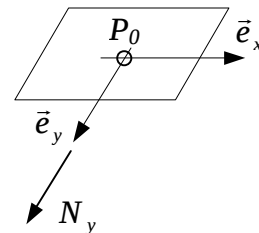
SIK7. A vázolt, x irányban végtelen kiterjedésű tárcsa felületi feszültségi állapotára vonatkozó Airy-féle feszültségfüggvény ismert. $U = A x^2$, $A = 2 \cdot 10^4 \text{ N/m}$.



1. Határozza meg az $\underline{N}$ felületi feszültségi tenzort a $P_0(x, y, 0)$ pontban és szemléltesse az elemi négyzeten!
2. Határozza meg a külső erőrendszert!

Megoldás:

$$1. \quad [\underline{N}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$



$$\vec{f}_1 = \vec{f}_2 = \vec{0}$$

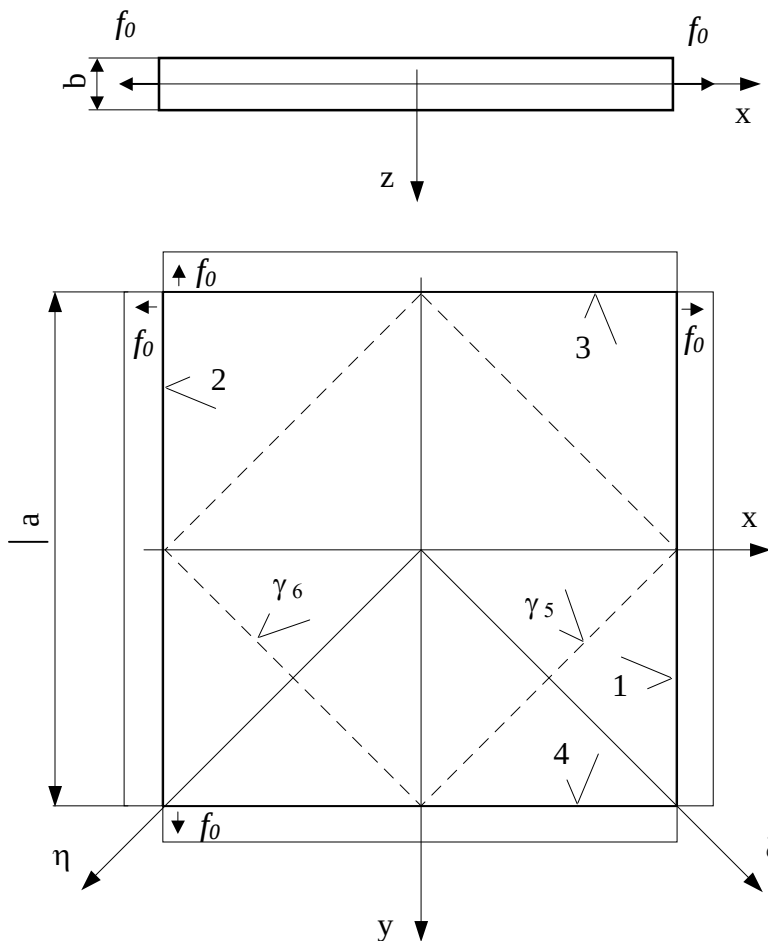
$$2. \quad \vec{f}_3 = 2 A \vec{e}_y = 4 \cdot 10^4 \vec{e}_y \text{ (N/m)}$$

$$\vec{f}_4 = -2 A \vec{e}_y = -4 \cdot 10^4 \vec{e}_y \text{ (N/m)}$$

SIK8. Adott az ábrán vázolt tárcsa felületi feszültségi állapotára vonatkozó Airy-féle feszültségfüggvény:

$$U(x, y) = \frac{f_0}{2} (x^2 + y^2)$$

A tárcsa középfelületének kerületét állandó, f_0 N/m sűrűségű külső, megoszló erőrendszer terheli.



1. Írja fel egy tetszőleges pontban az $\underline{N}$ felületi feszültségi tenzor mátrixát!
2. Ellenőrizze, hogy teljesülnek-e a peremfeltételek!
3. Vázolja az N_ξ , $N_{\eta\xi}$, illetve az N_η , $N_{\xi\eta}$ felületi feszültségek változását a bejelölt γ_5 és γ_6 élek mentén!

Megoldás:

$$1. \quad [\underline{N}] = \begin{bmatrix} f_0 & 0 \\ 0 & f_0 \end{bmatrix}$$

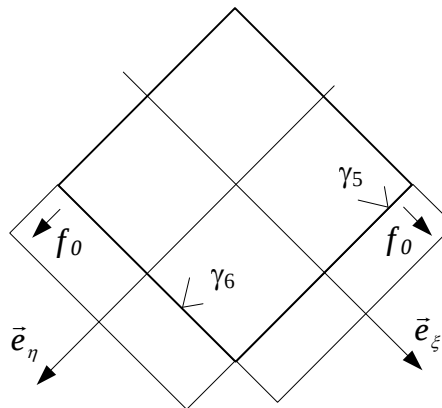
$$\vec{f}_1 = f_0 \vec{e}_x$$

$$2. \quad \vec{f}_2 = -f_0 \vec{e}_x$$

$$\vec{f}_3 = f_0 \vec{e}_y$$

$$\vec{f}_4 = -f_0 \vec{e}_y$$

$$3. \quad \begin{aligned} \vec{f}_5 &= f_0 \vec{e}_\xi \\ \vec{f}_6 &= f_0 \vec{e}_\eta \end{aligned}$$



SIK9. Az xy síkbeli alakváltozási állapotban a térfogati erőrendszer sűrűsége $\vec{q} = \vec{0}$. A feladat megoldására bevezetjük az $U(x, y)$ kétváltozós Airy-féle feszültségfüggvényt.

1. Milyen feltételnek kell eleget tennie az $U(x, y)$ függvénynek ahhoz, hogy a rugalmasságtan alapegyenletrendszerének valamennyi egyenlete teljesüljön?
2. Írja fel azon összefüggéseket, amelyekkel a zérustól különböző feszültségkoordináták származtathatók a feszültségfüggvényből!

Megoldás:

$$1. \quad \Delta \Delta U = 0$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

$$2. \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y) = \nu \Delta U$$

SIK10. Igazolja, hogy síkalakváltozás esetén $\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$!

Megoldás:

$$\varepsilon_z = 0 = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \rightarrow \sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$$

vagy

$$\varepsilon_z = 0 = \frac{1}{2G} \left[\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right]$$

$$(1+\nu) \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0$$

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$$

SIK11. Adja meg az N_x és N_y felületi feszültségkoordináták kiszámítására szolgáló összefüggéseket!

Megoldás:

$$N_x = \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x dz$$

$$N_y = \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_y dz$$

SIK12. Valamely síkbeli rugalmasságtani probléma $U(x, y)$ Airy-féle feszültségfüggvénye adott:

$$U(x, y) = Ax^4y + Bx^3y^2 + Cx^2y^3 + Dxy^4$$

A feladat megoldása során a térfogaton megoszló terhelés elhanyagolható. Állapítsa meg az együtthatók közötti függvénykapcsolatot!

Megoldás:

$$A + C = 0$$

$$B + D = 0$$