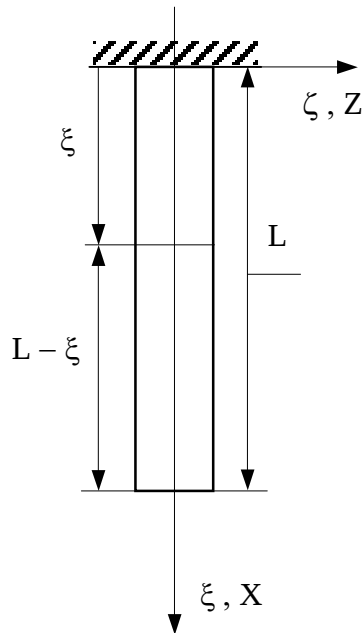


Végeselem-módszer:

Gyakorló feladatok síkbeli, húzott-nyomott rúdelem alkalmazására.

VEM1. Vizsgálja meg az alább vázolt, önsúlyával terhelt rudat. Állítsa elő a feladat analitikus, illetve egy és két elemű végeselem megoldását!



Megoldások:

$$u(\xi) = \frac{\rho g}{E} \left(L\xi - \frac{\xi^2}{2} \right)$$

Analitikus: $\sigma(\xi) = \rho g (L - \xi)$

$$\varepsilon(\xi) = \frac{\rho g}{E} (L - \xi)$$

$$u(\xi) = \frac{\rho g L}{2 E} \xi$$

Egy elemű végeselemes: $\sigma(\xi) = \frac{\rho g L}{2}$

$$\varepsilon(\xi) = \frac{\rho g L}{2 E}$$

$$u^1(\xi) = \frac{3\rho g L}{4E} \xi$$

$$u^2(\xi) = \frac{\rho g L^2}{E} \left(\frac{3}{8} + \frac{\xi}{4L} \right)$$

$$\sigma^1(\xi) = \frac{3\rho g L}{4}$$

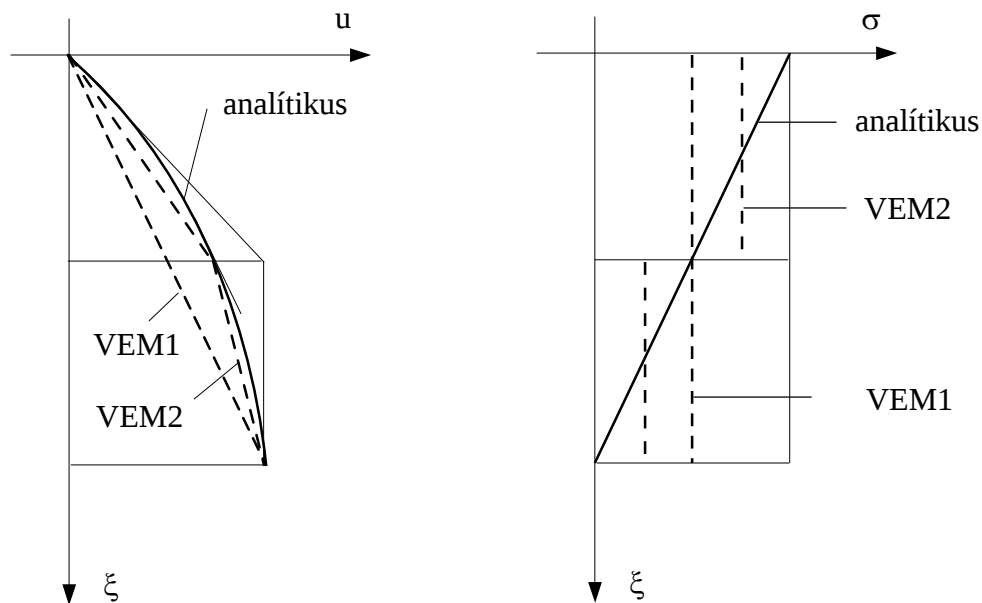
$$\sigma^2(\xi) = \frac{\rho g L}{4}$$

$$\varepsilon^1(\xi) = \frac{3\rho g L}{4E}$$

$$\varepsilon^2(\xi) = \frac{\rho g L}{4E}$$

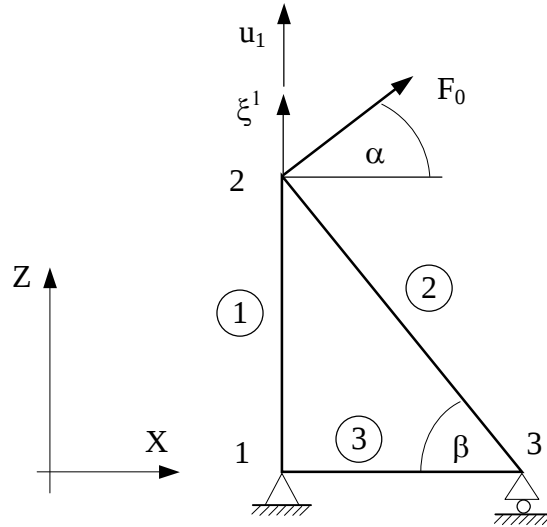
Két elemű végelelemes:

Grafikusan:



VEM2. Vizsgáljuk meg az XZ síkban lévő rácsos szerkezetet, melyre a 2-es jelű csomópontban koncentrált erő működik. A rudak anyaga és keresztmetszete azonos. A rudakhoz kötött helyi koordináta-rendszer ξ tengelye a kisebb sorszámú csomóponttól a nagyobb sorszámú csomópont felé mutat.

A rudak hosszai: L_1, L_2, L_3 .



1. Írja fel a ② rúdelem esetén az alakváltozási energiát az elemhez kötött helyi koordináta-rendszerben mátrixos alakban!
2. Írja fel globális koordináta-rendszerben a teljes szerkezet csomóponti elmozdulásvektorát, csomóponti terhelésvektorát és merevségi mátrixát blokkolt formában!
3. Adja meg a kinematikai peremfeltételeket!
4. Írja fel a $\underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{f}}$ egyenletrendszert mátrixosan a peremfeltételek figyelembevétele után a globális koordináta-rendszerben!

Megoldás:

$$1. U^2 = \frac{1}{2} \underline{\underline{q}}^{2T} \underline{\underline{K}}^2 \underline{\underline{q}}^2 = \frac{1}{2} \frac{AE}{L_2} [u_2 \quad u_3]^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^2$$

$$2. \underline{\underline{q}}^T = [\underline{\underline{q}}^{1T} \quad \underline{\underline{q}}^{2T} \quad \underline{\underline{q}}^{3T}] = [U_1 \quad W_1 \quad U_2 \quad W_2 \quad U_3 \quad W_3]$$

$$\underline{\underline{f}}^T = [\underline{\underline{f}}^{1T} \quad \underline{\underline{f}}^{2T} \quad \underline{\underline{f}}^{3T}] = [0 \quad 0 \quad F_0 \cos \alpha \quad F_0 \sin \alpha \quad 0 \quad 0]$$

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{11}^1 + \underline{\underline{K}}_{11}^3 & \underline{\underline{K}}_{12}^1 & \underline{\underline{K}}_{13}^3 \\ \underline{\underline{K}}_{21}^1 & \underline{\underline{K}}_{22}^1 + \underline{\underline{K}}_{22}^2 & \underline{\underline{K}}_{23}^2 \\ \underline{\underline{K}}_{31}^3 & \underline{\underline{K}}_{32}^2 & \underline{\underline{K}}_{33}^2 + \underline{\underline{K}}_{33}^3 \end{bmatrix}$$

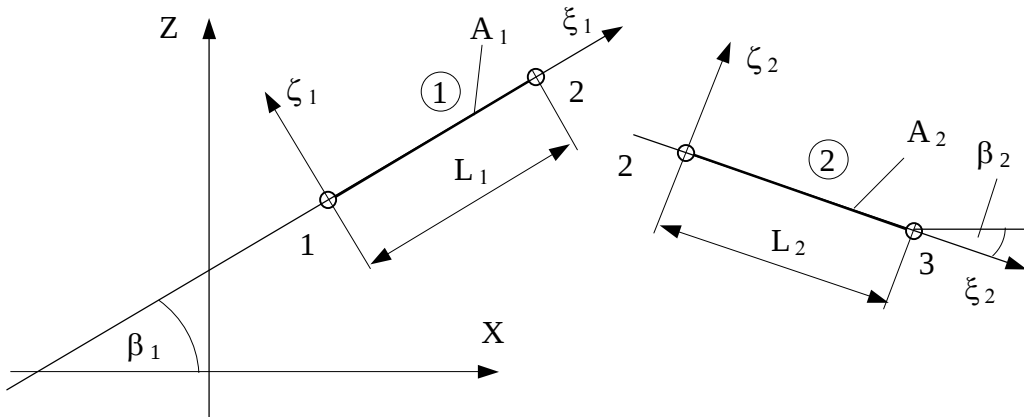
$$3. U_1 = W_1 = W_3 = 0$$

$$\cos \beta = c$$

$$\sin \beta = s$$

$$4. \begin{bmatrix} \frac{c^2 AE}{L_2} & -\frac{cs AE}{L_2} & -\frac{c^2 AE}{L_2} \\ -\frac{cs AE}{L_2} & \frac{s^2 AE}{L_2} + \frac{AE}{L_1} & \frac{cs AE}{L_2} \\ -\frac{c^2 AE}{L_2} & \frac{cs AE}{L_2} & \frac{c^2 AE}{L_2} + \frac{AE}{L_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ W_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \cos \alpha \\ F_0 \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

VEM3. Adott az alábbi ábrán vázolt ① és ② jelű húzott-nyomott rúdelem. Az $L_1, L_2, A_1, A_2, E_1 = E_2 = E, \beta_1, \beta_2$ mennyiségeket tekintse ismertnek.



1. Írja fel az ① jelű elem helyi rendszerben értelmezett elemi merevségi mátrixát és csomóponti elmozdulásvektorát!
2. A ② jelű rúdelemet a 2-es jelű csomópontban illesztjük az ① jelű rúdelemhez. Írja fel az ① jelű elem csomóponti elmozdulásvektorára vonatkozó transzformációs összefüggést!
3. Írja fel a ② jelű elem helyi, illetve globál rendszerbeli elemi merevségi mátrixa közötti transzformációs összefüggést csak jelölésekkel és blokkolt formában a globál rendszerbeli elemi merevségi mátrixot!

Megoldás:

$$1. \quad \underline{\underline{K}}^1 = \frac{A_1 E}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^1 \quad \underline{\underline{q}}^1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}^1$$

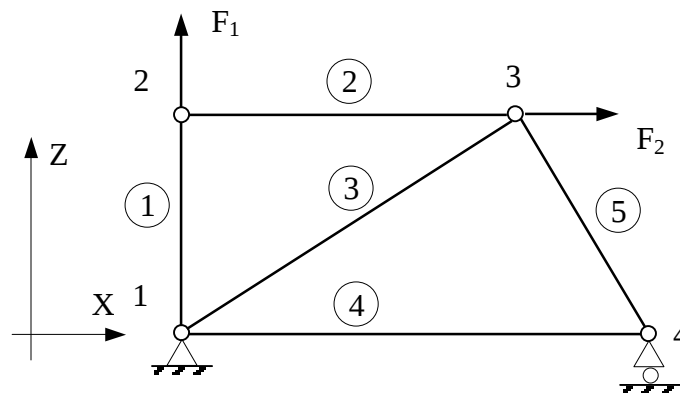
$$\underline{\underline{q}}^1 = \underline{\underline{T}}^1 \underline{\underline{q}}^1$$

$$2. \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & \sin \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta_1 & \sin \beta_1 \end{bmatrix}^1 \begin{bmatrix} U_1 \\ W_1 \\ U_2 \\ W_2 \end{bmatrix}^1$$

$$3. \quad \underline{\underline{K}}^2 = \underline{\underline{T}}^{2T} \underline{\underline{K}}^2 \underline{\underline{T}}^2$$

$$\underline{\underline{K}}^2 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{22}^2 & \underline{\underline{K}}_{23}^2 \\ \underline{\underline{K}}_{32}^2 & \underline{\underline{K}}_{33}^2 \end{bmatrix}$$

VEM4. Adott az alábbi, húzott-nyomott rudakból álló, síkbeli rácsos szerkezet:



1. Adja meg a ② jelű rúdelem merevségi mátrixát globál rendszerben blokkolt formában!
2. Írja fel a feladat peremfeltételeit!
3. Adja meg a $\underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{f}}$ egyenletrendszerben szereplő mátrixokat: a teljes szerkezet merevségi mátrixát blokkolt formában, illetve a csomóponti elmozdulásvektorban és terhelésvektorban szereplő elemeket!

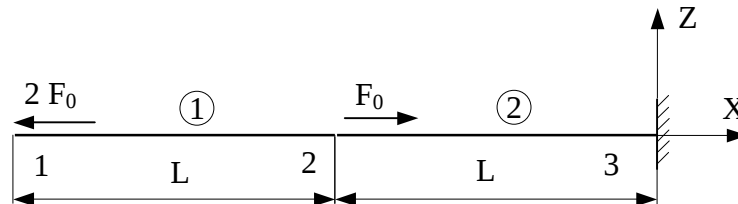
Megoldás:

$$1. \quad \underline{\underline{K}}^2 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{22}^2 & \underline{\underline{K}}_{23}^2 \\ \underline{\underline{K}}_{32}^2 & \underline{\underline{K}}_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad U_1 = 0 ; W_1 = 0 ; W_4 = 0$$

$$3. \quad \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{11}^1 + \underline{\underline{K}}_{11}^3 + \underline{\underline{K}}_{11}^4 & \underline{\underline{K}}_{12}^1 & \underline{\underline{K}}_{13}^3 & \underline{\underline{K}}_{14}^4 \\ \underline{\underline{K}}_{21}^1 & \underline{\underline{K}}_{22}^1 + \underline{\underline{K}}_{22}^2 & \underline{\underline{K}}_{23}^2 & 0 \\ \underline{\underline{K}}_{31}^3 & \underline{\underline{K}}_{32}^2 & \underline{\underline{K}}_{33}^2 + \underline{\underline{K}}_{33}^3 + \underline{\underline{K}}_{33}^5 & \underline{\underline{K}}_{34}^5 \\ \underline{\underline{K}}_{41}^4 & 0 & \underline{\underline{K}}_{43}^5 & \underline{\underline{K}}_{44}^4 + \underline{\underline{K}}_{44}^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ W_2 \\ U_3 \\ W_3 \\ U_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

VEM5. Az ábrán vázolt húzott-nyomott rudat végeelem-módszerrel vizsgáljuk. Az 1. elem csomópontjai 1, 2, a 2. elemé pedig 2, 3. $AE = \text{áll.}$



1. Írja fel külön-külön a két elem merevségi mátrixát, majd a szerkezet összeillesztett merevségi mátrixát a lokális koordináta-rendszerben!
2. A külső erők virtuális munkájából kiindulva értelmezze a szerkezet csomóponti elmozdulás- és terhelésvektorát!
3. Határozza meg a csomóponti elmozdulásokat!

Megoldás:

$$1. \quad \underline{\underline{K}}^1 = \underline{\underline{K}}^2 = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

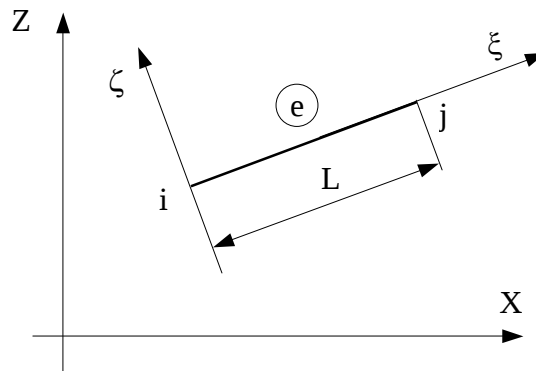
$$2. \quad W_k = -2 F_0 u_1 + F_0 u_2 = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 F_0 \\ F_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{q}}^T \underline{\underline{f}}$$

$$u_1 = -3 \frac{F_0 L}{A E}$$

$$3. \quad u_2 = -\frac{F_0 L}{A E}$$

$$u_3 = 0$$

VEM6. Az ábrán vázolt síkbeli húzott-nyomott rúdelemet vizsgáljuk. $AE = \text{áll.}$



Az elmozdulásmező $u^e = a + b \xi$ alakú lineáris közelítéséből kiindulva vezesse le az elem $\underline{\underline{K}}^e$ helyi KR-ben értelmezett merevségi mátrixának kiszámítására szolgáló formulát!

Megoldás:

$$u^e(0) = a \quad ; \quad u^e(L) = a + b L$$

$$a = u_i^e \quad ; \quad b = \frac{u_j^e - u_i^e}{L}$$

$$u^e(\xi) = u_i^e + \frac{u_j^e - u_i^e}{L} \xi$$

$$u^e(\xi) = \begin{bmatrix} 1 - \xi/L & \xi/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} 1 - \xi/L \\ \xi/L \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon^e = \frac{d u^e}{d \xi} = \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{bmatrix}$$

$$\sigma^e = E \varepsilon^e$$

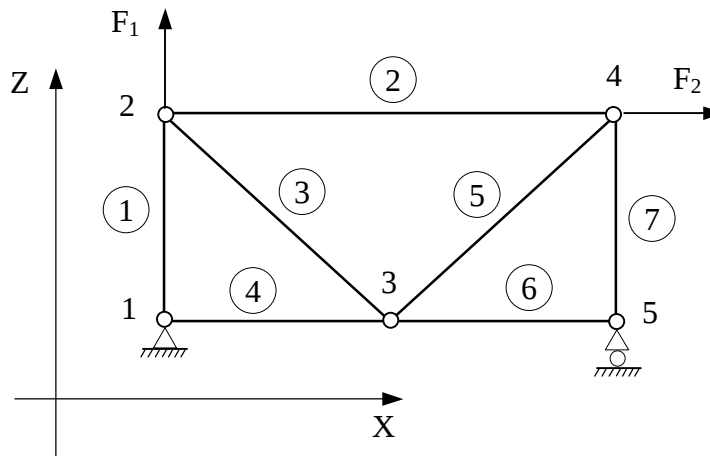
$$U^e = \frac{1}{2} \int_{(V^e)} \sigma^e \varepsilon^e dV = \frac{1}{2} \int_{(L)} \varepsilon^e A E \varepsilon^e d\xi =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix}^e \int_{(L)} \begin{bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{bmatrix} A E \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}^e =$$

$$= \frac{1}{2} \underline{\underline{\bar{q}}}^{eT} \underline{\underline{\bar{K}}}^e \underline{\underline{\bar{q}}}^e$$

$$\underline{\underline{\bar{K}}}^e = \frac{A E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

VEM7. Adott az alábbi, húzott-nyomott rudakból álló, síkbeli rácsos szerkezet.



1. Írja fel a feladat peremfeltételeit!
2. Adja meg a szerkezet merevségi mátrixát blokkolt formában!
3. Adja meg a szerkezet csomóponti elmozdulásvektorában és terhelési vektorában szereplő elemeket!

Megoldás:

$$1. \quad U_1 = 0, W_1 = 0, W_5 = 0.$$

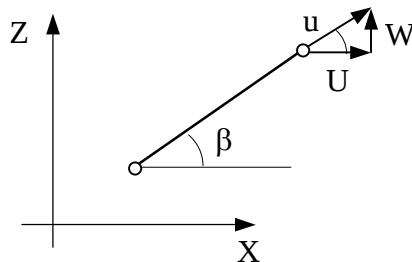
$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{11}^1 + \underline{\underline{K}}_{11}^4 & \underline{\underline{K}}_{12}^1 & \underline{\underline{K}}_{13}^4 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{K}}_{21}^1 & \underline{\underline{K}}_{22}^1 + \underline{\underline{K}}_{22}^2 + \underline{\underline{K}}_{22}^3 & \underline{\underline{K}}_{23}^3 & \underline{\underline{K}}_{24}^4 & 0 \\ \underline{\underline{K}}_{31}^4 & \underline{\underline{K}}_{32}^3 & \underline{\underline{K}}_{33}^3 + \underline{\underline{K}}_{33}^4 + \underline{\underline{K}}_{33}^5 + \underline{\underline{K}}_{33}^6 & \underline{\underline{K}}_{34}^5 & \underline{\underline{K}}_{35}^6 \\ 0 & \underline{\underline{K}}_{42}^2 & \underline{\underline{K}}_{43}^5 & \underline{\underline{K}}_{44}^2 + \underline{\underline{K}}_{44}^5 + \underline{\underline{K}}_{44}^7 & \underline{\underline{K}}_{45}^7 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{K}}_{53}^6 & \underline{\underline{K}}_{54}^7 & \underline{\underline{K}}_{55}^6 + \underline{\underline{K}}_{55}^7 \end{bmatrix} \quad 2.$$

$$3. \quad \underline{\underline{q}}^T = [U_1 \quad W_1 \quad U_2 \quad W_2 \quad U_3 \quad W_3 \quad U_4 \quad W_4 \quad U_5 \quad W_5]$$

$$\underline{\underline{f}}^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad F_1 \quad 0 \quad 0 \quad F_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

VEM8. Síkbeli, húzott-nyomott rúdelemet vizsgálunk. Írja fel a csomópontok lokális és globális koordináta-rendszerben értelmezett elmozdulásai közötti transzformációt! Készítsen magyarázó ábrát!

Megoldás:



$$u = U \cos \beta + W \sin \beta = U c + W s$$

$$\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} U_i \\ W_i \\ U_j \\ W_j \end{bmatrix}^e$$

$$\underline{\underline{\bar{q}}}^e = \underline{\underline{T}}^e \cdot \underline{\underline{q}}^e$$

VEM9. Az elem helyi koordináta-rendszerében értelmezett $\underline{\underline{K}}^e$ merevségi mátrixából kiindulva vezesse le a globális koordináta-rendszerben értelmezett $\underline{\underline{K}}^e$ merevségi mátrix elemeinek kiszámítására szolgáló formulát!

Megoldás:

$$\underline{\underline{K}}^e = \underline{\underline{T}}^{eT} \underline{\underline{K}}^e \underline{\underline{T}}^e = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ s & 0 \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}^e = \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}$$

VEM10. Végeselem-módszer alkalmazása esetén a homogén, prizmatikus rúdelem elmozdulásmezőjét lineáris mezővel közelítjük. Milyen megoldást kapunk, ha a rúdelem igénybevétele húzás vagy nyomás?

Megoldás:

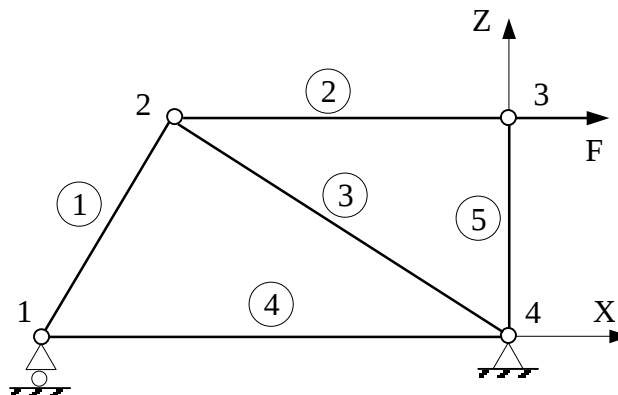
$AE = \text{áll.}$

Egyensúlyi egyenlet: $AE u'' + f_\xi = 0$

Ha u lineáris, akkor $u'' = 0 \rightarrow f_\xi = 0$

Az egyensúlyi egyenlet teljesül, a megoldás egzakt.

VEM11. Adott az alábbi, húzott-nyomott rudakból álló, síkbeli rácsos szerkezet.



Adja meg globális koordináta-rendszerben a ② jelű rúdelem, valamint az egész szerkezet merevségi mátrixát blokkolt formában!

Megoldás:

$$\underline{\underline{K}}^2 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{22}^2 & \underline{\underline{K}}_{23}^2 \\ \underline{\underline{K}}_{32}^2 & \underline{\underline{K}}_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{11}^1 + \underline{\underline{K}}_{11}^4 & \underline{\underline{K}}_{12}^1 & 0 & \underline{\underline{K}}_{14}^4 \\ \underline{\underline{K}}_{21}^1 & \underline{\underline{K}}_{22}^1 + \underline{\underline{K}}_{22}^2 + \underline{\underline{K}}_{22}^3 & \underline{\underline{K}}_{23}^2 & \underline{\underline{K}}_{24}^3 \\ 0 & \underline{\underline{K}}_{32}^2 & \underline{\underline{K}}_{33}^2 + \underline{\underline{K}}_{33}^5 & \underline{\underline{K}}_{34}^5 \\ \underline{\underline{K}}_{41}^4 & \underline{\underline{K}}_{42}^3 & \underline{\underline{K}}_{43}^5 & \underline{\underline{K}}_{44}^3 + \underline{\underline{K}}_{44}^4 + \underline{\underline{K}}_{44}^5 \end{bmatrix}$$