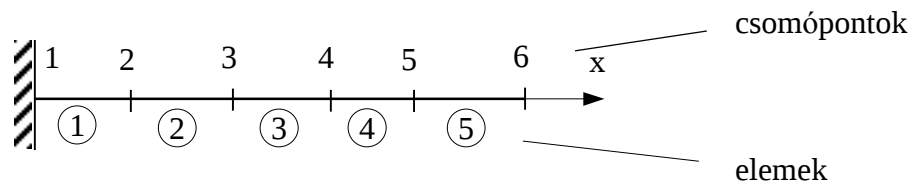
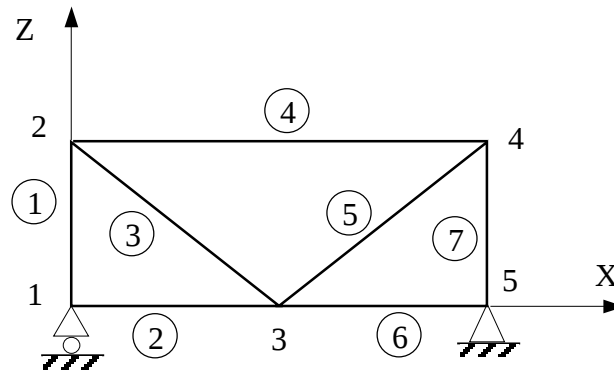


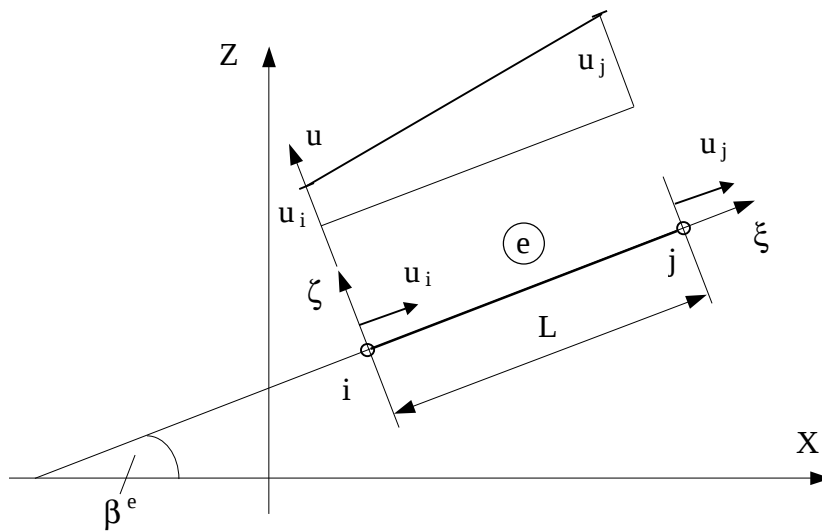
Pl.



vagy



Vizsgáljuk meg az egyik elemet részletesen és általánosítva:



Feltételek:

1. A rúd anyaga homogén, izotróp.
2. A rúd prizmatikus.

Koordinátarendszerek:

1. X, Z – globális KR
2. ξ, ζ - lokális (helyi) KR

Az elem jele: $\textcircled{e}$

Két csomópontja: i, j

Az elemen az u elmozduláskoordináta közelítése lineárisan történik:

$$u = u_i + \frac{u_j - u_i}{L} x$$

Az elemen a ξ tengely irányú fajlagos nyúlás (ϵ):

$$e = \frac{du}{dx} = \frac{u_j - u_i}{L}$$

Az $\textcircled{e}$ jelű elem esetén a teljes potenciális energia:

$$p_p^e = U^e - W_k^e$$

alakváltozási energia külső ER munkája

Az U^e felírása a rúdhoz kötött helyi KR-ben:

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{(L)} A E (u')^2 dx$$
$$u' = e = \frac{du}{dx} = \frac{u_j - u_i}{L}$$
$$U^e = \frac{1}{2} \int_{(L)} A E \left(\frac{u_j - u_i}{L} \right)^2 dx = \frac{1}{2} A E \frac{(u_j - u_i)^2}{L}$$

Másként felírva:

$$U^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix}^{e,T} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}^e$$

(1x2) (2x2) (2x1)

$\underline{\underline{\bar{K}}}^e$ helyi koordináta-rendszerben értelmezett elemi merevségi mátrix

Mégegyszer felírva:

$$\underline{\underline{\bar{K}}}^e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \quad \text{szimmetrikus mátrix, (2x2)-es}$$

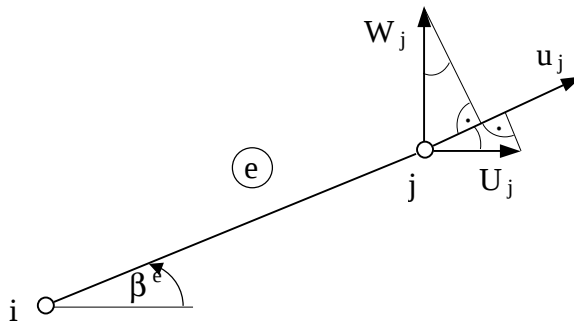
$\underline{\underline{\bar{q}}}^e$ az elem csomóponti elmozdulásvektora a helyi KR-ben:

$$\underline{\underline{\bar{q}}}^e = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}^e \quad (2 \times 1) \text{ méretű}$$

A bevezetett jelölésekkel az alakváltozási energia a lokális KR-ben:

$$U^e = \frac{1}{2} \underline{\underline{\bar{q}}}^{eT} \underline{\underline{\bar{K}}}^e \underline{\underline{\bar{q}}}^e \quad \text{a fölvonás mindenütt a helyi KR-re utal}$$

A különböző elemek illesztése miatt a helyi KR-ből transzformálni kell a globális KR-be:



$$u_j = U_j \cos b^e + W_j \sin b^e$$

Hasonlóan:

$$u_i = U_i \cos b^e + W_i \sin b^e$$

$$\underline{\underline{\bar{q}}}^e = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \cos b^e & \sin b^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos b^e & \sin b^e \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} U_i \\ W_i \\ U_j \\ W_j \end{bmatrix}^e$$

(2x1) (2x4) (4x1)

Tehát:

$$\underline{\underline{T}}^e = \begin{bmatrix} \cos b^e & \sin b^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos b^e & \sin b^e \end{bmatrix}^e \quad \text{az elem transzformációs mátrixa}$$

$$\underline{\underline{q}}^e = \begin{bmatrix} U_i \\ W_i \\ U_j \\ W_j \end{bmatrix}^e \quad \text{elemi csomóponti elmozdulásvektor a globális KR-ben}$$

Így: $\underline{\underline{\bar{q}}}^e = \underline{\underline{T}}^e \underline{\underline{q}}^e$

A transzponáltképzés szabálya: $(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}})^T = \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^T$

Visszahelyettesítve az alakváltozási energia kifejezésébe:

$$U^e = \frac{1}{2} \underline{\underline{q}}^{eT} \underbrace{\underline{\underline{T}}^{eT} \underline{\underline{\bar{K}}}^e \underline{\underline{T}}^e}_{\underline{\underline{K}}^e} \underline{\underline{q}}^e = \frac{1}{2} \underline{\underline{q}}^{eT} \underline{\underline{K}}^e \underline{\underline{q}}^e$$

elemi merevségi mátrix a globális KR-ben

Tehát: $\underline{\underline{K}}^e = \underline{\underline{T}}^{eT} \underline{\underline{\bar{K}}}^e \underline{\underline{T}}^e$
 $(4 \times 4) \quad (4 \times 2) \quad (2 \times 2) \quad (2 \times 4)$

A globális KR-beli elemi merevségi mátrix csomópontok szerint blokkokra bontható (blokkolható, particionálható):

$$\underline{\underline{K}}^e = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{ii}^e & \underline{\underline{K}}_{ij}^e \\ \underline{\underline{K}}_{ji}^e & \underline{\underline{K}}_{jj}^e \end{bmatrix} \quad \text{Egy blokk, pl. } \underline{\underline{K}}_{ii}^e \text{ (2x2) méretű.}$$

(4x4)

A globális KR-beli csomóponti elmozdulásvektor szintén blokkolható:

$$\underline{\underline{q}}^e = \begin{bmatrix} U_i \\ W_i \\ U_j \\ W_j \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_i \\ \underline{\underline{q}}_j \end{bmatrix}^e$$

Az elemi merevségi mátrix előállítása a globális KR-ben:

$$\underline{\underline{K}}^e = \underline{\underline{T}}^{eT} \underline{\underline{\bar{K}}}^e \underline{\underline{T}}^e$$

$$\underline{\underline{\bar{K}}}^e \underline{\underline{T}}^e = \begin{bmatrix} \frac{A E}{L} & -\frac{A E}{L} \\ -\frac{A E}{L} & \frac{A E}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos b^e & \sin b^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos b^e & \sin b^e \end{bmatrix}$$

(2x2) (2x4)

Bevezetve az alábbi jelöléseket:

$$\frac{A E}{L} = D$$

$$\cos b^e = C$$

$$\sin b^e = S$$

$$\underline{\underline{\bar{K}}}^e \underline{\underline{T}}^e = \begin{bmatrix} D C & D S & -D C & -D S \\ -D C & -D S & D C & D S \end{bmatrix}$$

(2x4)

$$\underline{\underline{K}}^e = \underline{\underline{T}}^{eT} \underline{\underline{\bar{K}}}^e \underline{\underline{T}}^e = \begin{bmatrix} C & 0 \\ S & 0 \\ 0 & C \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D C & D S & -D C & -D S \\ -D C & -D S & D C & D S \end{bmatrix}$$

(4x2) (2x4)

$$\underline{\underline{K}}^e = \begin{bmatrix} D C^2 & D S C & -D C^2 & -D S C \\ D S C & D S^2 & -D S C & -D S^2 \\ -D C^2 & -D S C & D C^2 & D S C \\ -D S C & -D S^2 & D S C & D S^2 \end{bmatrix}$$

(4x4)

szimmetrikus