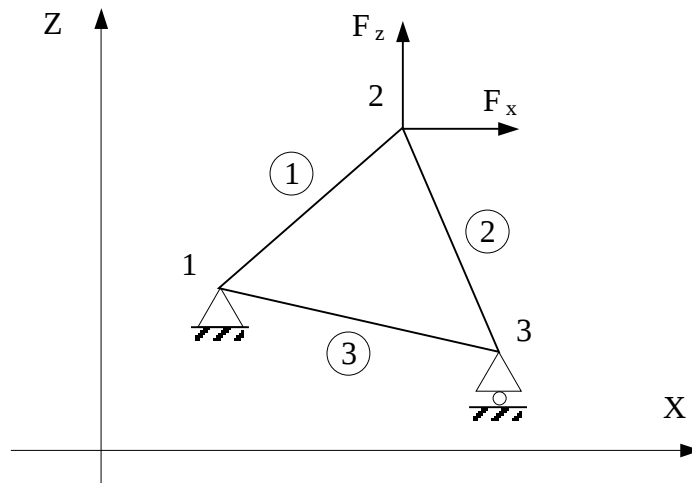


A rúdelemek illesztése példán keresztül:



X, Z - globális KR

ξ, ζ - lokális (helyi) KR

Csomópontok: 1, 2, 3

Elemek: $\bullet$, $\circ$, $\mathbf{f}$

$\bullet$ elem csomópontjai: 1, 2

$\circ$ elem csomópontjai: 2, 3

$\mathbf{f}$ elem csomópontjai: 1, 3

Csomóponti elmozdulásvektorok a globális KR-ben:

$$\underline{\underline{q}}^1 = \begin{bmatrix} \underline{q}_1 \\ \underline{q}_2 \end{bmatrix}^1 \quad \underline{\underline{q}}^2 = \begin{bmatrix} \underline{q}_2 \\ \underline{q}_3 \end{bmatrix}^2 \quad \underline{\underline{q}}^3 = \begin{bmatrix} \underline{q}_1 \\ \underline{q}_3 \end{bmatrix}^3$$

(4x1)

$$\underline{\underline{q}}_1 = \begin{bmatrix} U_1 \\ W_1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{q}}_2 = \begin{bmatrix} U_2 \\ W_2 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{q}}_3 = \begin{bmatrix} U_3 \\ W_3 \end{bmatrix}$$

(2x1)

Alakváltozási energiák:

$$U^1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{q}_1 & \underline{q}_2 \end{bmatrix}^{1T} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{[stippled box with } \underline{K}_{11}^1 \text{]} & \text{[stippled box with } \underline{K}_{12}^1 \text{]} \\ \hline \text{[stippled box with } \underline{K}_{21}^1 \text{]} & \text{[stippled box with } \underline{K}_{22}^1 \text{]} \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} \underline{q}_1 \\ \underline{q}_2 \end{bmatrix}^1$$

(4x4)

Egy blokk: (2x2)

$$U^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{q}_2 & \underline{q}_3 \end{bmatrix}^{2T} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{[stippled box with } \underline{K}_{22}^2 \text{]} & \text{[stippled box with } \underline{K}_{23}^2 \text{]} \\ \hline \text{[stippled box with } \underline{K}_{32}^2 \text{]} & \text{[stippled box with } \underline{K}_{33}^2 \text{]} \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} \underline{q}_2 \\ \underline{q}_3 \end{bmatrix}^2$$

$$U^3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{q}_1 & \underline{q}_3 \end{bmatrix}^{3T} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{[stippled box with } \underline{K}_{11}^3 \text{]} & \text{[stippled box with } \underline{K}_{13}^3 \text{]} \\ \hline \text{[stippled box with } \underline{K}_{31}^3 \text{]} & \text{[stippled box with } \underline{K}_{33}^3 \text{]} \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} \underline{q}_1 \\ \underline{q}_3 \end{bmatrix}^3$$

A teljes potenciális energia:

$$p_p = U - W_k$$

A külső ER munkáját ($W_k - t$) a teljes szerkezetre számítjuk:

$$W_k = F_x U_2 + F_z W_2 = \underline{\underline{q}}^T \cdot \underline{\underline{f}}$$

$\underline{\underline{q}}$ a teljes szerkezet csomóponti elmozdulásvektora

$\underline{\underline{f}}$ a teljes szerkezet csomóponti terhelésvektora

$$\underline{\underline{f}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_x \\ F_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}_1 \\ \underline{\underline{f}}_2 \\ \underline{\underline{f}}_3 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{q}} = \begin{bmatrix} U_1 \\ W_1 \\ U_2 \\ W_2 \\ U_3 \\ W_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_1 \\ \underline{\underline{q}}_2 \\ \underline{\underline{q}}_3 \end{bmatrix}$$

(6x1) (6x1)

A teljes szerkezet alakváltozási energiája:

$$U = \sum_{e=1}^3 U^e = \frac{1}{2} \underline{\underline{q}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}}$$

$\underline{\underline{K}}$ a teljes szerkezet merevségi mátrixa

Az energiák összegzése az elemek illesztését jelenti:

$$\underline{\underline{K}}_{ij} = \sum_{e \in i,j} \underline{\underline{K}}_{ij}^e$$

$$\underline{\underline{K}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \underline{\underline{K}}_{11}^1 + \underline{\underline{K}}_{11}^3 & \underline{\underline{K}}_{12}^1 & \underline{\underline{K}}_{13}^3 \\ \hline \underline{\underline{K}}_{21}^1 & \underline{\underline{K}}_{22}^1 + \underline{\underline{K}}_{22}^2 & \underline{\underline{K}}_{23}^2 \\ \hline \underline{\underline{K}}_{31}^3 & \underline{\underline{K}}_{32}^2 & \underline{\underline{K}}_{33}^2 + \underline{\underline{K}}_{33}^3 \\ \hline \end{array}$$

A teljes potenciális energia:

$$p_p = \frac{1}{2} \underline{\underline{q}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}} - \underline{\underline{q}}^T \underline{\underline{f}}$$

A teljes potenciális energia minimuma elv:

$$d p_p = 0 = \frac{\partial p_p}{\partial \underline{\underline{q}}} d \underline{\underline{q}}^T$$

$$d \underline{\underline{q}}^T \quad \text{tetszőleges, ezért} \quad \frac{\partial p_p}{\partial \underline{\underline{q}}} = 0$$

$$\begin{aligned} d p_p &= d \underline{\underline{q}}^T (\underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}} - \underline{\underline{f}}) \\ \underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}} - \underline{\underline{f}} &= 0 \\ \underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}} &= \underline{\underline{f}} \end{aligned}$$

algebrai egyenletrendszer a $\underline{\underline{q}}$ - ra nézve

$\underline{\underline{q}}$ tartalmazza az ismeretleneket

$\underline{\underline{K}}$ és $\underline{\underline{f}}$ ismert adatokat tartalmaz: geometria, anyagállandó, terhelés

A megoldáshoz a peremfeltételeket is figyelembe kell venni. A példánál:

$$U_1 = 0, \quad W_1 = 0, \quad W_3 = 0$$

Terhelés csak a csomópontokban működik a szerkezetre.

A potenciális energia minimuma elv a feladatot pontosan oldja meg.

$$d \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & U_2 & W_2 & U_3 & 0 \end{bmatrix}}_{d \underline{\underline{\tilde{q}}}^T} \left(\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & \underline{\underline{\tilde{K}}} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_2 \\ W_2 \\ U_3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_x \\ F_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$\underline{\underline{\tilde{f}}}$

A megoldás a $\sim$ mal jelölt részből adódik: $\underline{\underline{\tilde{K}}} \underline{\underline{\tilde{q}}} - \underline{\underline{\tilde{f}}} = 0$

Húzott-nyomott rúdszerkezeteknél, ha csak a csomópontokban működik koncentrált erő, egzakt megoldást kapunk, ha az u-t lineárisan közelítjük.

Indoklás:

Húzott-nyomott rúdnál az $(A E u')' + p_x = 0$ egyenletet kaptuk az egész tartományra.

Ha:

$$p_x = 0 \rightarrow u'' = 0 \rightarrow u' = \text{konst} \rightarrow u = \text{lineáris} \rightarrow \text{a megoldás egzakt}$$

$$p_x = \text{konst} \text{ a } u'' = \text{konst} \text{ a } u' = \text{lineáris} \text{ a } u = \text{másodfokú} \text{ a } \text{a megoldás egzakt}$$

$$p_x = \text{lin.} \rightarrow u'' = \text{lin.} \rightarrow u' = \text{másodfokú} \rightarrow u = \text{harmadfokú} \rightarrow \text{a megoldás egzakt}$$

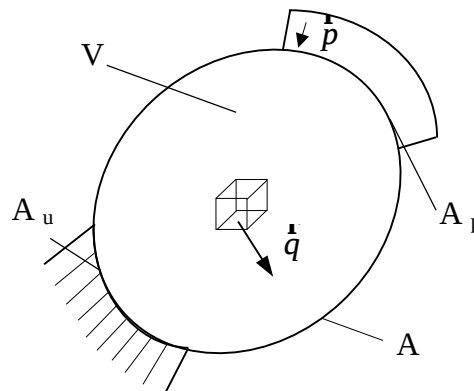
Amennyiben a fentiek nem állnak fenn, közelítő megoldást kapunk.

A módszer olyan esetekben is alkalmazható, amelyek hagyományos eszközökkel már nem oldhatók meg. (pl. síkbeli, statikailag határozatlan szerkezetek)

A gondolatmenet térbeli feladatok esetén ugyanúgy használható.

Betti – tétel:

Egyszerű összefüggést ad ugyanannak a lineárisan rugalmas testnek két különböző erőrendszer okozta alakváltozása között.



Ugyanaz a test, két különböző terhelés:

$$\begin{array}{ll} \dot{p}_1 \neq \dot{p}_2 & \dot{r} \in A_p \\ \dot{q}_1 \neq \dot{q}_2 & \dot{r} \in V \end{array}$$

A rugalmas test esetén két különböző megoldást kapunk:

$$\begin{array}{ll} \dot{u}_1 \rightarrow \underline{T}_1 = \underline{D}_1 \cdot \underline{A}_1 \\ \dot{u}_2 \rightarrow \underline{T}_2 = \underline{D}_2 \cdot \underline{A}_2 \end{array}$$

Ha a test ugyanaz, akkor $\underline{D} = \underline{D}_1 = \underline{D}_2$.