

Skaláris invariánsok, deviátortenzorok, főtengeleyp probléma:

Gyakorló feladatok a skaláris invariánsok, deviátortenzorok számítására, a főfeszültségek, főirányok meghatározására.

SDF1. Adott a $\underline{\underline{T}}$ feszültségi tenzor:

$$[\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} 60 & 20 & 50 \\ 20 & -40 & 0 \\ 50 & 0 & 130 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

1. Írja fel a $\underline{\underline{T}}'$ feszültségi deviátortenzor mátrixát!
2. Számítsa ki a T_{II} , T'_I és T'_{II} skaláris invariánsokat!

Megoldás:

$$1. [\underline{\underline{T}}'] = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 50 \\ 20 & -90 & 0 \\ 50 & 0 & 80 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$2. T_{II} = -2700 (\text{MPa})^2, T'_I = 0, T'_{II} = -10200 (\text{MPa})^2$$

SDF2. Adott a $\underline{\underline{T}}$ feszültségi tenzor:

$$[\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 30\sqrt{2} \\ 0 & 40 & -30\sqrt{2} \\ 30\sqrt{2} & -30\sqrt{2} & 40 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

1. Számítsa ki a T_I , T_{II} , T_{III} skaláris invariánsokat!
2. Határozza meg a feszültségi deviátortenzor mátrixát!

Megoldás:

$$1. T_I = 120 \text{ MPa}, T_{II} = 1200 (\text{MPa})^2, T_{III} = -80 \cdot 10^3 (\text{MPa})^3$$

$$2. \quad [\underline{T}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 30\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -30\sqrt{2} \\ 30\sqrt{2} & -30\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

SDF3. Adott a $\underline{T}$ feszültségi tenzor:

$$[\underline{T}] = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 30\sqrt{2} \\ 0 & 40 & -30\sqrt{2} \\ 30\sqrt{2} & -30\sqrt{2} & 40 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Számítsa ki a σ_2 és σ_3 főfeszültségeket, ha $\sigma_1 = 100 \text{ MPa}$!

Megoldás:

$$\sigma_2 = 40 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -20 \text{ MPa}.$$

SDF4. Ismeretes az xyz koordináta-rendszer P pontjában a feszültségi tenzor mátrixa:

$$[\underline{T}] = \begin{bmatrix} -200 & -200 & 0 \\ -200 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

1. Számítsa ki a feszültségi tenzor skaláris invariánsait!
2. Írja fel a karakterisztikus egyenletet!
3. Határozza meg a főfeszültségeket és a főtengetyvek egységvektorait!

Megoldás:

$$1. \quad T_I = 300 \text{ MPa}, \quad T_{II} = -100 \cdot 10^3 (\text{MPa})^2, \quad T_{III} = -24 \cdot 10^6 (\text{MPa})^3.$$

$$2. \quad \begin{aligned} \sigma^3 - T_I \sigma^2 + T_{II} \sigma - T_{III} &= 0 \\ \sigma^3 - 300 \sigma^2 - 100 \cdot 10^3 \sigma + 24 \cdot 10^6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = 400 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 200 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -300 \text{ MPa}.$$

$$3. \quad \begin{aligned} \bar{e}_1 &= \bar{e}_z; \quad \bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (\bar{e}_x - 2 \bar{e}_y); \quad \bar{e}_3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2 \bar{e}_x + \bar{e}_y). \end{aligned}$$

SDF5. Ismeretes a rugalmas test P pontjában a $\underline{T}$ feszültségi tenzor két főfeszültsége, valamint a második skalár invariáns:

$$\sigma_i = 60 \text{ MPa}, \sigma_j = 40 \text{ MPa}, T_{II} = 4400 \text{ (MPa)}^2.$$

Határozza meg számszerűen a harmadik főfeszültséget és a feszültségi tenzor első és harmadik skaláris invariánsát!

Megoldás:

$$\sigma_k = 20 \text{ MPa}, T_I = 120 \text{ MPa}, T_{III} = 48 \cdot 10^3 \text{ (MPa)}^3.$$

SDF6. Ismeretes a rugalmas test P pontbeli feszültségi tenzora:

$$[\underline{T}_P] = \begin{bmatrix} -30 & -30 & 0 \\ -30 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 90 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Határozza meg a 3-as főtengety irányát kijelölő $\bar{e}_3$ egységvektort, ha $\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_x > 0$!

Megoldás:

$$\bar{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} (3 \bar{e}_x + \bar{e}_y)$$

SDF7. Ismeretes a rugalmas test P pontbeli feszültségi tenzora:

$$[\underline{T}_P] = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -30 \\ 0 & -30 & 100 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Határozza meg az 1-es főtengety irányát kijelölő $\bar{e}_1$ egységvektort, ha annak e_{1y} koordinátája pozitív előjelű!

Megoldás:

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} (\bar{e}_y - 3 \bar{e}_z)$$

SDF8. Ismeretes az xyz koordináta-rendszer P pontjában a feszültségi tenzor mátrixa:

$$[\underline{T}_P] = \begin{bmatrix} -50 & -50 & 0 \\ -50 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} MPa$$

1. Számítsa ki a feszültségi tenzor skaláris invariánsait!
2. Írja fel a feszültségi tenzorra vonatkozó karakterisztikus egyenletet!
3. Számítsa ki a főfeszültségek értékeit!

Megoldás:

$$1. \quad T_I = 75 \text{ MPa}, \quad T_{II} = -6250 \text{ (MPa)}^2, \quad T_{III} = -375000 \text{ (MPa)}^3.$$

$$2. \quad \begin{aligned} \sigma^3 - T_I \sigma^2 + T_{II} \sigma - T_{III} &= 0 \\ \sigma^3 - 75 \sigma^2 - 6250 \sigma + 375000 &= 0 \end{aligned}$$

$$3. \quad \sigma_1 = 100 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 50 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -75 \text{ MPa}.$$

SDF9. Ismeretes az xyz koordináta-rendszer P pontjában a feszültségi tenzor mátrixa:

$$[\underline{T}_P] = \begin{bmatrix} -100 & -100 & 0 \\ -100 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} MPa$$

1. Számítsa ki a feszültségi tenzor skaláris invariánsait!
2. Írja fel a feszültségi deviátortenzor mátrixát!
3. Írja fel a feszültségi tenzorra vonatkozó karakterisztikus egyenletet!

Megoldás:

$$1. \quad T_I = 150 \text{ MPa}, \quad T_{II} = -25 \cdot 10^3 \text{ (MPa)}^2, \quad T_{III} = -3 \cdot 10^6 \text{ (MPa)}^3.$$

$$2. \quad [\underline{T}'_P] = \begin{bmatrix} -150 & -100 & 0 \\ -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 \end{bmatrix} MPa$$

$$3. \quad \begin{aligned} \sigma^3 - T_I \sigma^2 + T_{II} \sigma - T_{III} &= 0 \\ \sigma^3 - 150 \sigma^2 - 25000 \sigma + 3000000 &= 0 \end{aligned}$$

SDF10. Ismeretes az xyz koordináta-rendszer P pontjában a feszültségi tenzor mátrixa:

$$[\underline{T}_P] = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -20 \\ 0 & 40 & 0 \\ -20 & 0 & -20 \end{bmatrix} MPa$$

Számítsa ki a főfeszültségeket, valamint a főfeszültségi irányokat kijelölő egységvektorok közül az $\vec{e}_2$ koordinátáit!

Megoldás:

$$\sigma_1 = 40 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 20 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -30 \text{ MPa}.$$

$$e_{2x} = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad e_{2y} = 0, \quad e_{2z} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$