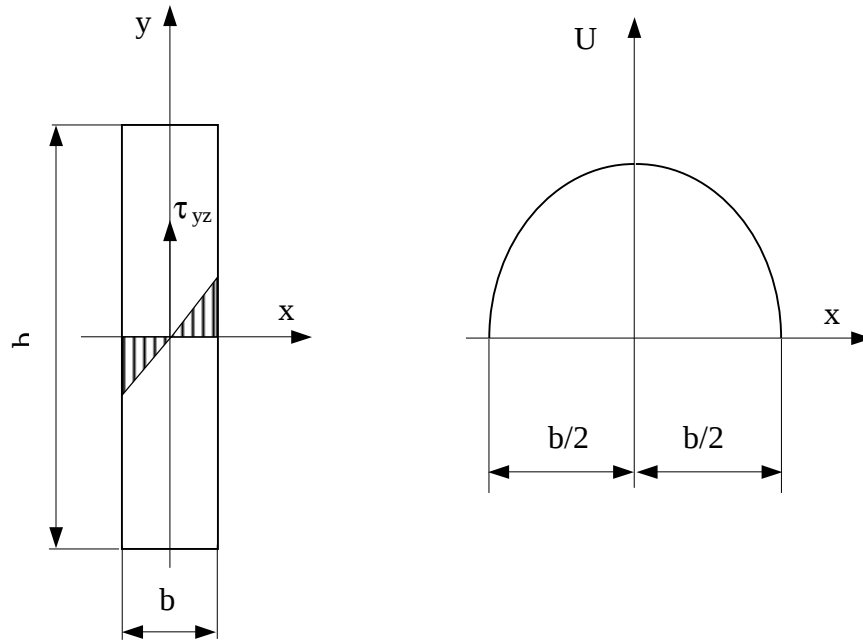




A keresztmetszet $y = \pm h/2$ széleitől eltekintve az látszik, hogy a feszültségfüggvény az y koordinátától csak igen kis mértékben függ, ezért az alábbi feszültségfüggvényt alkalmazzuk:

$$U = U(x) = G J \left(\frac{b^2}{4} - x^2 \right)$$

A felvett feszültségfüggvényre a feltételek:

1. Poisson-féle differenciálegyenlet:

$$\Delta U = -2 G J \rightarrow \frac{d^2 U}{d x^2} = -2 G J \quad \text{teljesül}$$

1. Peremfeltételek:

$$x = \pm b/2 \rightarrow U|_{x=b/2} = 0 \quad \text{teljesül}$$

$$y = \pm h/2 \quad \text{közéltés, mert nem teljesül a peremfeltétel}$$

Feszültségek:

$$t_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0; \quad t_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x} = 2 G J x \quad \text{lineáris}$$

Az $y = \pm h/2$ széleket leszámítva adja a feszültségeket. A középső szakaszon jó közelítés.

$$t_{yz_{\max}} = G J b$$

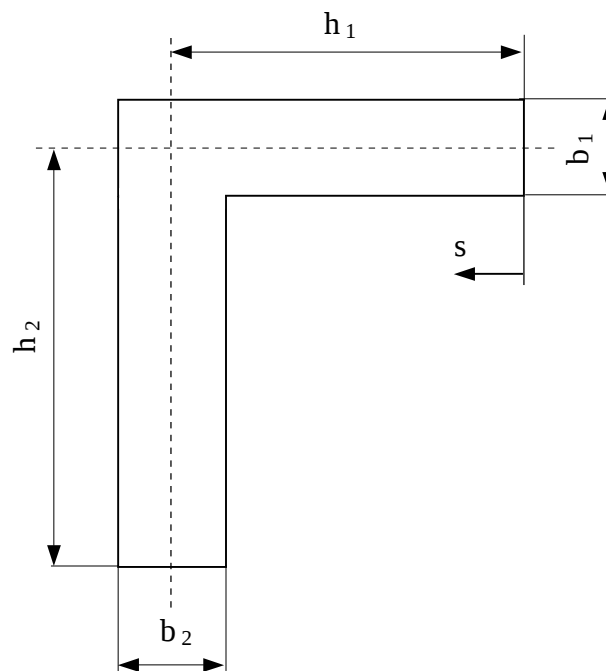
A csavarónyomaték:

$$M_c = 2 \int_{(A)} U dA \approx G J \frac{h b^3}{3} = G J I_c$$

$$I_c = \frac{h b^3}{3}$$

$$t_{yz} = \frac{M_c}{I_c} 2 x$$

Közeiítő megoldás összetett, nyitott szelvényre:



$$M_c = G J I_c$$

$$I_c = \sum_{i=1}^n I_{ci} = \sum_{i=1}^n \frac{h_i b_i^3}{3}$$

pl. itt

$$I_c = \frac{h_1 b_1^3}{3} + \frac{h_2 b_2^3}{3}$$

$$t_{sz} = G J 2 x = \frac{M_c}{I_c} 2 x$$

$$t_{sz \max} = \frac{M_c}{I_c} b_{\max}$$

Hengerelt szelvényeknél pontosabb értéket kapunk a csavarási másodrendű nyomatékra, ha az

$$I_c = \sum_{i=1}^n I_{ci} = \sum_{i=1}^n h_i \frac{h_i b_i^3}{3}$$

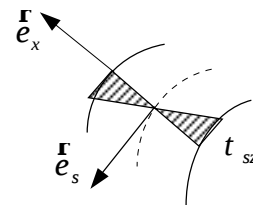
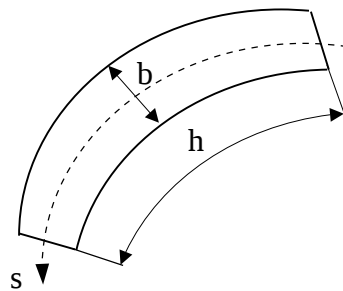
formulát alkalmazzuk. Az h_i értékei szabványokból kivehetők.

Pl. L szelvény: $\eta = 0,79$

I szelvény: $\eta = 1,31$

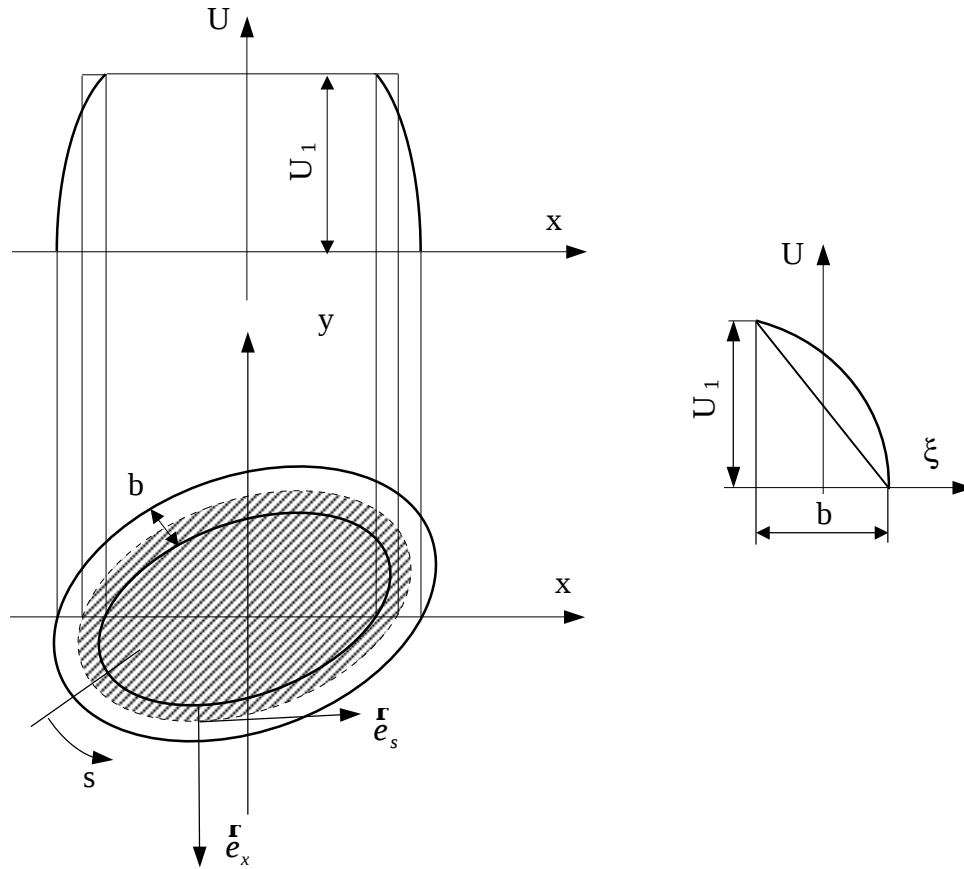
T, U szelvény: $\eta = 1,12$

Görbe középvonalú vékony, nyitott szelvény:



$$I_c = \int_{(h)} \frac{b^3(s)}{3} ds$$

Közelítő megoldás zárt, vékony szelvényre:



Vékony falvastagság esetén a feszültségfüggvény ξ menti változása jó közelítéssel lineárisnak vehető, ezért a görbült szakaszt egyenessel helyettesítjük:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{U_1}{b} = \text{áll.}$$

$$\mathbf{t}_z = t_{sz} \mathbf{e}_s + t_{xz} \mathbf{e}_x = (\nabla U) \times \mathbf{e}_z$$

$$t_{sz} = \mathbf{t}_z \cdot \mathbf{e}_s = [(\nabla U) \times \mathbf{e}_z] \cdot \mathbf{e}_s = (\nabla U) \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_s) = -(\nabla U) \cdot \mathbf{e}_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_1}{b} = \text{áll.}$$

t_{sz} a középvonal mentén a b vastagsági mérettel változik. Ott a legnagyobb, ahol a b a legkisebb. A t_{xz} feszültségkoordináta általában elhanyagolható.

A keresztmetszet középvonala által határolt terület: A_k

A csavarónyomaték jó közelítéssel:

$$M_c = 2 \int_{(A)} U dA = 2 A_k U_1 \rightarrow U_1 = \frac{M_c}{2 A_k}$$

Behelyettesítve:

$$t_{sz} = \frac{M_c}{2 A_k b} = \text{áll.}$$

A csavarási merevség a számítások részletezése nélkül:

$$I_c = \frac{4 A_k^2}{\oint \frac{1}{b} ds}$$

A rugalmasságtan variációs elvei:

A mechanika és a fizika története a minket körülvevő világban lezajlott jelenségek leírását biztosító, általános törvények és elvek felállításának története. Nagyon sikeresnek bizonyultak azok a megállapítások, amikor egy jelenséghez variációs elvet lehetett megfogalmazni.

A problémák variációs elvek segítségével történő vizsgálatának előnyei a differenciálegyenlet-rendszer közvetlen megoldásával szemben a következők:

1. A vizsgált variációs elvhez kapcsolódó funkcionál gyakran fizikai tartalommal bír.
2. A funkcionál alacsonyabbrendű deriváltakat tartalmaz, mint ami a feladat differenciálegyenlet-rendszerében szerepel.
3. Gyakran a vizsgált probléma duális felépítésű variációs megfogalmazást is megenged, az egyik változóhoz tartozó funkcionálnak minimális (maximális), a duál változójú funkcionálnak maximális (minimális) értéket ad. Alsó, illetve felső korlátot jelent a megoldásra. A közelítés hibájára becslést lehet adni.
4. Variációs elvekkel igazolni lehet a megoldás létezését és egyértékűségét.
5. Variációs elvekkel bonyolult perem-, illesztési feltételek, mezőegyenletek vezethetők le.
6. A számítás közelítésének jóságára szemléletes képet kapunk.
7. A fizikai tartalommal bíró funkcionálok alapján numerikusan stabil eljárások származtathatók.
8. Numerikus számítások során integrálni kell, melyre jól kidolgozott kvadraturák szolgálnak.

Funkcionál:

Egyetlen skalár érték, amely egy mezőhöz van rendelve.

Mire jók a variációs elvek?

Közelítő megoldások meghatározására alkalmasak, de pontos megoldások is előállíthatók velük.

Alapfogalmak:

Kinematikailag lehetséges elmozdulásmező:

Jelölések: Egzakt megoldás: $\mathbf{\underline{u}} = \mathbf{\underline{u}}(\mathbf{r})$
 Kinematikailag lehetséges megoldás: $\mathbf{\underline{u}}^* = \mathbf{\underline{u}}^*(\mathbf{r})$

Mit kell teljesítenie az $\mathbf{\underline{u}}^* = \mathbf{\underline{u}}^*(\mathbf{r})$ - nak?

1. Legyen deriválható:

$$\underline{\underline{A}}^* = \frac{1}{2} (\mathbf{\underline{u}}^* \cdot \nabla + \nabla \cdot \mathbf{\underline{u}}^*)$$

Ha ismert $\underline{\underline{A}}^*$, akkor $\underline{\underline{T}}^*$.

2. Teljesítse a kinematikai peremfeltételt:

$$\mathbf{\underline{u}}^* = \mathbf{\underline{u}}_0 \rightarrow \mathbf{r} \in A_u$$

Nem kell teljesülnie:

1. Egyensúlyi egyenletnek:

$$\underline{\underline{T}}^* \cdot \nabla + \mathbf{\underline{q}} \neq \mathbf{0}$$

2. Dinamikai peremfeltételnek:

$$\underline{\underline{T}}^* \cdot \mathbf{n} \neq \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{r} \in A_p$$

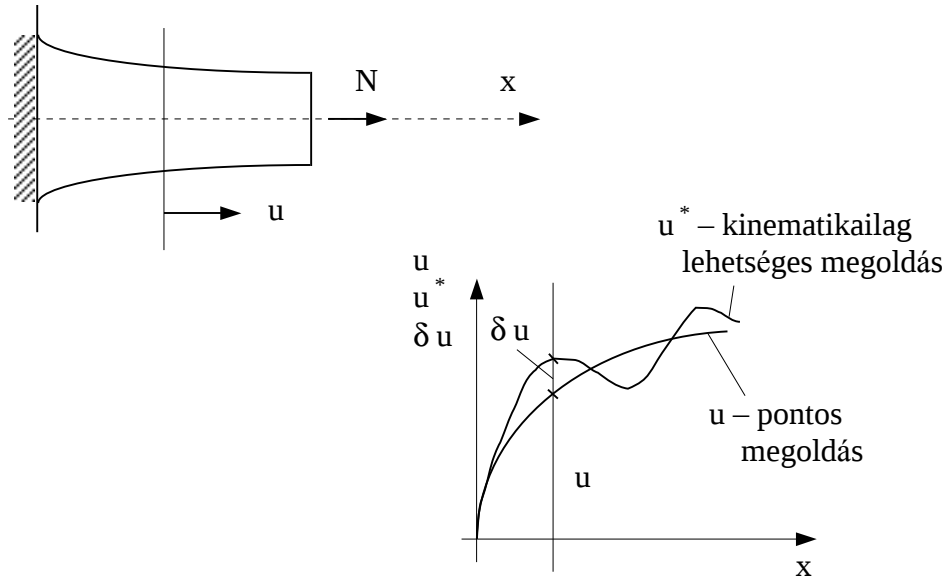
A kinematikailag lehetséges elmozdulásmező felírása variációs megfogalmazásban:

$$\mathbf{\underline{u}}^* = \mathbf{\underline{u}} + d\mathbf{\underline{u}}$$

/ \

egzakt megoldás az elmozdulásmező variációja

Példa egyváltozós esetre: Húzott rúd



du – a kinematikailag lehetséges elmozdulásmező eltérése a pontos megoldástól

$$u^* = u + du$$

Általánosan:

Mivel $\mathbf{\bar{u}}^* = \mathbf{\bar{u}}^*(\mathbf{\bar{r}})$ teljesíti a kinematikai peremfeltételt, ezért

$$\mathbf{\bar{u}}^* = \mathbf{\bar{u}}_0 \rightarrow \mathbf{\bar{r}} \in A_u$$

Következmény: $d\mathbf{\bar{u}} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{\bar{r}} \in A_u$

Statikailag lehetséges (megengedett) feszültségi tenzormező:

Jelölések: Egzakt megoldás: $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}(\mathbf{\bar{r}})$
 Statikailag lehetséges megoldás: $\bar{\underline{\underline{T}}} = \bar{\underline{\underline{T}}}(\mathbf{\bar{r}})$

$\bar{\underline{\underline{T}}}$ -nek teljesítenie kell:

1. Az egyensúlyi egyenletet:

$$\bar{\underline{\underline{T}}} \cdot \nabla + \bar{\underline{\underline{q}}} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{\bar{r}} \in V$$

2. A dinamikai peremfeltételt:

$$\underline{\underline{\bar{T}}} \cdot \underline{\underline{\bar{n}}} = \underline{\underline{\bar{p}}} \rightarrow \underline{\underline{\bar{r}}} \in A_p$$

Nem kell teljesítenie:

1. A kinematikai peremfeltételt:

$$\underline{\underline{\bar{u}}}(\underline{\underline{\bar{T}}}) \neq \underline{\underline{\bar{u}}}_0 \rightarrow \underline{\underline{\bar{r}}} \in A_u$$

2. A kompatibilitási egyenletet:

$$\nabla \times \underline{\underline{\bar{A}}}(\underline{\underline{\bar{T}}}) \times \nabla \neq \underline{\underline{\bar{0}}}$$

Variációs megfogalmazásban:

$$\underline{\underline{\bar{T}}} = \underline{\underline{T}} + d \underline{\underline{T}}$$

Mivel $\underline{\underline{\bar{T}}}$ kielégíti az egyensúlyi egyenletet és a dinamikai peremfeltételt, ezért:

$$\begin{aligned} d \underline{\underline{T}} \cdot \nabla &= \underline{\underline{\bar{0}}} \rightarrow \underline{\underline{\bar{r}}} \in V \\ d \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\bar{n}}} &= \underline{\underline{\bar{0}}} \rightarrow \underline{\underline{\bar{r}}} \in A_p \end{aligned}$$

A virtuális munka elve:

Jelentős, széles körben alkalmazható, a test anyagi tulajdonságaitól független variációs elv.

Levezetése:

Legyen a feszültségi tenzormező statikailag, az elmozdulásmező kinematikailag lehetséges.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\bar{T}}} \cdot \nabla + \underline{\underline{\bar{q}}} &= \underline{\underline{\bar{0}}} \quad \Big| \cdot \underline{\underline{\bar{u}}}^* \\ \underline{\underline{\bar{u}}}^* \cdot (\underline{\underline{\bar{T}}} \cdot \nabla + \underline{\underline{\bar{q}}}) &= 0 \quad \Big| \int_V \\ \int_V \underline{\underline{\bar{u}}}^* \cdot (\underline{\underline{\bar{T}}} \cdot \nabla + \underline{\underline{\bar{q}}}) dV &= 0 \\ \int_V \underline{\underline{\bar{u}}}^* \cdot (\underline{\underline{\bar{T}}} \cdot \nabla) dV + \int_V \underline{\underline{\bar{u}}}^* \cdot \underline{\underline{\bar{q}}} dV &= 0 \end{aligned}$$

Az első integrandusz átalakítása:

$$\begin{aligned}
 (\underline{\underline{\mathbf{r}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \nabla) &= \left(\underline{\underline{\mathbf{u}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \nabla \right) + \left(\underline{\underline{\mathbf{r}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{\downarrow} \cdot \nabla \right) \\
 \left(\underline{\underline{\mathbf{r}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{\downarrow} \cdot \nabla \right) &= \left(\underline{\underline{\mathbf{r}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \nabla \right) - \left(\underline{\underline{\mathbf{u}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \nabla \right) \\
 \left(\underline{\underline{\mathbf{u}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \nabla \right) &= (\underline{\underline{\mathbf{u}}}^* \cdot \mathbf{0} \cdot \nabla) \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\underline{\mathbf{U}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} = (\underline{\underline{\mathbf{A}}}^* + \underline{\underline{\mathbf{Y}}}^*) \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \\
 \underline{\underline{\mathbf{Y}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} &= 0
 \end{aligned}$$

Szimmetrikus és ferdeszimmetrikus tenzor kétszeres skaláris szorzata zérus.
Visszahelyettesítve:

$$\int_{(V)} \left[(\underline{\underline{\mathbf{r}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \nabla) - \underline{\underline{\mathbf{A}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \right] dV + \int_{(V)} \underline{\underline{\mathbf{u}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}} dV = 0$$

Gauss-tétel:

$$\int_{(V)} \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \nabla dV = \int_{(A)} \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{n}}} dA$$

Ennek figyelembevételével a virtuális munka elve:

$$\int_{(A)} \underline{\underline{\mathbf{u}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} dA + \int_{(V)} \underline{\underline{\mathbf{u}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}} dV = \int_{(V)} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} dV$$

Mivel $\mathbf{A} = \mathbf{A}_u + \mathbf{A}_p$, ezért a virtuális munka elv másik alakja:

$$\int_{(A_u)} \underline{\underline{\mathbf{u}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} dA + \int_{(A_p)} \underline{\underline{\mathbf{u}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{p}}} dA + \int_{(V)} \underline{\underline{\mathbf{u}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}} dV = \int_{(V)} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} dV$$

Ha a virtuális munka elv bármilyen $\underline{\underline{\mathbf{u}}}^*$ esetén fennáll, akkor a $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ statikailag lehetséges.

Ha a virtuális munka elv bármilyen $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ esetén fennáll, akkor az $\underline{\underline{\mathbf{u}}}^*$ kinematikailag lehetséges.

Anyagtól független elv, bármilyen szilárd test vonatkozásában fennáll.

Az egzakt megoldásra is érvényes.

A virtuális munka elv variációs megfogalmazása:

Legyen: $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}$ a pontos megoldás

$$\begin{aligned}\underline{\underline{A}}^* &= \underline{\underline{A}} + d \underline{\underline{A}} \\ \underline{\underline{r}}^* &= \underline{\underline{r}} + d \underline{\underline{r}}\end{aligned}$$

Behelyettesítve a virtuális munka elv kifejezésébe:

$$\int_{(A_u)} \underline{\underline{r}}_0 \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{n}} dA + \int_{(A_p)} (\underline{\underline{u}} + d \underline{\underline{u}}) \cdot \underline{\underline{p}} dA + \int_{(V)} (\underline{\underline{u}} + d \underline{\underline{u}}) \cdot \underline{\underline{q}} dV = \int_{(V)} (\underline{\underline{A}} + d \underline{\underline{A}}) \cdot \underline{\underline{T}} dV$$

A virtuális munka elv az egzakt megoldásra felírva:

$$\int_{(A_u)} \underline{\underline{r}}_0 \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{n}} dA + \int_{(A_p)} \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{p}} dA + \int_{(V)} \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{q}} dV = \int_{(V)} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{T}} dV$$

Kivonva a kettőt:

$$\int_{(V)} d \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{T}} dV = \int_{(A_p)} d \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{p}} dA + \int_{(V)} d \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{q}} dV$$

Ez az alak a virtuális munka elv variációs alakja.

Teljes potenciális energia:

Jele: π_p (csak rugalmas anyagmodell esetén)

$p_p = p_p(\underline{\underline{u}})$ az elmozdulásmezőtől függ, azaz az elmozdulásmezőhöz rendelt mennyiség, azaz funkcionál.

Értelmezése:

$$p_p = \frac{1}{2} \int_{(V)} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{T}} dV - \int_{(A_p)} \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{p}} dA - \int_{(V)} \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{q}} dV$$

A Hooke-féle anyagegyenlet:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{A}}$$