

Prizmatikus rudak szabad csavarása:

Gyakorló feladatok tetszőleges keresztmetszetű prizmatikus rudak Saint-Venant-féle csavarási feladatára.

CSAV1. Egy homogén, lineárisan rugalmas anyagú prizmatikus rúd csavarásánál fellépő elmozdulásvektor az alábbi alakú:

$$\vec{u} = -\vartheta y z \vec{e}_x + \vartheta x z \vec{e}_y + \vartheta \varphi(x, y) \vec{e}_z$$

1. Határozza meg az $\underline{\underline{U}}$ derivált tenzor, az $\underline{\underline{A}}$ alakváltozási tenzor és a $\underline{\underline{T}}$ feszültségi tenzor mátrixát!
2. A $\underline{\underline{T}} \cdot \nabla = \vec{0}$ ($\vec{q} = \vec{0}$) egyensúlyi egyenlet felhasználásával mutassa ki, hogy a $\varphi = \varphi(x, y)$ függvény kielégíti a $\Delta \varphi = 0$ parciális differenciálegyenletet!
3. Milyen kerületi feltételt kell kielégítenie a $\varphi = \varphi(x, y)$ függvénynek, ha a rúd palástja terheletlen, vagyis, ha $\vec{p} = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n} = \vec{0}$?
4. Igazolja, hogy a prizmatikus rúd bármely keresztmetszetét

$$M_c = \vartheta G \int_{(A)} \left(x^2 + y^2 - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dA$$

nagyságú csavarónyomaték terheli!

Megoldás:

$$\underline{\underline{U}} = \vartheta \begin{bmatrix} 0 & -z & -y \\ z & 0 & x \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{A}} = \frac{\vartheta}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y & \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x & 0 \end{bmatrix}$$

1.

$$\underline{\underline{T}} = G \vartheta \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y & \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{T}} \cdot \nabla = \vec{0}$$

$$2. \quad G \mathcal{G} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y & \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = G \mathcal{G} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \Delta \varphi = 0$$

$$3. \quad G \mathcal{G} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y & \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = G \mathcal{G} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) n_x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) n_y \end{bmatrix}$$

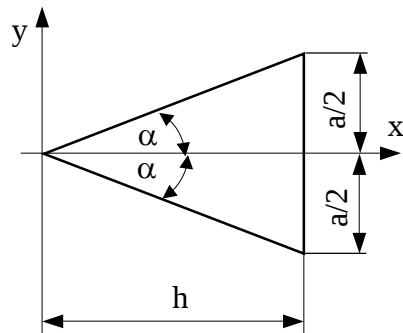
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} n_y = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -x n_y + y n_x \quad \text{a rúd palástján}$$

$$M_c \vec{e}_z = \int_{(A)} \vec{R} \times \vec{\rho}_z dA$$

$$4. \quad M_c = \int_{(A)} (x \tau_{yz} - y \tau_{xz}) dA = G \mathcal{G} \int_{(A)} \left(x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \right) dA$$

$$M_c = \mathcal{G} G \int_{(A)} \left(x^2 + y^2 - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dA$$

CSAV2. Az ábrán vázolt egyenlőszárú háromszög alakú keresztmetszet igénybevétele csavarás. A keresztmetszet $U = U(x, y)$ Prandtl-féle feszültségfüggvényét az alábbi alakban keressük:



$$U = C(x - h)(y^2 - k^2 x^2)$$

1. Határozza meg C és k értékét úgy, hogy az $U = U(x, y)$ tegyen eleget a $\Delta U = -2 G \vartheta$ Poisson-féle parciális differenciálegyenletnek!
2. Igazolja, hogy a C állandó értékétől függetlenül az $U = U(x, y)$ feszültségfüggvény eltűnik a háromszög oldalain!
3. Határozza meg a $\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y)$ és a $\tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y)$ csúsztatófeszültségeket!
4. Vázolja a $\tau_{yz}(x, 0)$ függvényt!
5. Számítsa ki az M_c csavarónyomatékot és a keresztmetszet $I_c = M_c / G \vartheta$ csavarási merevségét (csavarási tehetetlenségi nyomatékát)!
6. Határozza meg $\tau_{\max}$ értékét!

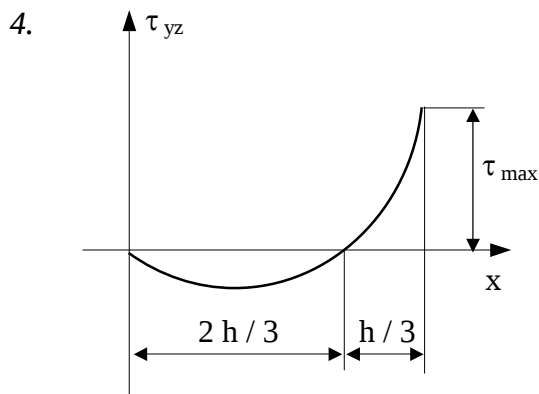
Megoldás:

$$1. \quad k^2 = \frac{1}{3}; \quad C = \frac{3 G \vartheta}{2 h}$$

$$2. \quad x = h: \quad U = 0$$

$$y = \pm a x / 2 h \quad U = 0$$

$$3. \quad \begin{aligned} \tau_{xz} &= 3 G \vartheta (x y - h y) \\ \tau_{yz} &= -\frac{3 G \vartheta}{2} \left(y^2 - x^2 + \frac{2}{3} h x \right) \end{aligned}$$

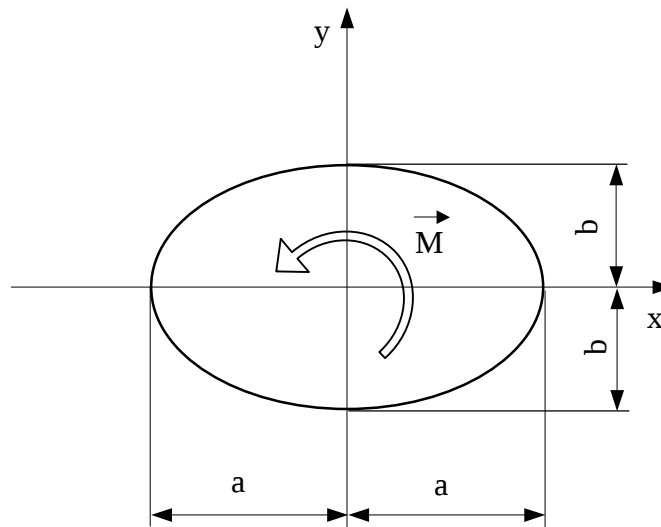


$$5. \quad M_c = G \frac{\sqrt{3}}{80} a^4; \quad I_c = \frac{\sqrt{3}}{80} a^4$$

$$6. \quad \tau_{\max} = \frac{20 M_c}{a^3}$$

CSAV3. Az ábra egy ellipszis keresztmetszetű prizmatikus rudat szemléltet. A keresztmetszet igénybevétele tiszta csavarás. A keresztmetszet Prandtl-féle feszültségfüggvényét az alábbi alakban keressük:

$$U = U(x, y) = C \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$



1. Igazolja, hogy az $U = U(x, y)$ feszültségfüggvény az ellipszis alakú tartomány peremén eltűnik!
2. Határozza meg a C állandó értékét úgy, hogy az $U = U(x, y)$ feszültségfüggvény elégítse ki a $\Delta U = -2G\vartheta$ Poisson-féle parciális differenciálegyenletet!
3. Határozza meg a $\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y)$ és a $\tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y)$ függvényeket!
4. Határozza meg az M_c csavarónyomaték és az $I_c = M_c / G\vartheta$ csavarási merevség (csavarási tehetetlenségi ellenállás) értékét!
5. Mekkora a ϑ fajlagos elcsavaródás értéke, ha $M_c = 800$ kNm, $G = 80000$ MPa, $a = 40$ mm és $b = 20$ mm?
6. Határozza meg a γ_{xz} és γ_{yz} fajlagos szögváltozásokat (csak betűkkel)!
7. Vizsgálja meg a $D = 2a = 2b$ esetet!

Megoldás:

$$1. \text{ Az ellipszis peremgörbéje: } 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \rightarrow U|_{g_0} = 0$$

$$2. \quad C = G\vartheta \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$$3. \quad \tau_{xz} = -2 G \vartheta \frac{a^2}{a^2 + b^2} y; \quad \tau_{yz} = 2 G \vartheta \frac{a^2}{a^2 + b^2} x$$

$$4. \quad M_c = G \vartheta \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \pi; \quad I_c = \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \pi$$

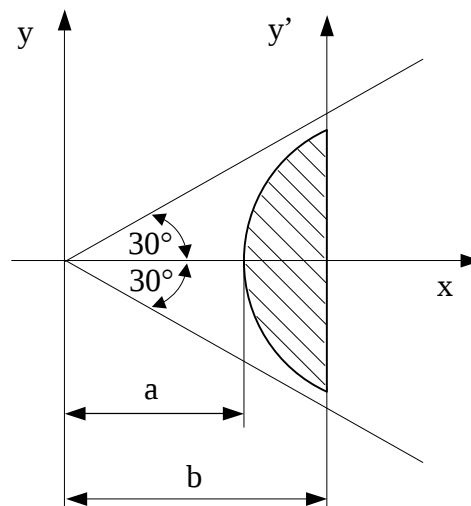
$$5. \quad \vartheta = 0,124 \cdot 10^{-2} \text{ mm}^{-1}$$

$$6. \quad \gamma_{xz} = -2 \vartheta \frac{a^2}{a^2 + b^2} y; \quad \gamma_{yz} = 2 \vartheta \frac{a^2}{a^2 + b^2} x$$

7. A $D = 2a = 2b$ esetben a körkeresztmetszetű rúd csavarási feladatáról van szó.

CSAV4. Az alábbi ábra egy hiperbolaív és egy egyenes által határolt keresztmetszetet szemléltet. A hiperbolaív egyenlete:

$$x^2 - 3y^2 - a^2 = 0 \quad a < b$$



1. Igazolja, hogy a keresztmetszet Prandtl-féle feszültségfüggvénye:

$$U = U(x, y) = -\frac{G \vartheta}{2b} (x^2 - 3y^2 - a^2)(x - b)$$

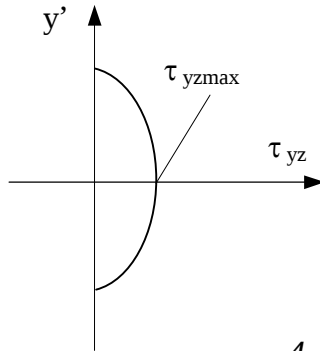
2. Állítsa elő a $\tau_{xz}(x, y)$ és a $\tau_{yz}(x, y)$ csúszatófeszültségeket!
3. Határozza meg a τ_{yz} csúszatófeszültségek eloszlását a keresztmetszet $x = b$ kontúrja mentén, szemléltesse a feszültségek eloszlását és állapítsa meg a $\tau_{yz\max}$ értékét!
4. Az $a = 0$ értékhez milyen keresztmetszet tartozik?

Megoldás:

1. $\Delta U = -2G\vartheta$ Poisson-féle parciális differenciálegyenletet, illetve a peremgörbén az $U|_{g_0} = 0$ peremfeltételt kell teljesíteni.

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{3G\vartheta}{b}(x-b)y \\ 2. \quad \tau_{yz} &= -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{G\vartheta}{2b}(3x^2 - 3y^2 - a^2 - 2bx) \end{aligned}$$

3.



$$\begin{aligned} \tau_{yz}|_{x=b} &= \frac{G\vartheta}{2b}(b^2 - 3y^2 - a^2) \\ \tau_{yz\max} &= \frac{G\vartheta}{2b}(b^2 - a^2) \end{aligned}$$

4. Az $a = 0$ esetben egyenlőoldalú háromszögről van szó.

CSAV5. Vezesse le egyszerűen összefüggő keresztmetszetre az M_c csavarónyomaték és az I_c csavarási merevség közötti összefüggést!

Megoldás:

$$\vec{M}_c = \int_{(A)} \vec{R} \times \vec{\rho}_z dA = \int_{(A)} \vec{R} \times \vec{\tau}_z dA$$

$$\vec{\tau}_z = \nabla U \times \vec{e}_z; \quad \vec{M}_c = M_c \vec{e}_z; \quad \vec{R} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

$$M_c = \vec{e}_z \cdot \int_{(A)} \vec{R} \times (\nabla U \times \vec{e}_z) dA = - \int_{(A)} \nabla U \cdot \vec{R} dA$$

Átalakítás:

$$(U \vec{R}) \cdot \nabla = (\nabla U) \cdot \vec{R} + U (\vec{R} \cdot \nabla) = (\nabla U) \cdot \vec{R} + 2U$$

$$M_c = - \int_{(A)} [(U \vec{R}) \cdot \nabla - 2U] dA = \int_{(A)} 2U dA - \int_{(A)} (U \vec{R}) \cdot \nabla dA$$

A síkbeli Gauss – Osztrogradszkij tételt alkalmazva:

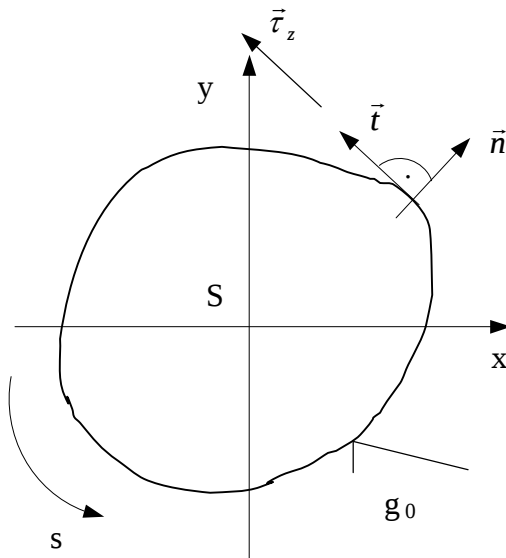
$$M_c = \int_{(A)} 2U dA - \int_{(g)} (U \vec{R}) \cdot \vec{n} ds$$

A peremgörbén: $U = 0$

$$U = G\vartheta U_0$$

$$\text{Így: } M_c = \int_{(A)} 2U dA = G\vartheta \int_{(A)} 2U_0 dA = G\vartheta I_c$$

CSAV6. Igazolja, hogy egyszeresen összefüggő tartomány peremgörbéjén az U feszültség-függvény értéke zérus!



Megoldás:

$$\vec{\tau}_z = \tau_{xz} \vec{e}_x + \tau_{yz} \vec{e}_y = (\nabla U) \times \vec{e}_z$$

$$\vec{\tau}_z \cdot \vec{n} = 0$$

$$[(\nabla U) \times \vec{e}_z] \cdot \vec{n} = (\nabla U) \cdot (\vec{e}_z \times \vec{n}) = (\nabla U) \cdot \vec{t}$$

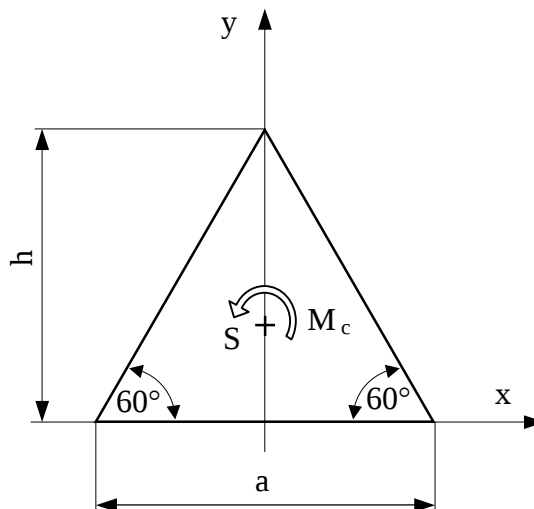
$$\vec{\tau}_z \cdot \vec{n} = 0 = (\nabla U) \cdot \vec{t} = \frac{\partial U}{\partial s} = 0$$

$$U|_{g_0} = \text{áll.}$$

Legyen a peremgörbén: $U|_{g_0} = 0$

CSAV7. Az ábrán vázolt egyenlőoldalú háromszög egy csavarásra igénybevett, prizmatikus rúd keresztmetszete. Az U feszültségfüggvény a következő alakban adott:

$$U = \frac{G \vartheta}{2h} [(y-h)^2 - 3x^2]y$$



1. Döntse el, hogy a közölt feszültségfüggvény lehet-e az adott csavarási feladat megoldása!
2. Állítsa elő a $\tau_{xz}(x,y)$ és a $\tau_{yz}(x,y)$ csúsztatófeszültségeket!

3. Határozza meg és szemléltesse a τ_{xz} csúsztatófeszültség eloszlását a keresztmetszet y tengely mentén!
4. Állapítsa meg a τ_{xz} feszültség τ_{max} maximumát az M_c csavarónyomaték és a keresztmetszet a oldaléle függvényében, ha a csavarási másodrendű nyomaték $I_c = \sqrt{3} a^4 / 80$!

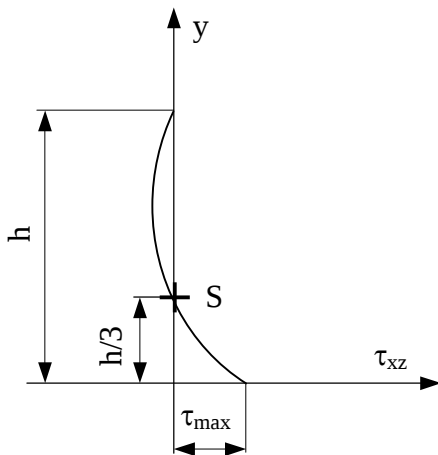
Megoldás:

1. A Poisson-féle differenciálegyenlet és a peremfeltételek teljesülése alapján lehet.

$$\tau_{xz}(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{G \vartheta}{2h} (3y^2 - 4hy + h^2 - 3x^2)$$

$$2. \quad \tau_{yz}(x, y) = -\frac{\partial U}{\partial x} = 3 \frac{G \vartheta}{h} xy$$

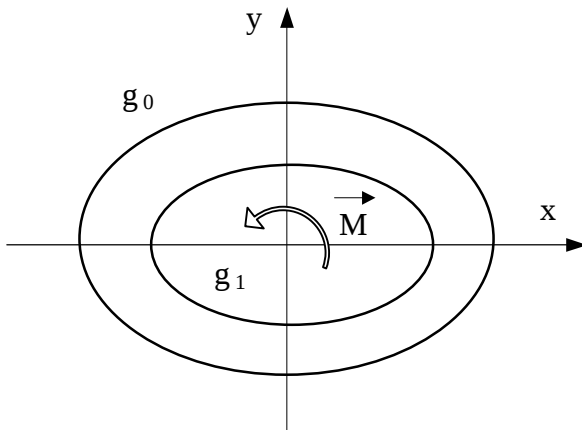
3.



$$\tau_{xz}(x=0, y) = \frac{G \vartheta}{2h} (3y^2 - 4hy + h^2)$$

$$4. \quad \tau_{max} = \frac{G \vartheta h}{2} = \frac{20 M_c}{a^3}$$

CSAV8. Az ábra egy kétszeresen összefüggő keresztmetszetet szemléltet. A keresztmetszet igénybevétele csavarás. A keresztmetszet g_0 és g_1 határgörbéinek egyenletei az alábbiak:



A g_0 görbe egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda^2, \quad \lambda > 1$$

A g_1 görbe egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A kétszeresen összefüggő keresztmetszet feszültségfüggvényét a következő alakban keressük:

$$U = U(x, y) = C \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \lambda^2 \right)$$

1. Igazolja, hogy az $U = U(x, y)$ feszültségfüggvény a g_0 görbén eltűnik, a g_1 görbén pedig állandó értékű!
2. Határozza meg a C állandó értékét úgy, hogy teljesüljön a $\Delta U = -2G\vartheta$ Poisson-féle parciális differenciálegyenlet!
3. Számítsa ki a keresztmetszet $I_c = M_c / G\vartheta$ formulával értelmezett csavarási merevségét (csavarási tehetetlenségi ellenállását) és a keresztmetszetet terhelő M_c csavarónyomatékokat!
4. Vizsgálja meg az $a = b$ esetet!

Megoldás:

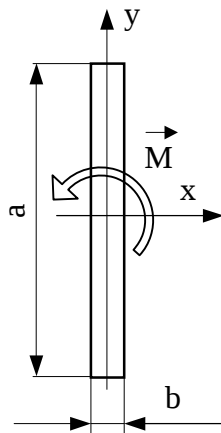
$$1. \text{ A } g_0 \text{ görbén } U = 0, \text{ a } g_1 \text{ görbén } U = C(1 - \lambda^2) = \text{állandó.}$$

$$2. \quad C = G\vartheta \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$$3. \quad M_c = G\vartheta (\lambda^4 - 1) \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \pi; \quad I_c = (\lambda^4 - 1) \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \pi$$

4. Az $a = b$ esetben a körgyűrű keresztmetszetű rúd csavarásáról van szó.

CSAV9. Az ábra egy vékonyfalú, nyitott szelvényű, csavarásra igénybevett keresztmetszetet szemléltet. Legyen $a \gg b$. A keresztmetszet Prandtl-féle feszültségfüggvénye a következő alakban adott:



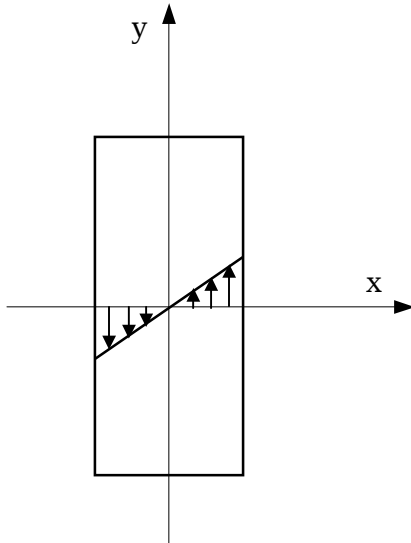
$$U = U(x, y) = C \left[\left(\frac{b}{2} \right)^2 - x^2 \right]$$

1. Vizsgálja meg, hogy teljesül-e az $U = 0$ peremfeltétel a téglalap oldalain!
2. Határozza meg a C állandó értékét úgy, hogy teljesüljön a $\Delta U = -2G\vartheta$ Poisson-féle parciális differenciálegyenlet!

3. Állítsa elő a $\tau_{xz}(x,y)$ és a $\tau_{yz}(x,y)$ csúsztatófeszültségeket és szemléltesse a $\tau_{yz}(x,0)$ függvényt!
4. Határozza meg M_c értékét, ha $a = 150 \text{ mm}$, $b = 10 \text{ mm}$, $G = 80000 \text{ MPa}$, $\vartheta = 10^{-3} \text{ rad/mm}$.
5. Az előzőekben megadott adatokkal számítsa ki τ_{max} értékét!

Megoldás:

1. Az $x = \pm b/2$ egyenletű oldalakon az $U(x,y)$ eltűnik, míg az $y = \pm a/2$ egyenletű oldalakon nem teljesül az U -ra vonatkozó peremfeltétel.



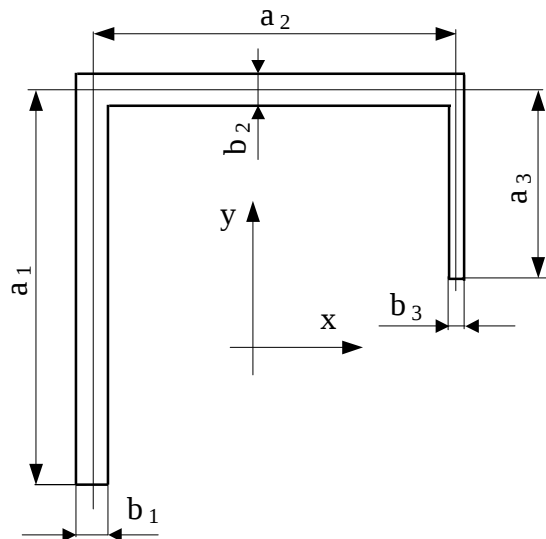
$$2. C = G \vartheta$$

$$3. \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 2 G \vartheta x$$

$$4. M_c = 4 \cdot 10^6 \text{ Nmm.}$$

$$5. \tau_{max} = 800 \text{ MPa.}$$

CSAV10. Az alábbi ábra egy nyitott szelvényű, csavarásra igénybevett, prizmatikus rúd keresztmetszetét szemlélteti. $a_1 = 200 \text{ mm}$; $b_1 = 10 \text{ mm}$; $a_2 = 150 \text{ mm}$; $b_2 = 10 \text{ mm}$; $a_3 = 100 \text{ mm}$; $b_3 = 5 \text{ mm}$.



1. Számítsa ki az I_c csavarási merevség (csavarási tehetetlenségi ellenállás) közelítő értékét!
2. Határozza meg τ_{max} értékét, ha $M_c = 12 \text{ kNm}$!
3. Mekkora a rúd ϑ fajlagos elcsavarodása, ha $G = 8 \cdot 10^4 \text{ Nmm}$?

Megoldás:

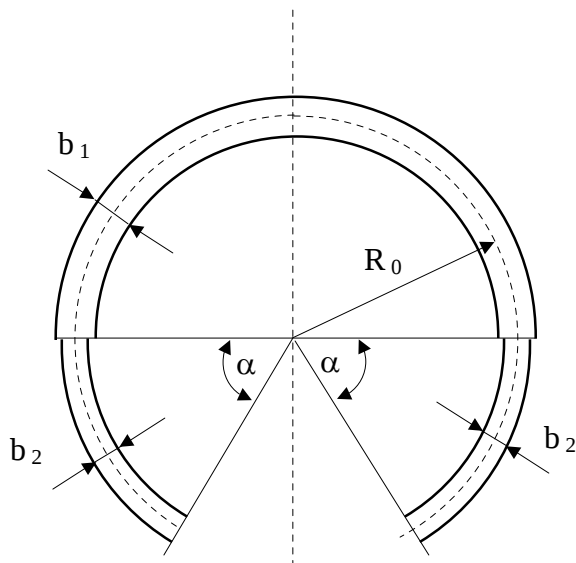
$$1. I_c = 12,08 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$2. \tau_{max} = 198,6 \text{ MPa}$$

$$3. 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$$

CSAV11. Az ábra egy körív középvonalú, változó falvastagságú, vékonyfalú, nyitott szelvényű, csavarásra igénybevett keresztmetszetet szemléltet.

$R_0 = 200 \text{ mm}$; $b_1 = 10 \text{ mm}$; $b_2 = 5 \text{ mm}$; $\alpha = 60^\circ$.



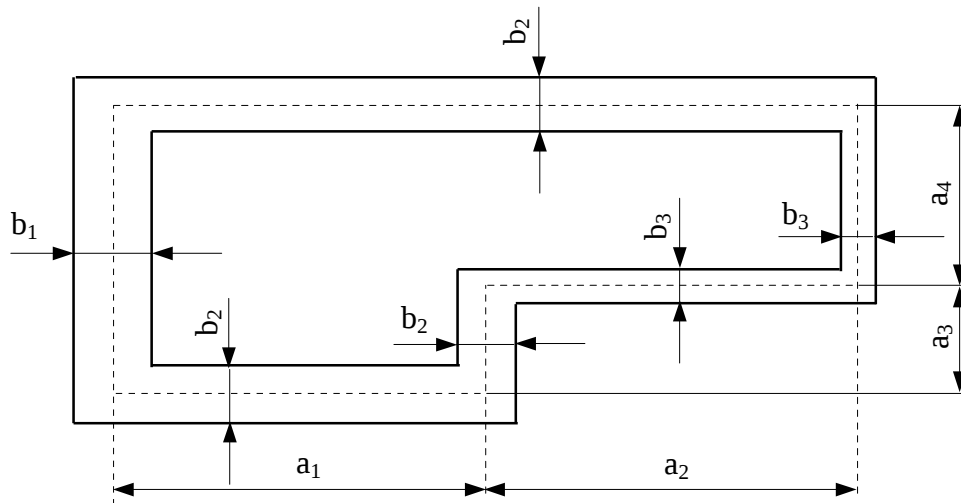
1. Számítsa ki az I_c csavarási merevség (csavarási tehetetlenségi ellenállás) értékét!
2. Ellenőrizze a fenti keresztmetszetet feszültségcsúcsra, ha $M_c = 12 \text{ kNm}$ és $\tau_{meg} = 140 \text{ MPa}$!

Megoldás:

$$1. I_c = R_0 \pi b_1^3 + R_0 \frac{2\pi}{3} b_2^3 = 6,803 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$2. \text{ Megfelel, mert } \tau_{max} = 70,5 \text{ Nmm}^{-2} < \tau_{meg}.$$

CSAV12. Az alábbi ábra egy vékonyfalú, zárt szelvényű, csavarásra igénybevett, prizmatikus rúd keresztmetszetét szemlélteti. $a_1 = 100 \text{ mm}$; $a_2 = 100 \text{ mm}$; $a_3 = 20 \text{ mm}$; $a_4 = 30 \text{ mm}$; $b_1 = 15 \text{ mm}$; $b_2 = 10 \text{ mm}$; $b_3 = 5 \text{ mm}$.



1. Határozza meg a Bredtl formula segítségével a keresztmetszet I_c csavarási merevségét!
2. Határozza meg $\tau_{\max}$ értékét, ha $M_c = 240 \text{ kNm}$!
3. Mekkora a rúd ϑ fajlagos elcsavaródása, ha $G = 8 \cdot 10^4 \text{ Nmm}^{-2}$?

Megoldás:

$$I_c = \frac{4 A^2}{\oint \frac{ds}{b}} = 6,244 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

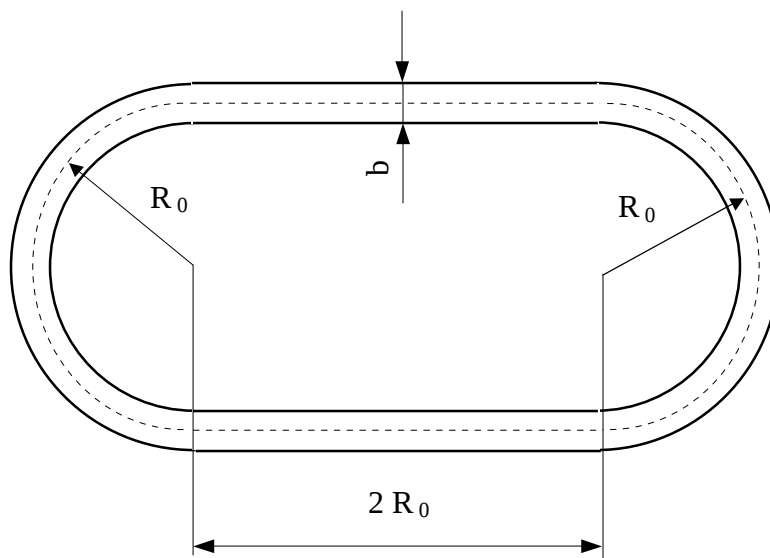
$$1. \quad A = (a_3 + a_4)(a_1 + a_2) - a_2 a_3 = 8 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$\oint \frac{ds}{b} = \frac{a_3 + a_4}{b_1} + \frac{a_1 + a_2}{b_2} + \frac{a_4}{b_3} + \frac{a_2}{b_3} + \frac{a_3}{b_2} + \frac{a_1}{b_2} = 41,33$$

$$2. \quad \tau_{\max} = \frac{M_c}{2 A b_{\min}} = 300 \text{ Nmm}^{-2} \quad b_{\min} = 5 \text{ mm}$$

$$3. \quad \vartheta = \frac{M_c}{G I_c} = 4,8 \cdot 10^{-5} \text{ mm}^{-1}$$

CSAV13. Mekkora csavarónyomatékkal terhelhető a prizmatikus rúd ábrán vázolt, zárt szelvényű, vékonyfalú keresztmetszete, ha $\tau_{meg} = 150 \text{ MPa}$, $R_0 = 10 \text{ mm}$ és $b = \text{állandó} = 12 \text{ mm}$?



Megoldás:

$$M_c \leq 2 A b \tau_{meg} = 18,5 \cdot 10^7 \text{ Nmm}$$