

A virtuális munka elvét alkalmazva:

A 2. ER munkája az 1. ER okozta alakváltozáson:

$$U_{21} = \int_{(V)} \underline{T}_2 \cdot \underline{A}_1 dV = \int_{(V)} \underline{u}_1 \cdot \underline{q}_2 dV + \int_{(A)} \underline{u}_1 \cdot \underline{T}_2 \cdot \underline{n} dA = W_{21}$$

Az 1. ER munkája a 2. ER okozta alakváltozáson:

$$U_{12} = \int_{(V)} \underline{T}_1 \cdot \underline{A}_2 dV = \int_{(V)} \underline{u}_2 \cdot \underline{q}_1 dV + \int_{(A)} \underline{u}_2 \cdot \underline{T}_1 \cdot \underline{n} dA = W_{12}$$

Mivel $\underline{T} = \underline{D} \cdot \underline{A}$ és $\underline{D}$ szimmetrikus, ezért $\underline{T} = \underline{A} \cdot \underline{D}$ is fennáll.

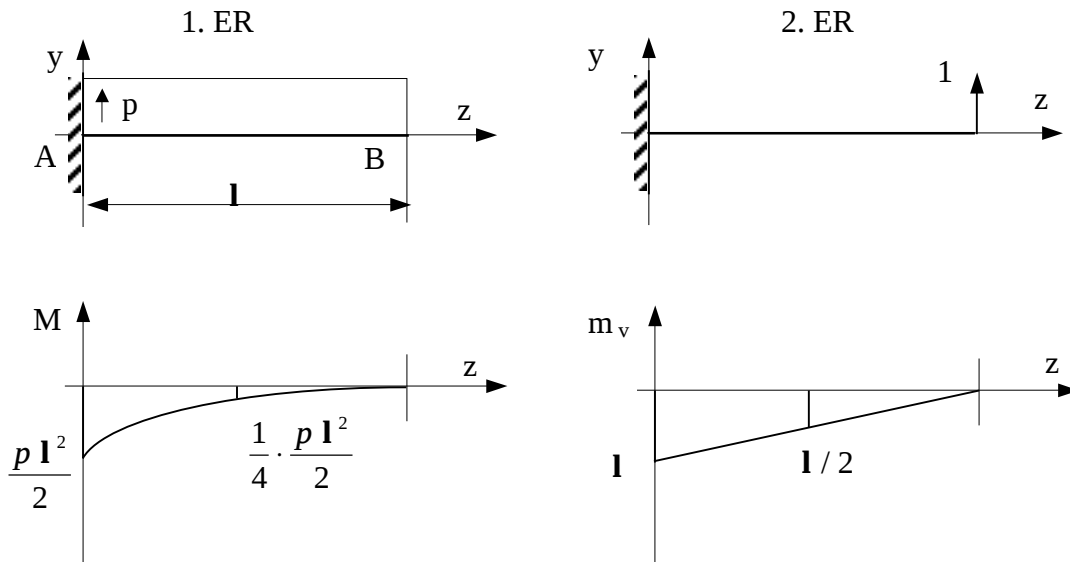
$$\begin{aligned} U_{21} &= \int_{(V)} \underline{T}_2 \cdot \underline{A}_1 dV = \int_{(V)} (\underline{A}_2 \cdot \underline{D}) \cdot \underline{A}_1 dV = \int_{(V)} \underline{A}_2 \cdot (\underline{D} \cdot \underline{A}_1) dV = \\ &= \int_{(V)} \underline{A}_2 \cdot \underline{T}_1 dV = \int_{(V)} \underline{T}_1 \cdot \underline{A}_2 dV = U_{12} \end{aligned}$$

$$U_{21} = U_{12} = W_{21} = W_{12} \quad \text{a Betti – tétel}$$

A Betti-tétel alábbi alakját használjuk elmozdulások, illetve szögelfordulások számítására:

$$U_{12} = W_{21}$$

Példa:



Prizmatikus, befalazott tartó esetén keressük a B jelű keresztmetszet y tengely irányú elmozdulását, $v_B - t$. A számításnál csak a hajlításból származó energiát vesszük figyelembe.

Az 1. ER az eredeti terhelés és a hozzá tartozó támasztóerőrendszer, a belőle származó nyomaték M.

A 2. ER egy általunk fölvetett ER a kérdéses keresztmetszetben. Ha a keresett mennyiség elmozdulás, akkor erő, ha a szögelfordulás a meghatározandó mennyiség, akkor nyomaték, melyeket a számítás egyszerűbb elvégzése miatt egységnyire választunk. A 2. ER –ből származó nyomaték $m_v(\psi)$.

$$W_{21} = U_{12}$$

$$1 \cdot v_B = \int_{(V)} \underline{T}_1 \cdot \underline{A}_2 dV = \int_{(V)} s_{z1} e_{z2} dV$$

$$s_{z1} = \frac{M}{I_x} y \quad e_{z2} = \frac{s_{z2}}{E} = \frac{m_v}{I_x} \frac{y}{E}$$

$$1 \cdot v_B = \int_{(1)} \int_{(A)} \frac{M}{I_x} y \frac{m_v}{I_x} \frac{y}{E} dA dz = \int_{(1)} \frac{M}{I_x} \frac{m_v}{I_x E} \int_{(A)} y^2 dA dz = \int_{(1)} \frac{M}{I_x} \frac{m_v}{E} dz$$

Az integrál kiszámítása a Simpson formulával történik:

$$v_B = \frac{1}{I_x E} \int_{(1)} M m_v dz = \frac{H}{I_x E}$$

$$H = \frac{1}{6} \left(\frac{p l^2}{2} l + 4 \frac{p l^2}{2} \frac{1}{4} \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{p l^3}{2} + \frac{p l^3}{4} \right) = \frac{3}{4} \frac{1}{6} p l^4 = \frac{p l^4}{8}$$

Így:

$$v_B = \frac{1}{I_x E} \frac{p l^4}{8}$$

Hasonlóan alkalmazható szögelfordulás számítására is.

Maxwell-féle felcserélhetőségi tétel:

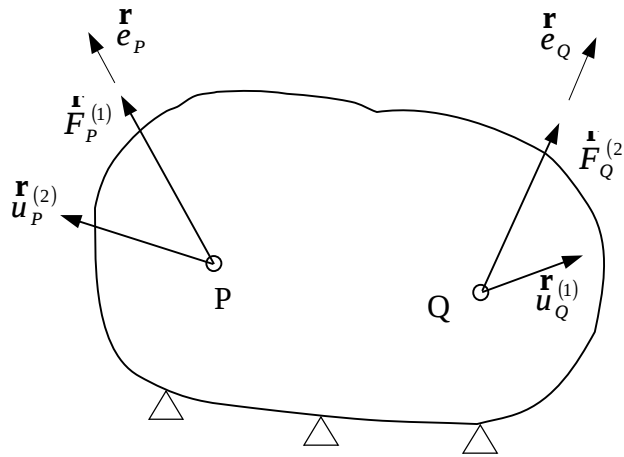
A szilárdságtan egyik általános tétele. Közvetlenül levezethető a Betti-tételből, felhasználva a szuperpozíció elvét.

A szerkezetet megtámasztjuk, anyaga lineárisan rugalmas. Két különböző erőrendszerrel terheljük.

1.ER: A P pontban ható $\vec{F}_P^{(1)}$ és a hozzá tartozó támasztóerőrendszer.

2. ER: A Q pontban ható $\vec{F}_Q^{(2)}$ és a hozzá tartozó támasztóerőrendszer.

Feltételezzük, hogy a támasztások simák.



Betti-tétel:

$$\begin{aligned}
 W_{21} &= W_{12} \\
 \vec{F}_Q^{(2)} \cdot \vec{u}_Q^{(1)} &= \vec{F}_P^{(1)} \cdot \vec{u}_P^{(2)} \\
 \vec{F}_P^{(1)} &= F_P^{(1)} \vec{e}_P \\
 \vec{F}_Q^{(2)} &= F_Q^{(2)} \vec{e}_Q \\
 F_Q^{(2)} \vec{e}_Q \cdot \vec{u}_Q^{(1)} &= F_P^{(1)} \vec{e}_P \cdot \vec{u}_P^{(2)} \\
 F_Q^{(2)} \cdot u_Q^{(1)} &= F_P^{(1)} \cdot u_P^{(2)} \\
 \text{Ha } F_Q^{(2)} &= F_P^{(1)} = 1, \text{ akkor} \\
 u_Q^{(1)} &= u_P^{(2)}
 \end{aligned}$$

A P pontbeli erő hatására a Q pontbeli elmozdulás $\vec{F}_Q^{(1)}$ irányú vetülete egyenlő a Q-beli erő hatására kialakult P-beli elmozdulás $\vec{F}_P^{(2)}$ -re eső vetületével.

Erő helyett erőpárt, elmozdulás helyett szögelfordulást véve is érvényes.

Síkrugalmaságtan:

$$\underline{\underline{\mathbf{u}}} = \underline{\underline{\mathbf{u}}}(x, y, z) \rightarrow 3 \text{ ism.}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}(x, y, z) \rightarrow 6 \text{ ism.}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}(x, y, z) \rightarrow 6 \text{ ism.}$$

Összesen: 15 ismeretlen skalármennyiség. A megoldás nem mindig egyszerű feladat.

Általános esetben minde mennyiség 3 változó függvénye.

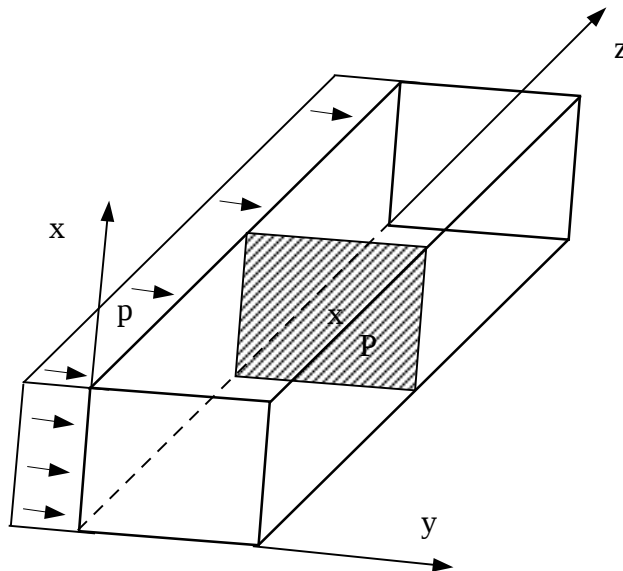
A feladatok sok esetben visszavezethetők 2 változóra: síkfeladatok.

A síkfeladatok három alaptípusa a következő:

- Síkalakváltozás: SA
- Síkfeszültségi állapot: SF
- Általánosított síkfeszültségi állapot: ÁSF

Legfontosabb jellemzők:

Síkalakváltozás (SA):



A test terhelése z-től független: $p = p(x, y)$

Általános esetben: $\underline{\underline{\mathbf{u}}} = u \underline{\underline{\mathbf{e}}}_x + v \underline{\underline{\mathbf{e}}}_y + w \underline{\underline{\mathbf{e}}}_z$

A P pont csak a saját keresztmetszetében mozdul el: $w \equiv 0$

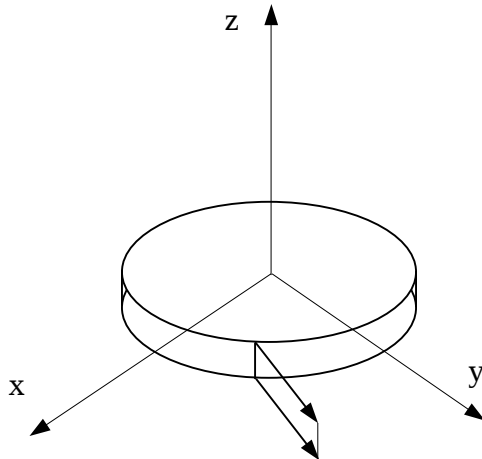
Ezért síkalakváltozásnál $\underline{\underline{\mathbf{u}}} = u \underline{\underline{\mathbf{e}}}_x + v \underline{\underline{\mathbf{e}}}_y$ és az $\underline{\underline{\mathbf{u}}}$ nem függ a z-től:

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial z} = \underline{0}$$

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

Síkfeszültségi állapot (SF):



Vékony tárcsa

Terhelése a palástján van.

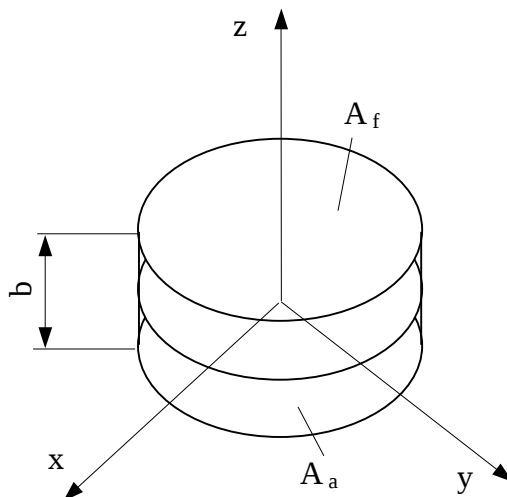
Jellemzője: $\underline{r}_z \equiv \underline{0}$

$$\underline{T} = \underline{T}(x, y, z)$$

Szerkezete:
$$[\underline{T}] = \begin{bmatrix} s_x & t_{xy} & 0 \\ t_{yx} & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gyakorlatban nehéz megvalósítani, ritkán fordul elő.

Általánosított síkfeszültségi állapot (ÁSF):



Vastag tárcsa, melynek b a vastagsága.

Jellemzői:

– Alsó és felső (A_a és A_f) lapja terheletlen. $\mathbf{r}_z \equiv \mathbf{0}$

– $s_z = 0$ a test minden pontjában

$$[\underline{T}] = \begin{bmatrix} s_x & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & s_y & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

– $\underline{T} = \underline{T}(x, y, z)$

s_x, s_y, t_{xy} a z koordináta páros függvényei

t_{xz}, t_{yz} a z koordináta páratlan függvényei

$$s_x(z) = s_x(-z)$$

$$s_y(z) = s_y(-z)$$

$$t_{xy}(z) = t_{xy}(-z)$$

z -ben páros függvények:

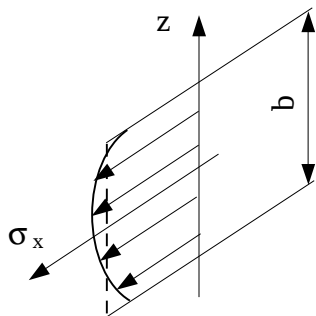
$$t_{xz}(z) = -t_{xz}(-z)$$

$$t_{yz}(z) = -t_{yz}(-z)$$

z -ben páratlan függvények:

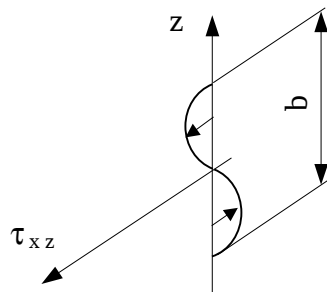
ÁSF-nél a háromváltozós feladatot redukáljuk kétváltozósra:

$$\underline{T} = \underline{T}(x, y, z) \rightarrow \bar{\underline{T}} = \bar{\underline{T}}(x, y)$$



$$\bar{s}_x = \frac{1}{b} \int_{(b)} s_x dz$$

s_y és t_{xy} -ra hasonlóan végezhető el



$$\bar{t}_{xz} = \bar{t}_{zx} = \frac{1}{b} \int_{(b)} t_{xz} dz = 0$$

$$\bar{t}_{yz} = \bar{t}_{zy} = \frac{1}{b} \int_{(b)} t_{yz} dz = 0$$

$$\bar{T} = \bar{T}(x, y) = \frac{1}{b} \int_{(b)} T dz$$

Eredmény:

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} \bar{s}_x & \bar{t}_{xy} & 0 \\ \bar{t}_{yx} & \bar{s}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alakilag megegyezik az SF-fel. Különbség: az ÁSF nem függ a z-től, csak az x és y változók függvénye.

Síkalakváltozás (SA) részletesen:

AZ alakváltozások az xy síkban zajlanak le.

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} e_x & \frac{1}{2} g_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} g_{yx} & e_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Mivel:} \quad w = 0 \quad e_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Milyen a feszültségi tenzor?

A Hooke-törvényt alkalmazva:

$$\underline{A} = \frac{1}{2G} \left(\underline{T} - \frac{n}{1+n} T_I \underline{I} \right)$$

$$\underline{T} = 2G \left(\underline{A} + \frac{n}{1-2n} A_I \underline{I} \right)$$