

Duál rendszer:

Alapváltozó: $\underline{\underline{T}}$ (vagy $\underline{\underline{F}}$ feszültségfüggvény tenzor)

A $\underline{\underline{T}}$ - re teljesülnie kell a dinamikai peremfeltételnek.

A megoldás útja:

$$\underline{\underline{T}} \rightarrow \underline{\underline{A}} \rightarrow \dot{\underline{\underline{u}}}$$

↑ ↑
Hooke t. Cesaro-formula (nem részletezzük)

Az $\underline{\underline{A}}$ - ra fenn kell állnia a kompatibilitási egyenletnek:

$\nabla \times \underline{\underline{A}} \times \nabla = \underline{\underline{0}}$ tenzoregyenlet, a skaláregyenletei is felírhatók, nem részletezzük.

A két rendszer egymástól független, egymással egyenértékű elméleti rendszer. Egyaránt alkalmasak bármely feladat megoldására elvileg. A konkrét feladatoknál a feladat típusa dönti el, hogy melyik rendszerben célszerű a megoldást keresni. Mindkettőt használjuk.

Pl. potenciális energia minimuma elv alkalmazásai – primál rendszerű megoldás
prizmatikus rudak szabad csavarása – duál rendszerű megoldás

Alapegyenletek:

Az alapegyenletrendszer egyenleteit egy változóra rendezve adódnak az alapegyenletek.

Primál rendszer alapegyenlete:

($\dot{\underline{\underline{u}}}$ - ra felírt alapegyenlet, Navier-féle alapegyenlet)

Navier vezette le $n = 1/4$ esetén 1827-ben. Cauchy 1828-ban foglalkozott vele.

Az alapegyenlet levezetése:

$$\underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \dot{\underline{\underline{q}}} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{T}} = 2 G \left(\underline{\underline{A}} + \frac{n}{1-2n} A_I \underline{\underline{I}} \right)$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned}
2G \left(\underline{\underline{A}} + \frac{n}{1-2n} A_I \underline{\underline{I}} \right) \cdot \nabla + \frac{\mathbf{r}}{2G} &= \mathbf{0} \\
2G \underline{\underline{A}} \cdot \nabla + 2G \frac{n}{1-2n} A_I \underline{\underline{I}} \cdot \nabla + \frac{\mathbf{r}}{2G} &= \mathbf{0} \quad \left| \cdot \frac{1}{2G} \right. \\
\underline{\underline{A}} \cdot \nabla + \frac{n}{1-2n} A_I \underline{\underline{I}} \cdot \nabla + \frac{\mathbf{r}}{2G} &= \mathbf{0} \\
\underline{\underline{A}} &= 1/2 (\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u})
\end{aligned}$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \cdot \nabla + \frac{n}{1-2n} A_I \underline{\underline{I}} \cdot \nabla + \frac{\mathbf{r}}{2G} &= \mathbf{0} \\
\frac{1}{2} \mathbf{u} (\nabla \cdot \nabla) + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla) + \frac{n}{1-2n} A_I \underline{\underline{I}} \cdot \nabla + \frac{\mathbf{r}}{2G} &= \mathbf{0} \\
\nabla \cdot \nabla &= D \\
\underline{\underline{I}} \cdot \nabla &= \nabla \\
\mathbf{r} \cdot \nabla &= (u \mathbf{e}_x + v \mathbf{e}_y + w \mathbf{e}_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) = \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = e_x + e_y + e_z = A_I \\
\frac{1}{2} D \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla A_I + \frac{2n}{2(1-2n)} \nabla A_I + \frac{\mathbf{r}}{2G} &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

A Navier- féle alapegyenlet:

$$D \mathbf{u} + \frac{1}{1-2n} \nabla A_I + \frac{\mathbf{r}}{G} = \mathbf{0}$$

Skaláris egyenletei is felírhatók bármely koordináta-rendszerben.

Duál rendszer alapegyenlete:

($\underline{\underline{T}}$ - re felírt alapegyenlet, Beltrami-Mitchell-féle alapegyenlet)

Az $\underline{\underline{A}}$ - ra felírt alapegyenlet a Navier-féle egyenlet átalakításával:

Kiindulás: Navier-féle egyenlet, majd jobbról, balról szorzás $\otimes \nabla$ -val.

$$\begin{aligned}
& \nabla \circ D \frac{\mathbf{r}}{u} + \frac{1}{1-2n} \nabla \circ \nabla A_I + \frac{1}{G} \nabla \circ \frac{\mathbf{r}}{q} = \underline{0} \\
& + D \frac{\mathbf{r}}{u} \circ \nabla + \frac{1}{1-2n} \nabla \circ \nabla A_I + \frac{1}{G} \frac{\mathbf{r}}{q} \circ \nabla = \underline{0}
\end{aligned}$$

Felcserélve a ∇ -t és a Δ -t:

$$\begin{aligned}
& D \left(\frac{\mathbf{r}}{u} \circ \nabla + \nabla \circ \frac{\mathbf{r}}{u} \right) + \frac{2}{1-2n} \nabla \circ \nabla A_I + \frac{1}{G} \left(\frac{\mathbf{r}}{q} \circ \nabla + \nabla \circ \frac{\mathbf{r}}{q} \right) = \underline{0} \\
& \frac{1}{2} D \left(\frac{\mathbf{r}}{u} \circ \nabla + \nabla \circ \frac{\mathbf{r}}{u} \right) + \frac{1}{1-2n} \nabla \circ \nabla A_I + \frac{1}{2G} \left(\frac{\mathbf{r}}{q} \circ \nabla + \nabla \circ \frac{\mathbf{r}}{q} \right) = \underline{0} \\
& D \underline{A} + \frac{1}{1-2n} \nabla \circ \nabla A_I + \frac{1}{2G} \left(\frac{\mathbf{r}}{q} \circ \nabla + \nabla \circ \frac{\mathbf{r}}{q} \right) = \underline{0}
\end{aligned}$$

$\underline{T}$ - re felírt alapegyenlet:

$$\begin{aligned}
& D \left[\frac{1}{2G} \left(\underline{T} - \frac{n}{1+n} T_I \underline{I} \right) \right] + \frac{1}{1-2n} \nabla \circ \nabla A_I + \frac{1}{2G} \left(\frac{\mathbf{r}}{q} \circ \nabla + \nabla \circ \frac{\mathbf{r}}{q} \right) = \underline{0} \\
& \frac{1}{2G} D \underline{T} - \frac{1}{2G} \frac{n}{1+n} D T_I \underline{I} + \frac{1}{1-2n} \nabla \circ \nabla A_I + \frac{1}{2G} \left(\frac{\mathbf{r}}{q} \circ \nabla + \nabla \circ \frac{\mathbf{r}}{q} \right) = \underline{0} \\
& A_I = \frac{1}{2G} \frac{1-2n}{1+n} T_I \\
& \frac{1}{2G} D \underline{T} - \frac{1}{2G} \frac{n}{1+n} D T_I \underline{I} + \frac{1}{2G} \frac{1}{1+n} \nabla \circ \nabla T_I + \frac{1}{2G} \left(\frac{\mathbf{r}}{q} \circ \nabla + \nabla \circ \frac{\mathbf{r}}{q} \right) = \underline{0} \\
& D \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{u} \right) + \frac{1}{1-2n} \nabla \cdot \nabla A_I + \frac{\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{q}}{G} = 0 \\
& \frac{2-2n}{1-2n} D A_I + \frac{\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{q}}{G} = 0 \\
& \frac{1}{2G} \frac{1-n}{1+n} D T_I + \frac{\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{q}}{2G} = 0
\end{aligned}$$

Az alapegyenlet:

$$D \underline{T} + \frac{n}{1-n} \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{q} \right) \underline{I} + \frac{1}{1+n} \nabla \circ \nabla T_I + \left(\frac{\mathbf{r}}{q} \circ \nabla + \nabla \circ \frac{\mathbf{r}}{q} \right) = \underline{0}$$

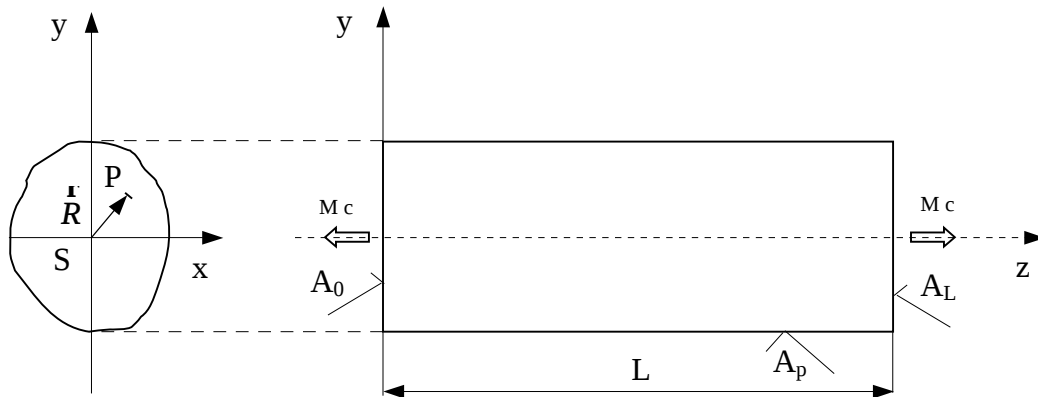
Prizmatikus rudak szabad csavarása:

A Szilárdságtanban eddig már szerepelt a kör- és körgyűrű keresztmetszetű rudak csavarása.

Mit jelent a „szabad” csavarás kifejezés?

A keresztmetszetek z irányú elmozdulását semmi nem gátolja. Ha ez bekövetkezik, akkor gátolt csavarásról beszélünk.

Egy tetszőleges keresztmetszetű rúd vizsgálata:



Feltételezések:

- A rudat nem terheli térfogati erőrendszer $\underline{\underline{\mathbf{q}}} \equiv \underline{\underline{\mathbf{0}}}$.
- A rúd palástja (A_p) terheletlen: a valóságban nem ad tiszta csavarást. A nyomatékátadás helyével nem foglalkozunk. Ezért a rúd egy olyan L hosszúságú szakaszát vizsgáljuk, amely ezt nem tartalmazza. (Saint-Venant-elv).

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} = \underline{\underline{\mathbf{p}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \quad \underline{\underline{\mathbf{r}}} \in A_p$$

- A feszültségi tenzor felépítése az alábbi:

$$[\underline{\underline{\mathbf{T}}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & t_{xz} \\ 0 & 0 & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & 0 \end{bmatrix} \quad s_z \equiv 0$$

Vagyis a rúd $\underline{\underline{\mathbf{e}}}_z$ normálisú keresztmetszetein:

$$\underline{\underline{\mathbf{r}}}_z = \underline{\underline{\mathbf{t}}}_z = t_{xz} \underline{\underline{\mathbf{e}}}_x + t_{yz} \underline{\underline{\mathbf{e}}}_y$$

- A feszültségi tenzor és koordinátái csak x és y függvényei:

$$t_{xz} = t_{zx}(x, y) \quad ; \quad t_{yz} = t_{zy}(x, y)$$

- A keresztmetszeten fellépő feszültségeknek egyetlen, a rúd z tengelyébe eső M_c csavarónyomaték az eredője:

$$\int_{(A)} \mathbf{r} t_z dA = 0$$

$$\int_{(A)} \mathbf{R} \times \mathbf{r} t_z dA = M_c \mathbf{e}_z = \text{áll.}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(x, y)$$

Tetszőleges P pont: $\mathbf{r} = \mathbf{R} + z \mathbf{e}_z$

- A rúd pontjai szabadon elmozdulhatnak a rúd tengelyének irányába. Ahol ez nem teljesül, gátolt csavarásról van szó. Vékonszelvényű rudaknál van elsősorban jelentősége.

Prizmatikus rúd szabad csavarásának megoldását a feszültségi tenzor koordinátáinak előállításával keressük meg, azaz duál rendszert, egzakt megoldást állítunk elő.

A megoldás előállításának lépései:

Egyensúlyi egyenlet:

$$\underline{\underline{T}} \cdot \nabla = \mathbf{0}, \quad \text{mert} \quad \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Skaláregyenletei:

$$\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} = 0 \rightarrow t_{xz} = t_{zx}(x, y)$$

$$\frac{\partial t_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} = 0 \rightarrow t_{yz} = t_{zy}(x, y) \quad z\text{-től függetlenek}$$

$$\frac{\partial t_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z} = 0$$

Bármely keresztmetszet vizsgálata ugyanazt az eredményt adja, a feladat megoldása z -től független. (Prizmatikus a rúd.)

Az utolsó skaláregyenletet kell teljesíteni, mely a következő alakban is írható:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_z &= t_{xz} \mathbf{e}_x + t_{yz} \mathbf{e}_y \\ \nabla &= \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad \text{így az utolsó skaláregyenlet} \quad \mathbf{t}_z \cdot \nabla = 0.$$

Hogyan lehet a megoldást megkeresni?

A feladatot feszültségfüggvény meghatározására vezetjük vissza, azaz bevezetjük az $U = U(x, y)$ feszültségfüggvényt. Egyetlen feszültségfüggvény elegendő a probléma leírására.

A feszültségek előállítása a feszültségfüggvényből:

$$\begin{aligned} t_{xz} &= t_{zx} = \frac{\partial U}{\partial y} \\ t_{yz} &= t_{zy} = -\frac{\partial U}{\partial x} \end{aligned}$$

Így: $\mathbf{t}_z = \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{e}_y = (\nabla U) \times \mathbf{e}_z$, mely állítás igazolható.

Kérdés: Milyen feltételeket kell teljesítenie az U feszültségfüggvénynek?

Mivel a $\mathbf{q} \equiv \mathbf{0}$, a Beltrami-Mitchell-féle alapegyenlet a következőképpen alakul:

$$D \underline{\underline{T}} + \frac{1}{1+n} \nabla \circ \nabla T_I = \underline{\underline{0}}$$

De: $T_I = 0$, mert az összes σ zérus.

Így: $D \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{0}}$

Skaláregyenletei:

$$\begin{aligned} D t_{xz} &= 0 \\ D t_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

Behelyettesítés után:

$$D \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} (D U) = 0$$

$$D \left(- \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0 \rightarrow - \frac{\partial}{\partial x} (D U) = 0$$

Sem az x, sem az y koordinátától nem függenek, ezért

$$D U = \text{áll.}$$

Mekkora az állandó értéke?

A konstans meghatározása:

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 g_{xz} \\ 0 & 0 & 1/2 g_{yz} \\ 1/2 g_{zx} & 1/2 g_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow u = u(y, z) \rightarrow u = -y f(z)$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow v = v(x, z) \rightarrow v = x f(z)$$

$$e_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \rightarrow w = w(x, y)$$

$$g_{xy} = 0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Behelyettesítve: $-f(z) + f(z) = 0$

z- től független egyenleteket akarunk előállítani.

γ_{xz} és γ_{yz} előállítása az előző elmozduláskoordinátákkal:

$$g_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} - y f'(z)$$

$$g_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} + x f'(z)$$

$$t_{xz} = t_{xz}(x, y) \rightarrow g_{xz} = g_{xz}(x, y) \rightarrow \frac{\partial g_{xz}}{\partial z} = 0$$

Mivel:

$$t_{yz} = t_{yz}(x, y) \rightarrow g_{yz} = g_{yz}(x, y) \rightarrow \frac{\partial g_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial g_{xz}}{\partial z} = 0 = -y f''(z)$$

$$\frac{\partial g_{yz}}{\partial z} = 0 = x f''(z)$$

Következmény: $f''(z) = 0; \rightarrow f'(z) = \text{áll.} \rightarrow f(z) = \text{csak lineáris lehet}$

Legyen: $f(z) = J z$

$J = \text{áll.}$ Fajlagos szögelfordulás (egymástól egységnyi távolságra lévő keresztmetszetek egymáshoz viszonyított szögelfordulása)

Az elmozduláskoordináták előállítására így:

$$\left. \begin{aligned} u &= -y J z \\ v &= x J z \\ w &= w(x, y) \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &= x \dot{\mathbf{e}}_x + y \dot{\mathbf{e}}_y \\ \dot{\mathbf{u}} &= J z \underbrace{\dot{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{R}}_{\text{merevtestszerű elfordulás}} + \underbrace{w(x, y) \dot{\mathbf{e}}_z}_{\text{síktól való eltérés (deplanáció)}} \end{aligned}$$

Az első tag a rúd keresztmetszeteinek, mint merev lapoknak a $z = 0$ keresztmetszethez viszonyított, a rúd tengelye körüli szögelfordulása. $j = J z$

A második tag azt mutatja, hogy az eredetileg sík keresztmetszetek egymással megegyező módon görbe felületekké deformálódnak (szabad csavarásnál). (Gátolt csavarásnál a különböző keresztmetszetek különböző módon deformálódnak görbe felületekké.)

Kör- és körgyűrű keresztmetszetek csavarásakor: $w = w(x, y) = 0$. A keresztmetszetek merev lapként fordulnak el, de síkok maradnak.

Ezzel az elmozdulásmező: $\dot{\mathbf{u}} = j \dot{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{R} + w(x, y) \dot{\mathbf{e}}_z$

A konstans meghatározásának folytatása:

$$\begin{aligned}
 g_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -yJ + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{t_{xz}}{G} \\
 g_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = xJ + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{t_{yz}}{G} \\
 t_{xz} &= G g_{xz} = -GJy + G \frac{\partial w}{\partial x} \\
 t_{yz} &= G g_{yz} = GJx + G \frac{\partial w}{\partial y} \\
 \frac{\partial t_{xz}}{\partial y} &= -GJ + G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad ; \quad \frac{\partial t_{yz}}{\partial x} = GJ + G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}$$

Kivonva a két egyenletet:

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial t_{yz}}{\partial x} = -GJ + G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - GJ + G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2GJ$$

Behelyettesítés után:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = D \quad U = -2GJ = \text{áll.} \quad \text{Poisson-féle differenciálegyenlet}$$

Egy-egy csavarási feladat megadása egy-egy J - val lehetséges. Az U feszültségfüggvényre nézve tehát az egyik feltétel, hogy elégítse ki a Poisson-féle differenciálegyenletet.

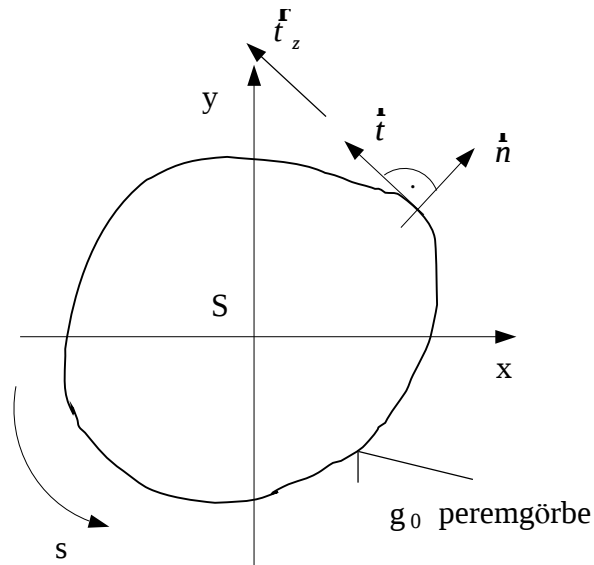
Az eddigieket összefoglalva:

$$\begin{aligned}
 U &= U(x, y) \\
 \mathbf{t}_z &= (\nabla U) \times \mathbf{e}_z \\
 D U &= -2GJ \quad \mathbf{R} \in A \\
 \mathbf{u} &= J z \mathbf{e}_z \times \mathbf{R} + w(x, y) \mathbf{e}_z \\
 \text{Szokás:} \\
 U &= GJ U_0(x, y) \\
 \mathbf{t}_z &= GJ (\nabla U_0) \times \mathbf{e}_z \\
 D U &= GJ D U_0 = -2GJ \quad \mathbf{R} \in A \\
 D U_0 &= -2
 \end{aligned}$$

Az U_0 csak geometriai megfontolásokon alapul.

Az U feszültségfüggvényre nézve másik feltétel, hogy teljesítse a peremfeltételeket.

Peremfeltételek vizsgálata:



Mivel a palást terheletlen,

$$\mathbf{t}_z = t_{xz} \mathbf{e}_x + t_{yz} \mathbf{e}_y = (\nabla U) \times \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{t}_z \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$[(\nabla U) \times \mathbf{e}_z] \cdot \mathbf{n} = (\nabla U) \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}) = (\nabla U) \cdot \mathbf{t} \quad \text{iránymenti derivált}$$

$$\mathbf{t}_z \cdot \mathbf{n} = 0 = (\nabla U) \cdot \mathbf{t} = \frac{\partial U}{\partial s} = 0$$

Az iránymenti derivált zérus.

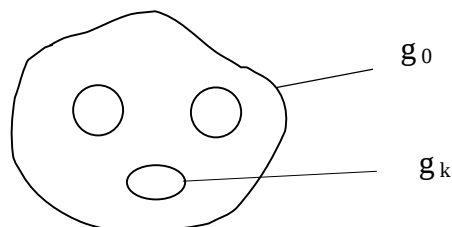
Következmény:

$$U|_{g_0} = \text{áll.}$$

Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy egyszeresen összefüggő tartomány peremgömbjén:

$$U|_{g_0} = 0$$

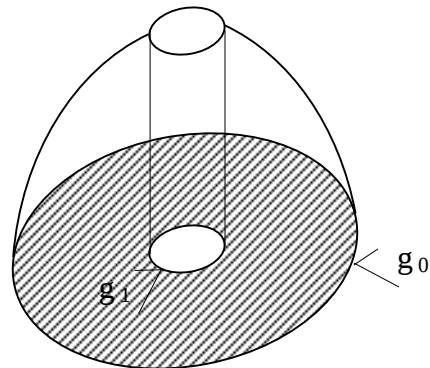
Többszörösen összefüggő keresztmetszet esetén:



$$U|_{g_0} = 0$$

$$U|_{g_k} = c_k, \quad k = 1, \mathbf{K} n$$

Például kétszeresen összefüggő keresztmetszet esetén az U feszültségfüggvény ábrázolása:



Tehát az U feszültségfüggvényre teljesülnie kell:

1. a Poisson-féle differenciálegyenletnek,
2. a peremfeltételeknek.

Az M_c csavarónyomaték és a J fajlagos szögelfordulás kapcsolata:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_z &= \dot{\mathbf{t}}_z \\ \mathbf{M}_c &= M_c \mathbf{e}_z \\ \mathbf{R} &= x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y \\ \mathbf{M}_c &= \int_{(A)} \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{t}}_z dA \quad | \cdot \mathbf{e}_z \\ M_c &= \int_{(A)} \{ \mathbf{R} \times [(\nabla U) \times \mathbf{e}_z] \} \cdot \mathbf{e}_z dA\end{aligned}$$

A kifejtési tétellel:

$$\begin{aligned}M_c &= \int_{(A)} \{ (\nabla U) \cdot \underbrace{[\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_z]}_{0, \text{ mert merőlegesek}} - \mathbf{e}_z \cdot [\mathbf{R} \cdot (\nabla U)] \} \cdot \mathbf{e}_z dA \\ &= 0, \text{ mert merőlegesek}\end{aligned}$$

Tehát:

$$M_c = - \int_{(A)} \dot{\mathbf{R}} \cdot (\nabla U) dA$$

Az $\dot{\mathbf{R}} \cdot (\nabla U)$ átalakítása:

$$\begin{aligned} (U \dot{\mathbf{R}}) \cdot \nabla &= (\nabla U) \cdot \dot{\mathbf{R}} + U (\dot{\mathbf{R}} \cdot \nabla) \\ (\nabla U) \cdot \dot{\mathbf{R}} &= (U \dot{\mathbf{R}}) \cdot \nabla - U (\dot{\mathbf{R}} \cdot \nabla) \\ \dot{\mathbf{R}} \cdot \nabla &= (x \dot{\mathbf{e}}_x + y \dot{\mathbf{e}}_y) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \dot{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial}{\partial y} \dot{\mathbf{e}}_y \right) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve:

$$M_c = - \int_{(A)} [(U \dot{\mathbf{R}}) \cdot \nabla - 2U] dA$$

Gauss-tétel síkbeli esetben:

$$\int_{(A)} \dot{\mathbf{c}} \cdot \nabla dA = \oint_{(g)} \dot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{n}} ds, \quad \text{ahol } \dot{\mathbf{n}} \text{ a vizsgált felületből kifelé mutató normális}$$

Így:

$$M_c = \int_{(A)} 2U dA - \oint_{(g)} (U \dot{\mathbf{R}}) \cdot \dot{\mathbf{n}} ds$$

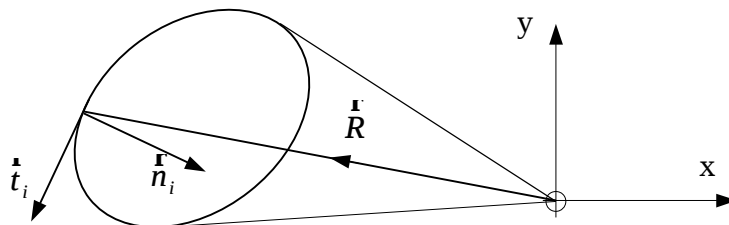
Egyszeresen összefüggő tartomány esetén:

$$U|_{g_0} = 0, \text{ ezért} \quad M_c = \int_{(A)} 2U dA$$

Többszörösen összefüggő tartomány esetén:

$$U|_{g_1} = U_1 = \text{áll.}; \quad U|_{g_2} = U_2 = \text{áll.}; \quad \mathbf{K}$$

$$M_c = \int_{(A)} 2U dA - \oint_{(g_1)} (U_1 \dot{\mathbf{R}}) \cdot \dot{\mathbf{n}}_1 ds_1 - \oint_{(g_2)} (U_2 \dot{\mathbf{R}}) \cdot \dot{\mathbf{n}}_2 ds_2 - \mathbf{K}$$



$$\begin{aligned}\mathbf{\hat{n}}_i &= -\mathbf{\hat{t}}_i \times \mathbf{\hat{e}}_z \\ \mathbf{\hat{R}} \cdot \mathbf{\hat{n}}_i \, d s_i &= - \left(\mathbf{\hat{R}} \times \mathbf{\hat{t}}_i \, d s_i \right) \mathbf{\hat{e}}_z = - 2 \, d A_i, \\ \oint_{(g_i)} \mathbf{\hat{R}} \cdot \mathbf{\hat{n}}_i \, d s_i &= - 2 \oint_{(g_i)} d A_i = - 2 A_i\end{aligned}$$

ami nem más, mint a rádiuszvektor által súrolt felület kétszerese.

Összefoglalva:

$$M_c = 2 \int_{(A)} U \, d A + 2 U_1 A_1 + 2 U_2 A_2 + \mathbf{K}$$

A továbbiakban csak egyszerűen összefüggő tartományokat fogunk vizsgálni:

az U feszültségfüggvény alatti térfogat kétszerese

$$M_c = \overbrace{\int_{(A)} 2 U \, d A} = G J \int_{(A)} 2 U_0 \, d A = G J I_c$$

$$I_c = \int_{(A)} 2 U_0 \, d A$$

$$M_c = G J I_c$$

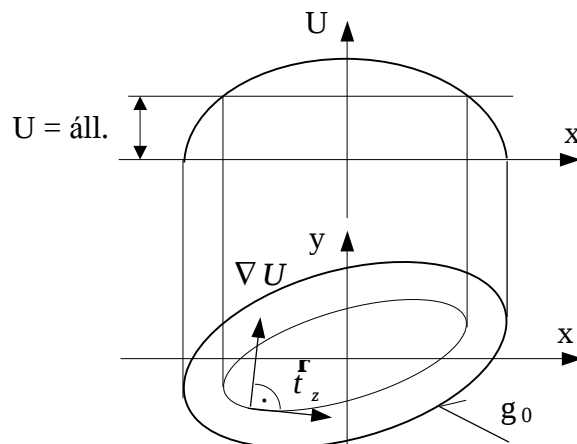
I_c - csavarási másodrendű nyomaték vagy csavarási merevség, csak a keresztmetszet geometriájától függ.

Kör- és körgyűrű alakú keresztmetszet esetén: $I_c = I_p$

Prandtl-féle hártyaanalógia (membráanalógia):

A feszültségfüggvény a keresztmetszet fölé rajzolt $U = U(x,y)$ felülettel szemléltethető.

Egyszeresen összefüggő keresztmetszet esetén:



Az $U = U(x,y)$ felület $U = \text{áll.}$ metszeteinek az (xy) síkra vetített képei a szintvonalak. Mivel a $\text{grad } U = \nabla U$ vektor a szintvonalakra merőleges, következik, hogy a $\mathbf{t}_z = (\nabla U) \times \mathbf{e}_z$ feszültségvektorok a szintvonalakat érintik.

Valamely konkrét feladat feszültségfüggvénye kísérleti úton is előállítható. Egy síklapba olyan furatot készítünk, mint a rúd keresztmetszete. Erre hártyát (membránt) fekszítünk, a g_0 peremgörbén rögzítjük, majd nyomást működtetünk a hártyára. A nyomás hatására a hártya pontjai elmozdulnak., egy görbült felület alakját veszik fel, melynek alakja megegyezik a keresztmetszet feszültségfüggvényét szemléltető $U = U(x,y)$ felülettel. Innen származik az elnevezés. Többszörösen összefüggő keresztmetszet esetén a furatot a lyuk alakjának megfelelő merev síklappal helyettesítjük, amely a furat tengelyének irányában szabadon elmozdulhat.

Membránfeladat:

$$D w = - \frac{p}{N}$$

$$w|_{g_0} = 0$$

Csavarási feladat:

$$D U = - 2 G J$$

$$U|_{g_0} = 0$$

p – nyomás

N – felületi feszültség

Ez a hasonlóság a Prandtl-féle hártyaanalógia.

Közelítő megoldás vékonyfalú rudakra:

Nyitott szelvényű rudak:

Egy $b \times h$ méretű téglalap vizsgálata: $h \gg b$

