

RUGALMASSÁGTAN

Előadásvázlat

Összeállította: Horváthné Dr. Varga Ágnes

Ajánlott irodalom:

1. Dr. Kozák Imre: Szilárdságtan III.
2. Dr. Páczelt István: A végelem-módszer alapjai
3. Dr. Páczelt István: A végelem-módszer lineáris rúdelemei
4. Mechanikai példatár II.
5. Mechanikai példatár III.

Célkitűzés:

A Rugalmasságtanban szilárd testeket vizsgálunk lineárisan rugalmas anyagi viselkedést figyelembe véve. Egzakt és közelítő megoldásokat állítunk elő egzakt és közelítő matematikai módszerek segítségével. A következő nagyobb témakörökkel foglalkozunk:

- Alapfogalmak, peremértékfeladat, alapegyenletek;
- Prizmatikus rudak szabad csavarása;
- Variációs elvek és ezek alkalmazásai;
- Síkrugalmasságtan.

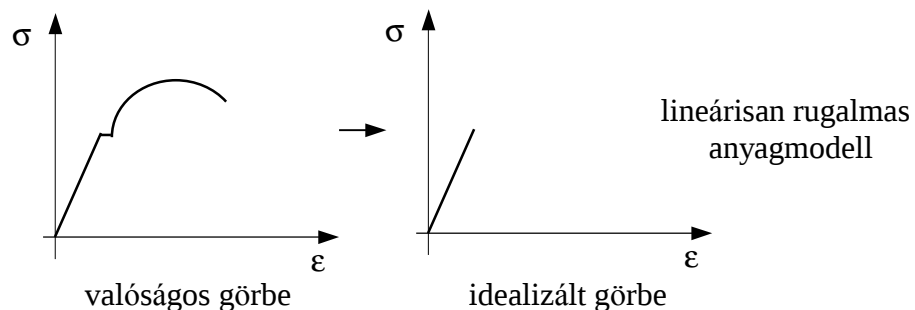
Alapfogalmak

A Statika és Szilárdságtan című tantárgyakban már szerepelt: tömegpont (anyagi pont), merev test fogalma.

Kontinuum:

- A teret folytonosan tölti ki;
- Az anyag állapotát és állapotváltozásait leíró függvények a helykoordináták (idő) folytonos függvényei (véges számú kis felülettől eltekintve).

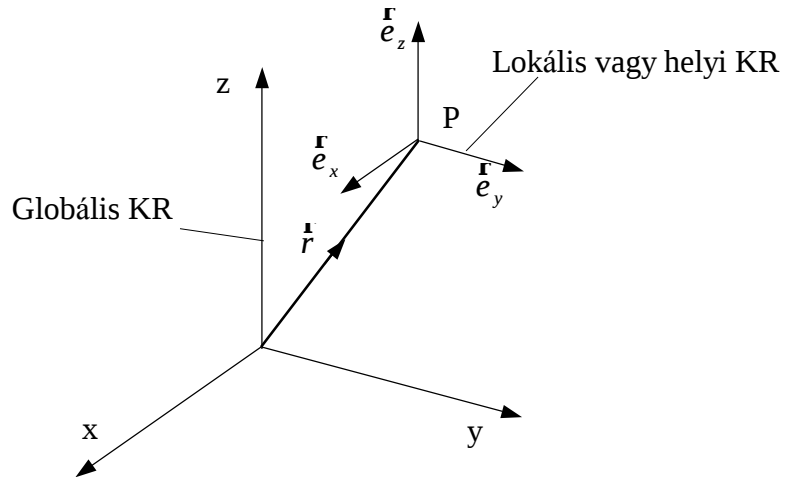
Alkalmazott anyagmodell:



Alkalmazott koordinátarendszerek:

- Derékszögű, descartesi KR (DDKR)
- Hengerkoordinátarendszer (HKR)

DDKR (xyz KR):

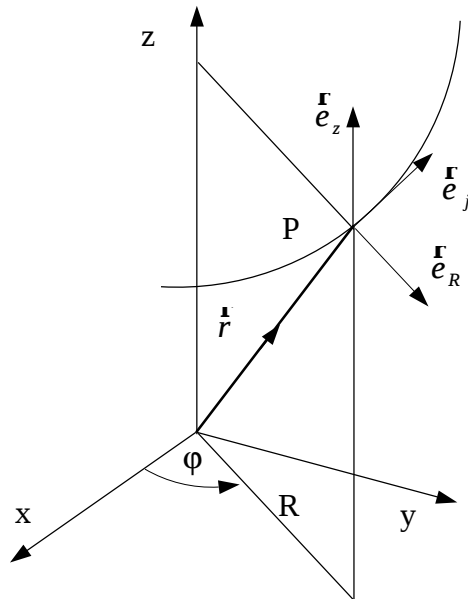


$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$$

$$|\mathbf{e}_x| = 1; \quad |\mathbf{e}_y| = 1; \quad |\mathbf{e}_z| = 1;$$

Egyenesvonalú, derékszögű, egységbázisú, jobbsodrású KR.

HKR (Rφz KR):



$$\mathbf{r} = R \mathbf{e}_R (j) + z \mathbf{e}_z$$

Görbevonalú, derékszögű, egységbázisú, jobbsodrású KR.

Következmény:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_R &= \hat{\mathbf{e}}_R(j) \\ \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{e}}_j} &= \mathbf{r}_j(j)\end{aligned}$$

$$\frac{d \hat{\mathbf{e}}_R}{d j} = \mathbf{r}_j \quad ; \quad \frac{d \hat{\mathbf{e}}_j}{d j} = -\mathbf{r}_R$$

Vektorok közötti szorzások:

Szorzás:	Jele:
skaláris	•
vektoriális	x
diadikus	◦
(általános)	-

Bázisvektorok esetén:

Pl.

$$\left. \begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_x &= 1 \\ \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{e}}_x} \cdot \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{e}}_y} &= 0\end{aligned} \right\} \text{skaláris}$$

$$\left. \begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_x \times \hat{\mathbf{e}}_x &= 0 \\ \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{e}}_x} \times \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{e}}_y} &= \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{e}}_z} \\ \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{e}}_y} \times \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{e}}_z} &= \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{e}}_x}\end{aligned} \right\} \text{vektoriális}$$

$$\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{a}}} \circ \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{b}}} = \underline{\underline{C}} \quad \text{diadikus}$$

Fontos szabály:

$$(\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{a}}} \circ \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{b}}}) \cdot \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{c}}} = \underline{\underline{C}} \cdot \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{c}}} = \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{a}}} (\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{b}}} \cdot \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{c}}}) = \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{a}}} \underset{l}{\underset{123}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}} = \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{a}}}$$

Új szorzás: kétszeres skaláris szorzás

Jele: ••

$$(\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{a}}} \circ \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{b}}}) \cdot \cdot (\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{c}}} \circ \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{d}}}) = (\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{b}}} \cdot \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{c}}}) (\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{a}}} \cdot \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{d}}})$$

A ∇ felírása a két KR-ben:

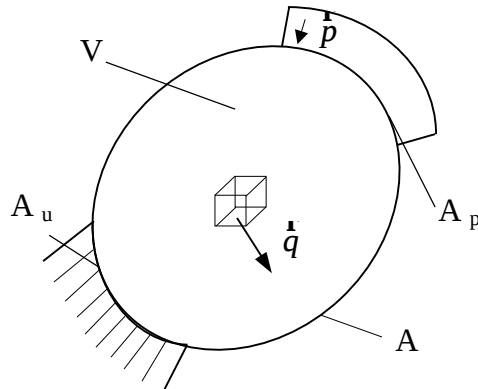
DDKR-ben:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{e}}_x} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{e}}_y} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{e}}_z}$$

HKR-ben:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial R} \mathbf{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial j} \mathbf{e}_j + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Rugalmas, szilárd test vizsgálata:



A test térfogata: V
A test felülete: A
 $A = A_u + A_p$
 $\vec{q}$ - térfogati terhelés
sűrűségvektora
 $\vec{p}$ - felületi terhelés
sűrűségvektora
A hő, kémiai, stb.
hatásokat elhanyagoljuk.

Mi szükséges a feladat megoldásához?

A fogalmak a Szilárdságtanból ismerősek.

Elmozdulásmező:

Elmozdulásvektor:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u \mathbf{e}_x + v \mathbf{e}_y + w \mathbf{e}_z \\ \vec{u} &= u \mathbf{e}_R + v \mathbf{e}_j + w \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Elmozdulásmező:

$$\vec{u}(\vec{r}) = u \mathbf{e}_x + v \mathbf{e}_y + w \mathbf{e}_z, \quad u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z).$$

Adott, pl. P pontbeli érték: $\vec{u}_P$

Elmozdulásmező derivált tenzora:

$$\underline{\underline{U}} = \vec{u} \otimes \nabla$$

A P pontban: $\underline{\underline{U}}_P$

A derivált tenzor felbontása:

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}_{(sz)} + \underline{\underline{U}}_{[asz]} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{\Psi}} = 1/2(\underline{\underline{r}} \otimes \nabla + \nabla \otimes \underline{\underline{r}}) + 1/2(\underline{\underline{r}} \otimes \nabla - \nabla \otimes \underline{\underline{r}})$$

$\underline{\underline{A}}$ alakváltozási tenzor, szimmetrikus

$\underline{\underline{Y}}$ forgatótenzor, ferdeszimmetrikus

Alakváltozási tenzormező:

A linearizált elméletben a magasabb rendű tagokat elhanyagoljuk.

$$\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{r}}) = 1/2(\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}}^T)$$

Megadása DDKR-ben:

Diadikusan: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{a}}_x \otimes \underline{\underline{e}}_x + \underline{\underline{a}}_y \otimes \underline{\underline{e}}_y + \underline{\underline{a}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z$

Mátrixosan:

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} e_x & 1/2g_{xy} & 1/2g_{xz} \\ 1/2g_{yx} & e_y & 1/2g_{yz} \\ 1/2g_{zx} & 1/2g_{zy} & e_z \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T$$

Pl. x irányú alakváltozási vektor: $\underline{\underline{a}}_x = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{e}}_x$

Legyen: $|\underline{\underline{n}}| = 1; \quad |\underline{\underline{m}}| = 1; \quad \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{m}} = 0.$

Az $\underline{\underline{n}}$ egységvektorhoz tartozó

– Alakváltozási vektor: $\underline{\underline{a}}_n = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{n}}$

– Fajlagos nyúlás: $e_n = \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{a}}_n$

– Fajlagos szögtorzulás:

$$\frac{1}{2}g_{mn} = \underline{\underline{m}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{m}} \cdot \underline{\underline{a}}_n = \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{m}} = \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{a}}_m = \frac{1}{2}g_{nm}$$

Feszültségi tenzormező:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{r}})$$

Megadása DDKR-ben:

Diadikusan: $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{r}}_x \otimes \underline{\underline{e}}_x + \underline{\underline{r}}_y \otimes \underline{\underline{e}}_y + \underline{\underline{r}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z$

Mátrixosan:

$$[\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} s_x & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & s_y & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & s_z \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T$$

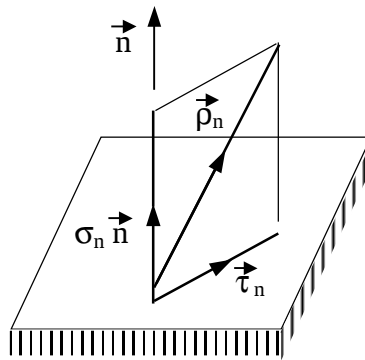
Legyen: $|\underline{\underline{n}}| = 1; \quad |\underline{\underline{m}}| = 1; \quad \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{m}} = 0.$

Az $\underline{\underline{n}}$ egységvektorhoz tartozó

- Feszültségvektor: $\underline{\underline{r}}_n = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{n}}$
- Normálfeszültség: $s_n = \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{r}}_n = \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{n}}$

Az $\underline{\underline{n}}$ normálisú felületen ébredő $\underline{\underline{m}}$ irányú csúsztatófeszültség:

$$t_{mn} = \underline{\underline{m}} \cdot \underline{\underline{r}}_n = \underline{\underline{m}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{m}} = \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{r}}_m = t_{nm}$$



$$\underline{\underline{r}}_n = s_n \underline{\underline{n}} + \underline{\underline{t}}_n$$

Milyen mezők ismeretlenek? Hány ismeretlent jelentenek? Hogyan kell őket meghatározni?

Ismeretlen mezők

Skaláris ismeretlenek száma (db)

$\underline{\underline{u}} = u \underline{\underline{e}}_x + v \underline{\underline{e}}_y + w \underline{\underline{e}}_z$	3
$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{r}}) = \underline{\underline{A}}^T(\underline{\underline{r}})$	6
$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{r}}) = \underline{\underline{T}}^T(\underline{\underline{r}})$	6
15 db ismeretlen függvény	

Ezt a 15 ismeretlent (függvényt) keressük.

Szokás néha az $u = u(\underline{\underline{r}})$ fajlagos alakváltozási energiát is figyelembe venni, ez +1 db skaláris ismeretlent jelent.

Peremértékfeladat:

Az ismeretlen függvények meghatározása a peremfeltételek figyelembevételével az alapegyenletrendszer egyenletei segítségével.

Alapegyenletrendszer egyenletei:

Egyensúlyi egyenlet:

$$\underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{r}} \in V \quad (\text{dinamikai feladatoknál: } \underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \underline{\underline{q}} = r \underline{\underline{u}} \quad \underline{\underline{r}} \in V)$$

Kinematikai (geometriai) egyenlet:

$$\underline{\underline{A}} = 1/2(\underline{\underline{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\underline{u}})$$

Ezek az egyenletek a test anyagától függetlenek.

Anyagegyenlet:

A test anyagától függ, a $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{A}})$ kapcsolatot adja meg. Ha a kapcsolat lineáris, azaz az anyag lineárisan rugalmas, az anyagegyenlet a Hooke-törvény:

$$\underline{\underline{T}} = 2 G \left(\underline{\underline{A}} + \frac{n}{1-2n} A_I \underline{\underline{I}} \right)$$

vagy

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2 G} \left(\underline{\underline{T}} - \frac{n}{1+n} T_I \underline{\underline{I}} \right)$$

Egyenletek

Skaláris egyenletek száma (db)

Egyensúlyi (vektore.)	3
Geometriai (tenzore.)	6
Anyag (tenzore.)	6
15 db skaláris egyenlet	

Ha az energiaegyenletet hozzávesszük, +1 darab skaláris egyenlet.

Az egyenletek és az ismeretlenek száma azonos, tehát megoldható a feladat. A megoldás csak a peremfeltételek figyelembe vételével történhet meg.

Peremfeltételek:

Csak a két leggyakrabban előforduló peremfeltételt említjük meg, azonban más típusú is létezik.

Dinamikai (feszültségi) peremfeltétel:

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{p}} \quad \underline{\underline{r}} \in A_p$$

Kinematikai (geometriai) peremfeltétel:

$$\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{r}})|_{A_u} = \underline{\underline{u}}_0 \quad \underline{\underline{u}}_0 \text{ előírt érték (az előírás zérus is lehet)}$$

Másként:

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}_0 \quad \underline{\underline{r}} \in A_u$$

A megoldás egzakt, ha az egyenletek és a peremfeltételek minden pontban teljesülnek. Ha ez nem áll fenn, akkor a megoldás közelítő.

A megoldás felépítése:

A megoldás felépítése kétféle rendszerben történhet: primál és duál rendszerben.

Primál rendszer:

Alapváltozó: $\dot{\underline{\underline{u}}}$. Az $\dot{\underline{\underline{u}}}$ - ra teljesülnie kell a kinematikai peremfeltételnek.

A megoldás útja:

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\underline{u}} & \rightarrow & \underline{\underline{A}} & \rightarrow & \underline{\underline{T}} \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \text{geom. e.} & & \text{Hooke t.} & & \end{array} \quad \text{ellenőrizni kell az egyensúlyi egyenlet teljesülését}$$