

A virtuális munka elv:

A virtuális sebességmezőből

$$d \dot{\mathbf{u}} = d \dot{\mathbf{v}} d t$$

$$d \underline{\underline{E}}^L = d \underline{\underline{D}} d t = \frac{1}{2} (d \dot{\mathbf{v}} \mathbf{o} \nabla + \nabla \mathbf{o} d \dot{\mathbf{v}}) d t = \frac{1}{2} (d \dot{\mathbf{u}} \mathbf{o} \nabla + \nabla \mathbf{o} d \dot{\mathbf{u}})$$

Az Almansi-Euler-féle alakváltozási tenzormező lineáris része.

Amennyiben: $(A_v) = (A_u)$

A virtuális munka elv a pillanatnyi konfigurációban:

$$\int_{(V)} \underline{\underline{T}} \cdot d \underline{\underline{E}}^L d V = \int_{(V)} \underline{\underline{q}}^a \cdot d \dot{\mathbf{u}} d V + \int_{(A_p)} \underline{\underline{p}} \cdot d \dot{\mathbf{u}} d A$$

Az alakváltozás lineáris elméletében:

$$\int_{(V)} \underline{\underline{s}} \cdot d \underline{\underline{e}} d V = \int_{(V)} \underline{\underline{q}}^a \cdot d \dot{\mathbf{u}} d V + \int_{(A_p)} \underline{\underline{p}} \cdot d \dot{\mathbf{u}} d A$$

$$d \underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (d \dot{\mathbf{u}} \mathbf{o} \nabla + \nabla \mathbf{o} d \dot{\mathbf{u}})$$

A virtuális munka elv általános alakja (az alakváltozás nemlineáris elméletére vonatkozóan) a teljes Lagrange-féle formalizmussal felírható a kezdeti konfigurációban is:

$$\int_{(V^0)} \underline{\underline{T}} \cdot d \underline{\underline{E}}^0 d V^0 = \int_{(V^0)} l_v \underline{\underline{q}}^a d \dot{\mathbf{u}}^0 d V^0 + \int_{(A_p^0)} l_A \underline{\underline{p}} \cdot d \dot{\mathbf{u}}^0 d A^0$$

$$d \dot{\mathbf{u}}^0 = d \dot{\mathbf{u}} = d \dot{\mathbf{v}} d t$$

$$d \underline{\underline{E}}^0 = d \underline{\underline{E}}^{0L} + d \underline{\underline{E}}^{0N}$$

Virtuális Green-Lagrange-féle alakváltozási tenzor.

$$d \underline{\underline{E}}^{0L} = \frac{1}{2} (d \dot{\mathbf{u}}^0 \mathbf{o} \nabla^0 + \nabla^0 \mathbf{o} d \dot{\mathbf{u}}^0)$$

$$d \underline{\underline{E}}^{0N} = \frac{1}{2} [(\nabla^0 \mathbf{o} d \dot{\mathbf{u}}^0) \cdot (\dot{\mathbf{u}}^0 \mathbf{o} \nabla^0) + (\nabla^0 \mathbf{o} \dot{\mathbf{u}}^0) \cdot (d \dot{\mathbf{u}}^0 \mathbf{o} \nabla^0)]$$

A virtuális munka elv másik alakja:

$$\int_{(V)} \underline{\underline{T}} \cdot d \underline{\underline{E}}^L d V = \int_{(V)} \underline{\underline{q}}^a \cdot \dot{\mathbf{u}} d V + \int_{(A_p)} \underline{\underline{p}} \cdot \dot{\mathbf{u}} d A + \int_{(A_u)} \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot d \dot{\mathbf{A}}$$

A kiegészítő virtuális munka elv az alakváltozás lineáris elméletében:

$$\int_{(V)} \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{d s}} dV = \int_{(A_u)} \underline{\underline{r}} \cdot \underline{\underline{d s}} \cdot d \underline{\underline{A}}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{d s}} \cdot \nabla &= 0 \\ \underline{\underline{d s}} &= \underline{\underline{d s}}^T \\ \underline{\underline{d s}} \cdot \underline{\underline{n}} &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} x &\in (V) \\ x &\in (A_p) \end{aligned}$$

A kiegészítő virtuális munka elv állítása:

Ha az elv az adott konfigurációban, adott $\underline{\underline{r}}$ esetén $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{s}}^T$ - at rögzítettnek gondolva bármilyen $\underline{\underline{d s}}$ esetén fennáll, akkor $\underline{\underline{e}}$ kinematikailag lehetséges.

Kiegészítés $\int_{(V)} \underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{d s}} \cdot \nabla dV = 0$ integrállal " identikusan teljesül

$\underline{\underline{c}}$ tetszőleges vektormező, Lagrange-féle szorzó

$$\int_{(V)} \left(\underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{d s}} + \underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{d s}} \cdot \nabla \right) dV = \int_{(A_u)} \underline{\underline{r}} \cdot \underline{\underline{d s}} \cdot d \underline{\underline{A}}$$

Itt már a $\underline{\underline{d s}}$ elemei függetlenek.

Átalakítás:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{d s}} \cdot \nabla &= \left(\underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{d s}} \right) \cdot \nabla - \underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{d s}} \cdot \nabla \\ \underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{d s}} \cdot \nabla &= \left(\underline{\underline{c}} \cdot \nabla \right) \cdot \underline{\underline{d s}} = (\underline{\underline{c}} \cdot \nabla)_{sz} \cdot \underline{\underline{d s}} \\ (\underline{\underline{c}} \cdot \nabla)_{sz} &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{c}} \cdot \nabla + \nabla \cdot \underline{\underline{c}}) \\ \int_{(V)} \left(\underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{d s}} \right) \cdot \nabla dV &= \int_{(A)} \underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{d s}} \cdot d \underline{\underline{A}} \\ A_p - n: \quad \underline{\underline{d s}} \cdot \underline{\underline{n}} &= 0 \end{aligned}$$

Behelyettesítve:

$$\int_{(V)} [\underline{\underline{e}} - (\dot{\underline{\underline{c}}} \circ \nabla)_{sz}] \cdot d\underline{\underline{s}} dV = \int_{(A_u)} (\dot{\underline{\underline{u}}} - \dot{\underline{\underline{c}}}) \cdot d\underline{\underline{s}} \cdot d\dot{A}$$

$\dot{\underline{\underline{c}}}$ és $d\underline{\underline{s}}$ tetszőleges a $(V) - n$

$d\underline{\underline{s}} \cdot \dot{\underline{\underline{n}}}$ tetszőleges az $(A_u) - n$

Ezért:

$$\underline{\underline{e}} = (\dot{\underline{\underline{c}}} \circ \nabla)_{sz} = \frac{1}{2} (\dot{\underline{\underline{c}}} \circ \nabla + \nabla \circ \dot{\underline{\underline{c}}}) \quad x \in (V)$$

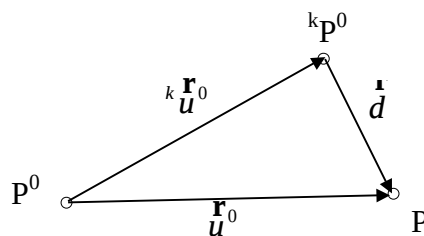
$$\dot{\underline{\underline{u}}} = \dot{\underline{\underline{c}}} \quad x \in (A_u)$$

Vagyis $\underline{\underline{e}}$ a $\dot{\underline{\underline{c}}}$ elmozdulásból származtatható, amely kielégíti a kinematikai peremfeltételt.

$\underline{\underline{e}}$ kinematikailag lehetséges alakváltozásmező, mivel van megoldása egy vektormezőre és ez a vektormező – a merevtestszerű mozgástól eltekintve- eleget tesz az elmozdulási peremfeltételnek.

A virtuális munka elv teljes Lagrange-féle formalizmussal felírt növekményes alakja a kezdeti konfigurációban:

$$\int_{(V^0)} \underline{\underline{T}}^0 \cdot d\underline{\underline{E}}^0 dV^0 = \int_{(V^0)} l_v \dot{\underline{\underline{q}}}^a d\underline{\underline{u}}^0 dV^0 + \int_{(A_p^0)} l_A \dot{\underline{\underline{p}}} \cdot d\underline{\underline{u}}^0 dA^0$$



A k-adik állapotból az elmozdulás $\dot{\underline{\underline{d}}} = D \dot{\underline{\underline{k}}} \underline{\underline{u}}^0$ növekményével jutunk el a következő állapotba.

$$\underline{\underline{E}}^0 = {}^k \underline{\underline{E}}^0 + D {}^k \underline{\underline{E}}^0 = \frac{1}{2} [({}^k \underline{\underline{u}}^0 + \dot{\underline{\underline{d}}}) \circ \nabla^0 + \nabla^0 \circ ({}^k \underline{\underline{u}}^0 + \dot{\underline{\underline{d}}})] + \frac{1}{2} [\nabla^0 \circ ({}^k \underline{\underline{u}}^0 + \dot{\underline{\underline{d}}})] \cdot [({}^k \underline{\underline{u}}^0 + \dot{\underline{\underline{d}}}) \circ \nabla^0] =$$

$$= {}^k \underline{\underline{E}}^0 + D {}^k \underline{\underline{E}}_L^0 + D {}^k \underline{\underline{E}}_N^0$$

$${}^k \underline{\underline{E}}^0 = \frac{1}{2} [{}^k \underline{\underline{u}}^0 \circ \nabla^0 + \nabla^0 \circ {}^k \underline{\underline{u}}^0] + \frac{1}{2} [\nabla^0 \circ {}^k \underline{\underline{u}}^0] \cdot [{}^k \underline{\underline{u}}^0 \circ \nabla^0]$$

$$D {}^k \underline{\underline{E}}_L^0 = \frac{1}{2} (\dot{\underline{\underline{d}}} \circ \nabla^0 + \nabla^0 \circ \dot{\underline{\underline{d}}}) + \frac{1}{2} (\nabla^0 \circ {}^k \underline{\underline{u}}^0) \cdot (\dot{\underline{\underline{d}}} \circ \nabla^0) + \frac{1}{2} (\nabla^0 \circ \dot{\underline{\underline{d}}}) \cdot ({}^k \underline{\underline{u}}^0 \circ \nabla^0)$$

$$D {}^k \underline{\underline{E}}_N^0 = \frac{1}{2} (\nabla^0 \circ \dot{\underline{\underline{d}}}) \cdot (\dot{\underline{\underline{d}}} \circ \nabla^0)$$

A Green-Lagrange-féle alakváltozási tenzor.

A II. Piola-Kirchhoff-féle feszültségi tenzor:

$$\underline{\underline{T}}^0 = {}^k \underline{\underline{T}}^0 + D {}^k \underline{\underline{T}}^0_N \quad D {}^k \underline{\underline{T}}^0 \text{ a növekmény}$$

Virtuális elmozdulás: $d \dot{\underline{\underline{u}}}^0 = d \dot{\underline{\underline{d}}}$, azaz a ${}^k \underline{\underline{u}}^0$ -t nem változtatjuk

Ekkor a virtuális alakváltozás:

$$\begin{aligned} d \underline{\underline{E}}^0 &= d \left(D {}^k \underline{\underline{E}}^0_L + D {}^k \underline{\underline{E}}^0_N \right) \\ d \left(D {}^k \underline{\underline{E}}^0_L \right) &= \frac{1}{2} \left(d \dot{\underline{\underline{d}}} \otimes \nabla^0 + \nabla^0 \otimes d \dot{\underline{\underline{d}}} \right) + \frac{1}{2} \left(\nabla^0 \otimes {}^k \underline{\underline{u}}^0 \right) \cdot \left(d \dot{\underline{\underline{d}}} \otimes \nabla^0 \right) + \frac{1}{2} \left(\nabla^0 \otimes d \dot{\underline{\underline{d}}} \right) \cdot \left({}^k \underline{\underline{u}}^0 \otimes \nabla^0 \right) \\ d \left(D {}^k \underline{\underline{E}}^0_N \right) &= \frac{1}{2} \left(\nabla^0 \otimes d \dot{\underline{\underline{d}}} \right) \cdot \left(\dot{\underline{\underline{d}}} \otimes \nabla^0 \right) + \frac{1}{2} \left(\nabla^0 \otimes \dot{\underline{\underline{d}}} \right) \cdot \left(d \dot{\underline{\underline{d}}} \otimes \nabla^0 \right) \end{aligned}$$

Behelyettesítve, a virtuális munka elv keresett alakja:

$$\begin{aligned} \int_{(V^0)} \left({}^k \underline{\underline{T}}^0 + D {}^k \underline{\underline{T}}^0_N \right) \cdot d \left(D {}^k \underline{\underline{E}}^0_L + D {}^k \underline{\underline{E}}^0_N \right) dV^0 &= \int_{(V^0)} \left({}^k l_v + D {}^k l_v \right) \dot{\underline{\underline{q}}}^a \cdot d \dot{\underline{\underline{d}}} dV^0 + \\ &+ \int_{(A_p^0)} \left({}^k l_A + D {}^k l_A \right) \dot{\underline{\underline{p}}} \cdot d \dot{\underline{\underline{d}}} dA^0 \end{aligned}$$

Linearizálás: $D {}^k \underline{\underline{T}}^0$ és $\dot{\underline{\underline{d}}}$ -re nézve; csak a lineáris részeket hagyjuk meg

Így:

$$\begin{aligned} \int_{(V^0)} D {}^k \underline{\underline{T}}^0 \cdot d \left(D {}^k \underline{\underline{E}}^0_L \right) dV^0 + \int_{(V^0)} {}^k \underline{\underline{T}}^0 \cdot d \left(D {}^k \underline{\underline{E}}^0_N \right) dV^0 &= - \int_{(V^0)} {}^k \underline{\underline{T}}^0 \cdot d \left(D {}^k \underline{\underline{E}}^0_L \right) dV^0 + \\ &+ \int_{(V^0)} \left({}^k l_v \right) \dot{\underline{\underline{q}}}^a \cdot d \dot{\underline{\underline{d}}} dV^0 + \int_{(A_p^0)} \left({}^k l_A \right) \dot{\underline{\underline{p}}} \cdot d \dot{\underline{\underline{d}}} dA^0 \end{aligned}$$

A többi tag $\dot{\underline{\underline{d}}}$ -nek nemlineáris függvénye.

Erre alapul a numerikus alkalmazás.

Ez az alak nem egyensúlyi állapotra vonatkozik, ezért a megoldás (az egyensúlyi állapot) iterációval kereshető meg. Az iterációs eljárásához jellemző hibakorlátot kell beépíteni, és a konkrét alkalmazáshoz megfelelő anyagegyenletet.

A (k+1) – edik iterációs állapot: az iterációs eljárás k- adik lépése

A k- adik iterációs lépés után:

$$\begin{aligned}
{}^{k+1}\underline{\underline{\mathbf{u}}}^0 &= {}^k\underline{\underline{\mathbf{u}}}^0 + \underline{\underline{\mathbf{d}}} \\
{}^{k+1}\underline{\underline{\mathbf{E}}}^0 &= {}^k\underline{\underline{\mathbf{E}}}^0 + D \quad {}^k\underline{\underline{\mathbf{E}}}^0 \\
{}^{k+1}\underline{\underline{\mathbf{T}}}^0 &= {}^k\underline{\underline{\mathbf{T}}}^0 + D \quad {}^k\underline{\underline{\mathbf{T}}}^0 \\
{}^{k+1}l_v &= {}^kl_v + D \quad {}^kl_v \\
{}^{k+1}l_A &= {}^kl_A + D \quad {}^kl_A
\end{aligned}$$

A virtuális munka elv teljes Lagrange-féle formalizmussal a kezdeti konfigurációban felírt és linearizált növekményes alakja a hozzákapcsolt iterációs eljárással együtt jól felhasználható a végelelem-módszer geometriailag és fizikailag nemlineáris feladatainak megoldására.

Anyagegyenletek

Konstitutív egyenletek

A kontinuummechanika változói és egyenletei

Megadott $\underline{\underline{\mathbf{q}}}$ és r esetén:

ρ	tömegsűrűség	1 skalár koordináta
$\underline{\underline{\mathbf{v}}}$	sebességmező	3 skalár koordináta
$\underline{\underline{\mathbf{T}}}$	feszültségi tenzormező	9 skalár koordináta
e_B	belső energia	1 skalár koordináta
$\underline{\underline{\mathbf{h}}}$	hőáramvektor	3 skalár koordináta

Az ismeretlen változók száma hőhatások nélkül: 14

Szilárd testeknél a Θ (hőmérséklet) és az s (entrópia) figyelembevételével az ismeretlenek száma: 19

Folyadékoknál: 20

Egyenletek:

Kontinuitási egyenlet: $\frac{\partial r}{\partial t} + (r \underline{\underline{\mathbf{v}}}) \cdot \nabla = 0$ 1 skalár egyenlet

Mozgásegyenlet: $\underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \nabla + \underline{\underline{\mathbf{q}}} = \underline{\underline{\mathbf{v}}} \cdot r$ 3 skalár egyenlet

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T \quad 3 \text{ skalár egyenlet}$$

Energiaegyenlet: $(e_B) \cdot r = \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} + r r - \underline{\underline{\mathbf{h}}} \cdot \nabla$ 1 skalár egyenlet

Egyenletek száma: 8

Az entrópiaegyenletet nem soroljuk ide, mert egyenlőtlenség, az állapotváltozás irányát jelöli.

Hiányzó egyenletek:

Szilárd testeknél hőhatások nélkül: 6 e.
Szilárd testeknél hőhatásokkal 11 e.
Folyadékoknál: 12 e.

A hiányzó egyenletek az anyagegyenletek vagy konstitutív egyenletek.

Szokás még: hőhatás nélkül: anyagegyenlet
hőhatással: konstitutív egyenlet

Kvázistatikus esetben: $\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{0}}$, ekkor $\dot{\mathbf{v}}$ helyett $\dot{\mathbf{u}}$ kell.

Anyagegyenletek

Értelmezés: a kontinuum anyagtól függő (specifikus) makroszkópikus viselkedését leíró, fenomenológikus változókat kapcsolják össze

Fenomenológia: a közvetlenül észlelhető sajátosságokra, ezek összefüggéseire irányuló, leíró jellegű tudomány. Az ebbe a körbe tartozó változókat nevezzük fenomenológikusnak, pl. igénybevételek, hőmérséklet, belső energia, stb.

Anyagmodell: valós anyagot véges számú, jól meghatározott anyagi tulajdonsággal ruházunk fel.

Anyagmodellek anyagegyenleteinek képzése: 3 módon

- Deduktív módon, elsősorban elméleti megfontolások alapján
- Induktív módon, elsősorban kísérletekkel
- Reológiai modellekkel

Deduktív módszer:

Az anyagegyenletek elméletének axiómaival képez különböző, általános jellegű anyagegyenleteket, melyekből következnek az ismert anyagmodellek, részesetek.

Induktív módszer:

Egyszerű megfigyelésekből (pl. húzó- és csavarókísérlet) indul ki és ebből következtet bonyolultabb anyagmodellekre.

Reológiai modellek:

Kombinálják a deduktív és induktív módszer elemeit. Jól megalapozott alapmodelleket vezetnek be, ezek kombinációival közelítik a valóságos anyagokat.

Az anyagegyenletek elméletét nem részletezve néhány jellegzetes anyagmodellt nézünk meg röviden.

Az anyagegyenletek 6 db skaláregyenletet jelentenek. A belső ER és az alakváltozások, illetve ezek változásainak kapcsolatát adják meg.

Szilárd test: Ha terheljük, ellenállást fejt ki a torzulási alakváltozással szemben.

Folyadék: Nem fejt ki ellenállást olyan külső hatásokkal szemben, melyek torzulási alakváltozásra készítetik.

Ezek a definíciók folyadék esetén is megengedik az ellenállást a térfogatváltozást jelentő alakváltozással szemben. (pl. a folyadék összenyomható (kompresszibilis)) Ezért a gázok is a folyadékokhoz sorolhatók ebben az értelmezésben.

I. Folyadékok:

1. Ideális folyadék:

A folyadék súrlódásmentes. A nyomás minden irányban egyenletesen terjed tovább.

$$\underline{\underline{T}}^V \equiv \underline{\underline{0}} \quad \text{viszkózus (disszipációs) feszültségi tenzor}$$

$$\rho = \text{áll.}$$

$$\underline{\underline{T}} = -p \underline{\underline{I}} \quad p = \text{termodinamikai nyomás}$$

$$p > 0; \quad p = p(\rho^{-1})$$

Ez az anyagtörvény izotróp.

2. Rugalmas folyadék:

$$\underline{\underline{T}}^V \equiv \underline{\underline{0}} \quad \text{de } \rho \neq \text{áll.}$$

$$\underline{\underline{T}} = -p \underline{\underline{I}} \quad p = p(\rho^{-1})$$

3. Viszkózus, izoterm folyadék:

Súrlódásos folyadék. A hőhatást nem veszi figyelembe.

$$\underline{\underline{T}}^V = a_0^V \underline{\underline{I}} + a_1^V \underline{\underline{D}} + a_2^V \underline{\underline{D}}^2 \quad a_i^V = a_i^V(r, D_I, D_{II}, D_{III}) \quad i = 0, 1, 2$$

$$\underline{\underline{T}} = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{T}}^V$$

A Reiner-Rivlin-féle folyadékmodellnél:

$$a_0^V = 0 \quad \text{és} \quad D_I = 0, \quad \text{azaz} \quad a_j^V = a_j^V(D_{II}, D_{III}) \quad j = 1, 2$$

További egyszerűsítésekkel a Newton-féle izotróp, lineáris folyadékmodell anyagegyenletei adódnak.

4. Hőviszkózus folyadék:

Súrlódásos folyadék.

$$\underline{\underline{T}} = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{T}}^V \quad \text{a feszültségi tenzor.}$$

A Helmholtz-féle fajlagos szabadenergia értelmezése:

$$f = e_B - Q s$$

A hőviszkózus, nemlineáris folyadékmodell anyagegyenletei:

$$\begin{aligned} p &= p(Q; r^{-1}) \\ \underline{\underline{T}}^V &= \underline{\underline{T}}^V(Q, \nabla Q, \underline{\underline{D}}, r^{-1}) \\ \underline{\underline{T}}^V &= \underline{\underline{0}}, \quad \text{ha } \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{0}} \\ f &= f(Q; r^{-1}) \\ s &= -\frac{\partial f}{\partial Q} \end{aligned}$$

és a hővezetési törvény.

Skaláris anyagegyenletek száma: 12.

További szokásos csoportosítás:

a. Stokes-féle folyadékmodell:

- $\underline{\underline{T}}^V$ függvény $\underline{\underline{D}}$ - ben nemlineáris és az anyagegyenleti független változók θ - tól függenek
- $\underline{\underline{T}}^V$ függvény $\underline{\underline{D}}$ - ben lineáris és az anyagegyenleti független változók θ - tól függenek
- $\underline{\underline{T}}^V$ függvény $\underline{\underline{D}}$ - ben nemlineáris és az anyagegyenleti független változók θ - tól nem függenek

b. Newton-féle folyadékmodell:

$$\underline{\underline{T}}^V \text{ függvény } \underline{\underline{D}} \text{ - ben lineáris és az anyagegyenleti független változók } \theta \text{ - tól nem függenek}$$

II. Szilárd testek:

1. Merev test:

Nincs anyagtörvény. (Nem értelmezhető belső ER.) A belső ER határozatlan.

2. Rugalmas test:

A hőhatásokat nem vesszük figyelembe.

$$\text{A } \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{E}}) \text{ vagy } \underline{\underline{T}}^0 = \underline{\underline{T}}^0(\underline{\underline{E}}^0) \text{ kapcsolat egyértékű.}$$

Alesetek: $\left. \begin{array}{l} \text{homogén} \\ \text{inhomogén} \end{array} \right\}$ $\left. \begin{array}{l} \text{izotróp} \\ \text{anizotróp} \end{array} \right\}$ $\left. \begin{array}{l} \text{lineáris} \\ \text{nemlineáris} \end{array} \right\}$

A nemlineárisan rugalmas test anyagegyenlete:

$$\underline{\underline{T}}^0 = r^0 \frac{\partial e_B}{\partial \underline{\underline{E}}^0} \quad \text{vagy} \quad \underline{\underline{T}} = r \frac{\partial e_B}{\partial \underline{\underline{E}}}$$

Legáltalánosabb esetben:

$$\underline{\underline{T}}^0 = a_0^0 \underline{\underline{I}} + a_1^0 \underline{\underline{E}}^0 + a_2^0 (\underline{\underline{E}}^0)^2$$

vagy

$$\underline{\underline{T}} = a_0 \underline{\underline{I}} + a_1 \underline{\underline{E}} + a_2 \underline{\underline{E}}^2$$

a_0^0, a_1^0, a_2^0 , illetve a_0, a_1, a_2 a skalárinvariánsok függvényei

Izotróp eset: $e_B = e_B(E_I^0, E_{II}^0, E_{III}^0)$

Így:
$$\underline{\underline{T}}^0 = r^0 \frac{\partial e_B}{\partial \underline{\underline{E}}^0} = r^0 \left(\frac{\partial e_B}{\partial E_I^0} \frac{\partial E_I^0}{\partial \underline{\underline{E}}^0} + \frac{\partial e_B}{\partial E_{II}^0} \frac{\partial E_{II}^0}{\partial \underline{\underline{E}}^0} + \frac{\partial e_B}{\partial E_{III}^0} \frac{\partial E_{III}^0}{\partial \underline{\underline{E}}^0} \right)$$

Fizikailag lineárisan rugalmas izotróp test:

Nem szerepelhet $\underline{\underline{E}}^0$ vagy $\underline{\underline{E}}$ második hatványa.

Anyagegyenlet:

$$\underline{\underline{T}}^0 = 2 m^0 \underline{\underline{E}}^0 + l^0 E_I^0 \underline{\underline{I}}$$

vagy

$$\underline{\underline{T}} = 2 m \underline{\underline{E}} + l E_I \underline{\underline{I}}$$

A λ és μ a Lamé-féle állandók.

Fizikailag és geometriailag lineárisan rugalmas test esetén $\underline{\underline{s}}$ és $\underline{\underline{e}}$ szükséges.

Az izotróp, lineárisan rugalmas test anyagtörvénye a Hooke-törvény.

$$\underline{\underline{s}} = 2 m \underline{\underline{e}} + l e_I \underline{\underline{I}}$$

Anyagjellemzők: $\lambda, \mu = G$

Ismert alak:

$$\underline{s} = 2 G \left(\underline{e} + \frac{n}{1-2n} e_I \underline{I} \right)$$

$$s_I = 2 G \left(e_I + \frac{3n}{1-2n} e_I \right) = 2 G \frac{1+n}{1-2n} e_I = 3 K e_I$$

$$l = 2 m \frac{n}{1-2n}$$

$$E = 2 G (1+n) \quad \text{Young modulusz (rugalmassági modulusz)}$$

$$3 K = 2 G \frac{1+n}{1-2n} \quad \text{Bulk modulusz (térfogati rugalmassági modulusz)}$$

Az anyagállandók közötti kapcsolat:

	λ	$G = \mu$	E	ν	K
λ, μ	λ	μ	$\frac{3l + 2m}{l + m} m$	$\frac{l}{2(l + m)}$	$\frac{3l + 2m}{3}$
E, ν	$\frac{E}{(1-2n)(1+n)}$	$\frac{E}{2(1+n)}$	E	ν	$\frac{E}{3(1-2n)}$
G, ν	$\frac{2n G}{1-2n}$	G	$2 G (1+n)$	ν	$\frac{2 G (1+n)}{3(1-2n)}$
G, K	$\frac{3K - 2G}{3}$	G	$G \frac{9K}{3K + G}$	$\frac{3K - 2G}{2(3K + G)}$	K

$$n = n(l, m) = ?$$

$$(1-2n) l = 2 m n$$

Pl. $l = 2n (l + m)$

$$n = \frac{l}{2(l + m)}$$

3. Hőrugalmas test:

A hőhatásokat is figyelembe veszi. A fajlagos disszipációs teljesítmény zérus $F_D = 0$

Anyagegyenletek: szabadenergia: $f = e_B - Q s$

$$\underline{T}^0 = r^0 \frac{\partial f}{\partial \underline{E}^0} = r^0 \left(\frac{\partial e_B}{\partial \underline{E}^0} - Q \frac{\partial s}{\partial \underline{E}^0} \right) \quad s = - \frac{\partial f}{\partial Q} \quad 7 \text{ db skaláris egyenlet}$$

vagy

$$\underline{T} = r \frac{\partial f}{\partial \underline{E}} = r \left(\frac{\partial e_B}{\partial \underline{E}} - Q \frac{\partial s}{\partial \underline{E}} \right) \quad s = - \frac{\partial f}{\partial Q}$$

A hőhatásokhoz szükséges 11 db egyenletből a maradék 4-t az $f = f(Q, \underline{E}^0)$ függvény és a $\dot{h}$ hőáramsűrűség vektor adja meg.

4. Rugalmas-képlékeny test:

A test a növekvő külső ER hatására a természetes állapotából kiindulva a kezdeti rugalmas alakváltozás után egy jól meghatározott állapot elérésekor és ezt követően rugalmas-képlékeny alakváltozást mutat. Tehermentesítés után nem nyeri vissza eredeti természetes állapotát, maradó alakváltozást szenved. A feszültségi és alakváltozási tenzorok közötti kapcsolat nem egyértékű, függ az alakváltozás történetétől.

Rugalmas-képlékeny alakváltozás esetén a test képlékeny állapotáról beszélünk.

