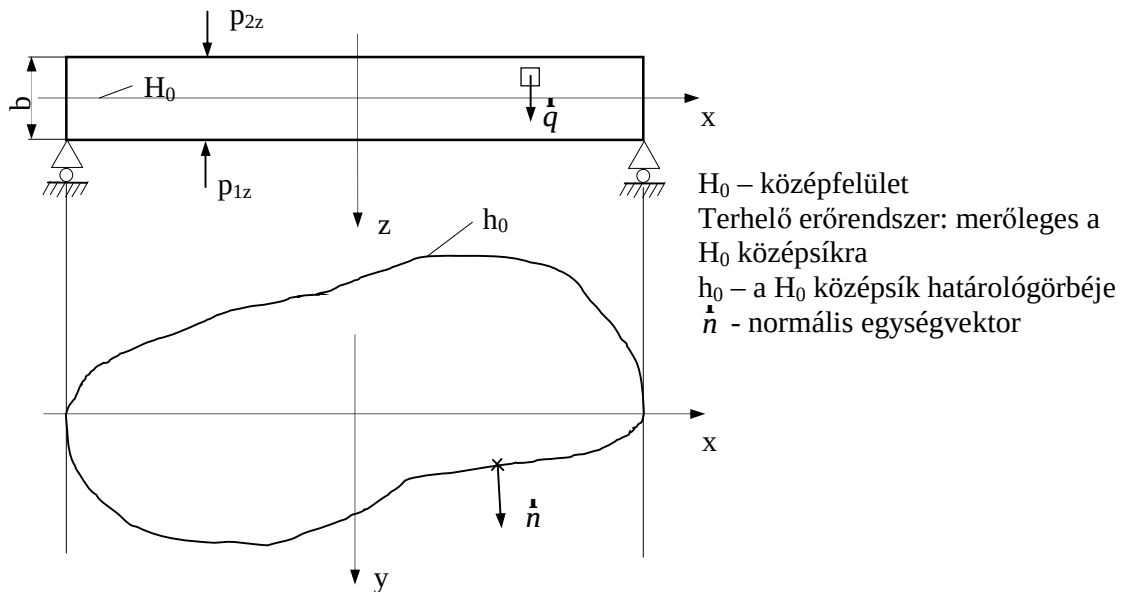


Lemezek

Lemez: Olyan párhuzamos síklapokkal és hengeres palásttal határolt test, amelynek b vastagsági mérete kicsi a többi méretéhez képest, terhelése pedig a középsíkra merőleges erőrendszer.

Érdekesség: Nem műszaki feladat megoldása során vetődött fel a probléma. 1809-ben a Francia Tudományos Akadémia pályázatot írt ki a rezgő lemezen elhelyezkedő, finom homok által leírt vonalak elméleti meghatározására. Ez indította el a lemezek elméletének kutatását.

A lemezelmélet elemei:



Redukálás: az eredetileg háromdimenziós feladatot kétdimenziósra vezetjük vissza.

Ennek alapja: mechanikai megfontolások + feltételezések

Feltételezések: - Kirchhoff hipotézis
 - feszültségi hipotézis

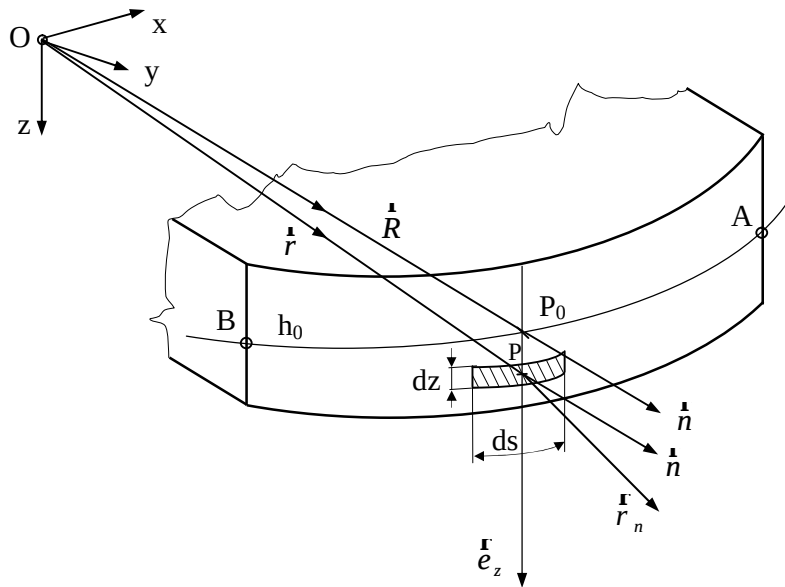
Belső erőrendszer redukálása:

Olyan a feszültségi állapot, hogy a középsíkra redukálás után H_0 – ra merőleges belső erőrendszert kapjunk.

Feszültségi hipotézis: $s_z \ll s_x, s_y$, ezért $s_z = 0$ -t feltételezünk.

Következmény: az alakváltozási kompatibilitási egyenletek nem teljesülnek, csak az egyensúlyi egyenletek.

A lemez középsíkja merőleges feszültségeknek az alakváltozásra gyakorolt hatását nem veszi figyelembe ez a fajta lemezelmélet.



$$dA = dz ds$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + z \mathbf{e}_z$$

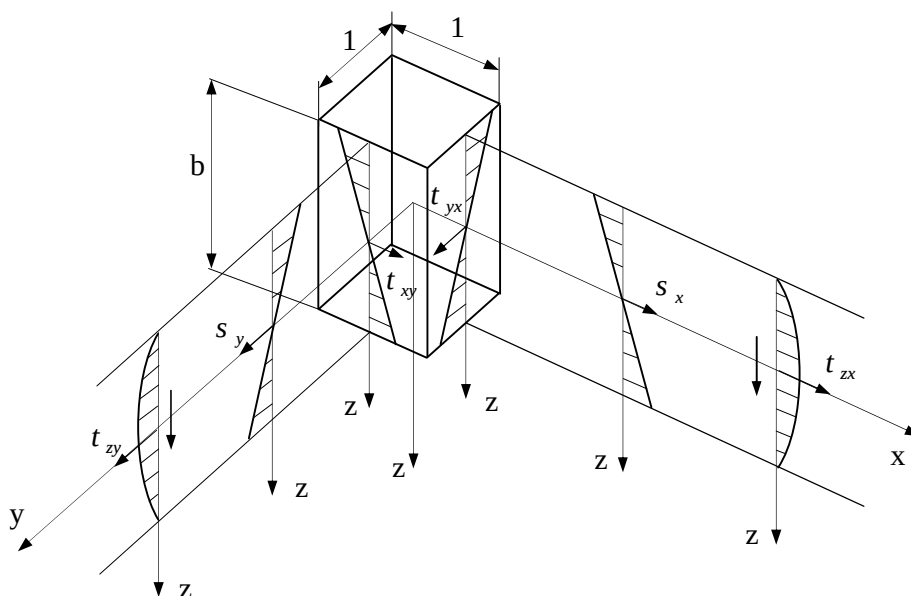
A középfelületre redukálunk.

Hasonló gondolatmenetet alkalmazunk, mint a tárcsáknál:

$s_x ; s_y ; t_{xy} = t_{yx}$: a z koordináta páratlan (lineáris) függvényei

$t_{xz} = t_{zx} ; t_{yz} = t_{zy}$: a z koordináta páros (másodfokú) függvényei

Feszültségeloszlás szemléltetése a vastagság mentén:



Ezeket a feszültségeket redukáljuk a lemez középsíkjaiba.

$$[\underline{T}] = \begin{bmatrix} s_x & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & s_y & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \underline{\mathbf{r}}_n &= \underline{T} \cdot \underline{\mathbf{n}} \\ \underline{\mathbf{n}} &\perp \underline{\mathbf{e}}_z \\ \underline{\mathbf{n}} &= n_x \underline{\mathbf{e}}_x + n_y \underline{\mathbf{e}}_y \end{aligned} \quad \underline{\mathbf{r}}_n = \underline{\mathbf{r}}_x n_x + \underline{\mathbf{r}}_y n_y$$

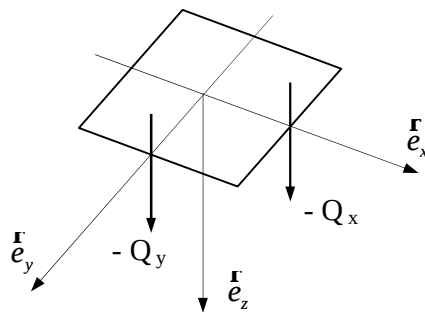
Eredő erő:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}} &= \int_{(A)} \underline{\mathbf{r}}_n dA = \int_A \int_{(b)} \underline{\mathbf{r}}_n dz ds = \int_A \int_{(b)} \underline{T} \cdot \underline{\mathbf{n}} dz ds = \\ &= \int_A \int_{(b)} \left[\begin{pmatrix} s_x \underline{\mathbf{e}}_x + t_{xy} \underline{\mathbf{e}}_y + t_{xz} \underline{\mathbf{e}}_z \\ \mathbf{123} \\ 0 \end{pmatrix} n_x + \begin{pmatrix} t_{yx} \underline{\mathbf{e}}_x + s_y \underline{\mathbf{e}}_y + t_{yz} \underline{\mathbf{e}}_z \\ \mathbf{123} \\ 0 \end{pmatrix} n_y \right] dz ds \\ \underline{\mathbf{F}} &= \int_A \left(\int_{(b)} \underline{T} dz \right) \cdot \underline{\mathbf{n}} ds = \int_A \underline{\underline{N}} \cdot \underline{\mathbf{n}} ds = \int_A \underline{\mathbf{F}}_n ds \\ \underline{\mathbf{F}}_n &= \underline{\underline{N}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \quad ; \quad \underline{\underline{N}} = \int_{(b)} \underline{T} dz \quad ; \quad \int_{(b)} t_{zx} dz = -Q_x \quad ; \quad \int_{(b)} t_{zy} dz = -Q_y \end{aligned}$$

felületi nyírófeszültségek

$$\underline{\underline{N}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}}_x & \underline{\mathbf{F}}_y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -Q_x & -Q_y & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{N}} - \text{felületi feszültségi tenzor}$$

Szemléltetése:



Diadikus alakban:

$$\underline{\underline{N}} = \underline{\mathbf{F}}_x \underline{\mathbf{e}}_x \otimes \underline{\mathbf{e}}_x + \underline{\mathbf{F}}_y \underline{\mathbf{e}}_y \otimes \underline{\mathbf{e}}_y = -Q_x \underline{\mathbf{e}}_z \otimes \underline{\mathbf{e}}_x - Q_y \underline{\mathbf{e}}_z \otimes \underline{\mathbf{e}}_y$$

Eredő nyomaték:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}_0 &= \int_A \int_{(b)}^B \underline{\underline{r}} \times \underline{\underline{r}}_n \, dz \, ds = \int_A \int_{(b)}^B (\underline{\underline{R}} + z \underline{\underline{e}}_z) \times \underline{\underline{r}}_n \, dz \, ds \\ \underline{\underline{r}} &= \underline{\underline{R}} + z \underline{\underline{e}}_z \quad ; \quad \underline{\underline{r}}_n = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{n}} \\ \underline{\underline{M}}_0 &= \int_A \underline{\underline{R}} \times \left(\int_{(b)}^B \underline{\underline{T}} \, dz \right) \cdot \underline{\underline{n}} \, ds + \int_A \underline{\underline{e}}_z \times \left(\int_{(b)}^B z \underline{\underline{T}} \, dz \right) \cdot \underline{\underline{n}} \, ds = \\ &= \int_A \underline{\underline{R}} \times \underline{\underline{F}}_n \, ds + \int_A \underline{\underline{e}}_z \times \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{n}} \, ds \\ \underline{\underline{L}} &= \underline{\underline{e}}_z \times \underline{\underline{M}} \quad - \quad \text{felületi feszültségpár tenzor} \end{aligned}$$

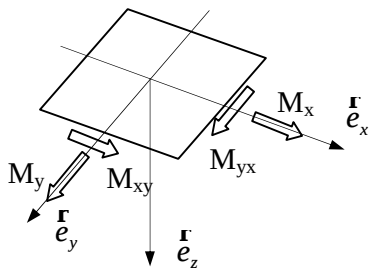
$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} M_x &= \int_{(b)} z s_x \, dz \\ M_y &= \int_{(b)} z s_y \, dz \end{aligned} \right\} \quad \text{felületi hajlító feszültségpárok} \\ M_{xy} &= M_{yx} = \int_{(b)} z t_{xy} \, dz \quad \text{felületi csavaró feszültségpár} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}_x \quad \underline{\underline{M}}_y \\ \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} M_x & M_{xy} & 0 \\ M_{yx} & M_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

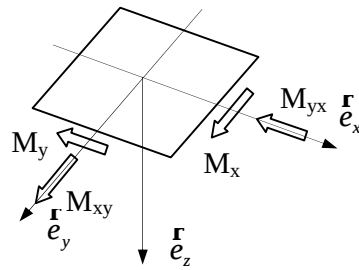
Diadikus alakban:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}} &= (M_x \underline{\underline{e}}_x + M_{yx} \underline{\underline{e}}_y) \otimes \underline{\underline{e}}_x + (M_{xy} \underline{\underline{e}}_x + M_y \underline{\underline{e}}_y) \otimes \underline{\underline{e}}_y \\ \underline{\underline{L}} &= \underline{\underline{e}}_z \times \underline{\underline{M}} \\ \underline{\underline{L}}_n &= \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{n}} \\ \underline{\underline{M}}_0 &= \int_A (\underline{\underline{R}} \times \underline{\underline{F}}_n + \underline{\underline{L}}_n) \, ds \\ \underline{\underline{L}} &= \underline{\underline{e}}_z \times \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{e}}_z \times [(M_x \underline{\underline{e}}_x + M_{yx} \underline{\underline{e}}_y) \otimes \underline{\underline{e}}_x + (M_{xy} \underline{\underline{e}}_x + M_y \underline{\underline{e}}_y) \otimes \underline{\underline{e}}_y] \\ \underline{\underline{L}} &= (M_x \underline{\underline{e}}_y - M_{yx} \underline{\underline{e}}_x) \otimes \underline{\underline{e}}_x + (M_{xy} \underline{\underline{e}}_y - M_y \underline{\underline{e}}_x) \otimes \underline{\underline{e}}_y \\ \underline{\underline{L}} &= \begin{bmatrix} -M_{yx} & -M_y & 0 \\ M_x & M_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a z tengely körül van elforgatva } 90^\circ \text{ - kal pozitív irányban} \end{aligned}$$

M tenzor ábrázolása:



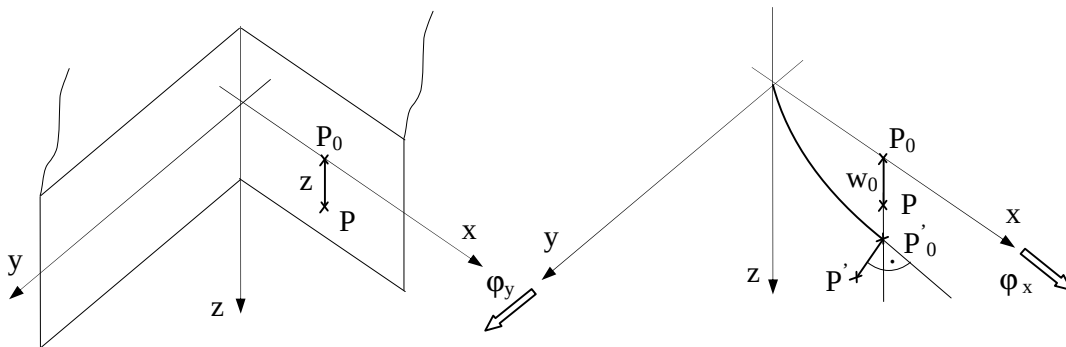
L tenzor ábrázolása:



A $\underline{\underline{F}}_n$ feszültségek erőrendszere egyenértékű az $(\underline{\underline{F}}_n ; \underline{\underline{L}}_n)$ redukált vektorkettőssel.

$$\underline{\underline{F}}_n = \underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{n}} ; \quad \underline{\underline{L}}_n = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{n}}$$

Geometriai vizsgálat:



Csak függőlegesen mozdul el a P_0 pont. $w_0 = w_0(x, y)$

Kirchhoff-hipotézis: (kis elmozdulás esetén)

1. $\overline{P_0 P} = \overline{P'_0 P'} \rightarrow e_z = 0$
2. A középfelület normálisa a deformálódott középfelületnek is normálisa marad az alakváltozás után.
3. A középfelület pontjai csak z irányban mozdulnak el.

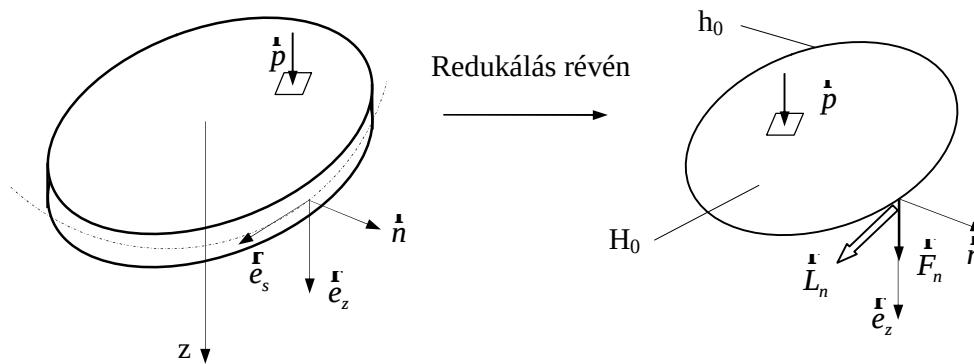
$$\underline{\underline{u}} = u \underline{\underline{e}}_x + v \underline{\underline{e}}_y + w \underline{\underline{e}}_z$$

$$u = -\frac{\partial w_0}{\partial x} z ; \quad v = -\frac{\partial w_0}{\partial y} z ; \quad w = w_0$$

Ellentmondás a hipotézisek között:

e_z és s_z egyszerre nem lehet zérus!

Egyensúlyi egyenletek:



A kiragadott rész egyensúlyban van.

A $\underline{\underline{r}}_n$ feszültségek erőrendszere egyenértékű az $(\underline{\underline{F}}_n ; \underline{\underline{L}}_n)$ redukált vektorkettőssel.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{p}} &= p_z \underline{\underline{e}}_z & - & \quad H_0 - \text{on megoszló erőrendszer} \\ \underline{\underline{F}}_n &= \underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{n}} \\ \underline{\underline{L}}_n &= \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{n}} & - & \quad h_0 - \text{on megoszló erőrendszer} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{q}} = q_z \underline{\underline{e}}_z \rightarrow q_z = \text{állandó}$$

$$\underline{\underline{p}} = p_z \underline{\underline{e}}_z = (p_{1z} + p_{2z} + q_z b) \underline{\underline{e}}_z$$

$$\text{Az egyensúly feltétele:} \quad \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{0}} \quad ; \quad \underline{\underline{M}}_0 = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{0}} = \int_{(H_0)} \underline{\underline{p}} dA + \oint_{(h_0)} \underline{\underline{F}}_n ds \quad (1)$$

$$\underline{\underline{M}}_0 = \underline{\underline{0}} = \int_{(H_0)} \underline{\underline{R}} \times \underline{\underline{p}} dA + \oint_{(h_0)} (\underline{\underline{R}} \times \underline{\underline{F}}_n + \underline{\underline{L}}_n) ds \quad (2)$$

Az (1) egyenlet átalakítása:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}}_n &= \underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{n}} \quad ; \quad \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{e}}_s \times \underline{\underline{e}}_z = -\underline{\underline{e}}_z \times \underline{\underline{e}}_s \\ \underline{\underline{F}}_n &= -\underline{\underline{N}} \cdot (\underline{\underline{e}}_z \times \underline{\underline{e}}_s) = -(\underline{\underline{N}} \times \underline{\underline{e}}_z) \cdot \underline{\underline{e}}_s \\ \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{0}} &= \int_{(H_0)} \underline{\underline{p}} dA + \oint_{(h_0)} -(\underline{\underline{N}} \times \underline{\underline{e}}_z) \cdot \underline{\underline{e}}_s ds \end{aligned}$$

$$\text{Stokes-tétel:} \quad \oint_{(h_0)} \underline{\underline{C}} \otimes \underline{\underline{e}}_s ds = - \int_{(H_0)} \underline{\underline{C}} \otimes (\nabla \times \underline{\underline{e}}_z) dA$$

A Stokes-tétel figyelembevételével az (1) egyenlet:

$$\int_{(H_0)} \underline{\underline{\mathbf{p}}} dA + \int_{(H_0)} (\underline{\underline{\mathbf{N}}} \times \underline{\underline{\mathbf{e}}}_z) \cdot (\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{r}}}) dA = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

$$\int_{(H_0)} \underline{\underline{\mathbf{p}}} + (\underline{\underline{\mathbf{N}}} \times \underline{\underline{\mathbf{e}}}_z) \cdot (\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{r}}}) dA = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \quad ; \quad \underline{\underline{\mathbf{e}}}_z = \text{áll.}$$

Az integrandusz második tagjának átalakítása:

$$(\underline{\underline{\mathbf{N}}} \times \underline{\underline{\mathbf{e}}}_z) \cdot (\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{r}}}) = \underline{\underline{\mathbf{N}}} \cdot \left[\underline{\underline{\mathbf{e}}}_z \times (\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{r}}}) \right] = \underline{\underline{\mathbf{N}}} \cdot \nabla_H$$

$$\nabla_H = \underline{\underline{\mathbf{e}}}_z \times (\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{r}}}) = \nabla - \underline{\underline{\mathbf{e}}}_z \cdot (\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{r}}}) = \frac{\partial}{\partial x} \underline{\underline{\mathbf{r}}}_x + \frac{\partial}{\partial y} \underline{\underline{\mathbf{r}}}_y$$

Ezzel az (1) egyenlet:

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} = \int_{(H_0)} (\underline{\underline{\mathbf{p}}} + \underline{\underline{\mathbf{N}}} \cdot \nabla_H) dA$$

Mivel H_0 tetszőleges, ezért az integrandusz zérus.

$$\underline{\underline{\mathbf{p}}} + \underline{\underline{\mathbf{N}}} \cdot \nabla_H = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \quad (\text{a } \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \nabla + \underline{\underline{\mathbf{q}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \text{ egyensúlyi egyenlet megfelelője})$$

A (2) egyenlet hasonló módon átalakítható. Csak a végeredmény:

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \nabla_H - \underline{\underline{\mathbf{N}}}^* = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

$\underline{\underline{\mathbf{N}}}^*$ az $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$ tenzor vektorinvariánsa.

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}}^* = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_x \times \underline{\underline{\mathbf{e}}}_x + \underline{\underline{\mathbf{F}}}_y \times \underline{\underline{\mathbf{e}}}_y \quad ; \quad \underline{\underline{\mathbf{F}}}_x = -Q_x \underline{\underline{\mathbf{e}}}_z \quad ; \quad \underline{\underline{\mathbf{F}}}_y = -Q_y \underline{\underline{\mathbf{e}}}_z$$

Az (1) egyenlet egyetlen skaláregyenletet, a (2) pedig két skaláregyenletet jelent. Minden az x és y változók függvénye.

Kapcsolat a feszültségi és alakváltozási jellemzők között:

A Hooke-törvény felhasználásával:

$$e_x = \frac{1}{E} (s_x - n s_y) \quad ; \quad e_y = \frac{1}{E} (s_y - n s_x) \quad ; \quad / \cdot n \text{ és } +$$

$$E (e_x + n e_y) = s_x - n s_y + n s_y - n^2 s_x = s_x (1 - n^2)$$

$$s_x = \frac{E}{1 - n^2} (e_x + n e_y)$$

Fordítva:

$$s_y = \frac{E}{1-n^2} (e_y + n e_x)$$

$$t_{xy} = G g_{xy} = \frac{E}{2(1+n)} g_{xy} \frac{1-n^2}{1-n^2}$$

$$t_{xy} = \frac{E}{1-n^2} \frac{1-n}{2} g_{xy}$$

Jelölés: $E_1 = \frac{E}{1-n^2}$

Felhasználva a geometriai feltételezéseket:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z = k_x z$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z = k_y z$$

$$s_x = E_1 \left(- \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z - n \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z \right)$$

$$g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = - 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z = - 2 k_{xy} z$$

A feszültségek felírása a görbületekkel:

$$s_x = E_1 (k_x + n k_y) z$$

$$s_y = E_1 (k_y + n k_x) z$$

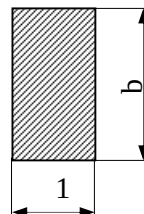
$$t_{xy} = - E_1 (1-n) k_{xy} z$$

A nyomatékok előállítás:

$$M_x = \int_{(b)} s_x z dz = \int_{(b)} E_1 (k_x + n k_y) z^2 dz = E_1 (k_x + n k_y) \frac{z^3}{3} \Bigg|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

$$M_x = E_1 (k_x + n k_y) \frac{b^3}{12}$$

Jelölés: $I_1 = \frac{b^3}{12}$



$I_1 E_1 = D = \text{áll.}$ - hajlítási merevség

Ezzel: $M_x = E_1 I_1 (k_x + n k_y) = D (k_x + n k_y)$

M_y és M_{xy} hasonlóan előállíthatóak.

Az előzőek figyelembevételével a feszültségek:

$$s_x = \frac{M_x}{I_1} z$$

$$s_y = \frac{M_y}{I_1} z$$

$$t_{xy} = \frac{M_{xy}}{I_1} z$$

Analóg a tartók elméletével.

Q_x , Q_y kiszámítása (részletezés nélkül):

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -Q_x$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = -Q_y$$

$$-\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -p_z$$

Másként felírva:

$$Q_x = D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla_H^2 w_0)$$

$$Q_y = D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla_H^2 w_0)$$

A csúsztatófeszültségek kiszámítása így:

$$t_{xz} = \frac{Q_x}{2 I_1} \left(z^2 - \frac{b^2}{4} \right)$$

$$t_{yz} = \frac{Q_y}{2 I_1} \left(z^2 - \frac{b^2}{4} \right)$$