

Behelyettesítve:

$$p_p = \frac{1}{2} \int_{(V)} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{A}} dV - \int_{(A_p)} \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{p}} dA - \int_{(V)} \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{q}} dV$$

Teljes potenciális energia minimuma elv:

A teljes potenciális energia az egzakt megoldásnál $(\underline{\underline{u}})$ - nál minimummal rendelkezik.

$$p_p^*(\underline{\underline{u}}^*) \geq p_p(\underline{\underline{u}})$$

$$p_p^* = p_p^*(\underline{\underline{u}} + d \underline{\underline{u}})$$

$$p_p^* = \frac{1}{2} \int_{(V)} (\underline{\underline{A}} + d \underline{\underline{A}}) \cdot \underline{\underline{D}} \cdot (\underline{\underline{A}} + d \underline{\underline{A}}) dV - \int_{(A_p)} (\underline{\underline{u}} + d \underline{\underline{u}}) \cdot \underline{\underline{p}} dA - \int_{(V)} (\underline{\underline{u}} + d \underline{\underline{u}}) \cdot \underline{\underline{q}} dV$$

Átalakítva:

$$p_p^* = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{(V)} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{A}} dV - \int_{(A_p)} \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{p}} dA - \int_{(V)} \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{q}} dV}_{\pi_p} +$$

$$+ 2 \underbrace{\frac{1}{2} \int_{(V)} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot d \underline{\underline{A}} dV - \int_{(A_p)} d \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{p}} dA - \int_{(V)} d \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{q}} dV}_{\delta \pi_p} +$$

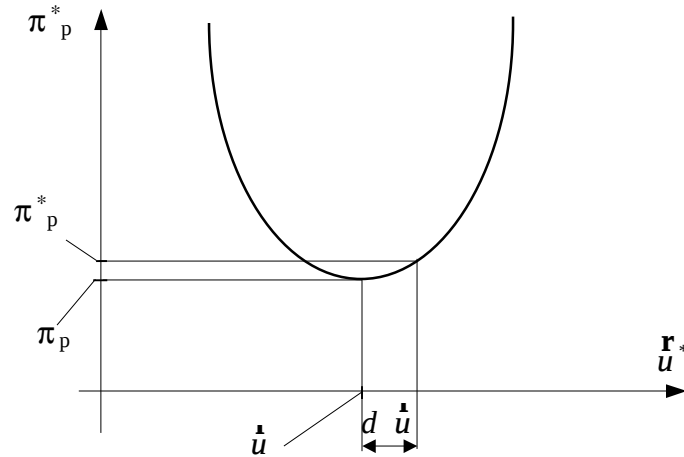
$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \int_{(V)} d \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot d \underline{\underline{A}} dV}_{\delta^2 \pi_p}$$

$$p_p^* = p_p + d p_p + d^2 p_p$$

$d p_p = 0$ a virtuális munka elv variációs alakja miatt

$d^2 p_p \geq 0$ pozitív energia

Ábrázolása:



A potenciális energia minimuma elv (a $d p_p = 0$ egyenlet) fizikai tartalma:

$$d p_p = \int_{(V)} \underline{A} \cdot \underline{D} \cdot d \underline{A} dV - \int_{(A_p)} d \underline{u} \cdot \underline{p} dA - \int_{(V)} d \underline{u} \cdot \underline{q} dV = 0$$

$$\int_{(V)} \underline{A} \cdot \underline{D} \cdot d \underline{A} dV = \int_{(V)} d \underline{A} \cdot \underline{D} \cdot \underline{A} dV = \int_{(V)} d \underline{A} \cdot \underline{T} dV$$

$$d p_p = \int_{(V)} d \underline{A} \cdot \underline{T} dV - \int_{(A_p)} d \underline{u} \cdot \underline{p} dA - \int_{(V)} d \underline{u} \cdot \underline{q} dV = 0$$

$$d p_p = \int_{(V)} (d \underline{A} + d \underline{Y}) \cdot \underline{T} dV - \int_{(A_p)} d \underline{u} \cdot \underline{p} dA - \int_{(V)} d \underline{u} \cdot \underline{q} dV = 0$$

$$d \underline{U} = d (\underline{u} \cdot \nabla) = d \underline{u} \cdot \nabla$$

$$d p_p = \int_{(V)} (d \underline{u} \cdot \nabla) \cdot \underline{T} dV - \int_{(A_p)} d \underline{u} \cdot \underline{p} dA - \int_{(V)} d \underline{u} \cdot \underline{q} dV = 0$$

$$(d \underline{u} \cdot \nabla) \cdot \underline{T} = (d \underline{u} \cdot \underline{T} \cdot \nabla) - d \underline{u} \cdot (\underline{T} \cdot \nabla)$$

$$d p_p = \int_{(V)} (d \underline{u} \cdot \underline{T} \cdot \nabla) dV - \int_{(V)} d \underline{u} \cdot (\underline{T} \cdot \nabla) dV - \int_{(A_p)} d \underline{u} \cdot \underline{p} dA - \int_{(V)} d \underline{u} \cdot \underline{q} dV = 0$$

Gauss-tétellel átalakítva:

$$d p_p = \int_{(A)} d \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} d A - \int_{(V)} d \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \nabla) d V - \int_{(A_p)} d \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{p}}} d A - \int_{(V)} d \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}} d V = 0$$

$$\int_{(A)} d \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} d A = \int_{(A_u)} d \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} d A + \int_{(A_p)} d \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} d A = \int_{(A_p)} d \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} d A$$

mert $A_u - n \quad d \underline{\underline{\mathbf{u}}} = \underline{\underline{\mathbf{r}}}$

Behelyettesítve és összevonva:

$$d p_p = \int_{(A_p)} d \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} - \underline{\underline{\mathbf{p}}}) d A - \int_{(V)} d \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \nabla + \underline{\underline{\mathbf{q}}}) d V = 0$$

$d \underline{\underline{\mathbf{u}}} = \underline{\underline{\mathbf{r}}} \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{r}}} \in A_u$, de egyébként tetszőleges, ezért az integranduszok zárójeles kifejezései zérusok, akkor áll fenn a potenciális energia minimuma elv.

Tehát a $d p_p = 0$ elvből következik:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \nabla + \underline{\underline{\mathbf{q}}} = \underline{\underline{\mathbf{r}}} \quad \underline{\underline{\mathbf{r}}} \in V \quad \text{egyensúlyi egyenlet}$$

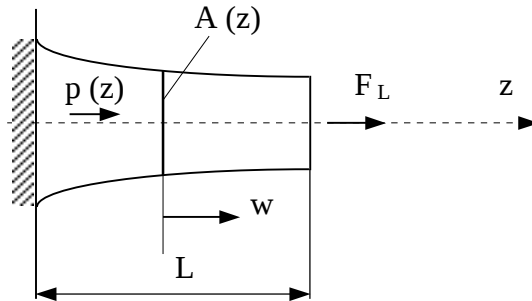
$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} = \underline{\underline{\mathbf{p}}} \quad \underline{\underline{\mathbf{r}}} \in A_p \quad \text{dinamikai peremfeltétel}$$

Az $\underline{\underline{\mathbf{r}}}^*$ - től csak a deriválhatóságot és a kinematikai peremfeltétel teljesülését követeljük meg. A kinematikailag lehetséges $\underline{\underline{\mathbf{r}}}^*$ a potenciális energia minimuma elven keresztül igyekszik teljesíteni az egyensúlyi egyenletet és a dinamikai peremfeltételt.

A potenciális energia minimuma elv alkalmazásai

$$p_p = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{(V)} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} d V}_U - \underbrace{\left(\int_{(A_p)} \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{p}}} d A + \int_{(V)} \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}} d V \right)}_{W_k} = U - W_k$$

Húzott rúd:



A z irányú elmozduláskoordináta:

$$w = w(z)$$

$$\underline{\underline{u}} = w \underline{\underline{e}}_z$$

$$e_z = \frac{dw}{dz} = w'$$

$$s_z = E e_z = E w'$$

$$[\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix} \quad [\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} e_x & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 \\ 0 & 0 & e_z \end{bmatrix}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{(V)} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{A}} dV$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{A}} &= (\underline{\underline{e}}_x \otimes \underline{\underline{r}}_x + \underline{\underline{e}}_y \otimes \underline{\underline{r}}_y + \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{r}}_z) \cdot (\underline{\underline{a}}_x \otimes \underline{\underline{e}}_x + \underline{\underline{a}}_y \otimes \underline{\underline{e}}_y + \underline{\underline{a}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z) = \\ &= \underline{\underline{r}}_x \cdot \underline{\underline{a}}_x + \underline{\underline{r}}_y \cdot \underline{\underline{a}}_y + \underline{\underline{r}}_z \cdot \underline{\underline{a}}_z = s_z e_z \end{aligned}$$

$$\text{mert } \underline{\underline{r}}_x = \underline{\underline{0}}; \quad \underline{\underline{r}}_y = \underline{\underline{0}}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{(V)} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{A}} dV = \frac{1}{2} \int_{(V)} s_z e_z dV = \frac{1}{2} \int_{(L)(A)} E (w')^2 dA dz = \frac{1}{2} \int_{(L)} A E (w')^2 dz$$

$$W_k = \int_{(A_p)} \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{p}} dA + \int_{(V)} \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{q}} dV$$

$$\text{Mivel } \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{0}}, \quad W_k = \int_{(A_p)} \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{p}} dA$$

$$W_k = \int_{(L)} p \cdot w \, dz + F_L \cdot w_L$$

Behelyettesítve:

$$p_p = \frac{1}{2} \int_{(L)} A E (w')^2 \, dz - \left(\int_{(L)} p \cdot w \, dz + F_L \cdot w_L \right)$$

A potenciális energia minimuma elv ($d p_p = 0$ egyenlet) alapján visszkapjuk belőle az egyensúlyi egyenletet és a dinamikai peremfeltételt.

A variációképzés formálisan olyan, mint a deriválás.

$$\begin{aligned} d (w')^2 &= 2 w' d w' \\ d p_p &= \int_{(L)} A E w' d w' \, dz - \int_{(L)} p d w \, dz - F_L d w_L \\ &\quad u \quad v' \end{aligned}$$

Szorzat integrálási szabállyal:

$$\begin{aligned} d p_p = 0 &= \left(A E w' d w_L \right)_0^L - \int_{(L)} A E w'' d w \, dz - \int_{(L)} p d w \, dz - F_L d w_L \\ d p_p = 0 &= A E w' d w_L - A E w' d w_0 - \int_{(L)} \left[(A E w')' + p \right] d w \, dz - F_L d w_L \\ d p_p = 0 &= (A E w' - F_L) d w_L - \int_{(L)} \left[(A E w')' + p \right] d w \, dz \end{aligned}$$

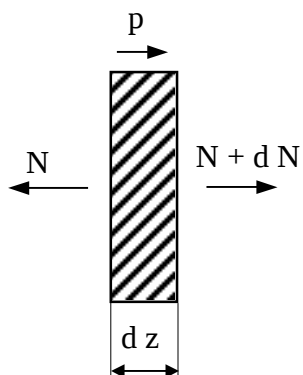
Mivel $d w_L$ és $d w$ tetszőlegesen és $d p_p = 0$, ezért

$$\begin{aligned} A E w' - F_L &= 0 \rightarrow A E w' = F_L \\ (A E w')' + p &= 0 \quad \text{az egész tartományon} \end{aligned}$$

Legyen:

$$F_L = N \rightarrow A E w' = N \quad \text{az elmozdulásból számítható a rúderő}$$

$$N' + p = 0 \quad \text{egyensúly}$$



Egyensúlyban kell lennie:

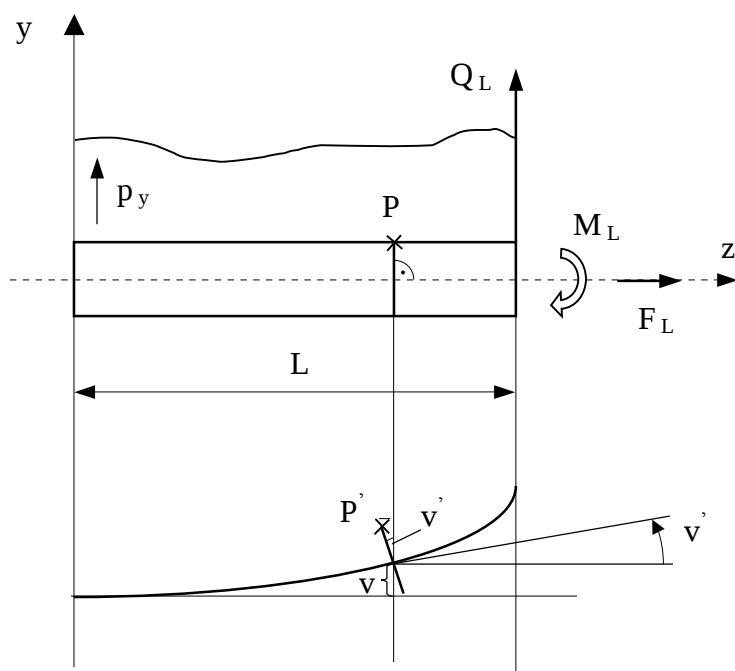
$$N + dN - N + p \, dz = 0$$

$$dN + p \, dz = 0$$

$$\frac{dN}{dz} + p = 0$$

$$N' + p = 0$$

Húzott, hajlított rúd:



A P' pont vízszintes elmozdulása (kis elmozdulást feltételezve):

$$w = \underbrace{-v' y}_{\text{hajlításból}} + \underbrace{w_0}_{\text{húzásból}}$$

$$\dot{\mathbf{u}} = w \dot{\mathbf{e}}_z$$

$$e_z = \frac{dw}{dz} = w' = -v'' y + w'_0$$

$$s_z = E e_z = E w'$$

$$u = \frac{1}{2} s_z e_z = \frac{1}{2} E (-v'' y + w'_0)^2$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{(V)} E (-v'' y + w'_0)^2 dV = \frac{1}{2} \int_{(L)} \int_{(A)} E (-v'' y + w'_0)^2 dA dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_{(L)} \int_{(A)} E [w_0'^2 - 2 w'_0 v'' y + (v'' y)^2] dA dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_{(L)} A E w_0'^2 dz - \int_{(L)} w'_0 v'' \left(\int_{(A)} y dA \right) dz + \frac{1}{2} \int_{(L)} E (v'')^2 \int_{(A)} y^2 dA dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_{(L)} A E w_0'^2 dz + \frac{1}{2} \int_{(L)} I_x E (v'')^2 dz \end{aligned}$$

A külső erők munkája:

$$W_k = \int_{(L)} p_y v dz + Q_L v_L - v'_L M_L + F_L w_{0L}$$

Képezve a $dp_p = 0$ egyenletet, a húzott, hajlított tartóra is adódnak az egyenletek. Csak a hajlításra vonatkozó egyenletek az alábbiak (a levezetés lépéseinek részletezése nélkül):

$$(I_x E v'')'' - p_y = 0$$

$$M_x = -I_x E v''$$

$$T_y = -\frac{dM_x}{dz} = -M'_x$$

Ritz-féle módszer:

A potenciális energia minimuma elvre alapozott módszer, Walter Ritz közölte 1909-ben. A $dp_p = 0$ variációs egyenletet kielégítő $\dot{\mathbf{u}}$ elmozdulásmező a rugalmasságtani feladat egzakt megoldása. A tényleges $\dot{\mathbf{u}}$ helyett a kinematikailag lehetséges $\dot{\mathbf{u}}^*$ közelítő megoldást jelent.

Az $\dot{\mathbf{u}}^*$ mezőt közelítsük az alábbi módon:

$$\dot{\mathbf{u}}^* = \dot{\mathbf{u}}_0^*(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^N (c_i j_i(\mathbf{r}) \mathbf{e}_x + c_{i+N} y_i(\mathbf{r}) \mathbf{e}_y + c_{i+2N} c_i(\mathbf{r}) \mathbf{e}_z)$$

$\dot{\mathbf{u}}_0^*(\mathbf{r})$ a kinematikai peremfeltételt kielégítő mező

$$\dot{\mathbf{u}}_0^* = \dot{\mathbf{u}}_0$$

$$j_i = 0$$

$$y_i = 0$$

$$c_i = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{r} \in A_u$$

A j_i, y_i, c_i felvett közelítő függvények folytonosak, deriválhatók..

N - a közelítő sorban felvett tagok száma.

c_i - $i = 1, 2, \dots, 3N$ ismeretlen állandók

Az $\dot{\mathbf{u}}^*$ mező variációja:

$$d\dot{\mathbf{u}}^* = \sum_{i=1}^N (d c_i j_i(\mathbf{r}) \mathbf{e}_x + d c_{i+N} y_i(\mathbf{r}) \mathbf{e}_y + d c_{i+2N} c_i(\mathbf{r}) \mathbf{e}_z)$$

A kinematikailag lehetséges $\dot{\mathbf{u}}^*$ - hoz tartozó teljes potenciális energia az állandók függvénye:

$$p_p^* = p_p^*(\dot{\mathbf{u}}^*) = p_p^*(c_1, c_2, \mathbf{K}, c_{3N})$$

Képezve a $d p_p = 0$ - t:

$$d p_p^* = d c_1 \frac{\partial p_p^*}{\partial c_1} + d c_2 \frac{\partial p_p^*}{\partial c_2} + \mathbf{L} + d c_{3N} \frac{\partial p_p^*}{\partial c_{3N}} = 0$$

Mivel az ismeretlen állandók variációja tetszőleges, ezért:

$$\frac{\partial p_p^*}{\partial c_1} = 0$$

$$\frac{\partial p_p^*}{\partial c_2} = 0$$

$\mathbb{M}$

$i = 1, 2, \dots, 3N$ egyenletből álló

algebrai egyenletrendszer a c_i

$$\frac{\partial p_p^*}{\partial c_{3N}} = 0 \quad \text{állandók meghatározására}$$

A megoldás minősége függ:

- az N számtól,
- a j_i, y_i, c_i függvények minőségétől.

Betekintés a végelelem-módszerbe (VEM-be)

Az utóbbi évtizedek egyik leglátványosabban terjedő, nagy hatékonyságú számítástechnikai módszere a végelelem-módszer, amely kitüntetett szerepet vívott ki a mérnöki tervező munkában. Meg kell jegyezni, hogy nem ez az egyetlen numerikus módszer, létezik más olyan módszer is, amellyel hatékonyan lehet különböző feladatokat megoldani. Pl. ilyen a peremelem-módszer. Azonban a rugalmasságtani feladatok kapcsán a végelelem-módszerről ejtünk néhány szót.

Egy valóságos szerkezethez különféle számítási modelleket rendelhetünk hozzá attól függően, hogy milyen pontosságot akarunk elérni, a valóságos szerkezetben lejátszódó folyamatok közül melyik fontos a számunkra. Ugyanakkor az is igaz, hogy egy számítási modellhez nemcsak egy valóságos szerkezet tartozhat. Bizonyos modelleket vizsgálva a valóságos testek, szerkezetek egész nagy osztályának a megoldását kaphatjuk meg. Pl. rúdmodell, síkbeli modell, stb.

A számítási modell megalkotását kétféle ellentétes kíváncsi befolyásolja:

- a modell minél jobban helyettesítse a valóságos testet,
- a mechanikai jellemzők jó közelítéssel meghatározhatók legyenek.

A modellezésnél mérlegelni kell:

- a környezeti hatásokat (a terhelés tér- és időbeli megoszlását, a hőhatást, az elektromágneses, stb. hatásokat),
- az anyag szerkezetét (rugalmas-nem rugalmas, homogén, izotróp, stb.),
- a kialakuló elmozdulást, alakváltozást (kicsi, nagy),
- a geometriai alakot (mivel helyettesíthető a test),
- a megfogásokat,
- a testek kölcsönhatását (érintkezést, szilárd test és folyadék által alkotott együttes rendszer vizsgálatát).

A számítógépek megjelenése és elterjedése kedvező irányban befolyásolta a modellezés nem könnyű feladatát. Egyre bonyolultabb modellek felállítására és megoldására nyílik lehetőség. A végelelem-módszerre épülő számítógépi programok segítségével olyan feladatokat is meg tudunk oldani, amelyeket analitikus úton nem lehetett. Igaz ugyan, hogy a pontos megoldást nem ismerjük előre, de vannak olyan eljárások, amelyekkel a számítás hibája előre becsülhető, s ezért egy megadott hibakorlát alá csökkenthető. Mindezt a számítógépi program végzi el.

A végeselem-módszer kialakulása:

A mérnöki gyakorlatban jelentkező szerkezetek egy része rugalmas anyagból (elsősorban fémből) készül, és bizonyos terhelési intervallumban lineárisan viselkedik. Már itt felhívnam a figyelmet arra, hogy a jól alakítható fémek viselkedése rugalmas-képlékeny, s jelenlegi ismereteinkkel ezt is egyre pontosabban figyelembe tudjuk venni. Ezen felül egyre több helyen tért hódítanak a műanyagok, kompozitok, stb. Ma már ezen anyagok viselkedésének leírása is egyre jobban és pontosabban követhető.

A klasszikus rugalmasságtan számos módszert dolgozott ki a homogén, izotróp anyagok viselkedésének leírására, számítására. A rugalmas kontinuum viselkedését leíró parciális differenciál-egyenletrendszer megoldását nagyon nehezíti az, hogy a vizsgált testekhez tartozó peremfeltételek különbözőek. Nem sikerült olyan általános, pontos megoldást adó módszert kodolgozni, amely bármely feladat megoldására alkalmas. Ez az oka annak, hogy a mérnöki gyakorlat megelégedett a közelítő megoldásokkal. A múlt század elején kidolgozott variációs elvek, illetve a későbbiekben kifejlesztett más elvek (pl. Ritz, Timoshenko, Kantorovics, Reissner, stb.) lehetővé tették olyan feladatok közelítő megoldását is, amelyeket korábban nem sikerült megoldani, és a mérnöki gyakorlat számára kielégítő pontosságot lehetett elérni.

A munkák egy része továbbra is a kontinuumként kezelt testre vonatkozó parciális differenciál-egyenletrendszert oldotta meg közelítő módon. A másik része a variációs elvekre alapozott számítást részesítette előnyben. A további kutatások abba az irányba indultak el, hogy hogyan lehetne a két módszert egyesíteni. Vagyis, hogyan lehetne a variációs módszert összekapcsolni a differencia módszernél használt felbontással, azaz háló felvételével.

A legelső ilyen munka Courant-tól származik (1943), aki a St. Venant-éfle csavarási feladatot a potenciális energia minimuma elv segítségével vizsgálta. Az első mérnöki feladatot Turner és társai oldották meg (1956). Síkbeli feladatnál az elmozdulásmezőt háromszögletű, illetve négyszögletű elemeken közelítették, majd ezek csatolásával – a teljes potenciális energia minimuma elv alapján – előállították a csomópontokbeli elmozdulásokat (mint ismeretleneket) magába foglaló lineáris algebrai egyenletrendszert.

A múlt század 60-as éveiben a lineáris feladatok megoldására szolgáló, elmozdulásmódszeren alapuló, általános érvényű végeselem programrendszerek kerültek kidolgozásra (pl. NASTRAN, ASKA). A 60-as évek közepén jelentek meg az ún. hibrid elemek. A 70-es években a nemlineáris viselkedésű szerkezetekkel kapcsolatos programokat dolgozták ki, továbbá a bonyolult képlékenységtani, hőtani, hidrodinamikai feladatok, illetve a nagyméretű rendszerek dinamikai viselkedésének számítására került sor. A nagyméretű itt több tízezer ismeretlent jelent. A 80-as években a hidrodinamikai és szilárd testekből felépített csatolt rendszerek, a nemlineáris anyagtulajdonságok figyelembevétele nagy elmozdulásoknál és alakváltozásoknál (alakítástechnológiai folyamatok szimulációja), törésmechanikai problémák kezelése, a számítási pontosság becslése, illetve növelése voltak a legfontosabb megoldandó feladatok.

1969-ben alapították meg az első folyóiratot, az *International Journal for Numerical Methods in Engineering* című folyóiratot, amely ma az egyik legfontosabb, végeselemes kutatásokkal foglalkozó folyóirat. A 70-es években jelentek meg az első, végeselem-módszert ismertető monográfiák (pl. Zienkiewicz, Oden, Brebbia nevéhez fűződnek).

A végeselem-módszer ma már hatékony eszközként áll a mérnökök rendelkezésére. Alapvetően két irányban lehet tovább lépni. Részben a kidolgozott programokat megismerni és alkalmazni különféle feladatok megoldására. (Kereskedelmi forgalomban kapható programrendszerek pl. COSMOS/M)

A másik irány pedig olyan programok, programrendszerek kidolgozása, amelyek célorientáltak, tehát csak bizonyos feladattípusok megoldására alkalmasak, de itt viszont igen sok feladat kiszámítására (pl. különféle terhelések, geometriai módosítások, anyagmódosítások, stb. hatásának gyors érzékelése).

Tehát tömören, röviden a végeselem-módszer lényege a következő:

Mindazon módszereket, amelyeknél a keresendő mezőt véges számú altartományon (végeselemen) közelítjük, általunk önkényesen választott approximációs függvények segítségével, továbbá a függvények együtthatóinak egy részét az elemek határoló felületén elhelyezkedő csomópontokbeli függvény, esetleg azok deriváltjai révén fejezzük ki, és így az altartományok feletti mezők összeillesztésével állítjuk elő a teljes tartományra vonatkozó mezőt, továbbá a mezőket leíró paramétereket valamilyen hibaelvből variációs elvből származó algebrai egyenlet- vagy egyenlőtlenségi rendszer révén határozzuk meg, végeselem-módszernek (VEM) nevezzük.

A VEM-ből a Rugalmasságtan című tantárgy keretében csak egy picit ismernünk kell.

Síkbeli, húzott-nyomott, prizmatikus rudakból felépített szerkezetek vizsgálata VEM-mel:

Alapfogalmak:

Végeselem:

Egy test véges számú felülettel határolt része.

Csomópont:

Az elem határolófelületén vagy belsejében kiválasztott véges számú pontok sokasága. Ezen pontok kitüntetett jelentőségűek, mert a pontokban fellépő elmozdulás, feszültség, vagy ezek deriváltjai szerepelnek ismeretlenként a megfelelő variációs elvhez kapcsolódó algebrai egyenletrendszerben.

A végeselem definíciójából adódóan a szomszédos elemek azonos dimenziójú részekkel csatlakoznak egymáshoz: lap lappal, él éllel, csomópont csomóponttal. A csomópontokbeli elmozdulással kapcsolatos ismeretlen paramétereket magába foglaló vektort csomóponti általánosított elmozdulásvektornak fogjuk nevezni.